BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC WAMBST

Homologie de l'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels sur le cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 3 (1996), p. 523-544

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_3_523_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 523–544.

HOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE QUANTIQUE DES SYMBOLES PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SUR LE CERCLE

PAR

MARC WAMBST (*)

RÉSUMÉ. — Soit Ψ_q l'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels sur le cercle. Nous construisons des quasi-isomorphismes entre la résolution standard de Hochschild de Ψ_q et de « petits » complexes. Nous en déduisons l'homologie de Hochschild et les premiers groupes d'homologie cyclique de Ψ_q. Ces constructions donnent naturellement lieu à deux 1-cocycles cycliques qui s'avèrent être ceux construits par Khesin, Lyubashenko et Roger. Tous les groupes d'homologie que nous considérons sont topologiques dans un sens que nous précisons.

ABSTRACT. — Let Ψ_q be the quantum algebra of pseudo-differential symbols on the circle. We construct quasi-isomorphisms between the standard Hochschild complex of Ψ_q and « small » complexes. We deduce the Hochschild homology and the first cyclic homology groups of Ψ_q. These constructions give naturally rise to two cyclic 1-cocycles which turn out to be the Lie cocycles constructed by Khesin, Lyubashenko and Roger. All homology groups considered here are topological in an appropriate sense.

Introduction

L'algèbre de Lie Ψ des symboles pseudo-différentiels sur le cercle est étudiée dans les articles [Kh-Kr], [Kh-Z1] et [Kh-Z2] où O. Kravchenko, B. Khesin et I. Zakharevich décrivent deux cocycles de Lie de Ψ définis grâce à une extension « logarithmique » de l'algèbre. Une version q-analogue (ou quantique) de ces cocycles est construite par B. Khesin, V. Lyubashenko et C. Roger dans [Kh-L-R]. La structure d'algèbre de

(*) Texte reçu le 14 septembre 1995, accepté le 26 février 1996.
M. WAMBST, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7, rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex (France).
Email : wambst@math.u-strasbg.fr, http ://galois.u-strasbg.fr.
Classification AMS : 16E40, 16S32, 81S05.

Mots clés : algèbre quantique, homologie cyclique, homologie de Hochschild, symboles pseudo-différentiels.

Lie de Ψ provient de manière naturelle de sa structure d'algèbre associative. On remarque que les cocycles de Lie de Kravchenko, Khesin et Zakharevich (resp. de Khesin, Lyubashenko et Roger) sont des 1-cocycles cycliques de Ψ (resp. de l'analogue quantique Ψ_q de Ψ). L'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique (topologiques) de Ψ ont été calculées par J.-L. Brylinski et E. Getzler dans [B-G].

Dans cet article, nous calculons explicitement l'homologie de Hochschild (topologique) et les premiers groupes d'homologie cyclique (topologique) de Ψ_q. Tous les groupes d'homologie et de cohomologie de Hochschild et cyclique que nous considérons sont «topologiques» dans le sens suivant. L'algèbre Ψ_q est complète pour une topologie définie relativement à sa filtration naturelle. Par complétion topologique de $\Psi_q \otimes \Psi_q$, on définit la notion de produit tensoriel topologique $\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q$. Les groupes d'homologie de Hochschild topologique $\widetilde{HH}_*(\Psi)$ et d'homologie cyclique topologique $\widetilde{HC}_*(\Psi_q)$ sont alors définis comme l'homologie de complexes standards construits avec le produit $\widetilde{\otimes}$.

Dans [K], C. Kassel calcule explicitement l'homologie de l'algèbre des opérateurs différentiels usuels et de son analogue quantique et décrit un 1-cocycle cyclique pour chacune de ces algèbres. Nous étendons les constructions de Kassel au cas de Ψ_q. Dans un premier temps, nous construisons des complexes de Koszul et de de Rham pour Ψ_q quasi-isomorphes à son complexe standard de Hochschild. Ceci nous permet de calculer l'homologie de Hochschild $\widetilde{HH}_*(\Psi_q)$ et les groupes d'homologie cyclique $\widetilde{HC}_i(\Psi_q)$ pour $i = 0, 1$. Nos constructions donnent naturellement lieu à des 1-cocycles dont nous montrons qu'ils sont ceux de [Kh-L-R]. Lorsque q est une racine de l'unité, nous décrivons de plus une famille infinie de 1-cocycles de Hochschild de Ψ_q.

Décrivons brièvement chacun des six paragraphes de l'article.

Au § 1, nous définissons un produit tensoriel topologique pour les modules filtrés et l'homologie de Hochschild et cyclique topologiques. Au § 2, nous rappelons la définition de Ψ_q. Nous explicitons un complexe de Koszul pour Ψ_q au § 3. Le § 4 est consacré au calcul des groupes d'homologie de Hochschild $\widetilde{HH}_*(\Psi_q)$ et cycliques $\widetilde{HC}_i(\Psi_q)$ pour $i = 0, 1$. Au § 5, nous décrivons des générateurs de $\widetilde{HC}^1(\Psi_q)$. Enfin, le § 6, est consacré au cas où $q = 1$.

Dans tout l'article, k désigne un corps de caractéristique nulle.

1. Homologie de Hochschild et cyclique topologiques de modules filtrés.

Nous rappelons brièvement la notion de produit tensoriel topologique pour certains modules filtrées. Ce produit tensoriel topologique permet de définir l'homologie topologique des algèbres filtrées.

Soit M un k-espace vectoriel muni d'une $\mathbb{Z}$-filtration :

$$\cdots \subset M_m \subset M_{m+1} \subset \cdots \subset \varinjlim_{n\to\infty} M_n = M\,.$$

• Le *complété* de M est le k-module $\widetilde{M}$ défini pour tout $m \in \mathbb{Z}$ par

$$M = \varinjlim_{m\to\infty} \widetilde{M}_m \quad \text{où} \quad \widetilde{M}_m = \varprojlim_{n\to-\infty} (M_m/M_n)$$

• Le module M est dit *complet* si l'application canonique $M \to \widetilde{M}$ est un isomorphisme.

• Un *morphisme filtré* est une application k-linéaire $f : M \to N$ entre deux modules filtrés telle qu'il existe un entier $|f| \in \mathbb{Z}$ vérifiant $f(M_m) \subset N_{m+|f|}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Un tel morphisme s'étend en un morphisme filtré $f : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$.

Soient A une k-algèbre, M un A-module à droite et N un A-module à gauche tous trois $\mathbb{Z}$-filtrés complets en tant que k-espaces vectoriels. Nous imposons à la multiplication de A et aux actions de module de M et N de respecter la filtration, c'est-à-dire que, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}, \quad M_m \cdot A_n \subset M_{m+n}, \quad A_m \cdot N_n \subset N_{m+n}.$$

De plus, dans tout cet article, nous supposons que l'on a la condition suivante :

(1.1) si on a $\alpha \in A_m$ et $\alpha \notin A_{m-1}$, $\mu \in M_n$, $\mu \notin M_{n-1}$ et $\nu \in N_n$ et $\nu \notin N_{n-1}$, alors on a $\mu\alpha \notin M_{m+n-1}$ et $\alpha\nu \notin N_{m+n-1}$.

