PIERRE DOLBEAULT

GENNADI HENKIN

Chaînes holomorphes de bord donné dans $\mathbb{C}P^n$

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 3 (1997), p. 383-445

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_3_383_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 383–445.

CHAÎNES HOLOMORPHES DE BORD DONNÉ DANS $\mathbb{CP}^n$

PAR

PIERRE DOLBEAULT ET GENNADI HENKIN (*)

RÉSUMÉ. — Dans l'espace projectif $\mathbb{CP}^n$, ou plus généralement, dans un domaine linéairement q-concave X de $\mathbb{CP}^n$, on considère le problème suivant : trouver une p-chaîne holomorphe dans X, de bord une sous-variété M donnée de X, fermée, orientée, de dimension $(2p-1)$. On utilise les sous-espaces projectifs P de dimension $n-p+1$ contenus dans X. Théorème I. — Les deux conditions suivantes sont équivalentes : (i) M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X, de masse localement finie; (ii) M est maximalement complexe, de volume localement fini et, pour tout P contenu dans X et assez voisin d'un sous-espace donné, $M \cap P$ est une courbe de P, bord d'une 1-chaîne holomorphe de masse finie. Le théorème I se déduit du théorème II donnant une condition, généralisant la condition des moments d'Harvey-Lawson sur M, pour que M soit le bord d'une chaîne holomorphe, et aussi d'un théorème de compacité du type de Sachs-Uhlenbeck (1981). Le théorème II généralise le résultat obtenu en 1993 pour $p=1$. Des corollaires redonnent les théorèmes connus dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-r}$ dus à Wermer, Harvey, Lawson, Chirka et d'autres. On s'est borné au cas où M est de classe C^2, éventuellement avec des singularités négligeables.

ABSTRACT. — In the projective space $\mathbb{CP}^n$, or more generally, in a q-linear concave domain X of $\mathbb{CP}^n$, we consider the following problem : find a holomorphic p-chain in X whose boundary is a given $(2p-1)$-dimensional oriented closed submanifold M of X. We use $(n-p+1)$-dimensional subspaces P of $\mathbb{CP}^n$ contained in X. Theorem I. - The following two conditions are equivalent : (i) M is the boundary of a holomorphic p-chain of X, of locally finite mass; (ii) M is maximally complex of locally finite volume and, for any P contained in X in a small enough neighborhood of a given subspace, $M \cap P$ is a curve in P bounding a holomorphic 1-chain of finite mass. Theorem I is deduced from theorem II giving a condition generalizing the moment condition of Harvey-Lawson for M, such that M be the boundary of a holomorphic chain , and also from a compacity theorem of the Sachs-Uhlenbeck type (1981). Theorem II generalizes the 1993 result for $p=1$. Corollaries give the known theorems in $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-r}$ found by Wermer, Harvey, Lawson, Chirka and others. We restrict ourselves to M of class C^2, possibly with scar sets.

(*) Texte reçu le 11 avril 1997, accepté le 28 août 1997.

P. DOLBEAULT et Gennadi HENKIN, Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, case 247, 4, place Jussieu, 75247 Paris CEDEX 05.
Email : dolbeaul@math.jussieu.fr et henhin@math.jussieu.fr.

Classification AMS : 32C30, 49Q15.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1997/383/$ 5.00

0. Introduction

0.1. — Dans une variété (ou un espace) analytique complexe X, de dimension complexe n, on considère une sous-variété M réelle, orientée, fermée, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$, $(0 < p \leq n)$. On note aussi M le courant d'intégration sur M lorsque X est muni d'une métrique hermitienne. S'il existe une p-chaîne holomorphe T de $X \setminus M$, ayant une extension simple à X, notée encore T, telle que $\mathrm{d}T = M$, on dit que M est le bord de T. On cherche des conditions nécesaires et suffisantes pour que M soit le bord d'une p-chaîne holomorphe : c'est le *problème du bord* pour la sous-variété M dans X. Le cas $p = n$ est trivial.

Le problème a été résolu, dans $\mathbb{C}^n$, pour $p = 1$, par J. Wermer [41] et, avec des hypothèses de régularité de plus en plus faibles, par E. Bishop, H. Royden, G. Stolzenberg, H. Alexander, M. Lawrence [27] ; pour p quelconque, par R. Harvey et B. Lawson [15] et, avec des conditions de régularité plus faibles, par Dinh Tien Cuong [6] ; il a été également résolu, pour p quelconque, par R. Harvey et B. Lawson dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-r}$ et dans les sous-espaces analytiques de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-r}$ (voir [15], [16]).

À notre connaissance, J. King [24] a été le premier à poser le problème du bord dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Dans [17], Harvey et Lawson citent ce problème et des tentatives pour le résoudre.

Récemment [9], le problème du bord a été résolu dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, pour $p = 1$, M étant alors une courbe réelle, ou plus généralement une 1-chaîne.

Dans cet article, on obtient des solutions du problème du bord dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, pour p quelconque.

0.2. Définitions. — On va considérer un domaine de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, réunion non vide de sous-espaces projectifs H^q, de dimension q, de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. L'espace H^q étant la réunion de ses sous-espaces projectifs de dimension $r \leq q$, X est aussi la réunion de sous-espaces projectifs de dimension r. On désigne par $P_{\nu'}$ le sous-espace projectif, de dimension q, défini par le point ν' de la Grassmannienne $G_{\mathbb{C}}(q+1, n+1)$.

Un domaine X de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sera dit (*linéairement*) *q-concave* [12] s'il existe un ouvert V' connexe, non vide, de $G_{\mathbb{C}}(q+1, n+1)$ tel que $X = \bigcup_{\nu' \in V'} P_{\nu'}$. Alors, pour $r \leq q$, X est aussi r-concave.

On munit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ d'une métrique hermitienne, par exemple la métrique de Fubini-Study et X de la métrique induite.

Soit M une sous-variété fermée, orientée, de X, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$ telle que $1 \leq n-p+1 \leq q$; d'après la remarque ci-dessus, X est $(n-p+1)$-concave.

Génériquement, le sous-espace projectif $P_{\nu'}$, $\nu' \in G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$ coupe M suivant une courbe $\gamma_{\nu'}$, de classe C^2, contenue dans un ouvert affine $W \cong \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

0.3. THÉORÈME I. — *Dans les hypothèses de* 0.2, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie;*

(ii) *M est maximalement complexe et il existe un point ν'^* appartenant à $G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$ tel que, pour tout ν' dans un voisinage de ν'^*, tout sous-espace projectif $P_{\nu'}$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est contenu dans X et possède la propriété suivante : $M \cap P_{\nu'}$ est une courbe $\gamma_{\nu'}$ de $P_{\nu'}$, contenue dans W, et est le bord d'une* 1*-chaîne holomorphe $S_{\nu'}$ de $P_{\nu'}$, de masse finie.*

Pour la résolution du problème du bord, on peut interpréter le théorème I comme la *réduction du cas p quelconque au cas $p = 1$ déjà résolu dans* [9].

0.3.1. REMARQUE. — L'exemple suivant [8], déduit d'un exemple de Harvey-Lawson [16], montre que l'hypothèse de maximale complexité sur M n'est pas suffisante. Soit M une hypersurface réelle d'une sous-variété algébrique Y, de dimension p de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ telle que M ne soit pas homologue à 0 dans Y ; la variété M, comme hypersurface de Y, est maximalement complexe; s'il existe une chaîne holomorphe T dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ telle que $\mathrm{d}T = M$, alors le support de T est contenu dans Y, ce qui contredit le fait que M n'est pas homologue à 0 dans Y.

0.4. — Pour un système de coordonnées convenable (ξ, η),

$$\xi = (\xi_{n-p+1}, \dots, \xi_n), \quad \eta = (\eta^1_{n-p+1}, \dots, \eta^{n-p}_n)$$

de $G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$, pour un système de coordonnées convenable $(z_1, \dots, z_n)$ de W, pour $\zeta = (z_1, \dots, z_{n-p})$ et pour une forme linéaire g de $\mathbb{C}^n$, telle que l'hyperplan $\{g = 0\}$ soit transverse à $P_{\nu'}$, on a le théorème suivant, sachant que, en général, pour $\nu \in G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$, le sous-espace projectif $D_\nu = P_{\nu'} \cap \{g = 0\}$ ne rencontre pas $\gamma_{\nu'}$.

La démonstration du théorème I utilise ce théorème qui donne une autre solution du problème du bord, avec une hypothèse un peu plus faible.

Un fermé M de X est appelé une *sous-variété (de classe) C^2 à singularités négligeables*, s'il existe un fermé $\tau \subset M$ de mesure de Hausdorff $(2p-1)$-dimensionnelle nulle tel que $M \setminus \tau$ soit une sous-variété fermée de $X \setminus \tau$, orientée, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$, de volume $(2p-1)$-dimensionnel localement fini, que $\mathrm{d}M = 0$ et que $1 \leq n-p+1 \leq q$.

