BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMED MKAOUAR

Sur le développement en fraction continue de la série de Baum et Sweet

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 3 (1995), p. 361-374
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_3_361_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 361–374.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE LA SÉRIE DE BAUM ET SWEET

PAR

MOHAMED MKAOUAR (*)

RÉSUMÉ. — Baum et Sweet ont donné en 1976 un exemple d'élément algébrique sur $\mathbb{F}_2(X)$ de degré 3 dont le développement en fraction continue est à quotients partiels de degrés bornés. L'objet principal de ce travail est de montrer d'une part que ce développement n'est pas engendré par un automate fini et d'autre part qu'il est engendré par une substitution de longueur non constante sur un alphabet à 20 lettres.

ABSTRACT. — Baum and Sweet gave in 1976 an example of algebraic element on $\mathbb{F}_2(X)$ of degree 3 which has a bounded continued fraction expansion. Our principal result is first to prove that this expansion is not generated by a finite automaton, and then that it is generated by a finite substitution of non-constant length on an alphabet of 20 letters.

1. Introduction

On ne connaît aucun nombre réel algébrique de degré supérieur à 3, dont le développement en fraction continue est à quotients partiels bornés (voir par exemple [SHA] et [P-S]). Plus de choses sont connues dans le cas des séries formelles

$$\sum a_n X^{-n}$$

sur un corps fini $\mathbb{F}_p$ de caractéristique p qui sont algébriques sur le corps de fractions rationnelles $\mathbb{F}_p(X)$: en 1976, BAUM et SWEET ont donné dans [B-S1] le premier exemple d'une série formelle de degré 3 en caractéristique $p = 2$, dont les quotients partiels ne prennent qu'un nombre fini de valeurs ainsi que des exemples dont les quotients partiels prennent une infinité de valeurs. Ce travail a été poursuivi par BAUM et

(*) Texte reçu le 8 juillet 1993, révisé le 6 décembre 1993 et le 24 janvier 1994.
M. MKAOUAR, Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématiques, Sfax 3038, Tunisie.
Classification AMS : 11 A 55, 11 B 85, 30 B 70.

Sweet dans [B-S2]. Comme l'algébricité de $f = \sum a_n X^{-n}$ équivaut à la p-automaticité de la suite (a_n) d'après le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [C-K-M-R], Mendès France a posé la question naturelle suivante : *si les quotients partiels de f ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, forment-ils eux aussi une suite p-automatique ?*

En d'autres termes ce type de régularité de la suite (a_n) passe-t-il à la suite des quotients partiels ? On voit que la réponse à cette question suppose qu'on sache, d'une part identifier les séries algébriques à quotients partiels prenant un nombre fini de valeurs, d'autre part, donner une expression (explicite) de ces quotients partiels, enfin montrer la p-automaticité en utilisant ce développement explicite. En 1986, Mills et Robbins ont donné des exemples de telles séries avec des développements en fraction continue explicites, et en particulier les seuls exemples connus en caractéristique $p > 2$ [M-R].

En 1988, Allouche, Bétréma et Shallit ont montré dans [ALL1] et [A-B-S] que, pour chaque exemple donné dans [M-R], avec $p > 3$, la suite des quotients partiels est p-automatique. La méthode utilisée ne permettait pas d'étudier l'exemple initial donné en caractéristique 2 par Baum et Sweet. Nous allons montrer que, pour cet exemple, la suite des quotients partiels n'est pas q-automatique (pour tout entier $q \geq 2$), mais qu'elle est substitutive.

2. Substitutions

(Voir [EIL], [QUE] et [MAU].)

Soit Σ un alphabet fini contenant deux lettres au moins. Les éléments de Σ^i sont appelés *mots de longueur i* ($i \geq 1$). On convient que Σ^0 est l'ensemble dont le seul élément est le mot vide et on pose

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

l'ensemble des mots finis sur Σ, et $M(\Sigma)$ l'ensemble des mots finis et infinis sur Σ. Si $m \in \Sigma^*$, on note $|m|$ la longueur du mot m.