Sous cette dernière condition, $M \otimes_A N$ hérite naturellement de la filtration de $M \otimes N$ donnée par :

$$(M \otimes N)_n = \sum_{p+q=n} M_p \otimes N_q \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Par définition, *le produit tensoriel topologique* de M et N au-dessus de A est le complété $M \mathbin{\widetilde{\otimes}_A} N$ du produit tensoriel $M \otimes_A N$ pour la filtration décrite ci-dessus. Ce produit tensoriel est clairement associatif. Il est « topologique » dans le sens de [G] pour la topologie de M (resp de N) pour laquelle les sous-modules M_n (resp. les sous-modules N_n) constituent une base de voisinages ouverts de 0. De plus, le produit tensoriel de deux morphismes filtrés de A-modules $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$ s'étend en un morphisme filtré $f \otimes g : M \mathbin{\widetilde{\otimes}_A} N \to M' \mathbin{\widetilde{\otimes}_A} N'$. En particulier, l'algèbre A est un module filtré sur le corps k, ce dernier étant muni de sa filtration triviale. On pose :

$$A \mathbin{\widetilde{\otimes}} A = A \mathbin{\widetilde{\otimes}}_k A.$$

L'algèbre opposée $A^{\rm opp}$ hérite naturellement de la filtration de A. Nous appelons *algèbre enveloppante topologique* $A^{\tilde{e}}$ le complété $A \mathbin{\widetilde{\otimes}} A^{\rm opp}$ de l'algèbre enveloppante $A^{\rm e} = A \otimes A^{\rm opp}$ de A.

Dans [S], P. Seibt introduit la notion d'*homologie topologique* (ou *locale*) d'une algèbre filtrée complète A. Rappelons sa définition. Soit

$$C_*(A) = \big(A^{\otimes(*+1)}, b\big)$$

le complexe standard de Hochschild. Son bord b s'exprime en terme de la multiplication de l'algèbre et, en tant que tel, est un morphisme filtré. Il s'étend naturellement en un morphisme $b : A^{\widetilde{\otimes} n+1} \to A^{\widetilde{\otimes} n}$. Nous notons

$$\widetilde{C}_*(A) = \big(A^{\widetilde{\otimes}(*+1)}, b\big)$$

le *complexe standard topologique de Hochschild* ainsi obtenu. Par définition, son homologie $\widetilde{HH}_*(A)$ est *l'homologie de Hochschild topologique.*

De la même manière, par complétion du complexe mixte cyclique

$$CC_*(A) = (A^{\otimes(*+1)}, b, B),$$

on obtient un complexe

$$\widetilde{CC}_*(A) = (A^{\widetilde{\otimes}(*+1)}, b, B)$$

dont l'homologie $\widetilde{HC}_*(A)$ est par définition *l'homologie cyclique topologique* de A. On définit de plus la *cohomologie cyclique topologique* de A qui est l'homologie $\widetilde{HC}^*(A)$ du bicomplexe mixte topologique $\big(\mathrm{Hom}_k(\widetilde{CC}_*(A)), b, B\big)$. Comme k est de caractéristique nulle, on a l'isomorphisme :

$$\widetilde{HC}_*(A) \cong \widetilde{HC}^*(A).$$

L'homologie de Hochschild topologique se décrit comme un foncteur Tor relatif au sens de [H-M]. Considérons la classe $\mathcal{P}$ des $A^{\tilde{e}}$-modules filtrés complets qui sont projectifs relativement aux épimorphismes de $A^{\tilde{e}}$-modules filtrés scindés par des sections k-linéaires (filtrées). Les $A^{\tilde{e}}$-modules à gauche de la forme $A^{\tilde{e}} \mathbin{\widetilde{\otimes}} M$, où M est un k-module filtré, appartiennent à $\mathcal{P}$. On désigne par

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}^{A^{\tilde{e}}}$$

le foncteur Tor relatif à $\mathcal{P}$. Il se définit comme suit. Soit P_* (resp. Q_*) une résolution du $A^{\tilde{e}}$-module à droite filtré M (resp. du $A^{\tilde{e}}$-module à gauche filtré N) par des $A^{\tilde{e}}$-modules de $\mathcal{P}$. On pose :

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^{A^{\tilde{e}}}(M,N) = H_*(P \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{A^{\tilde{e}}} Q)$$

(pour plus de détails voir [E-M2] et [H-M]).

En particulier, nous disposons d'une résolution standard de A par des modules de $\mathcal{P}$. Soit

$$C'_*(A) = \big(A^{e} \otimes A^{\otimes *}, b'\big)$$

la résolution standard de Hochschild de A. En complétant l'espace $A^{e} \otimes A^{\otimes *}$, nous obtenons un complexe

$$\widetilde{C}'_*(A) = (A^{\tilde{e}} \mathbin{\widetilde{\otimes}} A^{\widetilde{\otimes *}}, b')$$

qui est une résolution de A par des $A^{\tilde{e}}$-modules à droite de $\mathcal{P}$. Il en résulte l'isomorphisme :

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^{A^{\tilde{e}}}(A,A) \cong H_*(A \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{A^{\tilde{e}}} \widetilde{C}'_*(A)).$$

D'autre part, on a $\widetilde{C}_*(A) \cong A \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{A^{\tilde{e}}} \widetilde{C}'_*(A)$, d'où l'isomorphisme :

$$\widetilde{HH}_*(A) \cong \widetilde{\mathrm{Tor}}_{A^{\tilde{e}}}(A,A)\,. \tag{1.2}$$

2. L'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels.

Nous rappelons la définition de l'analogue quantique de l'algèbre des symboles pseudo-différentiels. Il s'agit d'une généralisation de l'algèbre des opérateurs q-différentiels de [K] définie par Khesin, Lyubashenko et Roger [Kh-L-R].

Introduisons d'abord quelques notations utiles pour la suite. Soit q un scalaire non nul de k. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, posons :

$$n_q = \frac{q^n - 1}{q-1}\cdot$$

Cette dernière expression est formellement égale à 0 lorsque $n=0$, à $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$ lorsque $n>0$ et à $-(q^{-1}+q^{-2}+\cdots+q^{n})$ lorsque $n<0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$$n_q! = \begin{cases} 1 \times 2_q \times \cdots \times n_q & \text{lorsque } n \text{ est non nul,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $q=1$, on a simplement $n_q = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $n_q! = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'algèbre quantique des opérateurs différentiels est la sous-algèbre des endomorphismes linéaires de $B = k[x, x^{-1}]$ engendrée par les multiplications par des polynômes de Laurent et l'opérateur de q-différentiation ∂_q défini, pour tout $P \in B$, par :

$$\partial_q(P) = \frac{P(qx) - P(x)}{qx - x} \cdot$$

Lorsque $q = 1$, l'opérateur ∂_q n'est autre que l'opérateur de différentiation usuel.

L'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels est l'algèbre Ψ_q des séries formelles du type

$$\sum_{i=-\infty}^{n} P_i \partial_q^i$$

où $P_i \in B$, où $n \in \mathbb{N}$ et dont la multiplication est déterminée par la relation

$$\partial_q^i P = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k}_q \tau_q^{i-k} P^{[i]} \partial_q^{i-k} \tag{2.1}$$

où, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\binom{i}{k}_q = \frac{i_q(i-1)_q \cdots (i-k+1)_q}{k_q!} \quad \text{pour } k \geq 1 \text{ et } \quad \binom{i}{0}_q = 1,$$

$$P^{[k]} = \partial_q^k(P)$$

et où τ_q est l'automorphisme d'algèbre de B défini par $\tau_q x = qx$.

L'algèbre Ψ_q est filtrée complète par les sous-k-modules $(\Psi_q)_n$ engendrés par les séries formelles $\sum_{i \leq n} P_i \partial_q^i$ où $P_i \in B$.

Le produit tensoriel $\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q$ est engendré par les séries formelles $\sum_{i,j \leq m} P_i \partial_q^i \otimes Q_j \partial_q^j$ avec $P_i, Q_j \in B$.

3. Complexe de Koszul pour l'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels.

Nous définissons un complexe de Koszul pour l'algèbre Ψ_q. Ce complexe est une résolution de Ψ_q par des Ψ_q-bimodules filtrés. Nous explicitons un quasi-isomorphisme entre ce complexe de Koszul et la résolution standard topologique de Hochschild de Ψ_q.