La condition $\mathrm{d}M = 0$ ne résulte pas nécessairement de l'hypothèse faite sur T.

La variété M est dite *maximalement complexe* si $M \setminus \tau$ l'est.

THÉORÈME II. — *Dans les hypothèses ci-dessus, M étant une sous-variété C^2 à singularités négligeables, on considère la fonction*

$$G(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}}\zeta\,\frac{\mathrm{d}g}{g}\cdot$$

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie ;*

(iii) *M est maximalement complexe et il existe un point ν^* appartenant à $G_{\mathbb{C}}(n-p+1,n+1)$ dans un voisinage duquel il existe des fonctions holomorphes de (ξ,η), en nombre fini, satisfaisant au système d'équations aux dérivées partielles de l'onde de choc pour les variables (ξ,η), et telles que les dérivées secondes, par rapport à ξ, d'une combinaison linéaire de ces fonctions, et de G soient égales.*

En particulier, la condition (iii) *est satisfaite si M est maximalement complexe et $G=0$.*

L'énoncé précis du théorème II sera donné dans la section 1.

0.5. — La démonstration du théorème II a la même structure que celle du théorème principal de [9], avec une technique plus élaborée ; cette technique utilise, partiellement, celle de Harvey-Lawson. La démonstration du théorème I établit, d'abord, l'équivalence de (i) et de (ii) avec la condition supplémentaire : $S_{\nu'}$ dépend de ν' de façon continue, car un lemme de géométrie CR de Henkin-Tumanov [20], montre que cette dernière condition est équivalente à la condition (iii) du théorème II. En choisissant, pour chaque ν', une 1-chaîne holomorphe $\widehat{S}_{\nu'}$ de bord $\gamma_{\nu'}$ de volume minimum et, à l'aide d'un résultat de Sacks-Uhlenbeck [35], on montre que $\widehat{S}_{\nu'}$ varie continûment avec ν'. On applique, alors, le résultat précédent à la donnée des $\widehat{S}_{\nu'}$ au lieu de la donnée des $S_{\nu'}$.

0.6. Corollaires.

a) Les théorèmes I et II sont valides dans un sous-espace analytique complexe réduit Y d'un domaine q-concave X de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, en effet, la donnée M étant contenue dans Y, il existe des solutions T à support dans Y ; les conditions (ii) ou (iii) font intervenir le plongement de Y dans X.

b) $\Pi\cong\mathbb{C}\mathrm{P}^q$ étant un sous-espace projectif de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ contenu dans X, et M contenue dans $X\setminus\Pi$, avec $p\geq n-q+1$, il existe une solution unique à support dans $X\setminus\Pi$. On obtient, alors, divers corollaires des théorèmes I et II, en particulier, on retrouve les théorèmes de Rothstein (*cf.* [33], [34]), de Rossi [32], de Harvey et Lawson pour $X=\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (*cf.* [15], [16]) et de Koppelman [26], Chirka pour $X=\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ et $q=n-1$ [4].

c) Le résultat suivant se déduit facilement du théorème I : *soit M une sous-variété maximalement complexe, de dimension $(2p-1)$, d'un ouvert U de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, alors M est incluse dans une variété algébrique de dimension p si et seulement si chaque intersection, non vide, de M avec un sous-espace projectif de dimension $n-p+1$ est incluse dans une courbe algébrique.* Cela donne une forme géométrique à un résultat classique remontant à H. Kneser ([3], ch. IX).

d) Une fonction définie sur le bord d'un domaine de $\mathbb{C}^n$ est appelée une fonction CR *méromorphe* au sens de Harvey-Lawson si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ et si son graphe est maximalement complexe, de classe C^1 à singularités négligeables.

Pour $n \geq 3$, Harvey-Lawson [16, cor. VI] ont obtenu le résultat suivant : *soit V un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^n$ à bord ∂V connexe, de classe C^1 ; alors toute application CR méromorphe au sens de Harvey-Lawson $f : \partial V \to \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ a une extension méromorphe à V.*

Ce résultat est-il valide pour $n = 2$? C'est une question de Harvey et Lawson [16, p. 217]. La note au bas de la page 217 de [16] signale : « *James King has recently proved Corollary VI for $n = 2$* », mais nous ne connaissons pas de publication détaillée de cette propriété.

Nous donnons une démonstration de ce résultat pour $n = 2$, basée sur le théorème I, c'est-à-dire sous la condition : la fonction CR méromorphe est C^2 lisse. La solution complète pourra être obtenue quand le théorème I sera démontré pour une donnée C^1 à singularités négligeables.

0.7. Extensions et problèmes. — Le théorème II et ses corollaires peuvent être formulés quand M est de classe C^1 à singularités négligeables. Dans ce cas il est nécessaire d'utiliser le tranchage dans la formulation des énoncés et dans leurs démonstrations. Nous pensons que la démonstration du théorème I peut être modifiée pour en assurer la validité dans les mêmes conditions.

L'importante extension des résultats au cas où les hypothèses de régularité de M sont encore affaiblies, et au cas où M est une $(2p-1)$-chaîne font l'objet de travaux de Dinh Tien Cuong [7] et de J.B. Poly [11].

Utilisant des résultats de Dinh, F. Sarkis [36] a démontré l'extension naturelle du théorème de Hans Lewy [30] aux fonctions méromorphes.

Les problèmes suivants semblent abordables par les techniques développées dans cet article.

PROBLÈME 1. — *Soit M une variété 1-convexe, maximalement complexe, de dimension $(2p-1)$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. La variété M est-elle toujours le bord d'une p-chaîne holomorphe ? Si oui, cela donne une version géométrique du théorème de Kohn-Rossi* [25].

PROBLÈME 2. — *Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{C}^n$, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$. Les deux conditions suivantes sont-elles équivalentes ?*

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de $\mathbb{C}^n$ de masse finie.*

(ii) *Pour tout $\nu' \in G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$ pour lequel $\gamma_{\nu'} = M \cap P_{\nu'}$ est une courbe lisse, il existe une 1-chaîne holomorphe de $P_{\nu'}$ de masse finie, de bord $\gamma_{\nu'}$.*

Si ce problème a une solution, cela donne une généralisation, à la fois du théorème de Harvey-Lawson dans $\mathbb{C}^n$ et du théorème d'Agranovski-Valski-Stout (voir Stout [39]).

Cet article a été diffusé sous forme d'un preprint [10] dans lequel certains résultats ci-dessus sont proposés comme problèmes.

0.8. — L'organisation de l'article est la suivante : la section 1 contient les définitions d'un système de coordonnées choisi dans $G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$, de l'ouvert affine W, ainsi que l'énoncé précis du théorème II, puis les différents Corollaires avec leurs démonstrations. La démonstration du théorème II occupe les sections 2 à 5. Le théorème I est démontré dans la section 6.

Nous remercions DINH TIEN CUONG pour ses nombreuses remarques sur les versions préliminaires de cet article.

Table des matières

1. Définitions, énoncé du théorème II, corollaires

1.1. Sous-espaces. — Dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, soit $(w_0, ..., w_n)$ un système de coordonnées homogènes; on appelle $Q = \{w_0 = 0\}$ l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$; l'espace W de l'introduction sera $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus Q$. Pour p entier, $0 < p < n$, on considère les sous-espaces projectifs D, de dimension $(n-p)$. À l'exception d'un fermé de Zariski de $G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$, les sous-espaces D sont définis de la façon suivante : soit $\nu = (\xi, \eta)$ une matrice $p \times (n-p+1)$, où ξ est une matrice colonne

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{n-p+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

et η une matrice $p \times (n-p)$,

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^1_{n-p+1} & \cdots & \eta^{n-p}_{n-p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta^1_n & \cdots & \eta^{n-p}_n \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace D a pour équation

$$\begin{pmatrix} w_{n-p+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{n-p+1} & \eta^1_{n-p+1} & \cdots & \eta^{n-p}_{n-p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_n & \eta^1_n & \cdots & \eta^{n-p}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Soient $w = {}^t(w_0, w_1, \dots, w_n)$,

$$w'' = \begin{pmatrix} w_{n-p+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w' = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-p} \end{pmatrix}.$$

L'équation de D est alors $w'' = \nu w'$, *i.e.*

$$\tilde{g}_j(w) = w_j - \xi_j w_0 - \eta^1_j w_1 - \cdots - \eta^{n-p}_j w_{n-p} = 0$$

pour $j = n-p+1, \dots, n$.

Dans $\mathbb{C}P^n \setminus \{w_0 = 0\} \cong \mathbb{C}^n$, on considère aussi les coordonnées non homogènes $z_j = (w_j/w_0)$ et les fonctions affines

$$g_j(z) = z_j - \xi_j - \eta^1_j z_1 - \cdots - \eta^{n-p}_j z_{n-p}.$$

On note $D_\nu = D^{n-p}_\nu$ le sous-espace D, de codimension p, défini à partir de la matrice ν.

Le couple (ξ, η) est un système de coordonnées d'une carte de la Grassmannienne $G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$; le domaine de cette carte est un ouvert de Zariski dont les points sont identifiés aux matrices ν.