Définition 1. — Soit σ une application de Σ dans Σ^*. Par concaténation, σ se prolonge en une application de $M(\Sigma)$ dans lui-même en posant :

$$\text{pour tout } (m', m'') \in \Sigma^{*2}, \quad \sigma(m'm'') = \sigma(m')\sigma(m'')$$

et, pour tout $m \in \Sigma^{\mathbb{N}}$,

$$\sigma(m) = \sigma(m_0)\sigma(m_1) \cdots \sigma(m_n) \cdots \quad \text{si } m = m_0 \cdots m_n \cdots.$$

L'application σ ainsi obtenue est appelée *substitution* sur l'alphabet Σ. Si de plus, $|\sigma(a)| = q$ pour tout $a \in \Sigma$, alors l'application σ est appelée une *q-substitution.*

Soit $\ell \in \Sigma$ telle que $\sigma(\ell) \in \ell\Sigma^*$. On munit $M(\Sigma)$ de la métrique naturelle ρ :

$$\rho(m_0m_1m_2\cdots; m'_0m'_1m'_2\cdots) = \frac{1}{\inf\{n \geq 1 \mid m_{n-1} \neq m'_{n-1}\}}.$$

En désignant par σ^n la n-ème itérée de σ, on voit que la suite $(\sigma^n(x))$ converge vers un élément $s \in \ell\Sigma^{\mathbb{N}}$ qui est point fixe de la substitution σ :

$$\sigma(s) = s.$$

DÉFINITION 2. — Soient σ une substitution sur l'alphabet fini Σ, Ξ un alphabet fini et τ une application de Σ vers Ξ. On dit que le mot infini $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$ est *engendré* par une substitution s'il existe $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tel que $\sigma(s) = s$ et $\tau(s) = t$. Si σ est une q-substitution, on dit que t est *engendré par une q-substitution* (ou un *q-automate*).

3. Énoncé du résultat

Il est démontré dans [B-S1] que l'équation

$$Xf^3 + f + X = 0$$

admet une solution unique f dans $\mathbb{F}_2((X^{-1}))$ admettant des quotients partiels appartenant à $\{1, X, X+1, X^2, X^2+1\}$ et donc bornés. Par ailleurs, il est démontré dans [M-R] que le développement en fraction continue de f est donné par

$$f = [1, X, \Gamma_\infty],$$

où Γ_∞ est la suite définie comme suit. Notons T l'ensemble de polynômes sur $\mathbb{F}_2$ défini par :

$$T = \{X, X+1, X^2, X^2+1\}.$$

Si $\Omega = (w_j)_{1\leq j\leq m} \in T^m$ est une suite de quotients partiels, nous notons :

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\Omega} &= w_m w_{m-1}\cdots w_2 w_1, \\ \tau(\Omega) &= (w_1+1)w_2\cdots w_m, \\ \Omega^{(n)} &= \underbrace{\Omega\,\Omega\cdots\Omega}_{n \text{ fois}}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Pour n impair, $n \geq 3$ notons Λ_n la suite palindromique :

$$\Lambda_n = X, X+1, X^2, (X, X^2)^{((2^{n-1}-4)/3)}, X+1, X.$$

- Pour n pair, $n \geq 4$, notons Λ_n la suite palindromique :

$$\Lambda_n = X+1, X^2+1, (X, X^2)^{((2^{n-1}-5)/3)}, X, X^2+1, X+1.$$

Soit

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= X+1,\\
\Gamma_1 &= \Gamma_0, X^2+1,\\
\Gamma_2 &= \Gamma_1, X, X^2, X+1,\\
\Gamma_n &= \Gamma_{n-1}, \tau(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}), \Lambda_n, \Gamma_{n-3} \quad \text{pour} \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Comme Γ_n commence par Γ_{n-1} alors Γ_n admet une limite, notée Γ_∞.

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *La suite X, Γ_∞ est substitutive*

THÉORÈME 2. — *La suite X, Γ_∞ n'est pas 2-automatique.*

THÉORÈME 3. — *La suite X, Γ_∞ n'est pas q-automatique pour aucun nombre $q \geq 2$.*

4. Démonstration du théorème 1

Soient

$$H = \{e, a_i, b_j, c_k, d_\ell\,;\ 0 \leq i \leq 5,\ 0 \leq k \leq 2,\ 0 \leq j \leq 5,\ 0 \leq \ell \leq 3\}$$

et H^* l'ensemble des mots finis formés par des éléments de H. Soit P la projection $P : H \to T$ définie par :

$$P(e) = P(a_i) = X, \quad P(b_j) = X+1, \quad P(c_k) = X^2, \quad P(d_\ell) = X^2+1.$$

