BULLETIN DE LA S. M. F.

DAVID HARARI

Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 2 (1997), p. 143-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_2_143_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 143–166.

FLÈCHES DE SPÉCIALISATIONS EN COHOMOLOGIE ÉTALE ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES

PAR

David HARARI (*)

RÉSUMÉ. — Soient V une variété algébrique sur un corps de nombres k et $p : V \to \mathbb{A}_k^n$ un morphisme surjectif à fibres « scindées » (par exemple géométriquement intègres). On établit sous certaines hypothèses cohomologiques que, si l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les fibres de p, alors il en va de même pour V.

ABSTRACT. — Let V be an algebraic variety over a number field k. Let $p : V \to \mathbb{A}_k^n$ be a surjective morphism with « split » (e.g. geometrically integral) fibres. We prove under some cohomological assumptions that if the Manin obstruction to the Hasse principle and weak approximation is the only one for the fibres of p, then the same property holds for V.

Soient k un corps de caractéristique zéro et p un morphisme projectif et surjectif d'une k-variété algébrique V vers un ouvert U de $\mathbb{P}_k^1$. Supposons que la fibre générique X de p est lisse et géométriquement intègre sur $K = k(T)$ et notons $\operatorname{Br} X$ son groupe de Brauer. Quand $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} K$ est fini, on dispose (*cf.* [16, 3.3]), pour tout point m d'un ouvert U' de U, d'une flèche de spécialisation

$$\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} K \longrightarrow \operatorname{Br} X_m / \operatorname{Br} k$$

(où X_m désigne la fibre de p en m). Quand k est un corps de nombres, on a prouvé dans [16, th. 3.5.1] que, sous les hypothèses supplémentaires, $\operatorname{Br} \overline{X} = 0$ et $\operatorname{Pic} \overline{X}$ sans torsion, cette flèche est un isomorphisme pour

(*) Texte reçu le 10 novembre 1995, accepté le 24 février 1997.
D. HARARI, IRMA, Université Louis Pasteur et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg CEDEX (France).
Email : harari@math.u-strasbg.fr.
Classification AMS : 11 G 35.

« beaucoup » de points rationnels m de $\mathbb{P}^1_k$ (plus précisément, il existe un sous-ensemble *hilbertien* de points rationnels de $\mathbb{P}^1_k$ pour lesquels cette propriété est vraie).

Dans cet article, nous généralisons ce résultat au cas où $\operatorname{Br} \overline{X}$ est fini mais pas forcément nul (théorème 2.3.1). Cela permet en particulier de l'appliquer quand la fibre générique X est une variété géométriquement unirationnelle.

Une application arithmétique du théorème 3.5.1 de [16] était l'étude du principe de Hasse et de l'approximation faible pour certaines variétés fibrées au-dessus de la droite affine (théorème 4.2.1 de [16]). Le théorème 2.3.1 nous permet non seulement de relâcher les hypothèses de ce résultat (en ne supposant plus le groupe de Brauer géométrique de la fibre générique nul, mais seulement fini), mais aussi de le généraliser aux fibrés au-dessus de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ (théorème 3.2.1). Pour cela, on procède par récurrence sur n, en utilisant le fait que la variété des droites de $\mathbb{A}^n_k$ passant par un point donné est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}_k$ (cette idée a déjà été utilisée par Skorobogatov dans la preuve du théorème principal de [27] dont le théorème 3.2.1 est aussi une généralisation). L'astuce consistant à considérer les droites de $\mathbb{A}^n_k$ est apparue pour la première fois dans [6].

Le plan de cet article est le suivant : la première partie rappelle les notions dont nous aurons besoin, notamment celle de schéma scindé (introduite par Skorobogatov dans [28]) qui est très utile en arithmétique. La deuxième partie est consacrée à la preuve du théorème 2.3.1 ; pour cela, on définit des flèches de spécialisation entre groupes de Brauer géométriques qui, sous certaines hypothèses, sont des isomorphismes. On fait alors fonctionner la même méthode que dans la preuve du théorème 3.5.1 de [16] en utilisant une suite exacte de cohomologie étale (proposition 2.2.1) qui généralise quelque peu une suite exacte bien connue. Dans la troisième partie, on prouve le résultat arithmétique 3.2.1, dont le cas $n = 1$ se traite, grâce au théorème 2.3.1, de manière analogue au théorème 4.2.1 de [16]. Enfin, dans la quatrième partie, on présente quelques exemples concrets d'application de nos résultats.

1. Notations et rappels

Dans ce texte, quand K est un corps (qui sera toujours de caractéristique zéro), on appellera *K-variété* un K-schéma séparé, géométriquement intègre et de type fini. On dira qu'un K-schéma X est *scindé* s'il contient un ouvert non vide qui est géométriquement intègre sur K (voir [28]).

La notation $\operatorname{Br} K$ désigne le groupe de Brauer de K et de même, pour toute K-variété X, on note $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de X. On note également $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(X)/K)$ le groupe de Brauer non ramifié de X, *i.e.* le groupe de Brauer d'un modèle projectif lisse de X (qui ne dépend pas du modèle choisi, voir [15, 7.3]), et $\operatorname{Pic} X$ le groupe de Picard de X. Quand $\mathcal{X}$ est un schéma sur un anneau A, on notera souvent $\operatorname{Br} A$ pour $\operatorname{Br}(\operatorname{Spec} A)$, et également abusivement pour l'image de $\operatorname{Br}(\operatorname{Spec} A)$ dans $\operatorname{Br} \mathcal{X}$ (ce qui permet par exemple de parler du groupe $\operatorname{Br} \mathcal{X}/\operatorname{Br} A$). On désigne par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on note $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$. Une K-variété X est dite *rationnelle* si $\overline{X}$ est birationnelle à l'espace projectif (c'est équivalent à dire que le corps de fonctions de $\overline{X}$ est une extension transcendante pure de $\overline{K}$).

Les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \ldots)$ seront souvent notés $H^i(K, ...)$, les groupes de cohomologie étale étant eux notés $H^i_{\text{ét}}(\ldots)$. On notera μ_n le groupe (ou le faisceau étale sur un schéma) des racines n-ièmes de l'unité.

Quand B est une variété sur un corps de nombres k, un sous-ensemble H de $B(k)$ est dit *hilbertien* s'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B et un revêtement étale $\rho : R \to U$ avec R intègre tel que H soit l'ensemble des k-points de U en lesquels la fibre de ρ est connexe; en particulier, l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski non vide de B est hilbertien.

Soit X une variété projective et lisse sur un corps de nombres k (dont on note Ω_k l'ensemble des places) qui a des points dans tous les complétés de k. On dira que X *contredit le principe de Hasse* si $X(k) = \emptyset$, et que X *vérifie l'approximation faible* si $X(k)$ est dense dans dans $X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$, muni de la topologie produit. Il est bien connu que ces deux propriétés sont invariantes par transformation birationnelle, *i.e.* qu'elles ne dépendent que du corps des fonctions $k(X)$ de X (*cf.* [4, § 3]).

Notons $j_v : \operatorname{Br} k_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'invariant de la théorie du corps de classes local. On rappelle (*cf.* [7, section 3]) que *l'obstruction de Manin au principe de Hasse pour* X est la condition :

$$\textit{pour tout } (P_v) \in X(\mathbb{A}_k), \textit{ il existe } A \in \operatorname{Br} X \textit{ tel que } \sum_{v \in \Omega_k} j_v\big(A(P_v)\big) \neq 0.$$

Il s'agit bien d'une obstruction à l'existence d'un point rationnel pour X à cause de la formule du produit. On a de même une *obstruction de Manin à l'approximation faible* définie par :

$$\textit{il existe } (P_v) \in X(\mathbb{A}_k), \textit{ il existe } A \in \operatorname{Br} X \textit{ tels que } \sum_{v \in \Omega_k} j_v\big(A(P_v)\big) \neq 0.$$

Il s'agit d'une notion importante car tous les contre-exemples explicites au principe de Hasse et à l'approximation faible connus à ce jour viennent de cette obstruction. Colliot-Thélène et Sansuc ont par exemple conjecturé qu'elle est la seule possible pour les surfaces rationnelles. Il y a en tout cas beaucoup plus de classes de variétés pour lesquelles on sait montrer que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule que de classes de variétés pour lesquelles il est vrai que le principe de Hasse et l'approximation faible valent (on pourra par exemple consulter [3] pour un bilan sur ces questions). Dans la troisième partie, nous établirons sous certaines conditions que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour une variété fibrée au-dessus de $\mathbb{A}_k^n$ quand les fibres ont cette même propriété.