1.2. Notations. — On note ν' la matrice déduite de ν par suppression de la première ligne et par $P = P_{\nu'} = P^{n-p+1}_{\nu'}$ le sous-espace projectif défini à partir de la matrice ν', *i.e.* le sous-espace d'équations $\tilde{g}_j(w) = 0$, $j = n-p+2, \dots, n$; ν' est un point d'un domaine de carte de la Grassmannienne $G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$

1.3. — Soit X un domaine q-concave de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. On rappelle que, pour tout $0 \leq r \leq q$, X est r-concave. On munit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ de la métrique de Fubini-Study et X de la métrique induite.

Soit M un fermé de X qui est une *sous-variété (de classe) C^2 à singularités négligeables*, c'est-à-dire il existe un fermé $\tau \subset M$ de mesure de Hausdorff $(2p-1)$-dimensionnelle nulle tel que $M \setminus \tau$ soit une sous-variété fermée de $X \setminus \tau$, orientée, de classe C^2, de dimension $(2p-1)$, de volume $(2p-1)$-dimensionnel localement fini, que $\mathrm{d}M = 0$ et que $1 \leq n-p+1 \leq q$.

On suppose choisies les coordonnées homogènes dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ de sorte que l'hyperplan $Q = \{w_0 = 0\}$ coupe M suivant une sous-variété de dimension $(2p-3)$. La variété M étant de classe C^2, génériquement, le $(n-p+1)$-espace projectif $P_{\nu'}$ coupe M suivant une courbe $\gamma_{\nu'}$, à singularités négligeables, de classe C^2, à distance finie ; l'hypothèse que M est de classe C^2 a été utilisée pour établir cette propriété. Génériquement D_ν, contenu dans $P_{\nu'}$, est l'hyperplan de $P_{\nu'}$ d'équation $\tilde{g}_{n-p+1} = 0$ qui ne rencontre pas $\gamma_{\nu'}$.

On pose :

$$g = g_{n-p+1}, \quad \zeta = {}^t(z_1, \cdots, z_{n-p}).$$

1.4. THÉORÈME II. — *Soient X un domaine q-concave de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, tel que $n-p+1 \leq q \leq n$ et M une sous-variété C^2, à singularités négligeables, de dimension $(2p-1)$, comme ci-dessus. Dans les notations de la section* 1.3, *on considère la fonction vectorielle*

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}} \zeta\,\frac{\mathrm{d}g}{g}.$$

Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie ;*

(iii) *M est maximalement complexe et il existe une matrice (ξ^*, η^*) au voisinage de laquelle*

$$D_\xi^2 G(\xi,\eta) = D_\xi^2\Big(\sum_{j=1}^{N^+} f_j^+(\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{N^-} f_j^-(\xi,\eta)\Big) \tag{1.1}$$

où $f_j^\pm = f_j = {}^t(f_{j,1}, \cdots, f_{j,n-p})$, pour $j = 1, \cdots, N^\pm$, est une fonction vectorielle holomorphe en (ξ,η) et satisfait au système d'équations aux dérivées partielles

$$f_{jk}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell}\Big) = \frac{\partial f_j}{\partial \eta_\ell^k} \tag{1.2}$$

pour $k = 1, \ldots, n-p$ et $\ell = n-p+1, \ldots, n$

Le même énoncé est valide en remplaçant D_ξ^2 par $D_{\xi_{n-p+1}}^2$.

D'après la section 1.3, il suffit de démontrer le théorème pour $q = n-p+1$.

Idée de la démonstration. — Comme dans [9],

(i) $\Rightarrow$ (iii) : démonstration directe;

(iii) $\Rightarrow$ (i), d'abord dans le cas hypersurface $n = p+1$, puis par une méthode de projection.

La démonstration complète sera donnée dans les sections 2 à 5.

La démonstration a été faite, dans [9], pour p=1, pour M de classe C^2, et seulement de façon schématique pour la suffisance de la condition trouvée.

1.4.0. Remarque. — Le théorème est énoncé dans un système de coordonnées fixé. On définit un changement de coordonnées permis comme dans [9]; c'est un cas particulier de projection permise (section 5.1.3) où la projection est l'identité. Alors la démonstration de l'invariance de la condition (iii) par projection permise (prop. 5.1.4) entraîne l'invariance de la condition (iii) par changement de coordonnées permis.

1.4.1. Proposition. — *La variété M étant donnée, deux solutions du problème du bord pour M dans X diffèrent d'une p-chaîne holomorphe de X.*

Démonstration. — Soient T_1, T_2 deux p-chaînes holomorphes distinctes de X telles que $\mathrm{d}T_1 = \mathrm{d}T_2 = M$. Alors, $T_1 - T_2$ est un courant rectifiable, de type (p,p), d-fermé; de plus, $\mathcal{H}^{2p+1}(\mathrm{spt}(T_1 - T_2)) = 0$. D'après le théorème de structure de Harvey-Shiffman [18], [14], $T_1 - T_2$ est une p-chaîne holomorphe de X. $\square$

1.5. Corollaires du théorème II.

1.5.0. Corollaire. — *Dans les hypothèses des théorèmes* I *et* II, *les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie*;

(iv) *M est maximalement complexe et il existe une matrice (ξ^*, η^*) au voisinage de laquelle*

$$D_\xi^2 G(\xi,\eta) = D_\xi^2\Big(\sum_{j=1}^{N^+} f_j^+(\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{N^-} f_j^-(\xi,\eta)\Big) \tag{1.1}$$

où $f_j^\pm = f_j = {}^t(f_{j,1},\dots,f_{j,n-p})$ pour $j = 1,\dots,N^\pm$, est une fonction vectorielle holomorphe en (ξ,η) et satisfait au système d'équations aux dérivées partielles

$$(1.2)' \qquad f_{jk}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial \xi_{n-p-1}}\Big) = \frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_{n-p-1}}, \qquad k = 1, \dots, n-p$$

Ce corollaire montre que, dans les hypothèses ci-dessus, le système d'équations (1.2) est surdéterminé; ce système résulte du système partiel $(1.2)'$, d'après le théorème II.

Démonstration. — Il suffit de montrer (iv) $\Rightarrow$ (i). Pour ν' au voisinage de ν'^*, la condition $(1.2)'$ entraîne, par le théorème II pour $p = 1$, que la courbe $\gamma_{\nu'}$ est le bord d'une 1-chaîne holomorphe $S_{\nu'}$. Alors, le théorème I entraîne (i). $\square$

1.5.1. COROLLAIRE. — *Soit Y un sous-espace analytique complexe réduit d'un domaine q-concave X de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Si M une sous-variété de X, de classe C^2, à singularités négligeables, contenue dans Y, de dimension $(2p-1)$, telle que $1 \le n-p+1 \le q$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X, de masse localement finie, à support contenu dans Y ;*

(b) *M satisfait à la condition* (ii) *du théorème* I *dans X ;*

(c) *M satisfait à la condition* (iii) *du théorème* II *dans X.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que s'il existe une solution T du problème du bord pour M dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, il existe une solution T_Y du problème du bord pour M dans X dont le support est contenu dans Y.

Soit $T = \sum n_j[W_j]$ une solution du problème du bord pour M dans X, où W_j est un sous-ensemble analytique complexe irréductible de X. Soient $z \in M$ et un indice j_0 tel que, pour tout voisinage ouvert U_z de z dans X dans lequel un modèle local Y_z de Y est contenu, et que $U_z \cap \overline{W}_{j_0}$ contienne un ouvert de M. Alors, M étant de dimension $(2p-1)$, les premiers membres des équations de Y_z dans U_z, s'annulant sur M, s'annulent aussi sur $U_z \cap \overline{W}_{j_0}$; il est clair que l'inclusion locale de $\overline{W}_{j_0}$ dans Y se propage à tout $\overline{W}_{j_0}$. Alors, $T_Y = \sum n_{j_0}[W_{j_0}]$, où la sommation porte sur tous les indices j_0 possédant la propriété ci-dessus, est une solution du problème du bord à support dans Y. $\square$

1.5.2. COROLLAIRE. — *Dans les hypothèses et notations du théorème* II, *les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe unique T de $X \setminus D_{\nu^*}$;*

(b) *M est maximalement complexe et $D^2_\xi G(\xi, \eta) = 0$ pour ν au voisinage de ν^* ;*

(c) *M est maximalement complexe et $N^+ = 0 = N^-$ pour ν au voisinage de ν^*.*

Démonstration.

(a) $\Rightarrow$ (c) : M et $\operatorname{spt} T$ sont contenus dans $X \setminus D_{\nu^*}$. Pour tout ν assez voisin de ν^*, D_ν est disjoint de spt T. Alors, d'après la démonstration du théorème II (section 2 : condition nécessaire), l'ensemble des fonctions $f_j^\pm$ est vide, donc $N^+ = 0 = N^-$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) : évident.