Soit α la substitution sur H et soit π la permutation de H définies respectivement par :

$$\alpha : \begin{cases}
e \mapsto eb_0 & b_0 \mapsto d_0 & c_0 \mapsto a_5c_0a_5 & d_0 \mapsto a_0c_1b_4\\
a_0 \mapsto a_2a_1 & b_1 \mapsto d_1 & c_1 \mapsto b_2c_0b_1 & d_1 \mapsto a_5c_0b_1\\
a_1 \mapsto b_3b_5 & b_2 \mapsto d_2 & c_2 \mapsto a_0c_1a_3 & d_2 \mapsto b_2c_0a_5\\
a_2 \mapsto c_2 & b_3 \mapsto d_3 & & d_3 \mapsto b_5c_1a_3,\\
a_3 \mapsto a_4a_2 & b_4 \mapsto a_4b_0 & & \\
a_4 \mapsto b_4b_0 & b_5 \mapsto b_3a_1 & & \\
a_5 \mapsto c_0 & & &
\end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} e \mapsto e & b_0 \mapsto b_3 & c_0 \mapsto c_0 & d_0 \mapsto d_3 \\ a_0 \mapsto a_3 & b_1 \mapsto b_2 & c_1 \mapsto c_1 & d_1 \mapsto d_2 \\ a_1 \mapsto a_4 & b_2 \mapsto b_1 & c_2 \mapsto c_2 & d_2 \mapsto d_1 \\ a_2 \mapsto a_2 & b_3 \mapsto b_0 & & d_3 \mapsto d_0. \\ a_3 \mapsto a_0 & b_4 \mapsto b_5 & & \\ a_4 \mapsto a_1 & b_5 \mapsto b_4 & & \\ a_5 \mapsto a_5 & & & \end{cases}$$

Montrons que :

$$X\Gamma_\infty = P(\alpha^\infty e).$$

Posons $I_0 = \{b_3, b_5, d_3\}$ et $J_0 = \{b_0, b_4, d_0\}$ et soient :

- I la partie de H^* formée des mots commençant par un élément de I_0 ;
- J la partie de H^* formée des mots se terminant par un élément de J_0.

Soient δ et γ les applications définies par :

- $\delta : I_0 \to H$ avec $\delta(b_3) = a_2$, $\delta(b_5) = a_0$ et $\delta(d_3) = c_2$;
- $\gamma : J_0 \to H$ avec $\gamma(b_0) = a_2$, $\gamma(b_4) = a_3$ et $\gamma(d_0) = c_2$.

On prolonge δ et γ respectivement sur I et J de la façon suivante : si $W = w_1w_2...w_{m-1}w_m$, alors :

$$\delta(W) = \delta(w_1)w_2...w_m \quad \text{et} \quad \gamma(W) = w_1...w_{m-1}\gamma(w_m).$$

On remarque que π est une bijection de I_0 dans J_0 et que π^2 est l'identité puis que $\gamma = \pi\delta\pi$. On vérifie aussi que $\alpha\circ\delta = \delta\circ\alpha$ sur I, et que $\alpha\circ\gamma = \gamma\circ\alpha$ sur J. Soit maintenant Γ'_n la suite définie par :

$$\Gamma'_0 = b_0, \quad \Gamma'_1 = b_0d_0, \quad \Gamma'_2 = b_0d_0a_0c_1b_4$$

$$\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1}\,\delta\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\,\Lambda'_n\Gamma'_{n-3} \quad \text{pour } n \geq 3.$$

Cette définition de la suite Γ'_n a un sens car $\Gamma'_n \in J$; donc $\pi(\overleftarrow{\Gamma'_n})$ est dans I. La suite Λ'_n est définie par :

- si n est impair, $n \geq 3$, alors $\Lambda'_n = a_1b_2c_0(a_5c_0)^{((2^{n-1}-4)/3)}b_1a_4$
- si n est pair, $n \geq 4$, alors $\Lambda'_n = b_5d_2(a_5c_0)^{((2^{n-1}-5)/3)}a_5d_1b_4$.

On vérifie que $\pi(\overleftarrow{\Lambda'_n}) = \Lambda'_n$ et que $P(\Lambda'_n) = \Lambda_n$ puis que $P(\overleftarrow{\Gamma'_n}) = \overleftarrow{P(\Gamma'_n)}$. Pour démontrer le THÉORÈME 1 nous avons besoin de quelques lemmes.

LEMME 1. — *Pour tout $n \geq 3$, on a* $\alpha(\Lambda'_n) = b_3\Lambda'_{n+1}b_0$.

