

# BULLETIN DE LA S. M. F.

SÉBASTIEN FERENCZI

**Les transformations de Chacon : combinatoire,  
structure géométrique, lien avec les systèmes  
de complexité  $2n + 1$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 123, n° 2 (1995), p. 271-292

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1995\\_\\_123\\_2\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_2_271_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LES TRANSFORMATIONS DE CHACON :  
COMBINATOIRE, STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE,  
LIEN AVEC LES SYSTÈMES DE COMPLEXITÉ  $2n + 1$**

PAR

SÉBASTIEN FERENCZI

---

RÉSUMÉ. — Nous montrons que la transformation de Chacon est un système de complexité  $(2n - 1)$ ; nous décrivons le graphe des mots associé, et en déduisons une forme primitive de la substitution, et une représentation géométrique de la transformation comme exduction d'une rotation triadique; nous calculons enfin la complexité de systèmes plus généraux, substitutifs ou non, qui sont les systèmes faiblement mélangeants les plus simples connus.

ABSTRACT. — We show that Chacon's map is a system of complexity  $(2n - 1)$ ; we describe the associated graph of words, and use it to give a primitive form of the substitution, and a geometric representation of the transformation, as an exduction of a triadic rotation; then we compute the complexity of some more general systems, substitutive or not, which are the simplest known weakly mixing systems.

**1. La transformation de Chacon classique**

La transformation de Chacon classique se définit (*cf.* [2]) de la manière suivante : on construit des blocs de zéros et de uns par la règle

$$B_0 = 0, \quad B_{n+1} = B_n B_n 1 B_n,$$

où la multiplication dénote la juxtaposition des blocs. La transformation  $T$  sera le décalage  $(Tx)_n = x_{n+1}$  sur l'ensemble  $\mathcal{X}$  des suites bi-infinies  $(x_n)$  de zéros et de uns vérifiant : pour tout  $s < t$ , il existe  $n$  tel que le mot  $x_s \dots x_t$  soit un sous-mot de  $B_n$ . On appelle *langage associé à la*

---

(\*) Texte reçu le 17 novembre 1993, révisé le 14 mars 1994.  
Sébastien FERENCZI, Laboratoire de Mathématiques Discrètes, CNRS-UPR 9016,  
Case 930, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille CEDEX 9, France.  
Email : ferenczi@lmd.univ-mrs.fr.

Classification AMS : 28D.

transformation  $T$  l'ensemble de tous les mots  $x_s \cdots x_t$  qui sont contenus dans au moins un  $B_n$ . La suite infinie  $u$  commençant par  $B_n$  pour tout  $n \geq 0$  est dite *suite associée à*, ou *suite définissant* la transformation de Chacon  $T$ .

La transformation de Chacon est connue pour ses nombreuses propriétés ergodiques, voir par exemple [4]; nous allons voir que sa combinatoire est intéressante également, car, à une petite modification près, qui est de toute manière un isomorphisme topologique, elle rentre dans la classe déjà connue des *systèmes de complexité*  $2n + 1$  (cf. [1]); de plus, nous pouvons faire une étude complète de sa combinatoire, ce qui est intéressant pour l'étude générale de cette classe, et en dégager une structure géométrique : la transformation de Chacon apparaît comme une *tour* au-dessus d'une rotation triadique — l'existence de telles structures dans la classe des systèmes de complexité  $2n + 1$  n'était pas connue jusqu'ici. Nous généraliserons enfin ces propriétés, notamment l'algorithme de calcul de la complexité, à des transformations voisines, y compris à des cas où le découpage est variable et donc le système n'est pas substitutif; les complexités de ces systèmes oscillent en général entre  $(1 + \epsilon)n$  et  $2n$  (des complexités de systèmes non substitutifs n'étaient connues jusqu'ici que pour des échanges d'intervalles, et par des méthodes différentes car géométriques); certains d'entre eux sont de bons candidats pour réaliser la complexité minimale d'une transformation faiblement mélangeante.

## 2. Le langage associé

Soit  $h_n$  la longueur du bloc  $B_n$ , donnée par la formule de récurrence

$$h_{n+1} = 3h_n + 1$$

à partir de  $h_0 = 1$ , ce qui implique  $h_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$ . Soit  $\ell$  un entier compris entre  $h_n$  et  $h_{n+1}$ ; un mot de longueur  $\ell$  du langage est repéré par son abscisse  $k$  de départ dans le bloc  $B_n$ , avec  $0 \leq k \leq h_n - 1$ , ou bien peut commencer par une lettre qui n'est pas dans  $B_n$ ; cette lettre est alors nécessairement un 1, et — dans la tradition ergodique — on l'appelle un *spacer*, ou, en français, *séparateur*; dans ce dernier cas, nous noterons  $k = -1$ . Un mot  $W$  de longueur  $\ell$  est entièrement connu si on connaît  $k$ , le nombre et la configuration des séparateurs situés entre les blocs  $B_n$  qui apparaissent dans  $W$ ; suivant la valeur de  $\ell$ , le mot  $W$  coupe de un à quatre blocs  $B_n$ , et on vérifie qu'entre eux toutes les configurations de séparateurs peuvent exister, compte tenu des contraintes suivantes : entre deux blocs consécutifs, il y a zéro ou un séparateur; entre quatre blocs consécutifs, il y a au moins un séparateur et il ne peut y en avoir trois.

Nous pouvons dresser la liste exhaustive de tous les mots que l'on peut voir pour des valeurs données de  $k$  et  $\ell$  (ces mots n' existent pas pour toutes les valeurs de  $k$  et de  $\ell$ , et n'ont pas de raison d'être tous différents).

On a les noms suivants, si l'on note par des traits pleins le  $n$ -bloc et par des 1 les séparateurs (le premier indice indiqué entre parenthèses est l'abscisse de départ du nom dans son bloc  $B_n$ , le deuxième est son abscisse d'arrivée dans un bloc  $B_n$  ultérieur ; l'abscisse de départ est bien sûr omise quand le nom commence par un séparateur) :

- $A(k, \ell) : -(k) - - (k + \ell - 1) - ,$
- $B(k, \ell) : -(k) - 1 - (k + \ell - 2) - ,$
- $A'(k, \ell) : -(k) - \text{---} - (k + \ell - 1) - ,$
- $B'(k, \ell) : -(k) - 1 \text{---} - (k + \ell - 2) - ,$
- $C'(k, \ell) : -(k) - \text{---} 1 - (k + \ell - 2) - ,$
- $D'(k, \ell) : -(k) - 1 \text{---} 1 - (k + \ell - 3) - ,$
- $A''(k, \ell) : -(k) - 1 \text{---} \text{---} - (k + \ell - 2) - ,$
- $B''(k, \ell) : -(k) - \text{---} 1 \text{---} - (k + \ell - 2) - ,$
- $C''(k, \ell) : -(k) - \text{---} \text{---} 1 - (k + \ell - 2) - ,$
- $D''(k, \ell) : -(k) - 1 \text{---} \text{---} 1 - (k + \ell - 3) - ,$
- $E''(k, \ell) : -(k) - \text{---} 1 \text{---} 1 - (k + \ell - 3) - ,$
- $F''(k, \ell) : -(k) - 1 \text{---} 1 \text{---} - (k + \ell - 3) - ,$
- $Z(-1, \ell) : 1 \text{---} (\ell - 2) ,$
- $A(-1, \ell) : 1 \text{---} - (\ell - 2) - ,$
- $B(-1, \ell) : 1 \text{---} 1 - (\ell - 3) - ,$
- $A'(-1, \ell) : 1 \text{---} \text{---} - (\ell - 3) - ,$
- $B'(-1, \ell) : 1 \text{---} 1 \text{---} - (\ell - 3) - ,$
- $C'(-1, \ell) : 1 \text{---} \text{---} 1 - (\ell - 3) - ,$
- $C''(-1, \ell) : 1 \text{---} \text{---} \text{---} 1 - (\ell - 3) - .$

### 3. Calcul de la complexité

Toutes les transformations que l'on considèrera sont données avec une suite infinie  $u$  et un langage associés; ce ne sont pas des invariants, topologiques ou autres, du système considéré. Avec les restrictions ci-dessus, nous appellerons *fonction de complexité* , ou simplement *complexité* d'un système dynamique symbolique  $(X, T)$ , ou d'une transformation  $T$ , donnés avec un langage, la fonction qui à  $n$  associe le nombre de mots de longueur  $n$  du langage associé.