(b) $\Rightarrow$ (a) : $D_\xi^2 G(\xi, \eta) = 0$ entraîne que les conditions (1.1) et (1.2) du théorème II sont satisfaites pour $N^+ = N^- = 0$. L'existence de T, à support disjoint de $D_{\nu*}$, résultera de la démonstration du théorème (sections 3–5 : condition suffisante); l'unicité résulte de la proposition 1.4.1 puisque le support de toute p-chaîne holomorphe non nulle de X rencontre D_{ν^*}, d'après le lemme suivant :

1.5.3. LEMME. — *Le domaine X est $(n-p)$-concave et tout ensemble analytique complexe W de dimension p, de X, rencontre tout sous-espace D_ν contenu dans X.*

Démonstration. — Les sous-espaces D_ν pour lesquels η est fixé définissent une projection π de X dans un sous-espace projectif de dimension p de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, la restriction de π à W est une application ouverte et fermée dans l'ensemble connexe $\pi(X)$, donc elle est surjective. ▯

1.5.4. — Dans les sections 1.5 et 1.6, nous allons considérer la situation suivante : soient X un domaine q-concave de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\Pi \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^q$ un sous-espace projectif de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ contenu dans X et M une sous-variété C^2, à singularités négligeables, de dimension $(2p-1)$ de X disjointe de Π, satisfaisant aux conditions de 1.3. Nous établirons des corollaires du théorème II dont des cas particuliers redonneront les théorèmes connus de Harvey et Lawson (*cf.* [15], [16]) et de Chirka [4] sur le problème du bord, dans l'hypothèse de classe C^2. On pose $r = n - q$.

1.5.5. COROLLAIRE. — *Dans les hypothèses de* 1.5.4, *supposons* $p \geq r+1$, *alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe unique de $X \setminus \Pi$*;

(ii) *M est maximalement complexe.*

Démonstration. — Il suffit de prouver (ii) $\Rightarrow$ (i). L'hypothèse $M \cap \Pi = \emptyset$ entraîne que, pour tout sous-espace Π' dans un voisinage V assez petit de Π dans $G_{\mathbb{C}}(n-r+1, n+1)$, on a $M \cap \Pi' = \emptyset$. Alors, pour tous les $P_{\nu'}^{n-p+1} \subset \Pi'$, pour $\Pi' \in V$, on a $\gamma_{\nu'} = P_{\nu'} \cap M = \emptyset$ et, pour ν' dans un certain ouvert V' de $G_{\mathbb{C}}(n-p+2, n+1)$, on a $G(\xi, \eta) = 0$. Donc l'identité (1.1) est réalisée avec des fonctions $f_j^\pm \equiv 0$.

Pour tout ν^* tel que D_{ν^*} soit contenu dans Π, d'après 1.5.2, il existe une p-chaîne holomorphe unique T, à support disjoint de $D_{\nu*}$, telle que $M = \mathrm{d}T$; donc T a son support disjoint de Π. $\square$

En prenant $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, en tenant compte aussi de 1.5.1, on obtient les théorèmes I de [15] et de [16] pour $p \geq r+1$. En prenant $q = n-1$, on obtient le théorème 2 de [4, 19.6].

1.6. Corollaires du théorème II (suite).

1.6.1. — Dans la suite de la section 1.6, *on suppose M compacte.*

1.6.2. Corollaire. — *Dans les hypothèses de* 1.5.4, *supposons $p = r$, pour $\Pi \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-r}$, supposons X $(n-p+1)$-concave et M compacte dans X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(ii) *M est maximalement complexe et, dans les notations de* 1.4, $N^+ = 0 = N^-$.

(iii) *M satisfait à la condition des moments dans $X \setminus \Pi$, i.e. pour toute forme différentielle C^∞, $\varphi^{p,p-1}$ sur $X \setminus \Pi$, telle que* $\mathrm{d}''\varphi = 0$, *on a* $\int_M \varphi = 0$.

En prenant $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, et compte tenu du corollaire 1.5.2 et du corollaire 1.5.1, on obtient le théorème I de [16] pour $p = r$.

La démonstration fait intervenir les notions et les résultats suivants. Posons :

$$D^2_{\xi_{n-p+1}} = \mathcal{D}.$$

1.6.3. *Expression de $\mathcal{D}G(\xi,\eta)$.*

On considère le noyau de Bochner-Martinelli [14, section 3.7]

$$k_\nu^{n,p}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{(-1)^{p(p-1)/2}(p-1)!}{\Big(\sum\limits_{s=n-p+1}^{n} g_s\bar g_s\Big)^p} \times \sum_{\ell=n-p+1}^{n} (-1)^\ell \bar g_\ell \bigwedge_{k=n-p+1}^{n} \mathrm{d}g_k \wedge \bigwedge_{\substack{k=n-p+1\\ k\neq\ell}}^{n} \mathrm{d}\bar g_k$$

qui est de type $(p,p-1)$. Soit

$$\psi_0 = \frac{C}{\Big(\sum\limits_{s=n-p+1}^{n} g_s\bar g_s\Big)^{p-1}} g_n^{-1}\mathrm{d}g_n \wedge \sum_{\ell=n-p+1}^{n-1} (-1)^\ell \bar g_\ell \bigwedge_{k=n-p+1}^{n-1} \mathrm{d}g_k \wedge \bigwedge_{\substack{k=n-p+1\\ k\neq\ell}}^{n-1} \mathrm{d}\bar g_k$$

qui est de type $(p,p-2)$.

La forme ψ_0 a pour singularités $\{g_n = 0\}$ et D_ν ; pour $\varepsilon > 0$, ψ_0 est intégrable sur $\{|g_n| = \varepsilon\} \cap M$; la forme $k_\nu^{n,p}$ est intégrable. Pour une constante numérique convenable C, on a $\mathrm{d}''\psi_0(z) = k_\nu^p(z)$ en dehors des singularités.

On pose :

$$\omega = \zeta k_\nu^{n,p}, \quad \psi = \zeta\psi_0 ; \qquad \text{alors} \quad \mathrm{d}''\psi = \omega.$$

La variété M est maximalement complexe, *i.e.*

$$M = M_{p,p-1} + M_{p-1,p} ; \qquad \mathrm{d}\psi = \mathrm{d}\zeta \wedge \psi_0 + \zeta\,\mathrm{d}\psi_0.$$

Sur $\{|g_n| > \varepsilon\} \cap M$, on a $\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}''\psi = \zeta\,\mathrm{d}''\psi_0 = \omega$.

La forme ω a une extension Ω à $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ obtenue en passant en coordonnées homogènes dans l'expression de ω, on a $g_s = (\tilde{g}_s/w_0)$; alors, pour

$$W = (w_1, \dots, w_{n-p})$$

et pour une constante numérique convenable C_p, on a

$$\Omega = C_p \frac{W}{w_0} \frac{w_0^p\,\overline{w}_0^p}{\big(\sum\limits_{s=n-p+1}^{n} \tilde{g}_s\,\bar{\tilde{g}}_s\big)^p} \sum_{\ell=n-p+1}^{n} (-1)^\ell \frac{\bar{\tilde{g}}_\ell}{\overline{w}_0} \bigwedge_{k=n-p+1}^{n} \mathrm{d}\Big(\frac{\tilde{g}_k}{w_0}\Big) \wedge \bigwedge_{\substack{k=n-p+1\\ k\neq\ell}}^{n} \mathrm{d}\Big(\frac{\bar{\tilde{g}}_k}{\overline{w}_0}\Big).$$

De plus

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\tilde{g}_j}{w_0}\Big) = w_0^{-1}(\mathrm{d}w_j - \eta_j^1\,\mathrm{d}w_1 - \cdots - \eta_j^{n-p}\,\mathrm{d}w_{n-p}) - w_0^{-2}(w_1 - \eta_j^1 w_1 - \cdots - \eta_j^{n-p} w_{n-p})\,\mathrm{d}w_0.$$

En portant dans Ω, on trouve que :

- les termes indépendants de $\mathrm{d}w_0$, $\mathrm{d}\overline{w}_0$ ont en facteur w_0^{-1} ;
- les termes en $\mathrm{d}w_0$ ont en facteur w_0^{-2} ;
- les termes en $\mathrm{d}\overline{w}_0$ ont en facteur $w_0^{-1}\overline{w}_0^{-1}$;
- les termes en $\mathrm{d}w_0 \wedge \mathrm{d}\overline{w}_0$ ont en facteur $w_0^{-2}\overline{w}_0^{-1}$.

Considérons la dérivation de Ω par rapport à ξ_{n-p+1}. Comme ξ_{n-p+1} figure dans Ω par l'intermédiaire de $\tilde{g}_{n-p+1}$ et seulement dans le facteur

$(\sum_{s=n-p+1}^{n} \tilde{g}_s\bar{\tilde{g}}_s)^{-p}$, on a $\dfrac{\partial \tilde{g}_{n-p+1}}{\partial \xi_{n-p+1}} = -w_0$. Alors, dans $\mathcal{D}\Omega$, seuls les termes produits d'un facteur lisse et de $w_0\,\overline{w}_0^{-1}\,\mathrm{d}\overline{w}_0$ ou $\overline{w}_0^{-1}\,\mathrm{d}w_0 \wedge \mathrm{d}\overline{w}_0$ présentent une singularité dans $Q \setminus D_\nu$. En passant en coordonnées polaires au voisinage de $w_0 = 0$, *i.e.* en posant $w_0 = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, on voit que la forme différentielle $\mathcal{D}\Omega$ est intégrable au voisinage de $w_0 = 0$.