Soit V l'espace vectoriel engendré sur k par les symboles x et ∂_q. Soit $K_*(\Psi_q)$ le complexe de Ψ_q-modules

$$K_*(\Psi_q) = \big(0 \longrightarrow \Psi_q^{\mathrm{e}} \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{\mathrm{d}} \Psi_q^{\mathrm{e}} \otimes V \xrightarrow{\mathrm{d}} \Psi_q^{\mathrm{e}}\big)$$

où la différentielle d est définie, pour tout $a \in \Psi_q^{\mathrm{e}}$, par :

$$\mathrm{d}(a \otimes x \wedge \partial) = a\big(x \otimes 1 - q^{-1} \otimes x\big) \otimes \partial - a\big(\partial \otimes q^{-1} - 1 \otimes \partial\big) \otimes x,$$

$$\mathrm{d}(a \otimes x) = a\big(x \otimes 1 - 1 \otimes x\big), \qquad \mathrm{d}(a \otimes \partial) = a\big(\partial \otimes 1 - 1 \otimes \partial\big)$$

L'égalité $\mathrm{d}^2 = 0$ est une conséquence immédiate de la relation (2.1) sous sa forme la plus simple :

$$\partial_q x - q x \partial_q = 1.$$

Ce complexe est une généralisation du complexe $K_*(q)$ de [K]. Pour une étude générale de ce type de complexes de Koszul, on réfère à [W1].

PROPOSITION 3.1. — *Le complexe $K_*(\Psi_q)$ est une résolution de Ψ_q par des Ψ_q^{e}-modules filtrés de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. — Le complexe $K_*(\Psi_q)$ est clairement un complexe de Ψ_q^{e}-modules de $\mathcal{P}$. Il reste à montrer qu'il s'agit d'une résolution de Ψ_q. Pour ce faire, il suffit de montrer l'acyclicité du complexe :

$$K'_*(\Psi_q) = \big(0 \to \Psi_q^{\mathrm{e}} \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{\mathrm{d}} \Psi_q^{\mathrm{e}} \otimes V \xrightarrow{\mathrm{d}} \Psi_q^{\mathrm{e}} \xrightarrow{\mathrm{m}} \Psi_q\big).$$

Nous utilisons un résultat de S. Eilenberg et de J.C. Moore [E-M1] sur les complexes filtrés. Le complexe $K'_*(\Psi_q)$ est filtré sur $\mathbb{Z}$ par les sous-espaces

$$\mathcal{F}_n^3 = (\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q)_{n-2} \otimes \Lambda^2 V, \qquad \mathcal{F}_n^2 = (\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q)_{n-1} \otimes V,$$

$$\mathcal{F}_n^1 = (\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q)_n\,, \qquad \mathcal{F}_n^0 = (\Psi_q)_n\,,$$

où $(\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q)_k$ désigne le module de degré k de la filtration du produit $\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q$ définie au paragraphe 1. On a donc la suite croissante de complexes :

$$\mathcal{F}_n^* = \big(\mathcal{F}_n^3 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{F}_n^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{F}_n^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{F}_n^0\big).$$

Cette filtration est I-complète et P-complète au sens de [E-M1], c'est-à-dire qu'on a

$$K'_*(\Psi_q) = \varinjlim_n \big(\mathcal{F}_n^*\big) \quad \text{et} \quad K'_*(\Psi_q) = \varprojlim_n \big(K'_*(\Psi_q)/\mathcal{F}_n^*\big).$$

Le complexe gradué associé à $\mathcal{F}_n^*$ est le complexe

$$(3.1)\qquad 0 \longrightarrow (L_q^{\mathrm{e}})_{n-2} \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{\mathrm{d}} (L_q^{\mathrm{e}})_{n-1} \otimes V \xrightarrow{\mathrm{d}} (L_q^{\mathrm{e}})_n$$

où $(L_q^{\mathrm{e}})_n$ est la composante homogène de degré n de l'algèbre

$$L_q^{\mathrm{e}} = L_q \otimes L_q^{\mathrm{opp}}$$

où L_q est le tore quantique, c'est-à-dire l'algèbre engendrée sur k par $x, x^{-1}, \partial_q, \partial_q^{-1}$ et les relations

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1, \quad \partial_q\partial_q^{-1} = \partial_q^{-1}\partial_q = 1, \quad \partial_q x = qx\partial_q\,.$$

Dans [W2], nous avions montré que le complexe (3.1) est acyclique. Par conséquent, la suite spectrale associée à $\mathcal{F}_n^*$ est dégénérée et on a $E_{p,n}^1 = 0$ pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après le corollaire 6.3 de [E-M1], on en déduit que $H_n\big(K_*'(\Psi_q)\big) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Nous construisons maintenant un quasi-isomorphisme entre la résolution standard topologique de Hochschild de Ψ_q et $K_*(\Psi_q)$. Adoptons les notations suivantes. Pour tout symbole X et tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$T(X^k) = \frac{X^k \otimes 1 - 1 \otimes X^k}{X \otimes 1 - 1 \otimes X}\cdot$$

Cette expression est égale à la somme $\sum\limits_{i=0}^{k-1} X^i \otimes X^{k-1-i}$ lorsque $k \geq 0$ et à la somme $-\sum\limits_{i=0}^{-k-1} X^{-i-1} \otimes X^{k+i}$ lorsque $k < 0$.

De plus, pour tout polynôme $P(X) = \sum\limits_{i=-n}^{n} a_i X^i$ de $k[X, X^{-1}]$, on pose :

$$T\big(P(X)\big) = \sum_{i=-n}^{n} a_i T(X^i).$$

Soit j' le morphisme de $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$-modules à gauche de $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}} \widetilde{\otimes}\, \Psi_q$ vers $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}} \otimes V$ défini sur les générateurs de $\Psi^{\mathrm{e}} \widetilde{\otimes}\, \Psi$ par :

$$\begin{aligned} j'\Big(\sum_{i,j,k\leq n} P_i\partial_q^i \otimes Q_j\partial_q^j \otimes R_k\partial_q^k\Big) & \\ = \sum_{i,j,k\leq n} & (P_i\partial_q^i \otimes Q_j\partial_q^j)(R_k \otimes 1)T(\partial_q^k) \otimes \partial_q \\ & + \sum_{i,j,k\leq n} (P_i\partial_q^i \otimes Q_j\partial_q^j)(1 \otimes \partial_q^k)T(R_k) \otimes x \end{aligned}$$

où P_i, Q_j, R_k sont dans B. On montre, en calculant $\mathrm{d}j'$ sur un générateur, que l'on a $\mathrm{d}j' = b'$ où b' est le bord de la résolution standard de Hochschild. Remarquons de plus que j' est un morphisme de $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$-modules filtrés. D'après la proposition 3.1, le complexe de Koszul $K_*(\Psi_q)$ est une résolution de Ψ_q par des $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$-modules filtrés à gauche de $\mathcal{P}$. Il en est de même pour la résolution standard topologique $C'_*(\Psi_q)$. Un théorème de comparaison pour les résolutions projectives relatives (voir [H-M]) affirme l'existence d'un quasi-isomorphisme

$$j'_* : \widetilde{C}'_*(\Psi_q) \longrightarrow K_*(\Psi_q) \quad \text{tel que} \quad j'_1 = j'.$$

On vérifie facilement que Ψ_q (resp. $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$) vu comme $\Psi^{\tilde{\mathrm{e}}}$-module à gauche (resp. à droite) vérifie la condition (1.1). Ceci permet de considérer le produit tensoriel $\Psi_q \widetilde{\otimes}_{\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}} \Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$. Appliquons le foncteur $\Psi_q \widetilde{\otimes}_{\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}} -$ à j'_*. Nous obtenons ainsi un quasi-isomorphisme de complexes

$$j_* = \mathrm{id}_{\Psi_q} \widetilde{\otimes}_{\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}} j'_*$$

du complexe standard topologique de Hochschild $\widetilde{C}_*(\Psi_q) = \big(\Psi_q^{\widetilde{\otimes}(*+1)}, b\big)$ vers le complexe $\Psi_q \widetilde{\otimes}_{\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}} K_*(\Psi_q)$. Ce dernier complexe s'identifie au complexe

$$\widehat{K}_*(\Psi_q) = \big(0 \longrightarrow \Psi_q \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}} \Psi_q \otimes V \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}} \Psi_q \longrightarrow 0\big)$$

où $\hat{\mathrm{d}}$ est définie, pour tout $a \in \Psi_q$, par :

$$\hat{\mathrm{d}}(a \otimes x \wedge \partial) = (ax - q^{-1}xa) \otimes \partial - (q^{-1}a\partial - \partial a) \otimes x,$$

$$\hat{\mathrm{d}}(a \otimes x) = (ax - xa), \qquad \hat{\mathrm{d}}(a \otimes \partial) = (a\partial - \partial a).$$