Si nous regardons maintenant quels mots peuvent exister suivant les valeurs de  $k$  et  $\ell$ , nous obtenons le tableau suivant, que nous appellerons *le tableau d'ordre  $n$* , pour  $h_n + 1 \leq \ell \leq h_{n+1} + 1$  et  $-1 \leq k \leq h_n - 1$  :

$\ell =$	$k = -1$	$k = 0$					$k = h_n - 1$
$h_n + 1$	Z	AB					AB
$h_n + 2$	AB	AB					BA'C'
$h_n + 3$	AB	AB					A'B'C'D'
	AB	AB	$k + \ell - 1 = 2h_n - 1$	$k + \ell - 1 = 2h_n$	$k + \ell - 1 = 2h_n + 1$		A' - D'
			AB	BA'C'	A' - D'		
$2h_n + 1$	AB	BA'C'					A' - D'
$2h_n + 2$	BA'C'	A' - D'					B'C'D'C''
$2h_n + 3$	A' - C'	A' - D'					D'A'' - E''
	A' - C'	A' - D'	$k + \ell - 1 = 3h_n - 1$	$k + \ell - 1 = 3h_n$	$k + \ell - 1 = 3h_n + 1$	$k + \ell - 1 = 3h_n + 2$	A'' - F''
			A' - D'	B'C'D'C''	D'A'' - E''	A'' - F''	
$3h_n + 1$	A' - C'	B'C'D'C''					A'' - F''
$3h_n + 2$	B'C'C''	D'A'' - E''					A'' - F''

Sur la ligne  $\ell$ , nous montrons tous les mots de longueur  $\ell$ , avec dans la case  $k$  ceux qui commencent à l'abscisse  $k$  dans le bloc  $B_n$ .

On constate que sur la ligne  $\ell$  il y a  $(2\ell - 1)$  mots possibles; nous allons montrer qu'il y a exactement  $(2\ell - 1)$  mots différents. En effet, il y a trois mots de longueur 2, 00, 01 et 10.

On fait l'hypothèse de récurrence suivante : *sur la première ligne du tableau d'ordre  $n$  il y a  $2h_n + 1$  mots différents* (c'est-à-dire que tous les mots écrits sur la première ligne du tableau sont effectivement différents). Pour passer d'une ligne à la ligne suivante, les mots situés dans la case  $k$  se prolongent en mots situés dans la case  $k$  juste en-dessous; ces mots de la ligne  $\ell + 1$  sont différents s'ils ont des préfixes différents de longueur  $\ell$ . Le seul problème possible correspond aux cases où un mot de longueur  $\ell$  a deux successeurs de longueur  $\ell + 1$ ; on vérifie que ce cas se produit dans deux cases par ligne et qu'on est dans la situation suivante : l'un des successeurs se termine par un séparateur, donc un 1, et l'autre par la première lettre de  $B_n$  qui est toujours un 0, donc ces deux successeurs sont différents (et différents de tous les autres mots de la ligne puisqu'ils ont des préfixes différents). Donc, si tous les mots écrits sur une ligne sont différents, il y en a exactement deux de plus sur la ligne suivante, et sur celle-ci à son tour tous les mots écrits sont différents.

Nous avons donc montré, puisque les tableaux d'ordre  $n$  se recouvrent, que l'hypothèse de récurrence pour  $n$  entraîne celle pour  $n + 1$ , et que :

PROPOSITION 1. — *Le nombre de mots de longueur  $\ell$  est égal à  $(2\ell - 1)$  pour tous les  $\ell \geq 2$ . On a en outre une description complète du langage : chaque mot correspond à une référence et une seule dans le tableau d'ordre  $n$ .*

On trouvera une démonstration plus synthétique de la valeur de  $p(\ell)$  dans le cas, plus général, du paragraphe 9, mais il nous sera utile dans la suite de pouvoir énumérer tous les mots de longueur  $\ell$ .

#### 4. Le graphe des mots

Nous rappelons que le *graphe des mots de longueur  $\ell$  associé à la transformation  $T$*  est le graphe dont les sommets sont les mots de longueur  $\ell$  du langage associé, avec une arête de  $W$  vers  $W'$  si  $W = aV$  et  $W' = Vb$  où  $V$  est un mot,  $a$  et  $b$  sont des lettres et le mot  $aVb$  existe dans le langage associé à la transformation  $T$ . On donne alors à cette arête l'*étiquette  $b$* . Comme les mots de longueur  $\ell$  ont en général un successeur (à droite) de longueur  $\ell + 1$  sauf deux mots qui ont deux successeurs, et de même à gauche, on sait que, dans notre cas, tous les sommets seront points de départ d'une arête, sauf deux sommets, que nous appellerons les *points droits*, qui sont points de départ de deux arêtes; de même, deux sommets, que nous appellerons *points gauches* verront arriver deux arêtes et les autres sommets une seule. Le langage associé à  $T$  est engendré, par exemple, par les étiquettes des chemins menant d'un des points droits au même point droit; aucun résultat ne permet de prévoir le nombre de ces chemins fondamentaux, l'exemple de Chacon va nous montrer qu'il varie suivant les étapes.

Les points gauches et droits sont les points remarquables du graphe des mots. Les graphes de mots avec les propriétés ci-dessus peuvent se subdiviser en quatre classes, correspondant à la *topologie* du graphe : les deux chemins issus des points gauches peuvent aller tous les deux vers des points droits (au sens où le premier point remarquable qu'ils rencontrent est un point droit), nous disons alors que le graphe est de *type 1*, ou un chemin issu d'un point gauche peut aller vers un autre point gauche (*type 2*); d'autre part et indépendamment, il peut y avoir des chemins doubles (deux manières différentes d'aller d'un point remarquable à un autre point remarquable sans passer par un troisième point remarquable) ou pas, ce que nous dénoterons par la lettre  $M$  ou  $B$  (pour « mono » et « bi »). L'évolution du graphe des mots de longueur  $n$  suivant les valeurs de  $n$ , et plus particulièrement les transformations des étiquettes des circuits, représentent un élément fondamental de l'étude d'un système de basse complexité, dans la mesure où, dans les cas connus (voir [1]) elle donne accès à la structure géométrique du système.