Donc, la forme $\mathcal{D}\Omega$ est lisse sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus (D_\nu \cup Q)$ et est intégrable sur $M \cap \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus D_\nu = M$.

1.6.4. Lemme. — *Dans les notations ci-dessus, on a*

$$\int_M \mathcal{D}\Omega = (-1)^{p-1}\mathcal{D}G(\nu).$$

Démonstration. — Posons :

$$M_\varepsilon = M \cap \big\{\mid g_{n-p+2} \mid \geq \varepsilon, \dots, \mid g_n \mid \geq \varepsilon\big\},$$

$$M_\varepsilon^m = M \cap \big\{\mid g_{n-p+2} \mid \geq \varepsilon, \dots, |g_m| \geq \varepsilon\,;\ g_k = 0, m+1 \leq k \leq n\big\}.$$

Posons $M^n = M$ et $M_\varepsilon^n = M^n \cap \{|g_n| \geq \varepsilon\}$; alors $bM_\varepsilon^n = M \cap \{|g_n| = \varepsilon\}$ et $M^{n-1} = M \cap \{g_n = 0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_M \mathcal{D}\Omega &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon^n} \mathcal{D}\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon^n} \mathcal{D}\omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon^n} \mathcal{D}d\psi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon^n} d\mathcal{D}\psi = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{bM_\varepsilon^n} \mathcal{D}\psi \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{bM_\varepsilon^n} \mathcal{D}\frac{C\zeta}{\big(\sum\limits_{s=n-p+1}^{n} g_s\bar{g}_s\big)^{p-1}} g_n^{-1}\,\mathrm{d}g_n \cdots \\
&= -\int_{M^{n-1}} \mathcal{D}\zeta k_\nu^{n-1,p-1}.
\end{aligned}$$

Par récurrence sur m, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_M \mathcal{D}\Omega &= (-1)^{p-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}} \mathcal{D}\zeta\,\frac{\mathrm{d}g}{g} \\
&= (-1)^{p-1}\mathcal{D}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}} \zeta\,\frac{\mathrm{d}g}{g} = (-1)^{p-1}\mathcal{D}G(\nu)
\end{aligned}$$

puisque $\gamma_{\nu'}$ est, génériquement, à distance finie et ne dépend pas de ξ_{n-p+1}. $\square$

1.6.5. LEMME. — *Dans les notations ci-dessus, la forme différentielle* $\mathcal{D}\Omega$ *est* d''*-fermée sur* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \Pi$.

Démonstration. — Dans $\mathbb{C}^n \setminus \{g_n = 0\}$, on a $\omega = \mathrm{d}''\psi$. Soit ψ_{0m} (resp. ψ_m) la forme déduite de ψ_0 (resp. ψ) par remplacement de g_n par g_m pour $m = n-p+1, \ldots, n-1$; elle a pour singularité $\{g_m = 0\}$ et, dans $\mathbb{C}^n \setminus \{g_m = 0\}$, on a $\omega = \mathrm{d}''\psi_m$. On pose $\psi_n = \psi$. Par passage en coordonnées homogènes, ψ_m a une extension Ψ_m à $U_m = \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{\tilde{g}_m = 0\}$. On montre, comme pour $\mathcal{D}\Omega$, que $\mathcal{D}\Psi_m$ est à coefficients localement intégrables dans U_m. En tant que formes localement intégrables, $\mathrm{d}''\mathcal{D}\Psi_m$ et $\mathcal{D}\Omega$ ont même expression dans U_m, donc $\mathrm{d}''\mathcal{D}\Psi_m = \mathcal{D}\Omega$ en tant que courants. Alors, $\mathrm{d}''\mathcal{D}\Omega = 0$ sur U_m en tant que courant et $\mathrm{d}''\mathcal{D}\Omega = 0$ sur $\bigcup_{m=n-p+1}^{n} U_m = \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus D_\nu$. $\square$

Démonstration de 1.6.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). En effet, (ii) $\Rightarrow$ (i) (cor. 1.5.2) $\Rightarrow$ (iii) car

$$\langle M, \varphi\rangle = \langle \mathrm{d}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathrm{d}\varphi\rangle = \langle T, \mathrm{d}''\varphi\rangle = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert, connexe, q-concave, pour $q = n-p$, (réunion de sous-espaces projectifs de dimension q), de Π dans X, disjoint de M. Alors, par un théorème classique d'approximation de Andreotti-Grauert-Hörmander, ou Weil si $p = 1$, (voir [21, th. 3.4.8]; voir aussi [19]), pour chaque D_ν contenu dans $\mathcal{U}$, on peut approcher la $(p, p-1)$-forme $\mathcal{D}\Omega$, avec singularité D_ν, dans $L^1(M)$, par des formes différentielles C^∞ de $X \setminus \Pi$, d''-fermées, de même bidegré, donc $\int_M \mathcal{D}\Omega = 0$; d'après le lemme 1.6.4, on a $\mathcal{D}G(\nu) = 0$, alors la condition (1.1) du théorème II est satisfaite dans $X \setminus \Pi$; il en résulte que la condition (a), donc la condition (c) du corollaire 1.5.2 sont satisfaites. $\square$

1.7. Corollaire du théorème I.

1.7.1. THÉORÈME. — *Soit V un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^2$, à bord ∂V connexe, de classe C^2. Alors, toute application lisse CR $f : \partial V \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ a une extension méromorphe F à V.*

Notre démonstration est basée sur le théorème I.

En même temps (novembre 1996), une autre démonstration du théorème a été obtenue par E. Porten [31]; utilisant des résultats d'extension locale de fonctions CR de J.-M. Trépreau [40] et de B. Jöricke [23], il a montré que l'application CR lisse f se prolonge dans un domaine W tel que $\partial V \subset \overline{W}$; puis il a appliqué le théorème classique d'extension de Hartogs-Levi.

Pour la méthode de Porten, la condition que f soit lisse est essentielle ; mais, par contre, f peut prendre ses valeurs dans une variété kählérienne compacte (voir Ivashkovich [22]).

Démonstration du théorème 1.7.

1.7.2. — On considère le plongement de Segre

$$\phi : \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^5$$

qui envoie $((z_0, z_1, z_2), (w_0, w_1))$ sur le point

$$v_0 = z_0 w_0,\ v_1 = z_0 w_1,\ v_2 = z_2 w_1,\ v_3 = z_1 w_0,\ v_4 = z_2 w_0,\ v_5 = z_1 w_1,$$

ce qui définit une quadrique $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$.

Soient $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus \{z_0 = 0\}$ et $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^5$ l'application induite par ϕ. Le graphe Γ_f de f est contenu dans $\partial V \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et on cherche une fonction méromorphe F sur V, d'ensemble d'indétermination $\mathcal{I} \subset V$, tels que $F \in \mathcal{M}(V) \cap C^2(\overline{V} \setminus \mathcal{I})$ et que $F_{|\partial V} = f$. On pose $M = \Phi(\Gamma_f)$.

Il s'agit de montrer :

1) $M = \mathrm{d}T$, où T est une 2-chaîne holomorphe dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^5 \setminus M$;

2) T_0 étant une 2-chaîne holomorphe unique convenable satisfaisant à 1), $\operatorname{spt} T_0 = \overline{\Phi(Y)}$ où Y est le graphe de F restreint à $\overline{V} \setminus \mathcal{I}$.

1.7.3. *Preuve de 1).* — La construction de T se faisant dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$, dans les notations de 1.1, on considère la forme linéaire suivante :

$$\tilde{g}_5 = v_5 - \xi_5 v_0 - \eta_5^1 v_1 - \eta_5^2 v_2 - \eta_5^3 v_3\ ;$$

on pose $\xi = \xi_5$, $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3) = (\eta_5^1, \eta_5^2, \eta_5^3)$. L'hyperplan $P_{\nu'}$ a pour équation $\tilde{g}_5 = 0$; $\gamma_{\nu'} = M \cap P_{\nu'}$.

L'application f est définie par deux fonctions $w_0 = w_0(z)$, $w_1 = w_1(z)$, $z \in \partial V$. La représentation paramétrique de $M = \phi(\Gamma_f)$ est

$$v_0 = z_0 w_0(z),\quad v_1 = z_0 w_1(z),\quad v_2 = z_2 w_1(z),$$
$$v_3 = z_1 w_0(z),\quad v_4 = z_2 w_0(z),\quad v_5 = z_1 w_1(z)\ ;$$

$\gamma_{\nu'} = M \cap P_{\nu'}$ est, génériquement, à distance finie, *i.e.* sur $\gamma_{\nu'}$, on peut prendre $v_0 = 1$. Dans $\mathbb{C}^2$ qui contient $\overline{V}$, on a $z_0 \neq 0$, alors on prend les coordonnées (z_0, z_1) avec $z_0 = 1$.