2. Spécialisations de groupes de Brauer

Dans les paragraphes 2.1 et 2.2, on considère un anneau de valuation discrète A de corps des fractions K et de corps résiduel k et on suppose k de caractéristique zéro. Quand $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots$ sont des schémas sur un anneau de valuation discrète, on notera $X, Y, \ldots$ leur fibre générique et $X_m, Y_m, \ldots$ leur fibre spéciale. On désigne par R un anneau de valuation discrète hensélien de corps des fractions K et de corps résiduel k.

2.1. Spécialisation au niveau des clôtures algébriques.

Il s'agit d'abord de définir des flèches de spécialisation entre groupes de Brauer géométriques. C'est l'objet du résultat suivant :

PROPOSITION 2.1.1. — *Soit $\mathcal{X}$ un schéma projectif et lisse au-dessus de* $\operatorname{Spec} A$ *dont les fibres sont géométriquement intègres. Alors, il existe une flèche de spécialisation* $\operatorname{Br} \overline{X} \to \operatorname{Br} \overline{X}_m$ *vérifiant :*

- *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(\overline{X})/n & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n) & \longrightarrow & {}_n\operatorname{Br} \overline{X} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(\overline{X}_m)/n & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_m, \mu_n) & \longrightarrow & {}_n\operatorname{Br} \overline{X}_m & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où la première flèche verticale est la flèche de spécialisation entre groupes de Picard géométriques (*cf.* [16, lemme 3.4.1] *ou* [11, 20.3]) *et la deuxième flèche verticale est l'isomorphisme de spécialisation lisse en cohomologie étale* ([22, corollaire VI.4.2). *Les lignes de ce diagramme sont les suites exactes de Kummer.*

• *Si on suppose de plus que les groupes* $H^1(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m})$ *et* $H^2(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m})$ *sont nuls, toutes les flèches verticales du diagramme précédent sont des isomorphismes. En particulier, la flèche* $\operatorname{Br}\overline{X} \to \operatorname{Br}\overline{X}_m$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — On peut trouver un anneau local intégralement clos B, hensélien et dont le corps des fractions et le corps résiduel sont algébriquement clos, tel que $\operatorname{Spec} B$ soit muni d'un morphisme de schémas vers $\operatorname{Spec} A$. Considérons alors

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B.$$

Le schéma $\mathcal{Y}$ est projectif et lisse au-dessus de $\operatorname{Spec} B$, sa fibre générique est $\overline{X}$ et sa fibre spéciale $\overline{X}_m$. Pour tout entier naturel n, les flèches de restriction $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{Y}, \mu_n) \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_m, \mu_n)$ et $H^2_{\text{ét}}(\mathcal{Y}, \mu_n) \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n)$ sont des isomorphismes (la première à cause du théorème de changement de base propre, la deuxième à cause du théorème de changement de base lisse, voir [22, preuve du corollaire VI.4.2]). En composant la réciproque de la deuxième avec la première, on obtient l'isomorphisme de spécialisation lisse

$$H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_m, \mu_n).$$

D'autre part, la flèche de restriction $\operatorname{Pic}\mathcal{Y} \to \operatorname{Pic}\overline{X}$ est également un isomorphisme (*cf.* [16, lemme 3.1.1]) qui donne naissance à la flèche de spécialisation entre groupes de Picard géométriques $\operatorname{Pic}\overline{X} \to \operatorname{Pic}\overline{X}_m$.

Du diagramme commutatif (qui vient de la suite exacte de Kummer)

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic}\mathcal{Y}/n & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\mathcal{Y}, \mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Pic}\overline{X}_m/n & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_m, \mu_n), \end{array}$$

on déduit alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic}\overline{X}/n & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Pic}\overline{X}_m/n & \longrightarrow & H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_m, \mu_n). \end{array}$$

La suite exacte de Kummer nous permet alors de définir la flèche de spécialisation

$$\operatorname{Br}\overline{X} \longrightarrow \operatorname{Br}\overline{X}_m,$$

vu que le groupe de Brauer d'une variété est toujours de torsion. D'où le premier point.

Le deuxième point résulte de ce que les hypothèses de nullité des groupes $H^1(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m})$ et $H^2(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m})$ impliquent que la flèche de spécialisation entre groupes de Picard géométriques est un isomorphisme : cela vient des résultats de Grothendieck sur le relèvement des faisceaux inversibles (voir [13, § 5] ; *cf.* aussi [16, prop. 3.4.2]) ; l'exactitude des suites de Kummer et la commutativité du diagramme précédent assurent alors que la flèche ${}_n\operatorname{Br}\overline{X} \to {}_n\operatorname{Br}\overline{X}_m$ est aussi un isomorphisme. □

2.2. Quelques suites exactes.

On commence par établir l'énoncé général suivant :

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit C un anneau intègre normal de caractéristique zéro et $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} C$ un revêtement galoisien (éventuellement infini) de groupe G. On fait l'hypothèse que les groupes $\operatorname{Br} B$ et $H^3(G, B^*)$ sont nuls. Soient $\mathcal{X}$ un $\operatorname{Spec} C$-schéma projectif et lisse et $\mathcal{X}_B = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} C} \operatorname{Spec} B$. Alors, on a la suite exacte :*

$$0 \to H^1(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B) \longrightarrow \operatorname{Br}\mathcal{X}/\operatorname{Br} C \longrightarrow (\operatorname{Br}\mathcal{X}_B)^G \longrightarrow H^2(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B).$$

Cette suite exacte est fonctorielle en C et $\mathcal{X}$.

Preuve. — On écrit la suite spectrale de Hochschild-Serre [22, 2.21.b] pour $\mathcal{X}_B \to \mathcal{X}$ et le faisceau étale $\mathbb{G}_m$, soit

$$H^p\big(G, H^q_{\text{ét}}(\mathcal{X}_B, \mathbb{G}_m)\big) \Longrightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m).$$

Sa suite des termes de bas degré nous fournit, en notant

$$\operatorname{Br}_B\mathcal{X} = \ker(\operatorname{Br}\mathcal{X} \to \operatorname{Br}\mathcal{X}_B),$$

une première suite exacte (qui est bien connue quand C est un corps et B sa clôture algébrique, *cf.* par exemple le paragraphe 1.5 de [7]) :

$$\operatorname{Br} C \longrightarrow \operatorname{Br}_B\mathcal{X} \longrightarrow H^1(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B) \longrightarrow H^3(G, B^*)$$

(rappelons que par hypothèse $\operatorname{Br} B$ est nul). Ainsi

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B) = \operatorname{Br}_B\mathcal{X}/\operatorname{Br} C$$

(à cause de l'hypothèse $H^3(G, B^*) = 0$; on a comme d'habitude noté abusivement encore $\operatorname{Br} C$ l'image de $\operatorname{Br} C$ dans $\operatorname{Br}\mathcal{X}$). D'où la suite exacte :

$$0 \to H^1(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B) \longrightarrow \operatorname{Br}\mathcal{X}/\operatorname{Br} C \longrightarrow \operatorname{Br}\mathcal{X}_B$$

et il nous reste donc à étudier l'image de la flèche $\operatorname{Br}\mathcal{X} \to \operatorname{Br}\mathcal{X}_B$.

Utilisons les notations de l'appendice B de [22] pour désigner les objets de la suite spectrale ; *i.e.* que l'on note

$$E_2^{p,q} = H^p\big(G, H^q_{\text{ét}}(\mathcal{X}_B, \mathbb{G}_m)\big) \quad \text{et} \quad E^n = H^n_{\text{ét}}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m).$$

En particulier $E_2^{0,2} = (\operatorname{Br}\mathcal{X}_B)^G$ et $E^2 = \operatorname{Br}\mathcal{X}$. La filtration associée à E^2 donne :

$$0 \to E_1^2 \longrightarrow E^2 \longrightarrow E_\infty^{0,2} = E_4^{0,2} \to 0$$

et comme $E_\infty^{0,2}$ est un sous-groupe de $E_2^{0,2}$ (donc de $\operatorname{Br}\mathcal{X}$), ce n'est autre que l'image de la flèche $\operatorname{Br}\mathcal{X} \to \operatorname{Br}\mathcal{X}_B$ (qui est en fait à valeurs dans $(\operatorname{Br}\mathcal{X}_B)^G$) et tout revient donc à expliciter $E_4^{0,2}$.

Or $E_4^{0,2}$ est le noyau de la flèche $\mathrm{d}_3^{0,2} : E_3^{0,2} \to E_3^{3,0}$. Mais $E_2^{3,0} = H^3(G, B^*)$ est nul par hypothèse ; donc $E_3^{3,0} = 0$ et $E_4^{0,2} = E_3^{0,2}$.