Dans le cas de la transformation de Chacon, on déduit immédiatement du tableau d'ordre  $n$  une description complète de tous ces graphes; nous avons ainsi un exemple de système de complexité  $(2n - 1)$  (ou, comme nous verrons, de complexité  $2n + 1$  à une petite modification près) dont

nous connaissons totalement l'évolution du graphe des mots, ce qui peut donner des indications sur le cas général des systèmes de complexité  $2n+1$  abordés dans [1]. Nous commençons par donner, à titre d'exemple, une description exhaustive du graphe des mots pour les deux grandes plages de valeurs de  $\ell$ .

Voici le graphe courant pour  $h_n + 3 \leq \ell \leq 2h_n$ ; nous avons les arêtes suivantes, où la lettre  $\ell$  dans le deuxième argument sera désormais sous-entendue :

$$\begin{aligned} A(-1) &\rightarrow A(0) \rightarrow \dots \rightarrow A(2h_n - \ell) \rightarrow A'(2h_n + 1 - \ell) \\ &\quad \rightarrow A'(2h_n + 2 - \ell) \rightarrow A'(h_n - 1) \rightarrow A(0), \\ A(2h_n - \ell) &\rightarrow C'(2h_n + 1 - \ell) \rightarrow C'(2h_n + 2 - \ell) \rightarrow C'(h_n - 1) \rightarrow B(0), \\ B(-1) &\rightarrow B(0) \rightarrow \dots \rightarrow B(2h_n + 1 - \ell) \rightarrow B'(2h_n + 2 - \ell) \\ &\quad \rightarrow B'(2h_n + 3 - \ell) \rightarrow B'(h_n - 1) \rightarrow A(-1), \\ B(2h_n + 1 - \ell) &\rightarrow D'(2h_n + 2 - \ell) \rightarrow D'(2h_n + 3 - \ell) \rightarrow D'(h_n - 1) \rightarrow B(-1). \end{aligned}$$

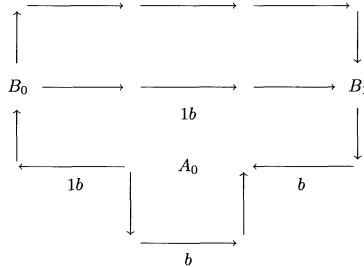
Voici maintenant le graphe pour un  $2h_n + 3 \leq \ell \leq 3h_n + 1$  :

$$\begin{aligned} A'(-1) &\rightarrow \dots \rightarrow A'(3h_n - \ell) \rightarrow C''(3h_n + 1 - \ell) \\ &\quad \rightarrow \dots \rightarrow C''(h_n - 1) \rightarrow C'(0), \\ B'(-1) &\rightarrow B'(0) \rightarrow \dots \rightarrow B'(3h_n + 1 - \ell) \rightarrow A''(3h_n + 2 - \ell) \\ &\quad \rightarrow \dots \rightarrow A''(h_n - 1) \rightarrow A'(-1), \\ B'(3h_n + 1 - \ell) &\rightarrow D''(3h_n + 2 - \ell) \rightarrow \dots \rightarrow D''(h_n - 1) \rightarrow C'(-1), \\ C'(-1) &\rightarrow C'(0) \rightarrow \dots \rightarrow C'(3h_n + 1 - \ell) \rightarrow B''(3h_n + 2 - \ell) \\ &\quad \rightarrow \dots \rightarrow B''(h_n - 1) \rightarrow B'(0), \\ C'(3h_n + 1 - \ell) &\rightarrow F''(3h_n + 2 - \ell) \rightarrow \dots \rightarrow F''(h_n - 1) \rightarrow D'(0), \\ D'(0) &\rightarrow \dots \rightarrow D'(3h_n + 2 - \ell) \rightarrow E''(3h_n + 3 - \ell) \\ &\quad \rightarrow \dots \rightarrow E''(h_n - 1) \rightarrow B'(-1). \end{aligned}$$

## 5. La suite des éclatements

**5.1 Le cas  $\ell = 2h_n$ .** — Dans l'écriture des mots, nous continuons à sous-entendre le deuxième argument, et nous écrivons le premier en indice.

Nous réécrivons le graphe des mots, en ne laissant que les points importants :  $B_0$  qui est un point gauche,  $B_1$  qui est un point droit,  $A_0$  qui est un *point double* (point droit et gauche) ; comme il y a un point double, nous disons qu'il y a un *éclatement* en  $A_0$ .



Ce graphe se lit de la manière suivante : un *chemin élémentaire* est un chemin partant d'un point droit et s'arrêtant au premier nouveau point droit qu'il rencontre ; son étiquette est bien entendu la suite des étiquettes des arêtes qui le composent ; nous utiliserons le symbole  $b$  pour dénoter le bloc  $B_n$ . Considérons les chemins élémentaires suivants :

- le chemin (1) part de  $A_0$  et y revient immédiatement ;
- le chemin (2) va de  $A_0$  en  $B_0$ , puis (seule possibilité) en  $B_1$ , où il se termine car c'est un point droit ;
- le chemin (3) va de  $B_1$  vers  $A_0$ , où il s'arrête car c'est un point droit ;
- le chemin (4) va de  $B_1$  en  $B_0$  puis revient en  $B_1$ .

Les étiquettes écrites sur le graphe sont celles des chemins élémentaires ; parmi toutes les arêtes d'un chemin élémentaire, une et une seule est étiquetée (*au-dessous* de l'arête) et cette étiquette est celle du chemin élémentaire concerné. On voit ainsi que les chemins élémentaires

$$A_0A_0(1), \quad A_0B_1(2), \quad B_1B_1(4), \quad B_1A_0(3)$$

ont respectivement pour étiquettes

$$b, \quad 1b, \quad 1b, \quad b.$$

Le graphe est de type  $1M$  (avec éclatement).

Les *circuits élémentaires* sont les chemins partant d'un point droit et revenant au même point droit. Nous voulons, à chaque étape, décrire les étiquettes des chemins élémentaires, pour avoir une collection de mots qui finalement engendrent le langage. A partir de  $A_0$ , on peut :



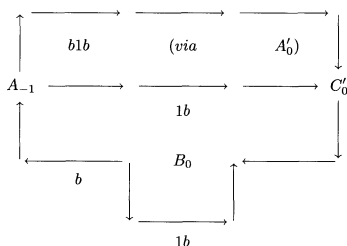
- Revenir immédiatement en  $A_0$  par la boucle; aller en  $B_0$  puis  $B_1$  puis  $A_0$ ; aller en  $B_0$  puis  $B_1$ , puis parcourir  $k$  fois,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , la boucle  $B_1B_0B_1$  avant de revenir en  $A_0$ .

- De même, à partir de  $B_1$ , de nombreux circuits sont possibles suivant le nombre de fois où l'on parcourt la boucle  $A_0A_0$ .

Pour décider si un circuit élémentaire autour d'un point droit  $D$  contribue effectivement à engendrer le langage associé à  $T$ , il faut regarder son étiquette, et vérifier que cette étiquette est un mot du langage pouvant être lu entre deux apparitions du mot  $D$ . Si ce n'est pas le cas, ce circuit élémentaire correspond à un chemin interdit dans le graphe, et son étiquette ne nous intéresse pas. En  $A_0$ , les circuits de la forme  $A_0B_0B_1(B_0B_1)^kA_0$  ont pour étiquettes  $1b(1b)^kb$ , qui sont des mots interdits dès que que  $k \geq 2$ . On voit finalement qu'il reste trois circuits élémentaires en  $A_0$  et trois en  $B_1$ , et qu'ils ont comme étiquettes :

en $A_0$	en $B_1$
$b$	$1b$
$1bb$	$b1b$
$1b1bb$	$bb1b$

**5.2 Le cas  $\ell = 2h_n + 1$ .** — Comme il y a deux chemins élémentaires distincts entre  $A_{-1}$  et  $B_0$ , nous ajoutons une indication supplémentaire pour les distinguer.