Le paramètre z sur $\gamma_{\nu'}$ satisfait à la condition

$$(*) \qquad z \in \partial V, \quad \psi_\eta(z) = z_1 w_1(z) - \eta^1 w_1(z) - \eta^2 z_2 w_1(z) - \eta^3 z_1 = \xi.$$

On fixe η générique ; pour ξ générique, (*) définit une courbe réelle de classe C^2, $\tilde{\gamma}_{\xi,\eta} = \{z \in \partial V ; \psi_\eta(z) = \xi\}$ contenue dans ∂V.

LEMME. — *Dans* $\mathbb{C}^2$ (*de coordonnée* z), *il existe une* 1-*chaîne holomorphe* $\widetilde{S}_{\xi\eta}$ *telle que* $\tilde{\gamma}_{\xi,\eta} = \mathrm{d}\widetilde{S}_{\xi\eta}$.

Démonstration du lemme. — Soit $P(z)$ n'importe quel polynôme holomorphe en $z = (z_1, z_2)$. Considérons $I_{\xi\eta} = \int_{\tilde{\gamma}_{\xi,\eta}} P(z)\,\mathrm{d}z_1$; on a :

$$I_{\xi\eta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{z\in\partial V|\psi_\eta(z)-\xi|=\varepsilon} P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi} \wedge \mathrm{d}z_1$$

avec $\psi = \psi_\eta$. La forme différentielle sous le signe d'intégration a pour singularités $\psi - \xi = 0$ et $\psi = \infty$.

Pour η générique fixé, $\{z \in \partial V, \psi_\eta = \infty\}$ est une courbe $\tilde{\gamma}_{\infty\eta}$ réelle C^2. On pose :

$$\Psi = \Psi_\eta = z_1w_1 - \eta^1 w_1 - \eta^2 z_2 w_1 - \eta^3 z_1 w_0.$$

D'après la formule de Stokes,

$$\begin{aligned}&\int_{\substack{z\in\partial V|\psi-\xi|>\varepsilon\\ |\psi|<A}} \mathrm{d}\Big(P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1\Big)\\ &\quad= -\int_{z\in\partial V|\psi-\xi|=\varepsilon} P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1 + \int_{z\in\partial V|\psi|=A} P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1.\end{aligned}$$

Mais

$$\mathrm{d}\Big(P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1\Big) = \mathrm{d}\Big(P(z)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\Psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1\Big)\Big|_{\mathrm{gr}\,f} = 0$$

car $\mathrm{gr}\,f$ est maximalement complexe, c'est-à-dire somme de deux courants de bidimension (1, 2) et (2, 1) respectivement. Alors

$$\begin{aligned}&-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z\in\partial V|\psi-\xi|=\varepsilon} P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1\\ &\qquad\qquad + \lim_{A\to\infty}\int_{z\in\partial V|\psi|=A} P(z)\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi-\xi}\wedge \mathrm{d}z_1 = 0,\end{aligned}$$

soit

$$-\int_{\tilde{\gamma}_{\xi\eta}} P(z)\,\mathrm{d}z_1 + \int_{\tilde{\gamma}_{\infty\eta}} P(z)\,\mathrm{d}z_1 = 0.$$

Autrement dit la 1-chaîne $\tilde{\gamma}_{\xi\eta} - \tilde{\gamma}_{\infty\eta}$ satisfait à la condition des moments dans $\mathbb{C}^2$; d'après le théorème de Wermer généralisé (voir [15], [7]), il existe une 1-chaîne holomorphe $\widetilde{S}'_{\xi\eta}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que $\tilde{\gamma}_{\xi\eta} - \tilde{\gamma}_{\infty\eta} = \mathrm{d}\widetilde{S}'_{\xi\eta}$.

Le nombre de composantes connexes de $\tilde{\gamma}_{\xi\eta}$ et de $\tilde{\gamma}_{\infty\eta}$ est fini. Considérons une composante connexe $\tilde{\gamma}^0_\infty$ de $\tilde{\gamma}_{\infty\eta}$ et faisons l'hypothèse suivante : il existe une surface de Riemann Σ de spt $\widetilde{S}'_{\xi\eta}$ issue de $\tilde{\gamma}^0_\infty$ dont le bord contient une réunion non vide $\tilde{\gamma}^0_\xi$ de composantes connexes de $\tilde{\gamma}_{\xi\eta}$.

Si ξ varie assez peu, le nombre de composantes connexes de $\tilde{\gamma}_{\xi\eta}$ est constant. Alors, pour presque tout ξ et pour ξ' assez voisin de ξ, il existe une surface de Riemann Σ', de spt $\widetilde{S}'_{\xi\eta}$, issue de $\tilde{\gamma}^0_\infty$ dont le bord contient une réunion non vide $\tilde{\gamma}^0_{\xi'}$ de composantes connexes de $\tilde{\gamma}_{\xi'\eta}$. D'après le théorème de structure de Harvey-Shiffmann [18], $\Sigma - \Sigma'$ est une surface de Riemann sans bord pour $\xi = \infty$; les deux courbes $\tilde{\gamma}^0_\xi$ et $\tilde{\gamma}^0_{\xi'}$ étant voisines, $\Sigma \cap \Sigma'$ a un intérieur non vide, donc quand ξ' varie au voisinage de ξ, les courbes de niveau $\{\psi_\eta = \xi'\}$ décrivent une surface de Riemann $\mathcal{M}$ (contenue dans ∂V). Mais ψ_η est CR sur ∂V, et sa restriction à $\mathcal{M}$ est une fonction méromorphe g d'une variable complexe qui ne peut pas avoir d'ensembles de niveau $\{g = \xi'\}$ de dimension 1.

L'hypothèse faite conduit à une contradiction, donc spt $\widetilde{S}'_{\xi\eta}$ ne peut pas avoir de composante connexe dont le bord contienne à la fois une composante connexe de $\tilde{\gamma}_{\infty\eta}$ et une composante connexe de $\tilde{\gamma}_{\xi\eta}$. Alors, il existe deux 1-chaînes holomorphes $\widetilde{S}_{\xi\eta}$ et $\widetilde{S}_{\infty\eta}$ de $\mathbb{C}^2$ telles que $\widetilde{S}'_{\xi\eta} = \widetilde{S}_{\xi\eta} + \widetilde{S}_{\infty\eta}$ et $\mathrm{d}\widetilde{S}_{\xi\eta} = \tilde{\gamma}_{\xi\eta}$, $\mathrm{d}\widetilde{S}_{\infty\eta} = \tilde{\gamma}_{\infty\eta}$.

Supposant $w_0 = 1$ et permettant que w_1 puisse prendre la valeur ∞, considérons la fonction

$$w_1(z) = (\xi + \eta^3 z_1)(z_1 - \eta^1 - \eta^3 z_2)^{-1}$$

définie par $\Psi_\eta = \xi$ pour $z \in \operatorname{spt} \widetilde{S}_{\xi\eta}$; on a $\widetilde{S}_{\xi\eta} = \sum_j n_j[\sigma_j]$ où $n_j \in \mathbb{Z}$ et où σ_j est un sous-ensemble analytique complexe irréductible de dimension 1. Le couple (z, w_1) décrit le graphe Σ_j de la fonction $w_1(z)$ définie sur σ_j dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$; $\sum_j n_j[\Sigma_j]$ est une 1-chaîne holomorphe dont l'image par l'isomorphisme analytique propre Φ sur $\mathcal{Q}$ est une 1-chaîne holomorphe $S_{\xi\eta}$ à support dans $P_{\nu'}$ telle que $\gamma_{\xi\eta} = \mathrm{d}S_{\xi\eta}$.

Alors le théorème I entraîne l'assertion 1). $\square$

1.7.4. *Preuve de 2).* — Soit π la projection : $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}^2$. Soit T_0 la 2-chaîne holomorphe unique solution telle que $\pi_* \Phi^{-1}{}_{|\mathcal{Q}}(\operatorname{spt} T_0) = V$. Alors $\mathcal{T}_0 = (\Phi^{-1}{}_{|\mathcal{Q}})(T_0)$ est une 2-chaîne holomorphe de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \setminus \Gamma_f$ telle que $\Gamma_f = \mathrm{d}\mathcal{T}_0$.