Preuve. — Si n est pair, $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}\alpha(\Lambda'_n) &= \alpha(b_5d_2)(\alpha(a_5c_0))^{((2^{n-1}-5)/3)}\alpha(a_5d_1b_4)\\ &= b_3a_1b_2c_0a_5(c_0a_5c_0a_5)^{((2^{n-1}-5)/3)}c_0a_5c_0b_1a_4b_0\\ &= b_3\Lambda'_{n+1}b_0.\end{aligned}$$

Si n est impair, $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}\alpha(\Lambda'_n) &= \alpha(a_1b_2c_0)(\alpha(a_5c_0))^{((2^{n-1}-4)/3)}\alpha(b_1a_4)\\ &= b_3b_5d_2a_5c_0a_5(c_0a_5c_0a_5)^{((2^{n-1}-4)/3)}c_0a_5d_1b_4b_0\\ &= b_3\Lambda'_{n+1}b_0. \quad \square\end{aligned}$$

LEMME 2. — *Pour tout $n \geq 0$ on a :*

(i) $\alpha(e\Gamma'_n) = e\Gamma'_{n+1}$

(ii) $\alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_n}))b_3 = \pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n+1}})$.

Preuve. — (Par récurrence sur n.) Vérifions tout d'abord que (i) et (ii) sont vraies pour $n = 0$, 1 et 2 :

- Si $n = 0$, on a :

$$\alpha(e\Gamma'_0) = eb_0d_0 = e\Gamma'_1,$$

$$\alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_0}))b_3 = \alpha(b_3)b_3 = d_3b_3 = \pi(d_0b_0) = \pi(\overleftarrow{\Gamma'_1}).$$

- Si $n = 1$, on a :

$$\alpha(e\Gamma'_1) = eb_0d_0a_0c_1b_4 = e\Gamma'_2,$$

$$\alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_1}))b_3 = \alpha(d_3b_3)b_3 = b_5c_1a_3d_3b_3 = \pi(b_4c_1a_0d_0b_0) = \pi(\overleftarrow{\Gamma'_2}).$$

- Si $n = 2$, on a :

$$\alpha(e\Gamma'_2) = eb_0d_0a_0c_1b_4a_2a_1b_2c_0b_1a_4b_0 = e\Gamma'_3,$$

$$\begin{aligned}\alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_2}))b_3 &= \alpha(b_5c_1a_3d_3b_3)b_3 = b_3a_1b_2c_0b_1a_4a_2b_5c_1a_3d_3b_3\\ &= \pi(b_0a_4b_1c_0b_2a_1a_2b_4c_1a_0d_0b_0) = \pi(\overleftarrow{\Gamma'_3}).\end{aligned}$$

- Supposons maintenant que $n \geq 3$. On a

$$\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1}\delta\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\Lambda'_n\Gamma'_{n-3} \tag{1}$$

et l'hypothèse de récurrence nous donne :

(i) $\alpha(e\Gamma'_{n-1}) = e\Gamma'_n$ et $b_0\alpha(\Gamma'_{n-3}) = \Gamma'_{n-2}$;

(ii) $\alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)b_3 = \pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-2}})$.

En appliquant α dans (1), on a :

$$\alpha(e\Gamma'_n) = \alpha(e\Gamma'_{n-1})\,\alpha\big(\delta\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\big)\alpha(\Lambda'_n)\,\alpha(\Gamma'_{n-3}).$$

D'après le LEMME 1 et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha(e\Gamma'_n) &= e\Gamma'_n\,\delta\big(\alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\big)b_3\Lambda'_{n+1}b_0\alpha(\Gamma'_{n-3}) \\
&= e\Gamma'_n\,\delta\big(\alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)b_3\big)\Lambda'_{n+1}\Gamma'_{n-2} \\
&= e\Gamma'_n\,\delta\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-2}})\big)\Lambda'_{n+1}\Gamma'_{n-2} \\
&= e\Gamma'_{n+1}.
\end{aligned}$$

Pour démontrer (ii), il suffit de remarquer que :

$$\pi(\overleftarrow{\Gamma'_n}) = \pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\,\Lambda'_n\gamma(\Gamma'_{n-3})\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-1}})$$

et par hypothèse de récurrence et le LEMME 1 on a :

$$\begin{aligned}
\alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_n})\big)b_3 &= \alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\alpha(\Lambda'_n)\alpha\big(\gamma(\Gamma'_{n-3})\big)\alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-1}}))b_3 \\
&= \alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)b_3\,\Lambda'_{n-3}b_0\gamma\big(\alpha(\Gamma'_{n-3})\big)\alpha\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-1}})\big)b_3 \\
&= \pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-2}})\,\Lambda'_{n+1}\,\gamma\big(b_0\alpha(\Gamma'_{n-3})\big)\pi(\overleftarrow{\Gamma'_n}) \\
&= \pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-2}})\,\Lambda'_{n+1}\,\gamma\big(b_0\alpha(\Gamma'_{n-2})\big)\pi(\overleftarrow{\Gamma'_n}) \\
&= \pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n+1}}).
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration du théorème 1. — D'après le LEMME 2, on a $\alpha^n(e) = e\Gamma'_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut vérifier facilement (par récurrence sur n) que $P(\Gamma'_n) = \Gamma_n$. En effet l'égalité est vraie pour $n = 0$, 1 et 2. Pour $n \geq 3$ on a :