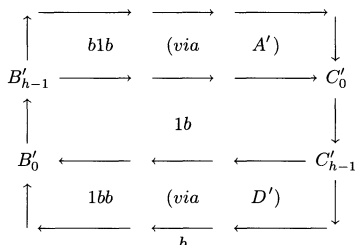


Le graphe est de type  $2B$ . Les points droits sont ici  $A_{-1}$ , héritier de  $A_0$  (qu'il contient comme suffixe), et  $B_0$ , héritier de  $B_1$ . Il y a un éclatement en  $B_0$ . Les circuits élémentaires sont :

en $A_{-1}$	en $B_0$
$1bb$	$1b$
$b1bb$	$b1b$
$1b1bb$	$bb1b$
$b1b1bb$	

(Le nombre de quatre circuit élémentaires utiles est une surprise; on vérifie que les quatre mots de la première colonne ne sont pas interdits et peuvent se trouver entre deux mots  $A_{-1}$ .)

**5.3 Le cas  $\ell = 2h_n + 2$ .** — Nous écrivons désormais  $h$  pour  $h_n$  :



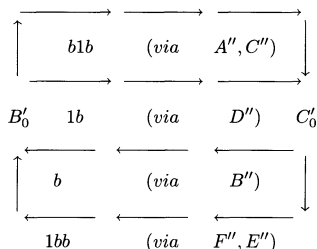
Le graphe est de type  $1B$ . Les points droits sont  $B'_{h-1}$ , héritier de  $A_{-1}$ , et  $C'_{h-1}$ , héritier de  $B_0$ . Les circuits élémentaires sont :

en $B'_{h-1}$	en $C'_{h-1}$
$1bb$	$bb1b$
$b1bb$	$1bb1b$
$1b1bb$	
$b1b1bb$	

Il n'y a plus que deux circuits autorisés en  $C'$ .

Il n'y a pas d'éclatement, donc on sait [1] que la structure du graphe, et les noms des chemins, ne changent pas quand on passe à une valeur supérieure de  $\ell$ ; seulement, les deux segments allant d'un point gauche à un point droit voient leur longueur diminuer d'une unité.

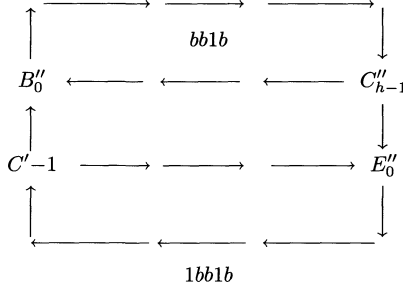
**5.4 Le cas  $\ell = 3h_n + 1$ .** — C'est là que se produit l'éclatement suivant, et on se trouve en présence de deux points doubles, de sorte que le graphe a un circuit eulérien :



Les points droits (et doubles) sont  $B'_0$  et  $C'_0$ , héritiers (sans modification)

de  $B'_{h-1}$  et  $C'_{h-1}$ , et les circuits élémentaires sont les mêmes qu'à l'étape précédente.

**5.5 Le cas  $\ell = 3h_n + 2$ .**



Le graphe est de nouveau de type  $1M$ . Les deux points droits sont  $C'_{-1}$  et  $C''_{h-1}$  qui sont tous deux héritiers de  $C'_0$ , alors que  $B'_0$  a disparu sans descendance. Les circuits élémentaires sont :

en $C'$	en $C''$
$bb1b$	$1bb1b$
$1bb1bbb1b$	$bb1b1bb1b$
$1bb1b1bb1bbb1b$	$bb1bbb1b1bb1b$ .

Ces circuits sont obtenus à partir de ceux de l'étape  $\ell = 2h_n$  en remplaçant  $B_n$  par  $B_{n+1}$ ; c'est normal, car il n'y a plus d'éclatement entre  $\ell = 3h_n + 2 = h_{n+1} + 1$ , et  $\ell = 2h_{n+1}$ , qui verra donc les mêmes circuits élémentaires.

Nous résumons ci-dessous les observations qu'on peut faire sur l'évolution du graphe des mots, particulièrement en vue de l'étude des systèmes généraux du même type :

*PROPOSITION 2. — La transformation de Chacon passe de manière périodique par trois des quatre topologies de graphes possibles; les circuits élémentaires autorisés sont au nombre de deux, trois ou quatre; de manière périodique, le graphe est eulérien, et alors un point droit disparaît sans successeur, et toute la combinatoire ultérieure est engendrée par les successeurs d'un seul point droit.*

### 6. La substitution primitive associée

Si l'on regarde par quelle règle de récurrence on peut construire, à partir des trois circuits élémentaires de l'étape  $\ell = 2h_n$  autour du point  $B_1$ , les trois circuits élémentaires de l'étape  $\ell = 3h_n + 2$  autour du point  $C''_{h-1}$ , on est amené à définir  $\sigma$ , la substitution (primitive) suivante :

$$A \mapsto AB, \quad B \longrightarrow CAB, \quad C \longrightarrow CCAB.$$

On remarque que le mot infini de Chacon s'obtient à partir du point fixe de  $\sigma$  commençant par  $C$  en remplaçant  $A$  par 1,  $B$  et  $C$  par 0; réciproquement, le point fixe de  $\sigma$  commençant par  $C$  s'obtient à partir du mot infini de Chacon en remplaçant 1 par  $A$ , 0 par  $B$  s'il suit un 1 et par  $C$  s'il suit un 0 :

PROPOSITION 3. — *La transformation de Chacon et la substitution primitive  $\sigma$  sont topologiquement isomorphes.*

L'autre point fixe, commençant par  $A$ , est un translaté du point fixe commençant par  $C$ .

La substitution  $\sigma$  est donc encore de rang un (cf. [6]), et effectivement son point fixe commençant par  $C$  s'obtient par la règle de récurrence

$$V_{n+1} = V_n C V_n A B V_n$$

à partir du mot vide  $V_0$ . On peut aussi utiliser la règle

$$W_{n+1} = W_n W_n 1 W'_n,$$

où  $W_0 = C$  et  $W'_n$  est obtenu à partir de  $W_n$  en remplaçant la première lettre, qui est un  $C$ , par un  $B$ . Cette dernière définition permet de voir que :

PROPOSITION 4. — *Le langage de  $\sigma$  est de complexité  $2n + 1$ , avec deux points droits et deux points gauches à chaque étape.*

On vérifie en effet qu'il y a cinq mots de longueur 2, et que, par rapport au tableau d'ordre  $n$  de Chacon, deux des mots de la colonne 0 donnent naissance à deux variantes, l'une commençant par  $B$  et l'autre par  $C$ , tout le reste étant inchangé. On peut considérer  $\sigma$  comme une forme canonique de la transformation de Chacon dans le cadre de l'étude des systèmes de basse complexité.