Enfin $E_3^{0,2}$ est le noyau de la flèche $\mathrm{d}_2^{0,2} : E_2^{0,2} \to E_2^{2,1}$. Comme $E_2^{2,1}$ n'est autre que $H^2(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B)$, il en résulte bien que l'image de la flèche $\operatorname{Br}\mathcal{X} \to (\operatorname{Br}\mathcal{X}_B)^G$ est le noyau de la flèche $(\operatorname{Br}\mathcal{X}_B)^G \to H^2(G, \operatorname{Pic}\mathcal{X}_B)$. D'où la suite exacte cherchée. La fonctorialité résulte des propriétés générales des suites spectrales. $\square$

COROLLAIRE 2.2.2. — *Soient R_{nr} l'extension maximale non ramifiée de l'anneau hensélien R et K_{nr} le corps des fractions de R_{nr} ; on pose*

$$G_{\text{nr}} = \operatorname{Gal}(K_{nr}/K) \quad \text{et} \quad G_k = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$$

(on a donc $G_{\text{nr}} \simeq G_k$). On fait l'hypothèse que $H^3(K, \mathbb{G}_m)$ et $H^3(k, \mathbb{G}_m)$ sont nuls. Soient $\mathcal{Y}$ un schéma projectif et lisse sur $\operatorname{Spec} R$ *et*

$$\mathcal{Y}_{\text{nr}} = \mathcal{Y} \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R_{\text{nr}}.$$

Alors, on a un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^1(G_{\text{nr}}, \operatorname{Pic} Y_{\text{nr}}) & \longrightarrow & \operatorname{Br} Y/\operatorname{Br} K & \longrightarrow & (\operatorname{Br} Y_{\text{nr}})^{G_{\text{nr}}} & \longrightarrow & H^2(G_{\text{nr}}, \operatorname{Pic} Y_{\text{nr}}) \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 \to & H^1(G_{\text{nr}}, \operatorname{Pic}\mathcal{Y}_{\text{nr}}) & \to & \operatorname{Br}\mathcal{Y}/\operatorname{Br} R & \longrightarrow & (\operatorname{Br}\mathcal{Y}_{\text{nr}})^{G_{\text{nr}}} & \longrightarrow & H^2(G_{\text{nr}}, \operatorname{Pic}\mathcal{Y}_{\text{nr}}) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & H^1(G_k, \operatorname{Pic}\overline{Y}_m) & \longrightarrow & \operatorname{Br} Y_m/\operatorname{Br} k & \longrightarrow & (\operatorname{Br}\overline{Y}_m)^{G_k} & \longrightarrow & H^2(G_k, \operatorname{Pic}\overline{Y}_m).
\end{array}$$

Preuve. — Notons que la fibre générique de $\mathcal{Y}_{\text{nr}}$ est $Y_{\text{nr}} = Y \times_K K_{\text{nr}}$ et sa fibre spéciale est $\overline{Y}_m = Y_m \times_k \bar{k}$. Le groupe de Brauer d'un corps algébriquement clos est nul, ainsi que celui de K_{nr} (voir [26, X, § 7]). D'après la proposition 2.2.1, il suffit de montrer qu'on a

$$H^3(G_{\mathrm{nr}}, K^*_{\mathrm{nr}}) = H^3(G_{\mathrm{nr}}, R^*_{\mathrm{nr}}) = 0$$

puisque l'hypothèse $H^3(k, \mathbb{G}_m) = 0$ signifie $H^3(G_k, \bar{k}^*) = 0$. Or, le corps K_{nr} est C_1 par le théorème de Lang (voir [20]) donc $H^i(K_{\mathrm{nr}}, \mathbb{G}_m)$ est nul pour tout $i \geq 2$. La suite exacte de restriction-inflation (voir [26, VII, § 6, prop. 5]) donne alors

$$H^i(K, \mathbb{G}_m) = H^i(G_{\mathrm{nr}}, K^*_{\mathrm{nr}}) \quad \text{pour tout } i \geq 2.$$

En particulier, l'hypothèse $H^3(K, \mathbb{G}_m) = 0$ implique aussi

$$H^3(G_{\mathrm{nr}}, K^*_{\mathrm{nr}}) = 0.$$

Maintenant, on a la suite exacte scindée (par le choix d'une uniformisante) :

$$0 \to R^*_{\mathrm{nr}} \longrightarrow K^*_{\mathrm{nr}} \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0\,;$$

donc le groupe $H^3(G_{\mathrm{nr}}, R^*_{\mathrm{nr}})$ est également nul. D'où le résultat. $\square$

2.3. Comparaison entre les groupes de Brauer des fibres d'un morphisme.

Les énoncés locaux des paragraphes précédents vous nous permettre d'établir le résultat global suivant qui généralise le théorème 3.5.1 de [16] :

THÉORÈME 2.3.1. — *Soient k un corps de nombres et V une k-variété munie d'un k-morphisme dominant p vers $\mathbb{P}^1_k$. On suppose la fibre générique V_η géométriquement intègre sur le corps des fonctions $K = k(T)$ de $\mathbb{P}^1_k$. Si X est un modèle projectif lisse de V_η au-dessus de K et $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, on suppose aussi que* $\operatorname{Br}\overline{X}$ *est fini et que* $\operatorname{Pic}\overline{X}$ *est sans torsion.*

Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien H de $\mathbb{P}^1_k(k)$ tel que pour tout point m de H, la flèche de spécialisation :

$$\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}\big(K(V_\eta)/K\big)/\operatorname{Br} K \longrightarrow \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}\big(k(V_m)/k\big)/\operatorname{Br} k$$

est un isomorphisme de groupes abéliens finis (V_m désigne la fibre en m).

Preuve. — Il s'agit d'adapter la preuve du théorème 3.5.1 de [16], laquelle avait été faite dans le cas $\operatorname{Br}\overline{X} = 0$. On se ramène d'abord de la même manière (en utilisant le théorème de résolution des singularités d'Hironaka) au cas où le morphisme p est projectif et lisse au-dessus d'un ouvert non vide Ω de $\mathbb{P}^1_k$ (en particulier on peut supposer que $X = V_\eta$). Montrons d'abord un lemme :

LEMME 2.3.2. — *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe un ouvert de Zariski non vide U de Ω et une extension finie galoisienne L de K (dont on notera G_L le groupe de Galois sur K) tels que :*

1) *Pour tout point m de U (dont on note la fibre X_m), les groupes $H^1(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m})$ et $H^2(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m})$ sont nuls.*

2) *Si m est un point k-rationnel de U d'anneau local A, on a, en notant A^h le hensélisé de A et $K^h = \operatorname{Frac} A^h$, un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^1(K, \operatorname{Pic}\overline{X}) & \longrightarrow & \operatorname{Br} X/\operatorname{Br} K & \longrightarrow & (\operatorname{Br}\overline{X})^K & \longrightarrow & H^2(G_L, \operatorname{Pic}\overline{X}) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & H^1(K^h, \operatorname{Pic}\overline{X}) & \to & \operatorname{Br} X^h/\operatorname{Br} K^h & \to & (\operatorname{Br}\overline{X})^{K^h} & \longrightarrow & H^2(G_{nr}, \operatorname{Pic} X_{nr}) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{X}_m) & \to & \operatorname{Br} X_m/\operatorname{Br} k & \to & (\operatorname{Br}\overline{X}_m)^k & \longrightarrow & H^2(k, \operatorname{Pic}\overline{X}_m)
\end{array}$$

(où G_{nr} désigne le groupe de Galois sur K^h de l'extension maximale non ramifiée K_{nr} de K^h ; on a aussi noté $X^h = X \times_K K^h$ et $X_{\mathrm{nr}} = X \times_K K_{\mathrm{nr}}$).

Les lignes de ce diagramme sont exactes et la flèche

$$\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} K \longrightarrow \operatorname{Br} X_m/\operatorname{Br} k$$

qu'il induit est la flèche de spécialisation (cf. [16], 3.3).

Preuve du lemme 2.3.2. — L'hypothèse $\operatorname{Pic}\overline{X}$ sans torsion implique la nullité de $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ (bien connu, voir par exemple [16, § 3.1]) et l'hypothèse $\operatorname{Br}\overline{X}$ fini implique $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$ (sinon « $B_2 - \rho$ » est non nul et $\operatorname{Br}\overline{X}$ contient une partie divisible non nulle (voir [14, cor. 3.4]). Ensuite, pour tout point m d'un certain ouvert de Zariski non vide U de Ω, on a

$$H^1(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m}) = H^2(\overline{X}_m, \mathcal{O}_{\overline{X}_m}) = 0$$

(à cause du théorème de semi-continuité, voir [18, III.3.12.8]). D'où le premier point. On notera $V' = p^{-1}(U)$.