$$\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1}\delta\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\Lambda'_n\Gamma'_{n-3},$$

$$P(\Gamma'_n) = P(\Gamma'_{n-1})P\big(\delta\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\big)P(\Lambda'_n)P(\Gamma'_{n-3}).$$

par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}P(\Gamma'_n) &= \Gamma_{n-1}\,\tau\big(P\big(\pi(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\big)\Lambda_n\Gamma_{n-3}\\ &= \Gamma_{n-1}\,\tau\big(P(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})\big)\Lambda_n\Gamma_{n-3}\\ &= \Gamma_{n-1}\,\tau(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}})\Lambda_n\Gamma_{n-3}\\ &= \Gamma_n. \quad \square\end{aligned}$$

5. Démonstration du théorème 2

Soit $\Theta : T \to \{a,b\}$ la projection définie par :

$$\Theta(X) = \Theta(X^2) = a, \quad \Theta(X+1) = \Theta(X^2+1) = b.$$

On pose $S_n = \Theta(\Gamma_n)$. Si Γ_∞ est 2-automatique, alors S_∞ l'est aussi. Supposons que S_∞ soit 2-automatique. Il existe alors un alphabet fini Σ, une 2-substitution $\sigma : \Sigma \to \Sigma^*$, un point fixe S'_∞ de σ et une projection $P : \Sigma \to \{a,b\}$ tels que $S_\infty = P(S'_\infty)$. Soient $A = P^{-1}\{a\}, B = P^{-1}\{b\}$ et donc $\Sigma = A \cup B$. Soit S'_n le début de S'_∞ tel que $S_n = P(S'_n)$. Comme on a

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1}\,\tau\big(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}\big)\Lambda_n\Gamma_{n-3},$$

alors S_n satisfait une relation analogue à celle de Γ_n et par suite on peut écrire S_n de la manière suivante :

$$S_n = S_{n-1}\,\tau'\big(\overleftarrow{S_{n-3}}\big)\Lambda'_n S_{n-3},$$

où τ' est l'application définie par $\tau'(a) = b$ et $\tau'(b) = a$, et prolongée sur $\{a,b\}^*$ de la manière suivante :

$$\text{si } w = w_1w_2\cdots w_m, \quad \text{alors } \tau'(w) = \tau'(w_1)w_2\cdots w_m.$$

La suite Λ'_n est la suite palindromique définie par :

- si n est pair, $n \geq 4$, alors $\Lambda'_n = bb(a)^{((2^n-7)/3)}bb$;
- si n est impair, $n \geq 3$, alors $\Lambda'_n = ab(a)^{((2^n-5)/3)}ba$.

Comme $S_n = P(S'_n)$, il existe une partie Λ''_n dans S'_n telle que l'on ait $\Lambda'_n = P(\Lambda''_n)$.

Remarque 1. — La suite Λ''_n privée de ses deux premiers et deux derniers termes est un élément de A^*.

REMARQUE 2. — Soit $u_n = |\Gamma_n|$. Comme on a

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1}\,\tau\big(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}\big)\Lambda_n\Gamma_{n-3},$$

alors $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$ et

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-3} + \tfrac{1}{3}\big(2^n + (-1)^{n+1} + 6\big).$$

Il en résulte :

$$u_n = \frac{4}{3}2^n + \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \lambda_3 r_3^n + \lambda_4(-1)^{n+1} + \lambda_5$$

où
$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{26 + 10r_i - r_i^2}{116} & \text{pour } 1 \le i \le 3,\\[2mm] \lambda_4 = \dfrac{1}{12}, \quad \lambda_5 = -1, \end{cases}$$

et où r_1, r_2 et r_3 sont solutions de l'équation $r^3 - r^2 - 2 = 0$:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\sqrt[3]{28 - \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} + \dfrac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} + \dfrac{1}{3},\\[2mm] r_2 = \dfrac{\sqrt[3]{28 - \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3}j + \dfrac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3}j^2 + \dfrac{1}{3},\\[2mm] r_3 = \dfrac{\sqrt[3]{28 - \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3}j^2 + \dfrac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3}j + \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