Nous décrivons de plus un quasi-isomorphisme réciproque de j_*. Soit

$$i'_* : K_*(\Psi_q) \longrightarrow \widetilde{C}'_*(\Psi_q)$$

le morphisme de $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$-modules à gauche filtrés tel que

- i'_0 soit l'identité,
- i'_1 soit l'inclusion naturelle $\Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}} \otimes V \subset \Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}} \widetilde{\otimes}\, \Psi_q$,
- i'_2 soit défini, pour tout $a \in \Psi_q^{\tilde{\mathrm{e}}}$, par

$$i'_2(a \otimes x \wedge \partial_q) = a \otimes (x \otimes \partial_q - \partial_q \otimes x + q^{-1} \otimes 1)$$

et tel que

- $i'_n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

On vérifie par le calcul que i'_* est un morphisme de complexes. C'est un morphisme de modules filtrés. L'application

$$i_* = \mathrm{id}_{\Psi_q} \widetilde{\otimes}_{\Psi_q^e} i'_*$$

est alors un quasi-isomorphisme du complexe de Koszul quantique $\widehat{K}_*(\Psi_q)$ vers la résolution standard topologique de Hochschild $\widetilde{C}_*(\Psi_q)$.

4. Homologie de l'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels.

Dans ce paragraphe, nous construisons des quasi-isomorphismes entre différents complexes de chaînes. Nous en déduirons les groupes d'homologie de Hochschild topologique $\widetilde{HH}_*(\Psi_q)$ et les premiers groupes d'homologie cyclique topologique $\widetilde{HC}_0(\Psi_q)$ et $\widetilde{HC}_1(\Psi_q)$ de l'algèbre Ψ_q.

Dans tout ce paragraphe et dans le suivant, nous supposons que $q \neq 1$. (Le cas $q = 1$ est traité au paragraphe 6.)

Considérons l'algèbre $\widetilde{L}_q$ engendrée par les séries formelles $\sum_{i \le n} P_i \partial_q^i$ où $P_i \in B$ et dont la multiplication est induite par la relation $\partial_q x = qx\partial_q$.

Nous désignons par $(\Omega^*_{\widetilde{L}_q}, \mathrm{d}_q)$ le complexe de de Rham quantique de $\widetilde{L}_q$ défini comme suit :

- $\Omega^0_{\widetilde{L}_q}$ est isomorphe à $\widetilde{L}_q$,
- $\Omega^1_{\widetilde{L}_q}$ est le module des symboles du type $a\,\mathrm{d}x$ et $a\,\mathrm{d}\partial_q$,
- $\Omega^2_{\widetilde{L}_q}$ est le module des symboles $a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q$ où $a \in \widetilde{L}_q$,
- $\Omega^n_{\widetilde{L}_q} = 0$ pour $n \geq 3$.

La différentielle d_q est définie, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_q(x^i\partial_q^j) &= i_q x^{i-1}\partial_q^j\,\mathrm{d}x + j_q x^i \partial_q^{j-1}\,\mathrm{d}\partial_q\,,\\
\mathrm{d}_q(x^i\partial_q^j dx) &= -j_q x^i\partial_q^{j-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q\,,\\
\mathrm{d}_q(x^i\partial_q^j d\partial_q) &= i_q x^{i-1}\partial_q^j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q\,,
\end{aligned}$$

Nous noterons $H^*_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q)$ les groupes de cohomologie de ce complexe. Nous définissons encore une application

$$\sigma_* : \widehat{K}_*(\Psi_q) \longrightarrow \Omega^{2-*}_{\widetilde{L}_q}$$

en posant, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma_0(x^i\partial_q^j) = \sum_{n=-\infty}^{j-1} (-1)^{j-n} \frac{x^{i-j+n}\partial_q^n}{(q-1)^{j-n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q\,,$$

$$\sigma_1(x^i\partial_q^j \otimes x) = x^i\partial_q^j\,\mathrm{d}x, \quad \sigma_1(x^i\partial_q^j \otimes \partial_q) = x^i\partial_q^j\,\mathrm{d}\partial_q\,,$$
$$\sigma_2(x^i\partial_q^j \otimes x\wedge\partial_q) = x^i\partial_q^j + (1-q^{-1})x^{i+1}\partial_q^{j+1}\,.$$

LEMME 4.1. — *L'application σ_* réalise un isomorphisme de complexes entre le complexe de Koszul quantique $\widehat{K}_*(\Psi_q)$ et le complexe de de Rham quantique $(\Omega^*_{\widetilde{L}_q}, \mathrm{d})$.*

Démonstration. — Tout d'abord, on remarque que σ_0 est la réciproque de l'application définie par :

$$\sigma_0^{-1}\big(x^i\partial_q^j\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q\big) = -x^i\partial_q^j - (q-1)x^{i+1}\partial_q^{j+1}\,.$$

De même, on définit une réciproque de σ_2 en posant :

$$\sigma_2^{-1}(x^i\partial_q^j) = \sum_{n=-\infty}^{j-1} (-1)^{j-n+1}\,\frac{x^{i-j+n}\partial_q^n}{(1-q^{-1})^{j-n}} \otimes x\wedge\partial_q\,.$$

Enfin, σ_1 est un isomorphisme de manière évidente. Il ne nous reste plus qu'à montrer que σ_* est un morphisme de complexes. Il suffit de le faire pour des éléments du type $x^i\partial_q^j \otimes x\wedge\partial_q$, $x^i\partial_q^j \otimes x$, $x^i\partial_q^j \otimes \partial_q$ et $x^i\partial_q^j$ où $i,j \in \mathbb{Z}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 \circ \hat{\mathrm{d}}(x^i\partial_q^j \otimes x\wedge\partial_q)\\
&\qquad= \big(x^i\partial_q^j x - q^{-1}x^{i+1}\partial_q^j\big)\,\mathrm{d}\partial_q + \big(\partial_q x^i\partial_q^j - q^{-1}x^i\partial_q^{j+1}\big)\,\mathrm{d}x\\
&\qquad= \big(q^j x^{i+1}\partial_q^j + j_q x^i\partial_q^{j-1} - q^{-1}x^{i+1}\partial_q^j\big)\,\mathrm{d}\partial_q\\
&\qquad\qquad\qquad + \big(q^i x^i\partial_q^{j+1} + i_q x^{i-1}\partial_q^j - q^{-1}x^i\partial_q^{j+1}\big)\,\mathrm{d}x\\
&\qquad= j_q x^i\partial_q^{j-1}\,\mathrm{d}\partial_q + (j+1)_q(1-q^{-1})x^{i+1}\partial_q^j\,\mathrm{d}\partial_q\\
&\qquad\qquad\qquad + i_q x^{i-1}\partial_q^j\,\mathrm{d}x + (i+1)_q(1-q^{-1})x^i\partial_q^{j+1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_q \circ \sigma_2(x^i\partial_q^j \otimes x\wedge\partial_q)\\
&\qquad= \mathrm{d}_q\big(x^i\partial_q^j + (1-q^{-1})x^{i+1}\partial_q^{j+1}\big)\\
&\qquad= j_q x^i\partial_q^{j-1}\,\mathrm{d}\partial_q + i_q x^{i-1}\partial_q^j\,\mathrm{d}x(j+1)_q(1-q^{-1})x^{i+1}\partial_q^j\,\mathrm{d}\partial_q\\
&\qquad\qquad\qquad + (i+1)_q(1-q^{-1})x^i\partial_q^{j+1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\sigma_1 \circ \hat{\mathrm{d}} = \mathrm{d}_q \circ \sigma_2$. Calculons encore :

$$\begin{aligned}\sigma_0 \circ \hat{\mathrm{d}}(x^i\partial_q^j \otimes x) &= \sigma_0\big(x^i\partial_q^j x - x^{i+1}\partial_q^j\big)\\ &= \sigma_0\big(q^j x^{i+1}\partial_q^j + j_q x^i\partial_q^{j-1} - x^{i+1}\partial_q^j\big)\\ &= j_q\sigma_0\big(x^i\partial_q^{j-1} + (q-1)x^{i+1}\partial_q^j\big)\\ &= -j_q x^i\partial_q^{j-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q\\ &= \mathrm{d}_q(x^i\partial_q^j\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}_q \circ \sigma_1(x^i\partial_q^j \otimes x).\end{aligned}$$