### 7. Structure géométrique de la transformation de Chacon

Regardons maintenant la règle de récurrence qui fait passer d'une étape où il n'y a que deux circuits élémentaires, par exemple l'étape  $\ell = 2h_n + 2$  autour du point  $C'_{h-1}$ , à l'étape correspondante après avoir remplacé  $n$  par  $n + 1$ ; elle fait intervenir une substitution de *longueur constante*, que nous noterons  $\tau$  :

$$A \mapsto AAB, \quad B \mapsto BAB.$$

On passe du mot infini de Chacon au point fixe de  $\tau$  commençant par  $A$  de manière biunivoque par le transducteur :

$$0 \mapsto A, \quad 10 \mapsto B.$$

La substitution  $\tau$  admet une *coïncidence* (la deuxième lettre de  $\tau A$  et la deuxième lettre de  $\tau B$  sont identiques), donc, d'après [3], elle est à spectre discret, et le système dynamique associé est une rotation triadique (on dit aussi *odomètre* ou *translation triadique*). Le transducteur est inversible, mais ne commute pas avec le shift, et la transformation de Chacon n'est pas topologiquement isomorphe au système dynamique associé à  $\tau$  :

PROPOSITION 5. — *La transformation de Chacon (et donc aussi la substitution  $\sigma$  qui lui est topologiquement isomorphe) est une exduction de Rokhlin-Kakutani, avec une tour explicite dont les étages sont des ouverts fermés, au-dessus de la rotation triadique. Ou, ce qui est équivalent, la transformation de Chacon induit la rotation triadique, c'est-à-dire l'admet comme transformation de premier retour, sur un ensemble explicite ouvert fermé, en l'occurrence le cylindre  $x_0 = 0$ .*

La complexité de la substitution  $\tau$  peut se calculer par la méthode de MOSSÉ [10], puisqu'il s'agit d'une substitution de longueur constante. On vérifie que :

PROPOSITION 6. — *Le nombre de mots de longueur  $n$  dans le langage associé à  $\tau$  vaut exactement  $2n$  pour tous les entiers naturels  $n$ .*

### 8. Le groupe de dimensions

Dans ce paragraphe, nous nous contenterons de citer des résultats dus à Bernard HOST mais malheureusement non encore publiés, et de les appliquer à la transformation de Chacon.

Le *groupe de dimensions* est un invariant d'isomorphisme topologique défini dans [8], auquel nous référons le lecteur pour toute précision; pour une transformation  $T$  sur un espace  $X$ , il est défini comme le quotient

du groupe  $C(X, Z)$  des fonctions continues à valeurs entières sur  $X$  par le sous-groupe des cobords dans  $C(X, Z)$ , c'est-à-dire des fonctions de la forme  $(f - Tf)$  où  $f$  est un élément de  $C(X, Z)$ .

HOST [9] donne un algorithme pour calculer le groupe de dimensions d'une substitution primitive; on l'applique donc à la transformation de Chacon sous la forme  $\sigma$ ; le résultat est que :

PROPOSITION 7. — *Le groupe de dimensions de la transformation de Chacon est  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\frac{1}{3})$ .*

Une conséquence est que :

PROPOSITION 8. — *La transformation de Chacon n'est pas topologiquement isomorphe au codage standard d'un échange primitif d'intervalles.*

En effet, un échange primitif de  $n$  intervalles, n'étant pas continu, ne peut être topologiquement isomorphe à la transformation de Chacon; si on le code sous forme symbolique, en regardant les itinéraires de la partition par les points de discontinuité, on obtient un système de complexité

$$p(\ell) = (n - 1)\ell + 1$$

(résultat « du folklore ») et qui a pour groupe de dimensions  $\mathbb{Z}^n$  (cf. [9]); comme l'isomorphisme topologique laisse invariants le groupe de dimensions (cf. [8]) et la propriété «  $p(\ell)$  est majorée par une fonction affine de pente au plus  $a$  » (résultat immédiat car un tel isomorphisme est finitaire), la transformation de Chacon ne peut être isomorphe au codage d'un échange de  $n$  intervalles.

### 9. Transformations de Chacon généralisées à découpage constant

Nous regardons maintenant la transformation  $T_q$  définie par la règle :

$$B_0 = 0, \quad B_{n+1} = (B_n)^q 1 B_n.$$

Nous allons étudier la complexité du langage associé, pour tous les  $q$  entiers supérieurs à 2 (pour  $q = 1$ , la suite infinie est périodique, et donc la complexité bornée). L'entier  $q$  sera désormais fixé, et nous gardons les notations habituelles; les hauteurs  $h_n$  vérifient

$$h_{n+1} = (q + 1)h_n + 1$$

et nous examinons les mots de longueur  $\ell$  pour  $h_n + 1 \leq \ell \leq h_{n+1} + 1$ ; un tel mot a une abscisse de départ dans  $B_n$ , ou bien commence entre deux  $B_n$ ;

il coupe de 1 à  $(q + 1)$   $n$ -blocs, et est caractérisé par la configuration des séparateurs apparaissant entre ces  $n$ -blocs : nous définissons une *configuration à  $c$  trous* comme une spécification de l'existence ou non d'un séparateur dans chacun de ces trous. Nous devons donc d'abord connaître toutes les configurations de séparateurs qui sont permises pour remplir  $c$  trous consécutifs entre des blocs  $B_n$ , pour  $1 \leq c \leq q + 1$ .

Si on regarde un séparateur, dénoté par (1), situé entre deux  $B_n$ , on peut voir après lui trois situations :

- s'il est situé au milieu d'un bloc  $B_{n+1}$ , on voit  $(1)B_n(B_n)^q1$  ou  $(1)B_n1(B_n)^q1$ , et,
- s'il est situé entre deux  $B_{n+1}$ , on voit  $(1)(B_n)^q1$ .

Si l'on veut remplir  $c$  trous consécutifs pour  $c \leq q$ , on peut donc mettre : aucun séparateur ; ou un séparateur au  $d$ -ème trou et aucun autre, pour  $1 \leq d \leq c$  ; ou un séparateur au  $d$ -ème trou, un séparateur au  $(d + 1)$ -ème trou et aucun autre pour  $1 \leq d \leq c - 1$ . Pour  $c = q + 1$ , on perd la configuration sans séparateur, et on gagne la configuration avec un séparateur au premier et au dernier trou, les autres configurations étant conservées. Le nombre de configurations permises à  $c$  trous est donc  $2c$ . Pour chaque  $c \leq q$ , on dit qu'une configuration à  $c$  trous est *biprolongeable* si, en ajoutant un trou et en mettant ou non un séparateur dedans, on obtient deux configurations permises à  $c + 1$  trous ; il y a deux configurations biprolongeables pour chaque  $c$  : la configuration sans séparateur et celle avec un séparateur dans le dernier trou et aucun autre pour le cas  $c \leq q - 1$ , la configuration avec un séparateur dans le premier trou et aucun autre et celle avec un séparateur dans le dernier trou et aucun autre pour  $c = q$ .

On fait l'hypothèse de récurrence que  $p(h_n + 1) = 2h_n + 1$ , c'est-à-dire que pour  $l = h_n + 1$ , chaque couple (abscisse de départ, configuration de séparateurs) définit un mot de longueur  $l$  différent. On veut déterminer  $p(l + 1) - p(l)$  pour un  $h_n + 1 \leq l \leq h_{n+1}$  ; on dit qu'un mot de longueur  $l$  est *biprolongeable* si il se termine à la fin d'un bloc  $B_n$  et la configuration de séparateurs qu'il contient dans ses trous entre blocs  $B_n$  (si le mot commence par un séparateur situé entre deux  $B_n$ , on considère qu'il y a un trou au début, avec un séparateur dedans) est biprolongeable.