Supposons désormais le point m rationnel. On a déjà

$$H^3(K^h, \mathbb{G}_m) = 0.$$

En effet, du fait que $H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ (voir [25, 4.1]), on déduit déjà que

$$H^3(K^h, \mathbb{G}_m) = H^3(A^h, \mathbb{G}_m)$$

en utilisant [22, III.2.22.c] ; mais

$$H^3(A^h, \mathbb{G}_m) = H^3(k, \mathbb{G}_m)$$

par [22, III.3.11.a], vu que A^h est hensélien, et $H^3(k, \mathbb{G}_m)$ est nul parce que k est un corps de nombres (voir [1,VII.11.4]). Le corps K_{nr} est le corps des fractions de l'extension maximale non ramifiée A_{nr} de A^h. Posons

$$\mathcal{X}^h = V' \times_U \operatorname{Spec} A^h \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{\mathrm{nr}} = \mathcal{X}^h \times_{A^h} A_{\mathrm{nr}}.$$

La fibre générique de $\mathcal{X}^h$ est donc X^h et celle de $\mathcal{X}_{\mathrm{nr}}$ est $X_{\mathrm{nr}} = X \times_K K_{\mathrm{nr}}$.

Maintenant, on peut trouver une extension finie galoisienne L de K telle que $\operatorname{Pic} \overline{X} = \operatorname{Pic} X_L$ (où $X_L = X \times_K L$) et telle que la flèche $\operatorname{Br} X_L \to \operatorname{Br} \overline{X}$ soit surjective (car $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est libre de rang fini r et $\operatorname{Br} \overline{X}$ est fini). Quitte à réduire U, on peut supposer que l'extension L/K est non ramifiée en m pour tout point rationnel m de U, *i.e.* que $L \subset K_{\mathrm{nr}}$. D'autre part, les groupes $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} K$ et $\operatorname{Br} \overline{X}$, ainsi que $\operatorname{Br} X^h / \operatorname{Br} K^h$, sont finis (en effet $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est libre de rang fini donc $H^1(K, \operatorname{Pic} \overline{X})$ et $H^1(K^h, \operatorname{Pic} \overline{X})$ sont finis et on utilise la proposition 2.2.1 avec $A = K$ ou $A = K^h$ et $B = \overline{K}$). On peut donc aussi supposer que pour tout point m de U les éléments d'un système de représentants de $\operatorname{Br} X$ et $\operatorname{Br} X^h$ sont non ramifiés sur V' (ce qui donne un sens aux flèches de spécialisations $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} K \to \operatorname{Br} X_m / \operatorname{Br} k$ et $\operatorname{Br} X^h / \operatorname{Br} K^h \to \operatorname{Br} X_m / \operatorname{Br} k$) et que les éléments de $\operatorname{Br} \overline{X}$ sont non ramifiés sur $\overline{V}' = V' \times_k \bar{k}$.

Utilisons alors le corollaire 2.2.2. Il nous fournit, en posant

$$G_{\mathrm{nr}} = \operatorname{Gal}(K_{\mathrm{nr}}/K^h),$$

un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(G_{\mathrm{nr}}, \operatorname{Pic} X_{\mathrm{nr}}) \arrow[r] & \operatorname{Br} X^h/\operatorname{Br} K^h \arrow[r] & (\operatorname{Br} X_{\mathrm{nr}})^{G_{\mathrm{nr}}} \arrow[r] & H^2(G_{\mathrm{nr}}, \operatorname{Pic} X_{\mathrm{nr}}) \\
0 \arrow[r] & H^1(G_{\mathrm{nr}}, \operatorname{Pic} \mathcal{X}_{\mathrm{nr}}) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \operatorname{Br} \mathcal{X}^h/\operatorname{Br} A^h \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & (\operatorname{Br} \mathcal{X}_{\mathrm{nr}})^{G_{\mathrm{nr}}} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & H^2(G_{\mathrm{nr}}, \operatorname{Pic} \mathcal{X}_{\mathrm{nr}}) \arrow[u] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(G_k, \operatorname{Pic} \overline{X}_m) \arrow[r] & \operatorname{Br} X_m/\operatorname{Br} k \arrow[r] & (\operatorname{Br} \overline{X}_m)^{G_k} \arrow[r] & H^2(G_k, \operatorname{Pic} \overline{X}_m).
\end{tikzcd}$$

Maintenant, la restriction $\operatorname{Pic} \mathcal{X}_{\mathrm{nr}} \to \operatorname{Pic} X_{\mathrm{nr}}$ est un isomorphisme à cause de la lissité de $\mathcal{X}^h$ sur A^h (classique, *cf.* par exemple [16, lemme 3.1.1]) et il en va de même de la restriction $\operatorname{Br} \mathcal{X}^h / \operatorname{Br} A^h \to \operatorname{Br} X^h / \operatorname{Br} K^h$ (parce que les éléments d'un système de représentants de

$\mathrm{Br}\, X^h$ sont non ramifiés sur V'). On obtient ainsi un nouveau diagramme commutatif (dans lequel les lignes sont exactes et les flèches verticales sont obtenues par spécialisation) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^1(G_{\mathrm{nr}}, \mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{nr}}) & \to & \mathrm{Br}\, X^h/\mathrm{Br}\, K^h & \to & (\mathrm{Br}\, X_{\mathrm{nr}})^{G_{\mathrm{nr}}} & \to & H^2(G_{\mathrm{nr}}, \mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{nr}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H^1(G_k, \mathrm{Pic}\, \overline{X}_m) & \to & \mathrm{Br}\, X_m/\mathrm{Br}\, k & \to & (\mathrm{Br}\, \overline{X}_m)^{G_k} & \to & H^2(G_k, \mathrm{Pic}\, \overline{X}_m). \end{array}$$

Posons $G_L = \mathrm{Gal}(L/K)$. Comme L est contenu dans K_{nr} et $\mathrm{Pic}\, X_L$ est égal à $\mathrm{Pic}\, \overline{X}$, on a $\mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{nr}} = \mathrm{Pic}\, \overline{X}$ et l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_{\mathrm{nr}})$ sur $\mathrm{Pic}\, \overline{X}$ est triviale. De même, on a $\mathrm{Br}\, \overline{X} = \mathrm{Br}\, X_{\mathrm{nr}} = \mathrm{Br}\, X_L/\mathrm{Br}\, L$ et l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_{\mathrm{nr}})$ sur $\mathrm{Pic}\, \overline{X}$ est triviale. Ainsi, on a déjà

$$H^1(G_{\mathrm{nr}}, \mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{nr}}) = H^1(K^h, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Br}\, X_{\mathrm{nr}})^{G_{\mathrm{nr}}} = (\mathrm{Br}\, \overline{X})^K,$$

ce qui donne les deux dernières lignes horizontales du diagramme voulu.

D'autre part, le groupe $H^2(G_L, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ se plonge dans $H^2(K, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ (parce qu'on a $H^1(L, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) \simeq H^1(L, \mathbb{Z}^r) = 0$). Comme $\mathrm{Br}\, \overline{X}$ est fini, on peut aussi supposer que l'image de $(\mathrm{Br}\, \overline{X})^K$ dans $H^2(K, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ est incluse dans $H^2(G_L, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$. Alors, comme L est inclus dans K_{nr}, l'image de $H^2(G_L, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ par la flèche

$$H^2(K, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) \longrightarrow H^2(K^h, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$$

est incluse dans $H^2(G_{\mathrm{nr}}, \mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{nr}})$ et on obtient le diagramme voulu avec la proposition 2.2.1 (en appliquant cette proposition aux schémas X/K et X^h/K^h).

Fin de la preuve du théorème 2.3.1.