Un calcul similaire montre que :

$$\sigma_0 \circ \hat{\mathrm{d}}(x^i\partial_q^j \otimes \partial_q) = \mathrm{d}_q \circ \sigma_1(x^i\partial_q^j \otimes \partial_q).$$

Nous venons de montrer σ_* est un morphisme de complexes. □

D'après le lemme 4.1, on a l'analogue «quantique» explicite d'un résultat de Brylinski et Getzler [B-G].

THÉORÈME 4.2. — *Les groupes d'homologie de Hochschild topologique de Ψ_q sont donnés par :*

$$\widetilde{HH}_0(\Psi_q) = k(x^{-1}\partial_q^{-1} + 1 - q),$$

$$\widetilde{HH}_1(\Psi_q) = k(x^{-1} \otimes x) \oplus k(\partial_q^{-1} \otimes \partial_q),$$

$$\widetilde{HH}_2(\Psi_q) = k\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{-n}\partial_q^{-n}}{(1-q^{-1})^n} \otimes (x \otimes \partial_q - \partial_q \otimes x + q^{-1} \otimes 1)\Big),$$

$$\widetilde{HH}_i(\Psi_q) = 0 \quad si \quad i \geq 3$$

lorsque q n'est pas une racine de l'unité. De plus, lorsque q est une racine primitive p-ième de l'unité,

- $\widetilde{HH}_0(\Psi_q)$ *est linéairement engendré par les séries formelles du type*
$$\sum_{j\leq n}\sum_{|i|\leq m_j} a_{ij}\big(x^{ip-1}\partial_q^{jp-1} + (q-1)x^{ip}\partial_q^{jp}\big),$$
- *le groupe $\widetilde{HH}_1(\Psi_q)$ est linéairement engendré par les séries*
$$\sum_{j\leq n}\sum_{|i|\leq m_j} a_{ij}x^{ip}\partial_q^{jp-1} \otimes \partial_q \quad et \quad \sum_{j\leq n}\sum_{|i|\leq m_j} a_{ij}x^{ip-1}\partial_q^{jp} \otimes x,$$
- *le groupe $\widetilde{HH}_2(\Psi_q)$ est engendré par les séries formelles du type*

$$\sum_{j\leq n}\sum_{|i|\leq m_j} a_{ij}\Big(\sum_{n=-\infty}^{jp-1}(-1)^{jp-n+1}\frac{x^{(i-j)p+n}\partial_q^n}{(1-q^{-1})^{jp-n}} \otimes (x\otimes\partial_q - \partial_q\otimes x + q^{-1}\otimes 1)\Big),$$

où $m_j \in \mathbb{Z}$ et $a_{ij} \in k$ et enfin

- $\widetilde{HH}_i(\Psi_q) = 0$ *si $i \geq 3$.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.1 et le lemme 4.1, on a les isomorphismes

$$\widetilde{HH}_*(\Psi_q) \cong H_*\big(\widehat{K}_*(\Psi_q)\big) \cong H_{\mathrm{dR}}^{2-*}(\widetilde{L}_q)$$

induits par les quasi-isomorphismes de complexes $j_* : \widetilde{C}_*(\Psi_q) \to \widehat{K}_*(\Psi_q)$ et $\sigma_* : \widehat{K}_*(\Psi_q) \to (\Omega^*_{\widetilde{L}_q}, \mathrm{d}_q)$. Les groupes de cohomologie $H^*_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q)$ se calculent aisément. Nous ne détaillons pas la démonstration ici. On obtient :

$$\begin{aligned}
&H^0_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q) \cong k,\\
&H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q) \cong kx^{-1}\,\mathrm{d}x \oplus k\partial_q^{-1}\,\mathrm{d}\partial_q\,,\\
&H^2_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q) \cong kx^{-1}\partial_q^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q\,.
\end{aligned}$$

Lorsque q est une racine de l'unité, il faut de plus tenir compte du fait que $(ip)_q = 0$ pour tout $i \in k$. En appliquant successivement σ_*^{-1} et i_* aux générateurs des groupes $H^*(\Omega^*_{\widetilde{L}}, \mathrm{d})$, on obtient les générateurs des groupes d'homologie de Hochschild du théorème. $\square$

On a de plus le :

Corollaire 4.3. — *Lorsque q n'est pas une racine de l'unité, alors les premiers groupes d'homologie cyclique topologique de Ψ_q sont donnés par*

$$\widetilde{HC}_0(\Psi_q) \cong \widetilde{HH}_0(\Psi_q) \cong k, \quad \widetilde{HC}_1(\Psi_q) \cong \widetilde{HH}_1(\Psi_q) \cong k \oplus k.$$

Démonstration. — On déduit ces deux groupes de l'homologie de Hochschild de Ψ_q grâce à la longue suite de Connes. Comme les morphismes S, B et I apparaissant dans la longue suite exacte de Connes sont des morphismes de k-espaces vectoriels filtrés, la suite s'étend en une longue suite « topologique » que nous utilisons. L'isomorphisme $\widetilde{HC}_0(\Psi_q) \cong \widetilde{HH}_0(\Psi_q)$ est bien connu. Par conséquent, d'après le théorème 4.2, on a l'isomorphisme $\widetilde{HC}_0(\Psi_q) \cong k$. Considérons la longue suite exacte de Connes :

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \widetilde{HC}_2(\Psi_q) \xrightarrow{S} \widetilde{HC}_0(\Psi_q) &\cong \widetilde{HH}_0(\Psi_q)\\
&\xrightarrow{B} \widetilde{HH}_1(\Psi_q) \xrightarrow{I} \widetilde{HC}_1(\Psi_q) \to 0.
\end{aligned}$$

Nous allons, à l'aide des l'applications j_*, i_* et σ_*, transporter le bord de Connes B sur le complexe de de Rham $(\Omega_{\widetilde{L}_q}, \mathrm{d}_q)$.