Du fait que ∂V, donc Γ_f, est connexe, $\mathcal{T}_0$ est une 2-chaîne holomorphe définie par un seul ensemble analytique complexe irréductible W de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \setminus \Gamma_f$ tel que $\Gamma_f = \pm\,\mathrm{d}W$. Alors,

$$\pm\,\mathrm{d}\big(\pi_*[W]\big) = \pm\pi_*\big(\mathrm{d}[W]\big) = \pi_*(\Gamma_f) = \mathrm{d}V.$$

Selon [15, preuve du th. 12.1], à cause de l'unicité de la solution du problème du bord, on déduit de ce qui précède,

$$\pi_*[W] = V, \tag{†}$$

d'où $\Gamma_f = \mathrm{d}W$. De plus (†) entraîne que W est un revêtement génériquement à un seul feuillet de V, donc W est le graphe d'une fonction F méromorphe sur V, avec la précision donnée dans l'assertion 2). ∎

2. Condition nécessaire

2.1. — On suppose qu'il existe un ensemble analytique complexe de $X \setminus M$, de dimension complexe p, tel que le courant d'intégration T qu'il définit ait une extension simple (notée encore T) à X, de bord $[M]$, courant d'intégration défini par M (que l'on notera habituellement M). On peut suppposer, sans restriction, que T ne contient pas de composante compacte.

2.2. Définition de f_j^+ et de φ_j^-.

On notera encore T le support de T. Pour presque tout ν, D_ν et T sont transverses. On désignera par p_j le j-ième point d'intersection de $D = D_\nu$ et de T et par f_j^+ le point de $\mathbb{C}^{n-p}$ de composantes $z_1(p_j), \ldots, z_{n-p}(p_j)$, de sorte que $(f_j^+; \xi + \eta \cdot f_j^+)$ est le j-ième point d'intersection de D_ν et de T. On considère le sous-espace à l'infini $L_{\nu'} = P_{\nu'} \cap Q$ de $P_{\nu'}$; on suppose que l'intersection $T \cap P_{\nu'}$ est une courbe analytique complexe $T_{\nu'}$. La forme différentielle $\omega = \zeta \dfrac{\mathrm{d}g}{g}|_{T_{\nu'}}$ est méromorphe et a pour pôles à l'infini les points q_s d'intersection de $T_{\nu'}$ et de $L_{\nu'}$.

On pose $\widetilde{w}' = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-p} \end{pmatrix}$ et on note Ω_1 la $1-$forme ω en coordonnées homogènes; alors

$$\Omega_1 = \frac{\widetilde{w}'}{w_0} \frac{\mathrm{d}\tilde{g}}{\tilde{g}} - \widetilde{w}' \frac{\mathrm{d}w_0}{{w_0}^2}$$

et on désigne par Ω la restriction de Ω_1 à $T_{\nu'}$.

Par définition, $\varphi_s^- = -\operatorname{rés}_{q_s} \Omega$, où $\operatorname{rés}_{q_s} \Omega$ est le résidu de Ω au point q_s.

2.3. LEMME. — *Dans les notations ci-dessus, pour D_ν (resp. Q) dans un ouvert convenable de $G_{\mathbb{C}}(n-p+1, n+1)$ (resp. $G_{\mathbb{C}}(n, n+1)$), les fonctions f_j^+ et φ_j^- sont localement holomorphes et satisfont à la relation*

$$G(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\nu'}} \zeta \frac{\mathrm{d}g}{g} = \sum_{j=1}^{N^+} f_j^+(\nu) - \sum_{j=1}^{N^-} \varphi_j^-(\nu). \tag{2.1}$$

Démonstration. — La formule des résidus sur $\operatorname{spt} T \cap P_{\nu'}$ établit la seconde assertion.

Les fonctions f_j^+ sont localement holomorphes parce que T est un ensemble analytique et parce que le sous-espace projectif D_ν a des équations dépendant linéairement de ν.

La fonction φ_s^- est holomorphe en ν comme résidu d'une forme dépendant holomorphiquement de ν. □

Explicitons φ_s^-. Sur $T_{\nu'}$, supposé transverse à Q, au voisinage de q_s, pour un choix convenable des coordonnées, la coordonnée w_{n-p+1} ne s'annule pas ; on fixe alors $w_{n-p+1} = 1$ et, sur la surface de Riemann $T_{\nu'}$, on prend la coordonnée locale w_0 au voisinage de $w_0(q_s) = 0$.

2.3.1. LEMME. — *En supposant que $T_{\nu'}$ est transverse à Q, on a*

$$\varphi_s^- = -\operatorname{rés}_{q_s} \Omega = \{\cdot\}^{-1}[\,\cdot\,]$$

avec

$$\{\cdot\} = \big[1 - \eta_{n-p+1}\widetilde{w}'(q_s)\big],$$

$$[\,\cdot\,] = \Big[\xi_{n-p+1}\widetilde{w}'(q_s) + \frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s) + \Big(\eta_{n-p+1}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}\Big)\widetilde{w}'(q_s) - (\eta_{n-p+1}\cdot\widetilde{w}')\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s)\Big].$$

Au voisinage d'un point q_s, la surface de Riemann $T_{\nu'}$ est définie par $H^{-1}(0)$, où $H(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une fonction vectorielle holomorphe homogène, sur un ouvert de $\mathbb{CP}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n-p}$.

Posons encore

$$\eta_j = (\eta_j^1, \dots, \eta_j^{n-p}), \qquad \widetilde{w}'' = {}^t(w_{n-p+2}, \dots, w_n),$$

$$\tilde{\xi} = {}^t(\xi_{n-p+2}, \dots, \xi_n), \qquad \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{n-p+2} \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

La surface de Riemann $T_{\nu'}$ est définie par

$$H(w'; w'') = 0, \tag{2.3}$$

$$w_j - \xi_j w_0 - \eta_j \widetilde{w}' = 0, \quad j = n-p+2, \dots, n. \tag{2.4}$$

Alors, les coordonnées non homogènes $(w_0, \widetilde{w}')$ d'un point de $T_{\nu'}$, au voisinage de q_s satisfont à

$$H(w_0, \widetilde{w}'; 1, \xi_{n-p+2}w_0 + \eta_{n-p+2}\widetilde{w}', \dots, \xi_n w_0 + \eta_n \widetilde{w}') \equiv 0\,; \tag{2.5}$$

celles de q_s sont obtenues pour $w_0 = 0$.

Alors, par dérivation de (2.3) par rapport à w_0, on a :

$$D_{w_0}H + D_{\widetilde{w}'}H \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0} + D_{\widetilde{w}''}H \cdot \Big(\tilde{\xi} + \tilde{\eta} \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}\Big) \equiv 0.$$

D'autre part,

$$\Omega = \frac{\widetilde{w}'}{w_0}\frac{\mathrm{d}\tilde{g}}{\tilde{g}} - \widetilde{w}'\frac{\mathrm{d}w_0}{w_0^2}\cdot$$

Comme $T_{\nu'}$ est transverse à Q, au voisinage de q_s, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}' &= \widetilde{w}'(q_s) + \frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s)w_0 + \cdots,\\
\tilde{g} &= 1 - \xi_{n-p+1}w_0 - \eta_{n-p+1}\widetilde{w}',\\
\mathrm{d}\tilde{g} &= -\xi_{n-p+1}\,\mathrm{d}w_0 - \eta_{n-p+1}\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}\,\mathrm{d}w_0.
\end{aligned}$$

En portant dans Ω, on obtient

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}w_0}{w_0}\Big[\widetilde{w}'(q_s)\frac{-\xi_{n-p+1} - \eta_{n-p+1}\,\mathrm{d}\widetilde{w}'/\mathrm{d}w_0}{1 - \xi_{n-p+1}w_0 - \eta_{n-p+1}\widetilde{w}'} - \frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s)\Big] + \text{termes indépendants de } \frac{\mathrm{d}w_0}{w_0},$$

d'où

$$\varphi_s^- = -\operatorname{rés}_{q_s}\Omega = \{\cdot\}^{-1}[\,\cdot\,]$$

avec

$$\begin{aligned}
\{\cdot\} &= \big[1 - \eta_{n-p+1}\widetilde{w}'(q_s)\big],\\
[\,\cdot\,] &= \Big[\xi_{n-p+1}\widetilde{w}'(q_s) + \frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s) + (\eta_{n-p+1}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0})\widetilde{w}'(q_s)\\
&\qquad - (\eta_{n-p+1}\cdot\widetilde{w}')\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s)\Big]. \quad \square
\end{aligned}$$

On tiendra compte de la multiplicité éventuelle du point d'intersection q_s, en utilisant la représentation de Puiseux de $T_{\nu'}$, au voisinage de q_s.

(Au voisinage de q_s, $\{\cdot\}$ ne s'annule pas; on retrouve que φ_s^- est holomorphe en ν.)