Soit L comme dans le lemme 2.3.2. On peut trouver (quitte à réduire encore U) un revêtement étale $\rho : Z \to U$, avec Z intègre et lisse sur k, de corps des fonctions L ; il existe alors un sous-ensemble hilbertien H de $U(k)$ tel que pour tout point m de H, la fibre de ρ en m soit connexe. Utilisons le lemme 2.3.2 appliqué au point m ; il y a un unique point fermé m' de Z au-dessus de m et $L^h = K^h \otimes_K L$ est un corps, extension finie galoisienne de K^h de groupe G_L. Le hensélisé R_L de l'anneau local de Z en m' (dont on note k' le corps résiduel) est une extension finie et non ramifiée de A^h, de corps des fractions L^h. Les flèches de spécialisation

$$\mathrm{Pic}\, \overline{X} \longrightarrow \mathrm{Pic}\, \overline{X}_m \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}\, \overline{X} \longrightarrow \mathrm{Br}\, \overline{X}_m$$

sont des isomorphismes d'après la proposition 2.1.1. Mais d'autre part, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur $\mathrm{Pic}\, \overline{X}$ se factorise par G_L et l'action de G_k sur

$\operatorname{Pic} \overline{X}_m$ se factorise par $G_{k'} = \operatorname{Gal}(k'/k)$. Comme m est dans H, on a $G_L \simeq G_{k'}$; donc la flèche

$$H^1(K, \operatorname{Pic} \overline{X}) \longrightarrow H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}_m)$$

(qui apparaît dans le diagramme du lemme 2.3.2) est un isomorphisme. De même, la flèche

$$(\operatorname{Br} \overline{X})^K \longrightarrow (\operatorname{Br} \overline{X}_m)^k$$

est un isomorphisme. Enfin, la flèche

$$H^2(G_L, \operatorname{Pic} \overline{X}) \longrightarrow H^2(G_{k'}, \operatorname{Pic} \overline{X}_m)$$

est un isomorphisme donc la flèche

$$H^2(G_L, \operatorname{Pic} \overline{X}) \longrightarrow H^2(k, \operatorname{Pic} \overline{X}_m)$$

est injective. Une chasse au diagramme aisée montre alors que la flèche de spécialisation

$$\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} K \longrightarrow \operatorname{Br} X_m / \operatorname{Br} k$$

est un isomorphisme. Comme X et X_m sont projectives et lisses, on a

$$\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}\big(K(X)/K\big) = \operatorname{Br} X \quad \text{et} \quad \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}\big(k(X_m)/k\big) = \operatorname{Br} X_m.$$

D'où le théorème. $\square$

3. Applications arithmétiques

3.1. Fibrés au-dessus de la droite affine.

On a tout d'abord un léger raffinement (consistant à remplacer l'hypothèse $\operatorname{Br} \overline{X}$ nul par $\operatorname{Br} \overline{X}$ fini) du théorème 4.2.1 de [16] :

PROPOSITION 3.1.1. — *Soient V une variété quasi-projective sur un corps de nombres k et $p : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ un morphisme surjectif, à fibres scindées. Soit $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbb{A}^1_k$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p, dont on suppose qu'elle est géométriquement intègre et admet un $\overline{k}(T)$-point lisse.*

On fait l'hypothèse que $\operatorname{Br} \overline{X}$ *est fini et que* $\operatorname{Pic} \overline{X}$ *est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété V_η est géométriquement unirationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbb{P}^r_K$).*

Enfin, on suppose qu'il existe un ouvert non vide Ω de $\mathbb{A}^1_k$ tel que pour tout point rationnel θ de Ω, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ.

Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Preuve. — On peut supposer p projectif (en plongeant V dans une k-variété projective $\widetilde{V}$ et en remplaçant V par l'adhérence schématique du graphe de p dans $\widetilde{V} \times_k \mathbb{A}^1_k$; en effet, un schéma qui contient un ouvert non vide scindé est scindé). Dans ce cas, le lemme 4.1.1 de [16] fonctionne encore avec l'hypothèse que les fibres de p sont scindées et non plus forcément géométriquement intègres (la preuve s'adapte sans difficulté, *cf.* [28, lemmes 2.2 et 2.3]). La même preuve que celle du théorème 4.2.1 de [16] fonctionne alors puisqu'on a le théorème 2.3.1, analogue du théorème 3.5.1 de [16].

3.2. Généralisation à l'espace affine.

Reprenant la notation utilisée par Skorobogatov dans [27], on dira qu'un morphisme $p : V \to \mathbb{A}^n_k$ vérifie la condition (*) s'il existe un ouvert $\mathcal{V}$ de la variété des droites de $\mathbb{A}^n_k$ tel que pour toute droite D de $\mathcal{V}$ (dont on note $k(D)$ le corps des fonctions), la fibre de p au point générique de D possède un $\bar{k}(D)$-point lisse (où $\bar{k}(D) = k(D) \otimes_k \bar{k}$ désigne le corps des fonctions de $D \times_k \bar{k}$). La proposition 3.1.1 va nous permettre d'établir l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.2.1. — *Soient V une variété quasi-projective sur un corps de nombres k et F un fermé de codimension au moins 2 de $\mathbb{A}^n_k$. On suppose que V est munie d'un k-morphisme*

$$p : V \longrightarrow (\mathbb{A}^n_k \setminus F)$$

surjectif, vérifiant (*), et à fibres scindées. Soit $K = k(T_1, ..., T_n)$ le corps des fonctions de $\mathbb{A}^n_k$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p dont on suppose qu'elle est géométriquement intègre.

On fait l'hypothèse que $\operatorname{Br} \overline{X}$ *est fini et que* $\operatorname{Pic} \overline{X}$ *est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété V_η est géométriquement unirationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbb{P}^r_K$).*

On suppose enfin qu'il existe un ouvert non vide Ω de $\mathbb{A}^n_k$ tel que pour tout point rationnel θ de Ω, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ.

Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Preuve. — On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il suffit d'appliquer le corollaire 3.1.1. Supposons donc le résultat vrai jusqu'à $(n-1)$ et montrons-le pour n.

On se ramène d'abord comme dans le corollaire 3.1.1 au cas où le morphisme p est projectif. Ensuite, par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, on peut trouver une k-variété lisse V', équipée d'un morphisme projectif (et surjectif) q vers V qui induit un isomorphisme d'un ouvert U' de V' sur V_{lisse}. En composant q et p, on obtient un morphisme projectif et surjectif

$$p' : V' \longrightarrow (\mathbb{A}^n_k \setminus F).$$

Par hypothèse, pour tout θ de $(\mathbb{A}^n_k \setminus F)$, la fibre V_θ de p en θ contient un ouvert non vide U_θ qui est géométriquement intègre sur k et que nous pouvons supposer (quitte à le restreindre) inclus dans V_{lisse}. Alors, l'ouvert $q^{-1}(U_\theta)$ (qui est isomorphe à U_θ, donc géométriquement intègre) est un ouvert non vide de la fibre V'_θ de p' en θ. Ainsi, les fibres de p' sont également scindées et nous nous ramenons donc au cas où la variété V est lisse sur k. Montrons alors un lemme :

LEMME 3.2.2. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de la variété des droites de $\mathbb{A}^n_k$ tel que pour toute droite D de $\mathcal{U}$, on ait :*

- *Le k-schéma $V_D = p^{-1}(D)$ est lisse et géométriquement intègre.*
- *La fibre générique $V_{k(D)}$ du morphisme $V_D \to D$ induit par p est lisse et admet un $\bar{k}(D)$-point.*
- *L'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour un modèle projectif lisse W_D de V_D.*
- *Notant $\overline{W}_D = W_D \times_k \bar{k}$, on a $\operatorname{Pic} \overline{W}_D$ sans torsion et $\operatorname{Br} \overline{W}_D$ fini.*

Preuve du lemme 3.2.2. — On peut déjà trouver $\mathcal{U}$ tel que les droites de $\mathcal{U}$ ne rencontrent pas F (ce qui permet bien de parler de $p^{-1}(D)$) et rencontrent Ω vu que F est de codimension au moins 2 dans $\mathbb{A}^n_k$. La première propriété est alors assurée par des théorèmes de Bertini (voir [19, th. 6.10]), vu que la k-variété V est lisse et la condition (*) donne alors la deuxième propriété.

Notons $\overline{k(D)}$ la clôture algébrique de $k(D)$ (qu'il ne faut pas confondre avec $\bar{k}(D)$) et $V_{\overline{k(D)}} = V_{k(D)} \times_{k(D)} \overline{k(D)}$. La $k(D)$-variété $V_{k(D)}$ (qui est projective et lisse) est la fibre de p en un point de dimension 1 de $\mathbb{A}^n_k$ (le point générique de D) ; de ce fait on peut choisir en plus $\mathcal{U}$ tel que pour D dans $\mathcal{U}$, les groupes $\operatorname{Br} V_{\overline{k(D)}}$ et $\operatorname{Pic} V_{\overline{k(D)}}$ soient respectivement isomorphes à $\operatorname{Br} \overline{X}$ et $\operatorname{Pic} \overline{X}$ (car ils en sont des spécialisations et on applique le premier point du lemme 2.3.2 et la proposition 2.1.1). En particulier, $\operatorname{Br} V_{\overline{k(D)}}$ est fini et $\operatorname{Pic} V_{\overline{k(D)}}$ est sans torsion. On en déduit alors (d'après le cas $n = 1$) la troisième propriété, vu que D ne rencontre pas F et rencontre Ω.