Calculons $\sigma_1 \circ j_1 \circ B \circ i_0 \circ \sigma_0^{-1}$ sur le représentant de la classe de cohomologie de $H^2_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \circ j_1 \circ B \circ i_0 \circ \sigma_0^{-1}&(x^{-1}\partial_q^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q) \\
&= -\sigma_1 \circ j_1 \circ B\bigl(x^{-1}\partial_q^{-1} + (q-1)\bigr) \\
&= -\sigma_1 \circ j_1\bigl(1 \otimes x^{-1}\partial_q^{-1} + x^{-1}\partial_q^{-1} \otimes 1\bigr) \\
&= -\sigma_1\bigl(x^{-1}T(\partial_q^{-1}) \otimes \partial_q + \partial_q^{-1}T(x^{-1}) \otimes x\bigr) \\
&= \partial_q^{-1}x^{-1}\partial_q^{-1}\,\mathrm{d}\partial_q + x^{-1}\partial_q^{-1}x^{-1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Lorsque nous projettons cette dernière expression dans $H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q)$, nous obtenons 0. Par conséquent l'application $B : \widetilde{HH}_0(\Psi_q) \to \widetilde{HH}_1(\Psi_q)$ est nulle. Nous en déduisons l'isomorphisme :

$$\widetilde{HH}_1(\Psi_q) \cong \widetilde{HC}_1(\Psi_q) \cong k \oplus k\,. \quad \square$$

5. Les cocycles cycliques de l'algèbre quantique des symboles pseudo-différentiels.

Dans ce paragraphe, nous décrivons une base du groupe de cohomologie cyclique topologique $\widetilde{HC}^1(\Psi_q)$ lorsque q n'est pas une racine de l'unité. D'après le corollaire 4.3, la dimension de $\widetilde{HC}^1(\Psi_q)$ est 2. Dans [Kh-L-R], B. Khesin, V. Lyubashenko et C. Roger ont décrit des cocycles de Lie de Ψ_q qui sont également des cocycles cycliques. D'autre part, C. Kassel décrit dans [K] un cocycle cyclique de l'algèbre quantique des opérateurs différentiels. Ce cocycle provient naturellement de la construction d'un quasi-isomorphisme de complexes entre le complexe standard de Hochschild et un complexe de de Rham. Nous allons montrer que la généralisation de sa construction au cas pseudo-différentiel redonne exactement les deux cocycles de Khesin, Lyubashenko et Roger.

Rappelons brièvement la définition des cocycles de Khesin, Lyubashenko et Roger. Ces derniers introduisent deux dérivations externes

$$[\ln\partial_q, \cdot\,],\ [\ln x, \cdot\,] : \Psi_q \longrightarrow \Psi_q$$

que nous ne détaillons pas ici. Nous notons simplement que leurs définitions donnent, entre autres, lieu aux formules :

$$\left\{\begin{aligned}
&[\ln\partial_q, \partial_q] = [\ln x, x] = 0, \\
&[\ln x, \partial_q] = -x^{-1}\bigl((q-1)x\partial_q + 1\bigr), \\
&[\ln\partial_q, x] = \bigl((q-1)x\partial_q + 1\bigr)\partial_q^{-1}.
\end{aligned}\right. \tag{5.1}$$

L'élément $(q-1)x\partial_q + 1$ est inversible dans Ψ_q ; appelons E son inverse. Les deux cocyles cycliques de [Kh-L-R] sont alors donnés, pour tous $A, B \in \Psi_q$, par

$$\begin{cases} c_x(A,B) = \displaystyle\int \operatorname{Res}\big(A[\ln x, B]E\big), \\ c_\partial(A,B) = \displaystyle\int \operatorname{Res}\big([\ln \partial_q, A]BE\big), \end{cases} \tag{5.2}$$

où $\int \operatorname{Res}$ est défini par :

$$\int \operatorname{Res} x^i \partial_q^j = q^{-1}\delta_{i,-1}\delta_{j,-1}.$$

Ces cocycles sont algébriques. Ils sont indépendants car la restriction à l'algèbre quantique des opérateurs différentiels de c_∂ est nulle alors que la restriction à cette même algèbre de c_x est égale au cocycle de [K] (*cf.* [L-K-R]).

A présent, nous utilisons la méthode de Kassel [K] pour obtenir des cocycles cycliques topologiques de Ψ_q. Soit le complexe (Ω_B^*, d_q) où Ω_B^* est l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur $B = k[x, x^{-1}]$ et où la différentielle est définie par :

$$\mathrm{d}_q(x^i) = (\partial_q \cdot x^i)\,\mathrm{d}x = i_q x^{i-1}\,\mathrm{d}x.$$

Nous notons $H^*_{\mathrm{dR}}(B_q)$ la cohomologie de ce complexe.

Soit $\widetilde{L}_q^0$ la sous-algèbre de $\widetilde{L}_q$ engendrée par les séries formelles du type $\sum_{i\le n} a_i\partial_q^i$ où $a_i \in k$. Soit $(\Omega^*_{\widetilde{L}_q^0}, d_q)$ le sous-complexe de $(\Omega^*_{\widetilde{L}_q}, \mathrm{d})$ dont les k-modules sont engendrés par les éléments de la forme a et $ad\partial_q$ où $a \in \widetilde{L}_q^0$. Il est à noter que sa différentielle est donnée par :

$$\mathrm{d}_q\Big(\sum_{i\le n} a_i\partial_q^i\Big) = \sum_{i\le n} i_q a_i \partial_q^{i-1}\,\mathrm{d}\partial_q.$$

Nous notons $H^*_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q^0)$ la cohomologie de ce dernier complexe.

Les groupes $H^*_{\mathrm{dR}}(B_q)$ et $H^*_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q^0)$ se calculent aisément. On a la :

Proposition 5.1. — *Lorsque q n'est pas une racine de l'unité, on a :*

$$H^0_{\mathrm{dR}}(B_q) \cong k, \quad H^1_{\mathrm{dR}}(B_q) \cong kx^{-1}\,\mathrm{d}x,$$
$$H^0_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q^0) \cong k, \quad H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}_q^0) \cong k\partial_q^{-1}\,\mathrm{d}\partial_q\,.$$

Lorsque q est une racine de l'unité d'ordre p, on a :

$$H^0_{\mathrm{dR}}(B_q) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} kx^{np}, \quad H^1_{\mathrm{dR}}(B_q) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} kx^{np-1}\,\mathrm{d}x,$$
$$H^0_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}^0_q) \cong R_p\,, \qquad H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}^0_q) \cong R'_p\,\mathrm{d}\partial_q\,,$$

où R_p (resp. $R'_p\partial_q$) est le sous-espace de $\Omega^0_{\widetilde{L}^0_q}$ (resp. de $\Omega^1_{\widetilde{L}^0_q}$) engendré par les séries formelles $\sum_{i\le n} a_i\partial_q^{pi}$ (resp. les séries formelles $\sum_{i\le n} a_i\partial_q^{pi-1}\,\mathrm{d}\partial_q$) où $a_i \in k$.

Démonstration. — La démonstration est laissée au lecteur. Dans le cas où q est une racine de l'unité, elle repose sur le fait que, la relation $q^p = 1$ implique $(ip)_q = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. □

Considérons les diagrammes

$$\text{(5.3)} \qquad \begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \Omega^0_{\widetilde{L}_q} & \xrightarrow{\ \mathrm{d}_q\ } & \Omega^1_{\widetilde{L}_q} & \xrightarrow{\ \mathrm{d}_q\ } & \Omega^2_{\widetilde{L}_q} & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \pi_2^x} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1^x} & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \Omega^0_B & \xrightarrow{\ d_q\ } & \Omega^1_B & \longrightarrow & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}(q)^x_n} & & \downarrow & \\
0 \to & H_{\mathrm{dR}}(\mathrm{d})^0(B_q) & \xrightarrow{\ 0\ } & H^1_{\mathrm{dR}}(B_q) & \longrightarrow & 0 &
\end{array}$$

et

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \Omega^0_{\widetilde{L}_q} & \xrightarrow{\ \mathrm{d}_q\ } & \Omega^1_{\widetilde{L}q} & \xrightarrow{\ d_q\ } & \Omega^2_{\widetilde{L}_q} & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \pi_2^\partial} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1^\partial} & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \Omega^0_{\widetilde{L}^0_q} & \xrightarrow{\ \mathrm{d}_q\ } & \Omega^1_{\widetilde{L}^0_q} & \longrightarrow & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}(q)^\partial_n} & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & H^0_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}^0_q) & \xrightarrow{\ 0\ } & H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{L}^0_q) & \longrightarrow & 0 &
\end{array}$$

dont nous allons expliciter les flèches verticales.