Si  $l$  est tel que tous les mots de longueur  $l$  se terminant à une fin de  $B_n$  ont le même nombre de trous, on voit immédiatement qu'il y a deux mots biprolongeables. Si  $l$  n'a pas cette propriété, on a les cas suivants : quand  $l = ch_n + 1$  pour  $2 \leq c \leq q + 1$ , les mots de longueur  $l$  finissant à la fin d'un bloc présentent la configuration à  $c$  trous et aucun séparateur, toutes celles à  $(c - 1)$  trous et un ou deux (si  $c \geq 3$ ) séparateurs, et il y en a donc deux biprolongeables, celle à  $c$  trous et une de celles à  $(c - 1)$

trous quand  $c \leq q$ , deux de celles à  $(c - 1)$  trous si  $c = q + 1$ ; quand  $\ell = ch_n + 2$  pour  $3 \leq c \leq q$ , on voit les configurations à  $c - 1$  trous et deux séparateurs, qui ne sont pas biprolongeables, et toutes celles à  $c$  trous et zéro ou un séparateur, dont deux sont biprolongeables. Notons que quand  $\ell = h_n + 1$ , on ne voit que des configurations à un trou; de même  $\ell = h_n + 2$  et  $\ell = 2h_n + 2$  rentrent dans le cas général.

L'hypothèse de récurrence, la définition des mots biprolongeables et le fait qu'il y en a deux, assurent que, pour  $\ell = h_n + 2$ , il y a exactement deux mots nouveaux, et chaque paire (abscisse de départ, configuration de séparateurs) définit encore un mot de longueur  $\ell$  différent. Ce dernier résultat, et l'existence de deux mots biprolongeables, permet d'étendre ces propriétés à  $\ell = h_n + 3$ , et ainsi de suite jusqu'à  $\ell = h_{n+1} + 1$ , ce qui à son tour entraîne l'hypothèse de récurrence au stade suivant (et justifie *a posteriori* l'appellation biprolongeable pour les mots). On a donc, comme dans la section 2, un tableau d'ordre  $n$ , avec deux mots nouveaux sur chaque ligne. Comme  $p(2) = 3$ , on a, pour toutes les valeurs de  $q$  à partir du cas  $q = 2$  (et pour ce dernier cas, on retrouve et explique l'énumération de la section 3) :

PROPOSITION 9. — *La complexité  $p(\ell)$  vaut  $(2\ell - 1)$  à partir de  $\ell = 2$ .*

On peut aussi donner une forme primitive de la substitution

$$A \mapsto AB, \quad B \mapsto C^{q-1}AB, \quad C \mapsto C^qAB,$$

et le système dynamique qu'elle engendre est topologiquement isomorphe à  $T_q$ . Il est encore vrai aussi que  $T_q$  est une tour au-dessus d'une substitution de longueur constante,

$$A \mapsto A^qB, \quad B \mapsto BA^{q-1}B,$$

qui est un odomètre  $q + 1$ -adique.

Toutes ces transformations sont uniquement ergodiques (résultat « du folklore » qu'on retrouve grâce aux substitutions primitives), et faiblement mélangeantes au sens métrique (cf. [2]) : pour l'unique mesure invariante, il n'y a pas de fonctions propres mesurables à part les constantes. Elles ne sont pas topologiquement isomorphes deux à deux (même quand elles induisent le même odomètre); si on les munit de leur unique mesure invariante, elles sont mêmes deux à deux non métriquement isomorphes, et disjointes au sens de Fürstenberg (voir [4] et [7]).



### 10. Autres transformations avec découpage constant et un séparateur par étape

On peut maintenant regarder la règle  $B_{n+1} = (B_n)^r 1 (B_n)^s$ .

#### 10.1 Le cas $r = 0$ ou $s = 0$ .

C'est un cas dégénéré, la suite infinie correspondante n'étant pas minimale car elle comporte des suites arbitrairement longues de 1.

#### 10.2 Le cas $r \neq 1$ , $s \neq 1$ , $r < s$ .

On regarde comme précédemment les configurations de séparateurs permises pour  $c$  trous consécutifs à remplir ; on a :

- pour  $c = 1$ , deux configurations ;
- pour  $1 \leq c \leq r - 1$ , une seule configuration biprolongeable, celle sans séparateur ;
- pour  $r \leq c \leq s - 1$ , deux configurations biprolongeables, aucun séparateur et un seul séparateur en position  $c + 1 - r$  ;
- pour  $s \leq c \leq s + r - 2$ , trois configurations biprolongeables, aucun séparateur, un seul séparateur en position  $c + 1 - r$ , un seul séparateur en position  $c + 1 - s$  ;
- pour  $c = s + r - 1$ , deux configurations biprolongeables, un seul séparateur en position  $r$  et un seul séparateur en position  $s$ .

On en déduit, en regardant les valeurs particulières de  $\ell$  correspondant aux étapes de transition comme dans la section précédente, que

PROPOSITION 10. — On a  $p(2) = 3$ , et, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$p(\ell + 1) - p(\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_n + 1 \leq \ell \leq r h_n, \\ 2 & \text{si } r h_n + 1 \leq \ell \leq s h_n, \\ 3 & \text{si } s h_n + 1 \leq \ell \leq (r + s - 1) h_n, \\ 2 & \text{si } (r + s - 1) h_n + 1 \leq \ell \leq (r + s) h_n + 1 = h_{n+1}. \end{cases}$$

En particulier, on a :

- $p(\ell) \leq 2\ell - 1$  si  $\ell \geq 2$ , avec égalité pour des plages de valeurs dont  $\ell = h_n$ ,  $n \geq 1$  ;
- $p(\ell) \geq (r + 1)\ell/r - (1/r)$ , avec égalité pour les  $\ell = r h_n + 1$ .

En effet, on fait l'hypothèse de récurrence que  $p(h_n + 1) = 2h_n + 1$ , c'est-à-dire que pour  $\ell = h_n + 1$ , chaque couple

(abscisse de départ, configuration de séparateurs)

défini un mot de longueur  $\ell$  différent; la proposition est alors vraie pour cette valeur de  $n$ , et on en déduit que

$$p(h_{n+1} + 1) - p(h_n + 1) = 2(h_{n+1} - h_n)$$

et donc l'hypothèse de récurrence au stade  $n + 1$ .

**10.3 Le cas  $r > s$ .**

Ce cas se déduit du précédent en échangeant  $r$  et  $s$ . Le cas  $r > 1, s = 1$  est le cas traité dans la section précédente, et le cas  $s = 1, r > 1$  donne la même complexité.

**10.4 Le cas  $r = s > 1$ .**

Les configurations de séparateurs sont les suivantes :

- pour  $c = 1$ , deux configurations;
- pour  $1 \leq c \leq r - 1$ , une seule configuration biprolongeable, celle sans séparateur;
- pour  $r \leq c \leq 2r - 1$ , deux configuration biprolongeables, aucun séparateur et un seul séparateur en position  $c + 1 - r$ ;
- pour  $c = 2r - 1$ , une configuration biprolongeable, un seul séparateur en position  $r$ .