On peut alors trouver un modèle projectif lisse W_D de V_D, équipé d'un morphisme projectif π vers $\mathbb{P}^1_k$ dont la fibre générique est $V_{k(D)}$. Posons

$$V_{\bar{k}(D)} = V_{k(D)} \times_{k(D)} \bar{k}(D).$$

Le morphisme π admet une $\bar{k}$-section sur un ouvert non vide de $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$, qui s'étend en une section au-dessus de $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ tout entier (à cause de la propreté de π). De ce fait, le noyau de la restriction

$$\operatorname{Pic} \overline{W}_D \longrightarrow \operatorname{Pic} V_{\bar{k}(D)}$$

est sans torsion car la section s rencontre toutes les fibres en une composante de multiplicité 1, ce qui fait que le corollaire 2.2 de [28] s'applique. Ainsi $\operatorname{Pic} \overline{W}_D$ est sans torsion, puisque $\operatorname{Pic} V_{\overline{k(D)}}$ (et donc *a fortiori* $\operatorname{Pic} V_{\bar{k}(D)}$) est sans torsion. En appliquant la proposition 2.2.1 à la $\bar{k}(D)$-variété $V_{\bar{k}(D)}$, on obtient une suite exacte :

$$0 \to H^1\big(\bar{k}(D), \operatorname{Pic} V_{\overline{k(D)}}\big) \longrightarrow \operatorname{Br} V_{\bar{k}(D)} \longrightarrow \operatorname{Br} V_{\overline{k(D)}}$$

vu que $\operatorname{Br}(\bar{k}(D))$ est nul (le corps $\bar{k}(D) \simeq \bar{k}(T)$ est C_1 par le théorème de Tsen). Le groupe $\operatorname{Pic} V_{\overline{k(D)}}$ est libre de type fini donc $H^1(\bar{k}(D), V_{\overline{k(D)}})$ est fini et comme on a vu que $\operatorname{Br} V_{\overline{k(D)}}$ était fini, on obtient que $\operatorname{Br} V_{\bar{k}(D)}$ est fini. Or, le groupe $\operatorname{Br} \overline{W}_D$ est un sous-groupe de $\operatorname{Br} V_{\bar{k}(D)}$ car $V_{\bar{k}(D)}$ est la fibre générique du morphisme $\bar{\pi} : \overline{W}_D \to \overline{D}$ et un élément non ramifié de $\operatorname{Br}(\bar{k}(W_D))$ est *a fortiori* non ramifié sur la fibre générique de $\bar{\pi}$. D'où le dernier point.

Preuve du théorème 3.2.1. — On peut déjà supposer que pour tout point m (fermé ou non) de Ω, la fibre de p en m est lisse et géométriquement intègre. Choisissons un point rationnel M_0 de Ω par lequel passe une droite D_0 de $\mathcal{U}$. On peut aussi supposer, en prenant M_0 comme origine du système de coordonnées de $\mathbb{A}^n_k$, que pour un certain élément λ de k^* l'hyperplan d'équation $X_1 = \lambda$ contient des droites de $\mathcal{U}$.

En considérant la famille des droites passant par M_0, on obtient un morphisme

$$f_0 : V \setminus V_{M_0} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_k,$$

obtenu en composant p avec la flèche $\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^{n-1}$. Considérant $\mathbb{A}_k^{n-1}$ comme un ouvert de $\mathbb{P}_k^{n-1}$, on peut restreindre le morphisme f_0 en un morphisme

$$f : U \longrightarrow \mathbb{A}_k^{n-1}$$

(où $U = p^{-1}(U')$, avec U' ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{A}_k^n$) qui est surjectif et vérifie la condition (*) (car la flèche $\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ admet la section $(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (\lambda, \lambda x_1/x_0, ..., \lambda x_{n-1}/x_0)$ sur l'ouvert défini par l'équation $x_0 \neq 0$).

Alors, pour presque tout point rationnel θ de $\mathbb{A}_k^{n-1}$, la fibre U_θ de f en θ est de la forme $V_D \setminus V_{M_0}$ avec D dans $\mathcal{U}$. Appliquons le lemme 3.2.2 : on obtient qu'un modèle projectif lisse Z_θ de cette fibre vérifie Pic $\overline{Z}_\theta$ sans torsion et Br $\overline{Z}_\theta$ fini. En particulier, on a

$$H^1(Z_\theta, \mathcal{O}_{Z_\theta}) = H^2(Z_\theta, \mathcal{O}_{Z_\theta}) = 0.$$

Soit $\mathcal{Z}$ un modèle projectif et lisse de la fibre générique de f, les groupes Pic $\overline{\mathcal{Z}}$ et Br $\overline{\mathcal{Z}}$ sont respectivement isomorphes à Pic $\overline{Z}_\theta$ et Br $\overline{Z}_\theta$ (d'après la proposition 2.1.1). Ainsi Pic $\overline{\mathcal{Z}}$ est sans torsion et Br $\overline{\mathcal{Z}}$ est fini. D'autre part, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour Z_θ (toujours d'après le lemme 3.2.2).

Enfin, pour tout point m de $\mathbb{A}_k^{n-1}$ (dont on note $k(m)$ le corps résiduel), la fibre U_m est scindée car U_m est munie d'un morphisme dominant g vers une droite D, la fibre générique de g étant lisse et géométriquement intègre (car $M_0 \in \Omega$). L'une des composantes irréductibles de U_m domine D, et contient un ouvert non vide ω qui est un $k(m)$-schéma lisse (et *a fortiori* réduit, donc intègre). Le corps des fonctions de ω est celui de la fibre générique de g (qui est géométriquement intègre) donc il ne peut contenir d'extension finie de $k(m)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence au morphisme f pour conclure. □

REMARQUE. — On pourrait prouver le résultat en remplaçant dans les hypothèses l'ouvert Ω par un sous-ensemble hilbertien de $\mathbb{A}_k^n$ mais cela ne semble pas très utile en vue d'applications (*cf.* [16, remarque à la fin de la section 4]).

4. Exemples

Le symbole k désigne toujours un corps de nombres.

4.1. Fibrés en coniques au-dessus de l'espace affine.

Soient Y une surface fibrée en coniques au-dessus de la droite projective et d le nombre de fibres dégénérées.

• Quand $d \leq 4$, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour Y (résultat annoncé dans [23] et dont on peut trouver une preuve dans [2]).

• Quand $d = 5$, la variété Y est k-birationnelle à une surface cubique lisse contenant une droite k-rationnelle, pour laquelle l'obstruction de Manin à l'approximation faible est encore la seule (c'est un théorème prouvé par Salberger et Skorobogatov dans [6]). On déduit de ces résultats la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1.1. — *Soient* $f_1(x, t_1, ..., t_n)$ *et* $f_2(x, t_1, ..., t_n)$ *deux polynômes à coefficients dans* k *tels que* $\deg_x f_1 + \deg_x f_2 \leq 4$. *Pour* $i \in \{1, 2\}$, *on suppose que les coefficients en* x *de* f_i *(vus comme des éléments de* $k[t_1, ..., t_n]$*) sont premiers entre eux dans leur ensemble.*

Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour un modèle projectif lisse de l'hypersurface V *de* $\mathbb{A}_k^{n+1} \times_k \mathbb{P}_k^2$ *d'équation :*

$$X_0^2 - f_1(x, t_1, \ldots, t_n)X_1^2 - f_2(x, t_1, \ldots, t_n)X_2^2 = 0.$$

Preuve. — La variété V est fibrée (par $(t_1, \ldots, t_n)$) au-dessus de $\mathbb{A}_k^n$. Comme les coefficients en x de f_i sont premiers entre eux dans leur ensemble, l'ensemble des points $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{A}_k^n$ en lesquels la fibre n'est pas géométriquement intègre (qui est l'ensemble des $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que l'un des $f_i(x, a_1, \ldots, a_n)$ soit nul) est de codimension au moins 2.