Les applications π_*^x et π_*^∂ sont définies comme suit.

$$
\begin{aligned}
&\pi_0^x(a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial)=0, &&\pi_0^\partial(a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial_q)=0,\\
&\pi_1^x(a\,\mathrm{d}x)=P_0\,\mathrm{d}x, &&\pi_1^\partial(a\,\mathrm{d}x)=0,\\
&\pi_1^x(a\,\mathrm{d}\partial_q)=0, &&\pi_1^\partial(a\,\mathrm{d}\partial_q)=\sum_{i\le n}P_{i,0}\partial^i\,\mathrm{d}\partial_q\,,\\
&\pi_2^x(a)=P_0, &&\pi_2^\partial(a)=\sum_{i\le n}P_{i,0}\partial^i,
\end{aligned}
$$

où $a=\sum_{i\le n}P_i\partial_q^i$ et $P_i\in B$ pour tout $i\in\mathbb{Z}$ et où $P_{i,0}$ désigne le terme constant du polynôme de Laurent P_i.

L'application $\mathrm{Res}(q)_n^x$ (resp. $\mathrm{Res}(q)_n^\partial$) est le résidu de degré np. On pose :

$$\mathrm{Res}(q)_n^x(P\,\mathrm{d}x)=P_{np-1}$$

où p est l'ordre de q et P_{np-1} le coefficient de x^{np-1} dans P. De même, on pose :

$$\mathrm{Res}(q)_n^\partial\Big(\sum_{i\le m}a_ip\partial_q^{ip}\Big)=a_{np-1}.$$

Il est évident que, dans le cas où q n'est pas une racine de l'unité, seul $\mathrm{Res}(q)_0^x$ (resp. seul $\mathrm{Res}(q)_0^\partial$) définit une projection du complexe $(\Omega_B^*,\mathrm{d}_q)$ (resp. du complexe $(\Omega^*_{\widetilde{L}_q^0},\mathrm{d}_q)$) dans son premier groupe de cohomologie.

LEMME 5.2. — *Les diagrammes* (5.3) *et* (5.4) *sont commutatifs.*

Démonstration. — Il suffit de le vérifier par le calcul. □

D'autre part, d'après la proposition 3.1 et le lemme 4.1, on a le diagramme commutatif :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{b} & \Psi_q\widetilde{\otimes}\Psi_q^{\widetilde{\otimes}2} & \xrightarrow{b} & \Psi_q\widetilde{\otimes}\Psi_q & \xrightarrow{b} & \Psi_q & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \|} & & \\
0 & \longrightarrow & \Psi_q\otimes\Lambda^2V & \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}} & \Psi_q\otimes V & \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}} & \Psi_q & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_0} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0_{\widetilde{L}_q} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1_{\widetilde{L}_q} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^2_{\widetilde{L}_q} & \longrightarrow & 0.
\end{array}
\tag{5.5}
$$

D'après la commutativité des diagrammes (5.3), (5.4) et (5.5), on a

$$\operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x \circ \sigma_1 \circ j_1 \circ b = 0,$$

$$\operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial \circ \sigma_1 \circ j_1 \circ b = 0,$$

ce qui signifie que les compositions $\operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x \circ \sigma_1 \circ j_1$ et $\operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial \circ \sigma_1 \circ j_1$ sont des cocycles de Hochschild topologiques pour Ψ_q. Ce sont en fait des cocycles cycliques. En effet, on a le :

LEMME 5.3. — *Les cocycles c_x et c_∂ s'étendent en des cocycles topologiques de $\widetilde{HC}^1(\Psi_q)$ et on a les égalités*

$$\begin{cases} c_x = -\operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial \circ \sigma_1 \circ j_1, \\ c_\partial = -\operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x \circ \sigma_1 \circ j_1 \, . \end{cases} \tag{5.6}$$

Démonstration. — Nous allons d'abord démontrer les égalités pour les éléments du type $X = x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell$ de $\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q$. Remarquons d'abord que l'on a :

$$b\big(x^i\partial_q^j \otimes x^k \otimes \partial_q^\ell\big) = x^i\partial_q^j x^k \otimes \partial_q^\ell - x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell + \partial_q^\ell x^i\partial_q^j \otimes x^k.$$

De plus, pour $u = x$ ou $u = \partial_q$ et $a \in \Psi_q$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$b\big(T(u^n)(a \otimes 1) \otimes u - u^n a \otimes 1 \otimes 1\big) = a \cdot T(u^n) \otimes u$$

où $T(u^n)$ a été défini au paragraphe 3. Par conséquent, $X = x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell$ est homologue à

$$Y = x^i\partial_q^j x^k \cdot T(\partial_q^\ell) \otimes \partial_q + \partial_q^\ell x^i\partial_q^j \cdot T(x^k) \otimes x$$

et on a :

$$c_x(X) = c_x(Y), \quad c_\partial(X) = c_\partial(Y).$$

En remplaçant Y dans les formules de définition (5.2) des cocycles, on obtient les égalités :

$$c_x(X) = \int \operatorname{Res}\big(x^i\partial_q^j x^k \cdot T(\partial_q^\ell)[\ln x, \partial_q]E\big),$$

$$c_\partial(X) = -\int \operatorname{Res}\big([\ln \partial_q, x]\partial_q^\ell x^i\partial_q^j \cdot T(x^k)E\big).$$

Dans les deux formules, nous avons utilisé la première des égalités (5.1); dans la seconde formule, nous avons, de plus, utilisé l'antisymétrie de c_∂. D'après [K-L-R], pour tous $A, B \in \Psi_q$, on a :

$$\int \operatorname{Res}(ABE) = \int \operatorname{Res}(BAE)$$

De plus, remarquons que l'on a :

$$E^{-1}\partial_q^{-1}E = q\partial_q^{-1} \quad \text{et} \quad x^{-1}E^{-1} = qE^{-1}x^{-1}.$$

Enfin, on constate que pour tout $A \in \Psi_q$, on a :

$$\operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x(A\,\mathrm{d}x) = q\int \operatorname{Res}(A\partial_q^{-1}),$$

$$\operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial(A\,\mathrm{d}\partial_q) = q\int \operatorname{Res}(x^{-1}A).$$

Il en résulte la suite d'égalités

$$\begin{aligned} c_x(X) &= \int \operatorname{Res}\big(\alpha[\ln x, \partial_q]E\big) = -\int \operatorname{Res}\big(\alpha x^{-1}E^{-1}E\big) \\ &= -q\int \operatorname{Res}\big(\alpha E^{-1}x^{-1}E\big) = -q\int \operatorname{Res}\big(x^{-1}\alpha E^{-1}E\big) \\ &= -\operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial(\alpha\,\mathrm{d}\partial_q), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = x^i\partial_q^j x^k \cdot T(\partial_q^\ell)$ et la suite

$$\begin{aligned} c_\partial(X) &= -\int \operatorname{Res}\big([\ln \partial_q, x]\beta E\big) = -\int \operatorname{Res}\big(E^{-1}\partial_q^{-1}\beta E\big) \\ &= -\int \operatorname{Res}\big(\beta E^{-1}\partial_q^{-1}E\big) = -q\int \operatorname{Res}\big(\beta\partial_q\big) = -\operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x(\beta dx) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\beta = \partial_q^\ell x^i \partial_q^j \cdot T(x^k)$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial \circ \sigma_1 \circ j_1(X) \\ &\qquad = \operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial\big(x^i\partial_q^j x^k \cdot T(\partial_q^\ell)\,\mathrm{d}\partial_q + \partial_q^\ell x^i \partial_q^j \cdot T(x^k)\,\mathrm{d}x\big) \\ &\qquad = \operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial\big(x^i\partial_q^j x^k \cdot T(\partial_q^\ell)\,\mathrm{d}\partial_q\big) \\ &\qquad = \operatorname{Res}(q)_0^\partial \circ \pi_1^\partial(\alpha\,\mathrm{d}\partial_q) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x \circ \sigma_1 \circ j_1(X)\\
&\qquad = \operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x\big(x^i\partial_q^j x^k \cdot T(\partial_q^\ell)\,\mathrm{d}\partial_q + \partial_q^\ell x^i \partial_q^j \cdot T(x^k)\,\mathrm{d}x\big)\\
&\qquad = \operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x\big(\partial_q^\ell x^i \partial_q^j \cdot T(x^k)\,\mathrm{d}x\big)\\
&\qquad = \operatorname{Res}(q)_0^x \circ \pi_1^x(\beta\,\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Ceci montre que les égalités (5.6) sont vraies pour $X = x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell$. En effectuant explicitement les calculs, on obtient