avec $j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

On vérifie facilement que $1 < |r_2| = |r_3| < r_1 < 2$ et donc :

$$u_n = \tfrac{4}{3}2^n + \lambda_1 r_1^n + \mathrm{o}(r_1^n).$$

LEMME 3. — *Posons :*

$$S_n = X_n Y_n S_{n-3} \qquad \textit{avec} \quad |X_n| = 2^n - 1,$$

$$S'_\infty = W_0 W_1 \cdots W_n \cdots \quad \textit{avec} \quad |W_n| = 2^n,\ \forall n \ge 1 \ \textit{et}\ |W_0| = 2.$$

Soit A_n le facteur de S'_n dont les indices de début et de fin sont ceux de Y_n dans S_n. Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m_0$ on a :

(i) *A_n est suffixe de Λ''_n,*

(ii) $|A_n| < |A_{n+1}| < 2|A_n|$,

(iii) *A_n est préfixe de W_n.*

Preuve. — Soient $u_n = |\Gamma_n| = |S'_n|$ et

$$S'_n = x(0)x(1)x(2)\cdots x(2^n-1)\cdots x(u_n).$$

Si on effectue une coupure sur S'_n au niveau de $x(2^n-1)$, alors cette coupure est faite exactement sur Λ''_n. En effet, on a

$$\begin{aligned} u_{n-1}+u_{n-3} &= \tfrac{5}{6}2^n + \mathrm{O}(r_1^n),\\ u_{n-1}+u_{n-3}+|\Lambda''_n| &= \tfrac{7}{6}2^n + \mathrm{O}(r_1^n), \end{aligned}$$

et par suite

$$u_{n-1}+u_{n-3} \le 2^n - 1 \le u_{n-1}+u_{n-3}+|\Lambda''_n|,$$

ce qui montre que la coupure se fait sur Λ''_n. Donc A_n est suffixe de Λ''_n.

Soit $v_n = |A_n| - 2$ et montrons que $v_n < v_{n+1} < 2v_n$. On a :

$$v_n = u_{n-1}+u_{n-3}+|\Lambda''_n| - 2^n - 1.$$

Or $u_n = \frac{4}{3}2^n + \lambda_1 r_1^n + \mathrm{o}(r_1^n)$, ce qui donne

$$v_n = 2^n + \mathrm{o}(2^n), \quad 2v_n - v_{n+1} = \lambda_1(r_1-1)r_1^{n-2} + \mathrm{o}(r_1^n)$$

et comme $r_1 > 1$, alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m_0$, on a $v_n < v_{n+1} < 2v_n$. Si l'on définit alors les W_n comme dans l'énoncé, on constate que le choix de X_n et l'inégalité $|A_n| \le |\Lambda''_n| < 2^{n-1}$ impliquent que A_n est préfixe de W_n.

REMARQUE 3.—Les A_n sont formés par des éléments de A, à l'exception de leurs deux derniers termes.

Suite de la démonstration du théorème 2. — Le lemme précédent peut se traduire par le schéma suivant :

$S'_\infty =$	W_{n-1}			W_{n-1}	
$S'_\infty =$				A_n	
$S'_\infty =$	S_{n-1}	$\tau'(S_{n-3})$		Λ'_n	
		$\frac{5}{6}2^n + \mathrm{O}(r_1^n)$	2^n	$\frac{7}{6}2^n + \mathrm{O}(r_1^n)$	

On remarque que A_{n+1} est préfixe de $\sigma(A_n)$ et que $P(A_n)$ commence par $(a)^{v_n}$. Soit C un préfixe de A_n. Si $|\sigma^i(C)| \leq v_{n+i}$ alors $\sigma^i(C)$, qui est préfixe de A_{n+i}, a une image par P qui ne contient que des a. Si $|\sigma^i(C)| > v_{n+i}$ alors $P(\sigma^i(C))$ contient un b. Conclusion, si l'on a

$$(*) \qquad \left|\sigma^i(C)\right| \leq v_{n+i} \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < p,$$

alors le mot C contient une lettre c_p de l'alphabet Σ telle que :

$$(**) \qquad P\big(\sigma^i(c_p)\big) \begin{cases} = (a)^{2^i} & \text{pour } 0 \leq i < p, \\ \neq (a)^{2^p} & \text{pour } i = p, \end{cases}$$