D'autre part, la fibre générique du morphisme $p : V \to \mathbb{A}_k^n$ est une surface rationnelle (car c'est un fibré en coniques au-dessus de la droite affine) donc la condition (*) est automatiquement vérifiée car le corps $\bar{k}(t)$ est C_1 (*cf.* [27, remarques p. 209]), et un modèle projectif lisse X de cette fibre générique vérifie donc $\mathrm{Br}\,\overline{X} = 0$ et $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ sans torsion (bien connu, *cf.* par exemple [16, remarques à la fin de 3.5]). Enfin, les k-fibres de p ont pour modèle projectif des surfaces fibrées en coniques au-dessus de $\mathbb{P}_k^1$ qui ont au plus cinq fibres dégénérées (parce que $\deg_x f_1 + \deg_x f_2 \leq 4$), donc l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour ces k-fibres et on conclut avec le théorème 3.2.1.

4.2. Fibrés en surfaces de Châtelet.

Rappelons qu'une *surface de Châtelet* est une surface définie dans $\mathbb{A}_k^3$ par une équation du type

$$y^2 - az^2 = P(x),$$

où P est un polynôme de degré 4. Une telle surface devient de manière évidente birationnelle à $\mathbb{P}^2$ sur le corps $k(\sqrt{a})$. L'étude du principe de

Hasse et de l'approximation faible pour ces surfaces a été faite par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans [8]. Voici un corollaire de leurs résultats et du théorème 3.2.1.

PROPOSITION 4.2.1. — *Soit $f(t_1,\dots,t_n)$ un polynôme à coefficients dans k. Soit V l'hypersurface de $\mathbb{A}_k^{n+3}$ définie par l'équation :*

$$y^2 - f(t_1,\dots,t_n)z^2 = P_1(t_1,\dots,t_n,x)P_2(t_1,\dots,t_n,x)$$

où, pour $i=1,2$, on a

$$P_i(t_1,\dots,t_n,x) = A_i(t_1,\dots,t_n)x^2 + B_i(t_1,\dots,t_n)x + C_i(t_1,\dots,t_n),$$

les trois éléments A_i, B_i, C_i de $k[t_1,\dots,t_n]$ étant premiers entre eux dans leur ensemble pour tout i de $\{1,2\}$. On suppose f premier avec l'un des deux polynômes $B_i^2-4A_iC_i$ (pour $1\le i\le 2$), et également avec l'un des trois polynômes $A_1B_2-A_2B_1$, $A_1C_2-A_2C_1$, $C_1B_2-C_2B_1$.

Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Preuve. — La k-variété V est fibrée (via $(t_1,\dots,t_n)$) au-dessus de $\mathbb{A}_k^n$. La fibre générique V_η est une surface de Châtelet sur le corps $K = k(t_1,\dots,t_n)$ donc cette fibre générique est une surface rationnelle. D'autre part, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les surfaces de Châtelet (voir [8, th. 8.11]). Il reste ainsi pour appliquer le théorème 3.2.1 à vérifier que les fibres sont scindées en dehors d'un fermé de codimension 2.

Soit $(a_1,\dots,a_n)$ un point de $\mathbb{A}_k^n$ en lequel la fibre n'est pas géométriquement intègre. Si $f(a_1,\dots,a_n)\ne 0$, on doit avoir $P_i(a_1,\dots,a_n,x)=0$ pour $i=1$ ou $i=2$, ce qui correspond à un fermé de codimension au moins 2 (sinon il y aurait un diviseur non constant commun aux trois polynômes A_i, B_i, C_i pour $i=1$ ou $i=2$).

Si maintenant $f(a_1,\dots,a_n)=0$, on doit avoir

$$P_1(a_1,\dots,a_n,x)P_2(a_1,\dots,a_n,x)$$

carré dans $\bar{k}(x)$.

- Si $P_1(a_1,\dots,a_n,x)$ et $P_2(a_1,\dots,a_n,x)$ sont des carrés dans $\bar{k}(x)$, on a annulation de f et de $B_i^2-4A_iC_i$ (pour $1\le i\le 2$) en $(a_1,\dots,a_n)$ et comme f est premier avec l'un des $B_i^2-4A_iC_i$, cela correspond bien à un fermé de codimension au moins 2.
- Sinon, on doit avoir $P_1(a_1,\dots,a_n,x)$ et $P_2(a_1,\dots,a_n,x)$ proportionnels dans $\bar{k}(x)$, *i.e.* que les trois polynômes $A_1B_2-A_2B_1$, $A_1C_2-A_2C_1$,

$C_1B_2 - C_2B_1$ (ainsi que f) doivent s'annuler en $(a_1, \ldots, a_n)$. Le polynôme f étant premier avec l'un d'entre eux, on obtient bien encore un fermé de codimension au moins 2. D'où le résultat. □

REMARQUES.

• Soit W un modèle projectif lisse de V. Alors, le groupe de Brauer de $\overline{W} = W \times_k \bar{k}$ n'est pas forcément nul et en fait, il se peut même qu'un élément de $\mathrm{Br}\, W$ qui n'est pas tué dans $\mathrm{Br}\, \overline{W}$ soit la cause d'une obstruction de Manin au principe de Hasse ou à l'approximation faible. On trouvera un exemple de cette situation dans [17], avec $n = 1$. De ce fait, le théorème 4.2.1 de [16] ne permet pas à lui seul de prouver la proposition 4.2.1 pour $n \geq 2$ (ni la proposition 4.1.1, pour la même raison).

• Un autre résultat de [8, théorème 9.3] est que les surfaces de Châtelet d'équation $y^2 - az^2 = Q(x)$ avec Q irréductible satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible. Il suffit donc d'appliquer le théorème principal de [27] pour conclure qu'une hypersurface d'équation

$$y^2 - f(t_1, \ldots, t_n)z^2 = P(t_1, \ldots, t_n, x)$$

avec P irréductible de degré 4 en x (et non plus produit de deux facteurs de degré 2) vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible dès lors que f et le discriminant de $P \in k[t_1, \ldots, t_n][x]$ sont premiers entre eux dans $k[t_1, \ldots, t_n]$.

4.3. Intersection de trois quadriques dans $\mathbb{P}^n$.

On sait que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour une intersection (géométriquement intègre, non conique) de deux quadriques V dans $\mathbb{P}^n$ (avec $n \geq 4$) dès lors que V possède un point rationnel lisse (voir [8, 3.11] pour le cas $n \geq 6$, [9] pour le cas $n = 5$, [24] pour le cas lisse avec $n = 4$ et [10] pour le cas singulier avec $n = 4$). On conjecture aussi (voir [8, 16]) que l'obstruction de Manin au principe de Hasse est la seule pour toute intersection (géométriquement intègre, non conique) de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n$ avec $n \geq 4$.

En reprenant une fibration utilisée par Skorobogatov dans [27] et en utilisant le théorème 3.2.1 au lieu du théorème principal de [27], nous obtenons le résultat conditionnel suivant (qui généralise le théorème 3 de [27]) :

PROPOSITION 4.3.1. — *Supposons que l'obstruction de Manin au principe de Hasse soit la seule pour les modèles projectifs lisses des intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^m$ pour $m \geq 4$. Alors, une intersection lisse de trois quadriques dans $\mathbb{P}^n$ contenant un point rationnel satisfait l'approximation faible quand $n \geq 7$.*

Preuve. — D'après [27, § 4], l'intersection Y des trois quadriques est k-birationnelle à une k-variété Z munie d'un morphisme projectif surjectif p vers $\mathbb{A}_k^2 \setminus F$ (où F est un ensemble fini) qui vérifie (*) et dont les fibres sont des intersections (géométriquement intègres, non coniques) de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$. La fibre générique est en particulier une variété rationnelle et le théorème 3.2.1 s'applique. Comme Y est une intersection complète lisse de dimension au moins 3, on a $\operatorname{Br} Y / \operatorname{Br} k = 0$ (ce résultat bien connu résulte de ce que le module galoisien $\operatorname{Pic} \overline{Y}$ est de permutation, *cf.* par exemple [5, exemple 3.11]), ce qui fait que l'obstruction de Manin s'évanouit sur Y. D'où le résultat. □

4.4. Lien avec l'étude des surfaces cubiques.

Colliot-Thélène et Sansuc ont conjecturé que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les surfaces rationnelles, et en particulier pour les surfaces cubiques. Le résultat conditionnel suivant généralise quelque peu la proposition 5.2.2 de [16] :

PROPOSITION 4.4.1. — *Soit $P(x_0, x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n)$ un polynôme homogène. On suppose que le degré de P en la variable x_i est au plus 3 pour $0 \leq i \leq 3$. Soit Y l'hypersurface de $\mathbb{P}_k^{n+3}$ (avec $n \geq 1$) d'équation homogène :*

$$P(x_0, x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n) = 0.$$

On suppose Y lisse. Alors, si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les surfaces cubiques lisses est vraie, la variété Y vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible).