$$c_x\big(x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell\big) = c_\partial\big(x^j\partial_q^i \otimes x^\ell\partial_q^k\big) = \delta_{i+k,j+\ell}\varphi_q(i,j,k,\ell) \tag{5.7}$$

où l'on a posé :

$$\varphi_q(i,j,k,\ell) = \sum_{u=0}^{j+\ell} \binom{\ell}{u}_q q^{(\ell-u)(i-u)} (x^i)^{[u]} \Big(\frac{x^k-1}{x-1}\Big)^{[j+\ell-u]}{}_{|x=1}\,.$$

On constate, grâce à la formule (5.7), que c_x et c_∂ sont nuls sur $(\Psi_q \otimes \Psi_q)_n$ lorsque $n \gg 0$. Par conséquent, les cocycles algébriques c_x et c_∂ s'étendent sur $\Psi_q \widetilde{\otimes} \Psi_q$ et on a les égalités (5.6) en toute généralité. Ceci termine la démonstration. □

En plus des deux cocycles cycliques de [K-L-R], lorsque q est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous obtenons d'autres cocycles de Hochschild, à savoir les cocycles donnés, pour tout $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, par les relations :

$$\begin{cases} c_\partial^m = \operatorname{Res}(q)_m^x \circ \pi_1^x \circ \sigma_1 \circ j_1, \\[1ex] c_x^m = \operatorname{Res}(q)_m^\partial \circ \pi_1^\partial \circ \sigma_1 \circ j_1\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

En effectuant les calculs sur un élément du type $x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell$, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_\partial^m\big(x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell\big) &= \delta_{i+k,mp+j+\ell}\varphi_q(i,j,k,\ell),\\
c_x^m\big(x^i\partial_q^j \otimes x^k\partial_q^\ell\big) &= \delta_{i+k+mp,j+\ell}\varphi_q(j,i,\ell,k).
\end{aligned}$$

Ces cocycles ne sont pas cycliques car leurs restrictions à l'algèbre quantique des opérateurs différentiels ne sont pas antisymétriques (*cf.* [K]).

6. Le cas de l'algèbre des symboles pseudo-différentiels.

Nous terminons par quelques mots concernant l'algèbre des symboles pseudo-différentiels, c'est-à-dire, lorsque $q = 1$. Nous notons Ψ cette algèbre. Dans ce cas, toutes les constructions faites pour Ψ_q s'appliquent également, à ceci près que le quasi-isomorphisme σ_* du paragraphe 4 est alors défini par les formules :

$$\sigma_0(a) = -a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\partial, \qquad \sigma_1(a \otimes x) = a\,\mathrm{d}x,$$
$$\sigma_1(a \otimes \partial) = a\,\mathrm{d}\partial, \qquad \sigma_2(a \otimes x \wedge \partial) = a.$$

Le théorème 4.2 s'en trouve simplifié. Son énoncé devient :

THÉORÈME 6.1. — *L'homologie de Hochschild topologique de l'algèbre Ψ des symboles pseudo-différentiels sur le cercle est explicitement donnée par :*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{HH}_0(\Psi) \cong kx^{-1}\partial^{-1},\\
&\widetilde{HH}_1(\Psi) \cong k(x^{-1} \otimes x) \oplus k(\partial^{-1} \otimes \partial),\\
&\widetilde{HH}_2(\Psi) \cong k\big(1 \otimes x \otimes \partial - 1 \otimes \partial \otimes x + 1 \otimes 1 \otimes 1\big),\\
&\widetilde{HH}_i(\Psi) = 0 \quad \textit{pour } i \geq 3.
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi, sous une forme explicite, un cas particulier du résultat de Brylinski et Getzler [B-G]. D'après ces mêmes auteurs, la dimension du groupe de cohomologie $\widetilde{HC}^1(\Psi)$ est 2. Il est également possible d'en donner une base explicite.

Dans le cas $q = 1$, les cocycles cycliques « logarithmiques » c_x et c_∂ avaient été définis par B. Khesin, I. Kravchenko et O. Zakharevich [Kh-Z1], [Kh-Z2], [Kh-Kr]. L'énoncé du lemme 5.3 reste encore vrai dans ce cas. De plus, la formule (5.7) devient :

$$c_\partial\big(x^i\partial^j \otimes x^k\partial^\ell\big) = c_x\big(x^j\partial^i \otimes x^\ell\partial^k\big) = \delta_{i+k,j+\ell}\big[k \xrightarrow{-1} -i\big]\psi(j,\ell)$$

où l'on a posé

$$\psi(j,\ell) = \sum_{u=0}^{j+\ell} \frac{(-1)^{u+1}}{j+\ell+1-u}\binom{\ell}{u}$$

$$\big[i \xrightarrow{-1} k\big] = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k,\\ i(i-1)\cdots(k+1)k & \text{sinon.}\end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[B-G] BRYLINSKI (J.-L.), GETZLER (E.). — *The Homology of Algebras of Pseudodifferential Symbols and the Noncommutative Residue*, K-Theory, t. **1**, 1987, p. 385–403.

[E-M1] EILENBERG (S.), MOORE (J. C.). — *Limits and Spectral Sequences*, Topology, t. **1**, 1961, p. 1–23.

[E-M2] EILENBERG (S.), MOORE (J. C.). — *Foundations of Relative Homological Algebra*, Mem. Amer. Math. Soc., t. **56**, 1965.

[G] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., t. **16**, 1955.

[H-M] HUSSEMÖLLER (D.), MOORE (J. C.). — *Differential Graded Homological Algebra of Several Variables*, Sympos. Math., t. **IV**, 1970, p. 397–429.

[Kh-Kr] KHESIN (B.), KRAVCHENKO (O.). — *Central Extension of the Algebra of Pseudodifferential Symbols*, Funktsional. Anal. i Prilozhen, t. **25**, 2, 1991, p. 83–85; traduction anglaise : Functional Anal. Appl., t. **25**, 1991, p. 152–154.

[K] KASSEL (C.). — *Cyclic Homology of Differential Operators, the Virasoro Algebra and a q-Analogue*, Comm. Math. Phys., t. **146**, 1992, p. 343–356.

[Kh-L-R] KHESIN (B.), LYUBASHENKO (V.), ROGER (C.). — *Extensions and Contractions of the Lie Algebra of q-Pseudodifferential Symbols*, preprint I.H.E.S., 1993.

[Kh-Z1] KHESIN (B.), ZAKHAREVICH (I.). — *Poisson-Lie Group of Pseudodifferential Symbols and Fractional KP-KdV hierarchies*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **316**, 1993, p. 621–626.

[Kh-Z2] KHESIN (B.), ZAKHAREVICH (I.). — *Poisson-Lie Group of Pseudodifferential Symbols*, Comm. Math. Phys., t. **171**, 1995, p. 475–530.

[S] SEIBT (P.). — *Local Cyclic Homology*, K-theory, t. **4**, 1990, p. 143–155.

[W1] WAMBST (M.). — *Complexes de Koszul quantiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **43**, 1993, p. 1089–1156.

[W2] WAMBST (M.). — *Hochschild and Cyclic Homology of the Multiparametric Quantum Torus*, J. Pure Appl. Algebra (à paraître), 1996.