Dans ce cas on a  $h_n = 2rh_{n-1} + 1$ ; il est maintenant faux que, pour  $\ell = h_n + 1$ , chaque couple

(abscisse de départ, configuration de séparateurs)

définisse un mot de longueur  $\ell$  différent. En effet, si on essaye de faire le tableau d'ordre  $n$ , avec les notations de la deuxième partie, la première ligne devrait comporter

$$Z(-1, \ell), A(k, \ell), B(k, \ell),$$

avec  $\ell = h_n + 1, 0 \leq k \leq h_n - 1$ ; mais, si l'on se rappelle que  $B_n = (B_{n-1})^r 1 (B_{n-1})^r$ , on voit que, en raison de la symétrie du bloc, tous ces noms ne sont pas différents : on a  $B(rh_{n-1}, \ell) = Z(-1, \ell)$  et  $B(rh_{n-1} + i, \ell) = A(i - 1, \ell)$  pour  $1 \leq i \leq rh_{n-1}$ . Nous allons donc écrire une première ligne réduite, où nous omettons simplement les mots  $B(rh_{n-1} + i, \ell)$  pour  $0 \leq i \leq rh_{n-1}$ ; l'hypothèse de récurrence sera donc que *les mots de la première ligne réduite du tableau d'ordre  $n$  sont tous différents*, et donc  $p(h_n + 1) = \frac{1}{2}(3h_n + 1)$ . L'effet de symétrie cesse progressivement car le mot  $(B_{n-1})^r 1 (B_{n-1})^r 1 (B_{n-1})^r$  est toujours suivi

d'un 1 s'il commence avec un bloc  $B_n$  et d'un 0 s'il commence au milieu d'un bloc  $B_n$ . Les descendants des mots oubliés réapparaissent donc au rythme de un par ligne dans les  $rh_{n-1}$  premières lignes du tableau d'ordre  $n$ ; à partir de la ligne suivante, il est de nouveau vrai que chaque couple (abscisse de départ, configuration de séparateurs) définit un mot de longueur  $\ell$  différent, et on continue le tableau comme dans les cas précédents, jusqu'à  $\ell = h_{n+1}$ .

PROPOSITION 11. — (*Nous énonçons le résultat en faisant intervenir un  $r'$  qui vaut ici  $r' = r$  mais sera utile plus tard.*) Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$p(\ell + 1) - p(\ell) = \begin{cases} 2 & \text{si } h_n + 1 \leq \ell \leq h_n + r'h_{n-1} + 1, \\ 1 & \text{si } h_n + r'h_{n-1} + 2 \leq \ell \leq rh_n + 1, \\ 2 & \text{si } rh_n + 2 \leq \ell \leq (2r - 1)h_n + 1, \\ 1 & \text{si } (2r - 1)h_n + 2 \leq \ell \leq 2rh_n + 1 = h_{n+1}. \end{cases}$$

Pour  $n = 0$ , les égalités ci-dessus sont vraies à partir de  $\ell = r + 2$ , et  $p(2) = 3, p(\ell + 1) - p(\ell) = 1$  pour  $2 \leq \ell \leq r + 1$ . On a les estimations, pour  $\ell > h_1$ , :

- $\frac{3}{2}\ell - 1 \leq p(\ell) \leq \frac{5}{3}\ell + \frac{4}{3}$  si  $r = 2$ ;
- $(r + 1)\ell/r + (2/r) \leq p(\ell) \leq \frac{5}{3}\ell - 1$  si  $r \geq 3$ ;

où toutes les bornes sont atteintes une infinité de fois.

En effet, on vérifie que l'hypothèse de récurrence se propage. Les valeurs remarquables donnant les bornes sont :

$$p(h_n + 1) = \frac{3}{2}h_n + \frac{1}{2}, \quad p(3rh_{n-1} + 3) = 5rh_{n-1} + 4,$$

$$p(rh_n + 2) = (r + 1)h_n + 2, \quad p((2r - 1)h_n + 2) = (3r - 1)h_n + 2.$$

PROPRIÉTÉS. — Dans tous les cas sauf  $rs = 0$  et  $(r, s) = (1, 1)$ , la transformation est encore donnée par une substitution primitive

$$A \mapsto AB, \quad B \mapsto C^{r-1}ABC^{s-1}, \quad C \mapsto C^rABC^{s-1},$$

et est une tour au-dessus de l'odomètre  $(r + s)$ -adique.

Toutes ces transformations sont encore uniquement ergodiques et faiblement mélangeantes.

**11. Transformations avec découpage variable et un séparateur par étape**

**11.1.** — Nous regardons la règle  $B_{n+1} = (B_n)^{r_n} 1 (B_n)^{s_n}$ , avec  $r_n s_n \neq 0$  et  $(r_n, s_n) \neq (1, 1)$  pour  $n \geq 0$ ; on part toujours de  $B_0 = 0$ . On a donc  $h_{n+1} = (r_n + s_n)h_n + 1$ .

Regardons les mots de longueur  $h_n + 1 \leq \ell \leq h_{n+1} + 1$ ; ils sont toujours caractérisés par leur abscisse de départ dans  $B_n$  et la configuration de séparateurs qu'on voit dans  $c$  trous consécutifs entre deux blocs  $B_n$ , pour  $1 \leq c \leq r_n + s_n$ . L'abscisse de départ représente les étapes précédentes de la récurrence : c'est la structure de  $B_n$  qui décidera combien il y a de mots différents de longueur  $h_n + 1$  parmi les  $2h_n + 1$  possibilités théoriques. Le nombre et l'identité des configurations possibles de séparateurs ne dépend que de la règle donnant  $B_{n+1}$ ; tout ce que nous avons besoin de savoir des récurrences futures est que les mots  $B_{n+1}B_{n+1}$  et  $B_{n+1}1B_{n+1}$  existent, ce qui est toujours vrai sous nos hypothèses.

Si on peut faire constamment une des hypothèses de récurrence de la section 10, on peut donc simplement recopier le tableau d'ordre  $n$  habituel pour  $r = r_n, s = s_n$ . En particulier :

PROPOSITION 12. — *Si  $r_n \neq s_n$  pour tout  $n \geq 0$ , ou si  $r_n = s_n$  pour tout  $n \geq 0$ , on obtient la complexité de la suite en juxtaposant les formules données pour  $h_n + 1 \leq \ell \leq h_{n+1}$  des différentes étapes, en prenant  $r = r_n, s = s_n$ . En particulier, si  $r_n = 1, s_n \neq 1$  ou  $r_n \neq 1, s_n = 1$  à chaque étape,  $p(\ell) = 2\ell - 1$  pour tout  $\ell \geq 2$ .*

S'il y a des étapes, mais pas toutes, où  $r_n = s_n$ , on peut aussi calculer la complexité; l'hypothèse de récurrence sera la suivante : après une étape où  $r_{n-1} \neq s_{n-1}$  (étape asymétrique),  $p(h_n + 1) = 2h_n + 1$ , et, après une étape où  $r_{n-1} = s_{n-1}$  (étape symétrique),  $p(h_n + 1) = \frac{3}{2}h_n + \frac{1}{2}$ . Si après une étape symétrique vient une étape asymétrique, il faudra rajouter dans le tableau d'ordre  $n$  du paragraphe 10.2 les descendants des noms oubliés par l'hypothèse de récurrence; si après une étape asymétrique vient une étape symétrique, il n'y a pas eu de noms oubliés par l'hypothèse de récurrence, et le tableau du paragraphe 10.4 s'applique à l'exception de la réapparition progressive des descendants des noms oubliés dans les  $r_{n-1}h_{n-1}$  premières lignes. On vérifie donc que :