Preuve. — La variété Y est un modèle projectif lisse de la variété affine V définie dans $\mathbb{A}_k^{n+3}$ par l'équation :

$$P(1, x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_n) = 0.$$

Cette variété V est fibrée au-dessus de $\mathbb{A}_k^n$ (par $(t_1, \ldots, t_n)$) ; on peut supposer la fibre générique V_η lisse (par le théorème de Bertini) ce qui fait qu'un modèle projectif lisse X de V_η est une surface lisse dans $\mathbb{P}_k^3$ de degré au plus 3. Ainsi X est une variété rationnelle (voir [21, th. 24.1]) et de plus la condition (*) est automatiquement vérifiée. Notons également que Y est une hypersurface lisse de dimension au moins 3 ce qui fait que l'obstruction de Manin s'évanouit sur Y.

Il suffit donc pour conclure avec le théorème 3.2.1 de vérifier que les fibres du morphisme $p : V \to \mathbb{A}_k^n$ au-dessus des points de codimension 1 de $\mathbb{A}_k^n$ sont géométriquement intègres. Soit donc H une hypersurface de $\mathbb{A}_k^n$ définie par l'équation

$$Q(t_1, \dots, t_n) = 0,$$

avec par exemple $\deg_{t_1} Q > 0$. En appliquant encore le théorème de Bertini, on voit qu'il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ dans k tels que l'hypersurface V_1 de $\mathbb{P}_k^4$ d'équation

$$P(x_0, x_1, x_2, x_3, t_1, \lambda_2 x_0, \dots, \lambda_n x_0) = 0$$

soit encore lisse. On peut également supposer que le polynôme

$$Q(t_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

n'est pas constant. Soit alors λ_1 dans $\bar{k}$ tel que $Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$. L'hypersurface de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^3$ d'équation

$$P(x_0, x_1, x_2, x_3, \lambda_1 x_0, \lambda_2 x_0, \dots, \lambda_n x_0) = 0$$

est une section hyperplane de $\overline{V}_1$ (qui est une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\bar{k}}^4$) donc d'après un théorème dû à Zak (voir [12, rem. 7.5]), ses singularités sont en nombre fini et elle est donc intègre. Ainsi, la fibre de $\bar{p} : \overline{V} \to \mathbb{A}_{\bar{k}}^n$ au point $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (qui est dans $H(\bar{k})$) est intègre et *a fortiori* la fibre de p au point générique de H est géométriquement intègre. D'où le résultat. ∎

4.5. Perspectives pour l'étude des fibrés au-dessus de la droite projective.

Dans [28], Skorobogatov étudie l'arithmétique des fibrés V au-dessus de $\mathbb{P}_k^1$ dont deux fibres au plus ne sont pas scindées, en faisant l'hypothèse que les fibres vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible. Il utilise pour cela la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc (voir [7]) pour ramener l'étude de ces fibrés à celle de variétés de descente : d'après les résultats de [7], l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour V dès lors que les variétés de descente (qui sont des torseurs sur V) satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible. Or, Skorobogatov montre qu'une variété de descente T est fibrée au-dessus de l'espace affine, les fibres au-dessus des points de codimension 1 étant scindées, ce qui lui permet de conclure (en utilisant une variante du théorème principal de [27]) que T vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible quand les fibres du morphisme $p : V \to \mathbb{P}_k^1$ ont cette même propriété.

Il serait évidemment souhaitable de remplacer cette dernière hypothèse par l'hypothèse plus faible que l'obstruction de Manin au principe de

Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les fibres de p. En supposant que la fibre générique X de p vérifie $\operatorname{Br} \overline{X}$ fini et $\operatorname{Pic} \overline{X}$ sans torsion, on prouve aisément avec le théorème 3.2.1 que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour une variété de descente T. Malheureusement, la théorie de la descente prévoit que $\ker(\operatorname{Br} T \to \operatorname{Br} \overline{T})$ est nul mais pas forcément que $\operatorname{Br} T$ tout entier est nul. On n'est donc pas sûr qu'il n'y ait pas une obstruction de Manin au principe de Hasse ou à l'approximation faible pour T. Une approche possible serait de montrer que l'absence d'obstruction pour V implique l'absence d'obstruction pour T. Pour cela, on voit facilement qu'il suffirait de prouver que la flèche $\operatorname{Br} V \to \operatorname{Br} T$ (induite par la flèche $T \to V$) est surjective mais ce point ne semble pas évident.

REMERCIEMENTS. — L'auteur remercie vivement J.-L. Colliot-Thélène et A. Skorobogatov pour leurs suggestions et les intéressantes discussions qu'il a eues avec eux pendant la préparation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J.W.S.), FRÖHLICH (A.). — *Algebraic number theory.* — Academic press, London and New York, 1967.

[2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.). — Surfaces rationnelles fibrées en coniques in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989*, éd. C. Goldstein, Progress in Math., Birkhäuser, t. **91**, 1990, p. 43–55.

[3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.). — *L'arithmétique des variétés rationnelles* (exposé fait à l'occasion de la remise du prix Fermat), Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. **I,** 3, 1992, p. 295–336.

[4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), CORAY (D.), SANSUC (J.-J.). — *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math., t. **320**, 1980, p. 150–191.

[5] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), RASKIND (W.). — *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the Second Chow Group*, Math. Ann., t. **270**, 1985, p. 165–199.

[6] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SALBERGER (P.). — *Arithmetic on singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc., t. **3,** 58, 1989, p. 519–549.

[7] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SANSUC (J.-J.). — *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J., t. **54**, 1987, p. 375–492.

[8] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SANSUC (J.-J.), Sir Peter Swinnerton-Dyer. — *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces*, J. reine angew. Math., t. **373**, 1987, p. 37–107 ; t. **374**, 1987, p. 72–168.

[9] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SKOROBOGATOV (A.-N.). — *Approximation faible pour les intersections de deux quadriques en dimension 3*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **314** , série I, 1992, p. 127–132.

[10] CORAY (D.), TSFASMAN (M.-A.). — *Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc., t. **57**, 1988, p. 25–87.

[11] FULTON (W.). — *Intersection theory*, Ergeb. der Math. und ihr. Grenzgeb., vol. **3**, 2, 1984.

[12] FULTON (W.), LAZARSFELD (R.). — *Connectivity and its applications in algebraic geometry*, Lecture notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, t. **862**, 1981, p. 26–92.

[13] GROTHENDIECK (A.). — *Géométrie algébrique et géométrie formelle*, Bourbaki, t. **182**, 1958/1959. Reproduit dans *Fondements de la géométrie algébrique*, Paris : Secrétariat mathématique de l'Institut Henri Poincaré, 1962.

[14] GROTHENDIECK (A.). — Le groupe de Brauer, II, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* — Masson-North-Holland, Amsterdam, 1968.

[15] GROTHENDIECK (A.). — Le groupe de Brauer, III : exemples et compléments, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* — Masson-North-Holland, Amsterdam, 1968.

[16] HARARI (D.). — *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J., t. **75**, 1994, p. 221–260.

[17] HARARI (D.). — *Obstructions de Manin "transcendantes"*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1993-1994, éd. S. David, Cambridge University Press, 1996, p. 75–87.

[18] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry.* — Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1977.

[19] JOUANOLOU (J.-P.). — *Théorèmes de Bertini et applications*, Séries de mathématiques pures et appliquées (IRMA), Strasbourg, 1979.

[20] LANG (S.). — *On quasi-algebraic closure*, Ann. of Math., t. **55**, 1952, p. 373–390.

[21] MANIN (Yu. I.). — *Cubic forms.* — North-Holland, Amsterdam, 1974/1986.

[22] MILNE (J.-S.). — *Étale Cohomology.* — Princeton University Press, vol. **33**, Princeton N.J., 1980.

[23] SALBERGER (P.). — *Some new Hasse principles for conic bundle surfaces*, Progress in Math. Birkhäuser, t. **81**, 1989, p. 283–305.

[24] SALBERGER (P.), SKOROBOGATOV (A.N.). — *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J., t. **63**, 1991, p. 517–536.

[25] SCHNEIDER (P.). — *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Zeitschrift, t. **168**, 1979, p. 180–205.

[26] SERRE (J.-P.). — *Corps Locaux.* — Hermann, Paris, 1968.

[27] SKOROBOGATOV (A.-N.)(avec KUNYAVSKIĬ (B.)pour l'appendice). — *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Progress in Math. Birkhäuser, t. **91**, 1990, p. 205–219.

[28] SKOROBOGATOV (A.-N.). — *Descent on fibrations over projective line*, Amer. J. Math., t. **118**, 1996, p. 905–923.