On se fixe un entier p. Comme $|\sigma(C)| = 2^i|C|$ et comme

$$v_n = \frac{1}{6}2^n + \lambda_1 r_1^n + \circ(r_1^n) = 2v_{n-1} + \lambda_1 r_1^{n-1}(r_1 - 2) + \circ(r_1),$$

on a $v_{n+1} < 2v_n$ pour n assez grand. On en déduit que, pour n assez grand, les conditions (*) sont vérifiées si :

$$2^{p-1}|C| \leq v_{n+p-1}, \quad v_{n+p} < 2^p|C|.$$

Si, pour n assez grand, l'intervalle $]2^{-p}v_{n+p}, 2^{-p+1}v_{n+p-1}]$ contient un entier (que l'on prendra pour $|C|$), l'alphabet Σ contient une lettre c_p vérifiant (**). Or la longueur

$$2^{-p}(2v_{n+p-1} - v_{n+p}) \sim 2^{-p}\lambda_1 r_1^{n-p+1}(2 - r_1)$$

de cet intervalle tendant vers l'infini avec n, ceci est toujours vérifié. Pour chaque entier p, l'alphabet Σ contient donc une lettre c_p vérifiant (**). Ces lettres sont distinctes ce qui contredit la finitude de l'alphabet Σ. $\square$

COROLLAIRE. — *La suite Γ_∞ n'est pas 2^p-automatique, pour tout $p \geq 1$.*

Le corollaire est une conséquence immédiate d'un théorème de Cobham [COB1]. $\square$

6. Démonstration du théorème 3

DÉFINITION 3. — Soit m un mot infini sur l'alphabet A et $a \in A$. On note $\Pi(a,m,n)$ le nombre d'apparitions de a dans $m(0)m(1)...m(n-1)$.

La densité asymptotique inférieure et la densité asymptotique supérieure de a dans m sont respectivement les limites :

$$d^-(a,m) = \liminf \frac{\Pi(a,m,n)}{n},$$
$$d^+(a,m) = \limsup \frac{\Pi(a,m,n)}{n}\cdot$$

Si $d^-(a,m) = d^+(a,m)$ alors cette valeur commune est notée $d(a,m)$ et est appelée la *densité asymptotique* de a dans m.

THÉORÈME 4 [COB2]. — *Soit m une suite q-automatique. Alors on a $d(a,m) = 0$ si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que*

$$q^{u-1} \leq v < q^u \quad \text{et} \quad m(n) \neq a$$

pour tout entier n de la forme

$$n = jq^{u+k} + vq^k + i$$

avec j, $k \geq 0$ et $0 \leq i < q^k$ (autrement dit, tel que le développement en base q de n contienne celui de v).

Nous avons déjà montré que la suite Γ_∞ n'est pas 2^p-automatique ($p \geq 1$) ; il nous reste à montrer que si $\log_2 q$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$, Γ_∞ n'est pas q-automatique. Dans la démonstration de ce théorème, on va utiliser le THÉORÈME 4.

On a $\Gamma_n = m(1)m(2)\cdots m(u_n)$. Comme Γ_n se termine soit par $X+1$, soit par X^2+1, alors $m(u_n)$ appartient à $\{X+1, X^2+1\}$. On vérifie que $d(X+1,\Gamma_\infty) = d(X^2+1,\Gamma_\infty) = 0$. Par ailleurs, si $S_n = \Theta(\Gamma_n)$, où Θ est l'application définie sur T par

$$\Theta(X^2+1) = \Theta(X+1) = b, \quad \Theta(X) = \Theta(X^2) = a,$$

et :

- si $S_n = m'(1)m'(2)\cdots m'(u_n)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $m'(u_n) = b$,
- si $S_\infty = \Theta(\Gamma_\infty)$, alors $d(b, S_\infty) = 0$.

Considérons q tel que $\log_2 q$ ne soit pas dans $\mathbb{N}$ et montrons que S_∞ n'est pas q-automatique. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout entier $v \geq 1$, il existe $(j,k,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que

$$(jq^u + v)q^k \leq u_n \leq (jq^u + v + 1)q^k - 1,$$

où u est l'unique entier tel que $q^{u-1} \leq v < q^u$, et le théorème de Cobham permettra de conclure.

Soit $v \geq 1$ et soit u l'unique entier tel que $q^{u-1} \leq v < q^u$. Comme $u_n = |\Gamma_n| = |S_n| \sim \frac{4}{3}2^n$, on peut écrire u_n sous la forme :

$$u_n = c_n 2^n, \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{4}{3}\cdot$$

Soit $0 < \delta < 1/(4q^u)$ pour que

$$\frac{q^u + v}{\frac{4}{3} - \delta} < \frac{q^u + v + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \delta}\cdot$$

Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on ait $\frac{4}{3} - \delta < c_n < \frac{4}{3} + \delta$, et $q^{-k} < \frac{1}{4}$ pour tout $k > 1$.