PROPOSITION 13. — *Les formules donnant  $p(\ell + 1) - p(\ell)$  pour  $h_n + 1 \leq \ell \leq h_{n+1}$  et  $n \geq 1$  sont :*

- *celles de la proposition 10 (ou de la proposition symétrique si  $r_n > s_n$ , ou de la proposition 9 si  $r_n = 1$  ou  $s_n = 1$ ) avec  $r = r_n, s = s_n$ , si  $r_{n-1} \neq s_{n-1}, r_n \neq s_n$ ;*

• celles de la proposition 11 avec  $r = r_n$ ,  $s = s_n$ ,  $r' = r_{n-1}$ , si  $r_{n-1} = s_{n-1}$ ,  $r_n = s_n$ ;

• celles de la proposition 11 avec  $r = r_n$ ,  $s = s_n$ ,  $r' = 0$  et avec la modification  $p(h_{n+2}) - p(h_{n+1}) = 1$ , si  $r_{n-1} \neq s_{n-1}$ ,  $r_n = s_n$ ;

• celles de la proposition 10 (ou symétrique, ou 9) avec  $r = r_n$ ,  $s = s_n$ , mais en augmentant  $p(\ell + 1) - p(\ell)$  de 1 pour  $h_n + 1 \leq \ell \leq h_n + r_{n-1}h_{n-1} + 1$ , si  $r_{n-1} = s_{n-1}$ ,  $r_n \neq s_n$ .

Pour les premières valeurs de  $\ell$ , les formules ci-dessus s'appliquent pour  $2 \leq \ell \leq h_1$  en prenant  $n = 0$ ,  $r_{-1} \neq s_{-1}$  et  $p(2) = 3$ . La complexité est toujours majorée par  $(2\ell - 1)$  pour  $\ell \geq 2$ .

**11.2. Propriétés.** — Les transformations ci-dessus peuvent encore être engendrées par une suite (à valeurs dans un ensemble pouvant être infini) de substitutions primitives; en fait, comme  $p(\ell + 1) - p(\ell)$  est bornée, on peut aussi, en utilisant les techniques de [1], les engendrer par une suite, à valeurs dans un ensemble fini, de substitutions en général non primitives. Elles sont aussi des tours au-dessus d'odomètres généraux, construits avec la suite  $q_n = r_n + s_n + 1$ .

Elles sont uniquement ergodiques, faiblement mélangeantes. Les transformations associées à des suites  $(t_n, 1)$  sont deux à deux disjointes au sens de Fürstenberg dès lors que  $t_n \neq t'_n$  infiniment souvent (voir [7] et [4]). Notons qu'en nous restreignant à de telles suites, nous obtenons :

PROPOSITION 14. — *Il existe un continuum de transformations construites avec un seul séparateur par étape, uniquement ergodiques, deux à deux disjointes au sens de Fürstenberg, qui sont des exductions explicites d'odomètre  $s$  et dont les langages associés ont la même fonction de complexité,  $p(\ell) = 2\ell - 1$  pour  $\ell \geq 2$ .*

Les résultats de disjonction ne sont plus vrais pour des suites plus générales : le lecteur de la revue nous informe que si

$$q_n = r_n + s_n + 1 = r'_n + s'_n + 1 \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{q_n}{q_{n+1}} < +\infty,$$

alors les transformations associées aux suites  $(r_n, s_n)$  et  $(r'_n, s'_n)$  sont métriquement isomorphes (résultat non publié).

On peut chercher à connaître les liens entre mélange faible et complexité; pour obtenir du mélange faible, il est indispensable d'insérer de nouveaux séparateurs infiniment souvent; toute l'analyse qui précède permet de trouver la suite dont la complexité est minimale parmi toutes celles où un seul séparateur est introduit à chaque étape, ce qui semble la manière de procéder donnant les complexités les plus faibles. Donc :

CONJECTURE 1 : une suite du type  $B_{n+1} = (B_n)^{r_n} 1 (B_n)^{r_n}$  où  $r_n$  tend vers  $+\infty$  le plus vite possible, réalise la plus petite complexité possible pour une suite infinie définissant une transformation faiblement mélangeante.

La complexité  $p(\ell)$  est alors proche de droites  $p(\ell) = (1 + \epsilon)\ell$  sur des plages de plus en plus longues, mais touche infiniment souvent la droite  $p(\ell) = \frac{5}{3}\ell - 1$ . Notons que cette suite (mais pas sa complexité) était déjà connue pour  $r_n = 2^n$  : elle définit la transformation de DEL JUNCO-RUDOLPH [5].

**11.3 Remarques.** — L'algorithme employé tout au long de cet article pourrait être utilisé pour calculer la complexité d'un système de rang un général (voir [6] pour les définitions et exemples). La connaissance de la suite  $S_n(c+1) - S_n(c)$ , où  $S_n(c)$  est le nombre de configuration de séparateurs possibles dans  $c$  trous consécutifs entre blocs  $B_n$ , donne toujours la suite des différences d'une suite majorant  $p(\ell)$ , mais seule une analyse fine permet de passer d'une majoration à une estimation ; et la majoration elle-même devient vite sans intérêt (exponentielle) quand le nombre de séparateurs à chaque étape croît, même lentement. Une question intéressante est la complexité du rang un d'Ornstein [11] :

CONJECTURE 2 : la complexité de la transformation d'Ornstein et la complexité minimale d'une suite définissant une transformation fortement mélangeante ont une croissance au moins super-polynômiale.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARNOUX (P.) et RAUZY (G.). — *Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$* , Bull. Soc. Math. France., t. **119**, 1991, p. 199-215.
- [2] CHACON (R.V.). — *Weakly mixing transformations which are not strongly mixing*, Proc. Amer. Math. Soc., t. **22**, 1969, p. 559-562.
- [3] DEKKING (F.M.). — *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*, Zeit. Wahr., t. **41**, 1978, p. 221-239.
- [4] DEL JUNCO (A.), RAHE (A. M.) and SWANSON (M.). — *Chacon's automorphism has minimal self-joinings*, J. Analyse Math., t. **37**, 1980, p. 276-284.

- [5] DEL JUNCO (A.) and RUDOLPH (D.J.). — *A rank-one, rigid, simple, prime map*, Ergodic Th. Dyn. Syst. 7, t. 2, 1987, p. 229–247.
- [6] FERENCZI (S.). — *Systèmes de rang fini*, Thèse d'Etat, Université d'Aix-Marseille 2, 1990.
- [7] FIELDSTEEL (A.). — *An uncountable family of prime transformations not isomorphic to their inverses*, preprint, vers 1980.
- [8] HERMAN (R.H.), PUTNAM (I.F.) and SKAU (C.F.). — *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, International J. of Maths 3, t. 6, 1992, p. 827–864.
- [9] HOST (B.). — *Dimension groups and substitution dynamical systems*, Prétirage du Laboratoire de Mathématiques Discrètes, 1994.
- [10] MOSSE (B.). — *Notions de reconnaissabilité pour les substitutions et complexité des suites automatiques*, soumis.
- [11] ORNSTEIN (D.S.). — *On the root problem in ergodic theory*, Proc. of the Sixth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press, 1970, p. 347–356.