Soit $\mathrm{F} = \{k \log_2 q,\ k > n_0,\ k \in \mathbb{N}\}$; alors F est dense modulo 1 (car $\log_2 q$ n'est pas rationnel). Donc, il existe $n, k > n_0$ tel que

$$\log_2 \frac{q^u + v}{\frac{4}{3} - \delta} < n - k\log_2 q < \log_2 \frac{q^u + v + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \delta}$$

et par suite :

$$\log_2 \frac{q^u + v}{\frac{4}{3} - \delta} + k\log_2 q < n < \log_2 \frac{q^u + v + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \delta} + k\log_2 q.$$

Comme $\frac{4}{3} - \delta < c_n < \frac{4}{3} + \delta$ et $q^{-k} < \frac{1}{4}$, il vient :

$$\begin{gathered}\log_2 \frac{(q^u + v)q^k}{c_n} < n < \log_2 \frac{(q^u + v + 1 - q^{-k})q^k}{c_n},\\ (q^u + v)q^k < c_n 2^n < (q^u + v + 1)q^k - 1,\\ (q^u + v)q^k < u_n < (q^u + v + 1)q^k - 1. \quad \square\end{gathered}$$

6. Conclusion

Notre travail nous conduit à reformuler la question posée par MENDÈS FRANCE de la manière suivante : *si f est algébrique sur $\mathbb{F}[X]$ et si son développement en fraction continue est à quotients partiels de degré borné, alors ce développement est-il toujours engendré par une substitution sur un alphabet fini ?*

Je remercie vivement Jean-Paul ALLOUCHE, Christian MAUDUIT et Jeffry SHALLIT pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches, ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir.

BIBLIOGRAPHIE

[AL1] Allouche (J.-P.). — *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math., t. **5**, 1987, p. 239–266.

[ALL 2] Allouche (J.-P.) Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles. — C. R. Acad. Sciences, t. **307**, 1988, p. 631–633.

[A-B-S] Allouche (J.-P.), Betrema (J.) et Shallit (J.). — *Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre*, RAIRO Informatique Théorique et Applications, t. **23**, 1989, p. 235–249.

[A-F-V] Allouche (J.-P.), Mendès France (M.) et Van der Poorten (A.J.). — *An infinite product with bounded partiel quotients*, Acta Arithmetica, t. **59**, 1991, p. 171–182.

[B-S 1] Baum (L.E.) et Sweet (M.M.). — *Continued fractions of algebric power series in caracteristic* 2, Ann. of Math., t. **103**, 1976, p. 593–610.

[B-S 2] Baum (L.E.) et Sweet (M.M.). — *Badly approximable power series in characteristic* 2, Ann. of Math., t. **105**, 1977, p. 573–580.

[C-K-M-R] Christol (G.), Kamae (T.), Mendès France et Rauzy (G.) Suites algébriques, automates et substitutions. — Bull. Soc. Math. France, t. **108**, 1980, p. 401–419.

[COB 1] Cobham (A.). — *On the base-dependence of sets of numbers reconizable by finite automata*, Math. Syst. Theory, t. **3**, 1969, p. 186–192.

[COB2] Cobham (A.). — *Uniform tag sequences*, Math. Syst. Theory, t. **6**, 1972, p. 164–192.

[EIL] Eilenberg (S.). — *Automata, languages and machines, vol. A.* — Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1974.

[MAU] Mauduit (C.). — *Substitutions et ensemble normaux*, Habilitation à diriger des recherches, 1989, Université Aix Marseille II.

[MKA] Mkaouar (M.). — *Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles*, Thèse de Doctorat, 1993, Université Claude Bernard Lyon I.

[M-R] Mills (W.H.) et Robbins (D.P.). — *Continued fractions for certain algebric power series*, J. of Number Theory, t. **23**, 1986, p. 388–404.

[QUE] Queffélec (M.). — *Substitution dynamical systems-spectral analysis.* — Lecture Notes in Mathematics **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[SHA] Shallit (J.O.). — *Real numbers with bounded partial quotients a survey*, L'Enseignement Math., t. **38**, 1992, p. 151–187.

[S-V] Shallit (J.O.) et Van der Poorten (A.J.). — *Folded continued fractions*, J. Number Theory, t. **40**, 1992, p. 237–250.