2.4. Lemme de Darboux.

2.4.1. LEMME. — *Dans* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus Q \cong \mathbb{C}^n$, *on considère les sous-espaces affines* $D'_\nu = D_\nu \cap \mathbb{C}^n$. *Soit* T *une sous-variété analytique complexe d'un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}^n$, *avec* $\dim_{\mathbb{C}} T = p$. *Soit* ν^* *tel que* $D_{\nu^*} \cap T$ *soit un ensemble fini. Alors, pour* ν *dans un voisinage assez petit de* ν^*, $D'_\nu \cap T$ *est un nombre fini, fixe, de points* $(f_j(\nu), \xi + \eta f_j(\nu)), j = 1, \dots, N$ *où* $f_j = {}^t(f_{jk})$, $(k = 1, \dots, n-p)$, *est holomorphe et satisfait à*

$$(1.2) \qquad f_{jk} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} = \frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell}, \quad k = 1, \dots, n-p, \ \ell = n-p+1, \dots, n$$

Réciproquement, si, dans un voisinage de ν^*, $f(\nu)$ *est holomorphe et satisfait à* (1.2), *alors le point* $(f(\nu), \xi + \eta f(\nu))$ *décrit une sous-variété analytique complexe* T *de dimension complexe* p, *d'un ouvert de* $\mathbb{C}^n$; *les* $(n-p)$ *premières coordonnées des points d'intersection de* D'_ν *et de* T *sont, exactement, les composantes des fonctions* f_j.

REMARQUES

1) Dans le cas $n = 2$, l'équation (1.2) est une équation scalaire; la première partie du lemme ci-dessus se trouve implicitement dans le livre de Darboux [5, chap. X, p. 154].

2) Dans le cas $n = 2$, l'équation (1.2) est l'équation de l'onde de choc dans laquelle η_1 est le temps et ξ la coordonnée d'espace; on l'appelle aussi l'équation de Hopf ou l'équation de Burgers sans viscosité.

Démonstration. — La sous-variété T est définie par $K^{-1}(0)$ où $K(z_1, \dots, z_n) = {}^t(K_1, \dots, K_{n-p})$ est une fonction vectorielle holomorphe définie dans Ω. Alors $\mathcal{K}(\nu) = K(f_j; \xi + \eta f_j) \equiv 0$, donc $\mathrm{d}\mathcal{K} \equiv 0$, *i.e.* les applications linéaires

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi_\ell}, \ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \eta^k_\ell}, \quad k = 1, \dots, n-p, \ \ell = n-p+1, \dots, n,$$

satisfont au système d'équations linéaires

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi_\ell} = D_{\tilde{w}'} \mathcal{K} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} + D_{w''} \mathcal{K} \Big[{}^t(0 \cdots (1)_\ell \cdots 0) + \eta \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} \Big] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \eta^k_\ell} = D_{\tilde{w}'} \mathcal{K} \frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell} + D_{w''} \mathcal{K} \Big[{}^t(0 \cdots (f_{jk})_\ell \cdots 0) + \eta \frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell} \Big] = 0,$$

où $(\star)_\ell$ signifie que $\star$ constitue la ℓ-ième colonne de la matrice dans laquelle il figure.

Le système a une solution non nulle en $D_{\tilde{w}'}\mathcal{K}$, $D_{w''}\mathcal{K}$; donc, pour tout couple (k,ℓ), il existe $\lambda^k_\ell \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$\text{(i)} \qquad \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} = \lambda^k_\ell \frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell},$$

$$\text{(ii)} \qquad {}^t\big(0\cdots(1)_\ell\cdots 0\big) + \eta\,\frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} = \lambda^k_\ell\, {}^t\Big(0\cdots(f_{jk})_\ell + \eta\frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell}\cdots 0\Big).$$

En portant (i) dans (ii), on obtient :

$$\text{(iii)} \qquad {}^t\big(0\cdots(1)_\ell\cdots 0\big) + \eta\,\frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell}\,\lambda^k_\ell = \lambda^k_\ell\, {}^t\Big(0\cdots(f_{jk})_\ell + \eta\frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell}\cdots 0\Big).$$

Alors $1 = \lambda^k_\ell f_{jk}$; en multipliant les deux membres de (i) par f_{jk}, on obtient :

$$\text{(1.2)} \qquad f_{jk}\,\frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} = \frac{\partial f_j}{\partial \eta^k_\ell}, \quad k = 1,\ldots,n-p,\ \ell = n-p+1,\ldots,n.$$

Réciproque : pour un ouvert U convenable de $\mathbb{C}^{p(n-p+1)}$, on considère l'application $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ définie par $\nu \mapsto (f(\nu), \xi + \eta f(\nu))$.

Les relations (1.2) entraînent que les mineurs de rang $\geq p+1$ de la matrice jacobienne de F ont des lignes proportionnelles, mais l'un de ses mineurs de rang p ne s'annule pas, de sorte que l'image T de F est de dimension complexe p. En outre, par construction, la dernière assertion est vérifiée. $\square$

2.4.2. LEMME. — *Les fonctions $\varphi = \varphi^-_s$ satisfont à l'équation*

$$\text{(1.2')} \qquad m\varphi_k\,\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n-p+1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^k_{n-p+1}}$$

avec $\varphi = {}^t(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-p})$, $m \in \mathbb{N}^*$ et à

$$\text{(2.6)} \qquad D^2_{\tilde{\xi}}\varphi = D^2_{\xi}\varphi = 0.$$

Démonstration. — En supposant que $T_{\nu'}$ est transverse à Q, les points q_s sont obtenus pour $w_0 = 0$, alors $\widetilde{w}'(q_s)$ et $\mathrm{d}\widetilde{w}'/\mathrm{d}w_0$ satisfont aux équations

$$\text{(2.7)} \qquad H\big(0, \widetilde{w}'(q_s), 1, \tilde{\eta}\,\widetilde{w}'(q_s)\big) = 0,$$

$$\text{(2.8)} \qquad D_{w_0}H + D_{\tilde{w}'}H\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0} + D_{\tilde{w}''}H\Big(\tilde{\xi} + \tilde{\eta}\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}\Big) = 0.$$

$\gamma_{\nu'}$ ne dépend pas de ξ_{n-p+1} ni de η_{n-p+1} ; il en donc de même de $\widetilde{w}'(q_s)$ et de $\mathrm{d}\widetilde{w}'/\mathrm{d}w_0(q_s)$. Considérons, d'abord, les dérivées partielles de φ par rapport à ξ_{n-p+1} et η_{n-p+1} pour $k = 1, \dots, n-p$. D'après le lemme 2.3.1, on a $\varphi_k = \{\cdot\}^{-1}[\,\cdot\,]_k$, où le second facteur signifie la k-ième composante de $[\,\cdot\,]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n-p+1}} &= \{\cdot\}^{-1}\widetilde{w}'(q_s),\\
\frac{\partial \varphi}{\partial \eta^k_{n-p+1}} &= \{\cdot\}^{-2}[\,\cdot\,]\,w_k + \{\cdot\}^{-1}\Big[\frac{\mathrm{d}w_k}{\mathrm{d}w_0}\widetilde{w}'(q_s) - w_k\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}'}{\mathrm{d}w_0}(q_s)\Big]\\
&= \varphi_k\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n-p+1}}\cdot
\end{aligned}$$

Les points q_s satisfont au système d'équations (2.7), (2.8) ; $\widetilde{w}'(q_s)$ dépend de $\tilde{\eta}$ seul. Alors $\mathrm{d}\widetilde{w}'/\mathrm{d}w_0(q_s)$ dépend linéairement de $\tilde{\xi}$, et φ dépend linéairement de $\tilde{\xi}$ et aussi de ξ, d'où (2.6).

En l'absence de transversalité, on obtient le résultat en passant à la limite du cas où la transversalité est satisfaite. $\square$

2.4.3. Remarque. — La fonction φ étant linéaire en ξ, *i.e.* en $(\xi_{n-p+1}, \dots, \xi_n)$, on a $\partial^2\varphi/\partial\xi_j^2 = 0$ pour $j = n-p+1, \dots, n$.

2.5. Proposition. — *Dans les notations du théorème* II, *la condition* (i) *entraîne la condition* (iii).

Démonstration. — Cela résulte des lemmes 2.3, 2.4.1 et 2.4.2. $\square$

3. Condition suffisante dans X : construction d'une fonction méromorphe

3.1. Définitions et notations. — Dans les sections 3 et 4, on suppose $n = p + 1$, de sorte que X est 2-concave. On a $\nu = (\xi, \eta)$ où $\xi = {}^t(\xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = {}^t(\eta_2, \dots, \eta_n)$ sont deux matrices colonnes.

3.1.1. *Projections.* — Pour tout point $a \in X \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, on considère la projection $\pi^a : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{a\} \longrightarrow \Delta$, de centre a sur un hyperplan projectif $\Delta \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^p$ quelconque ne passant pas par a. Le choix des coordonnées homogènes dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est soumis à la condition que l'hyperplan à l'infini $Q = \{w_0 = 0\}$ coupe M suivant une sous-variété à singularités négligeables Γ^∞ de dimension $(2p-3)$. On prend le centre de projection a, dans Q, en dehors de Γ^∞.

Les projetantes, à l'exception de celles qui sont dans l'hyperplan $\{w_1 = 0\}$ ou dans l'hyperplan Q, sont des droites D d'équation $w'' = \nu w'$, *i.e.* $\tilde{g}_j(w) = 0$ pour $j = 2, \ldots, n$, dans les notations de la section 1. Les projetantes qui sont dans Q projettent Γ^∞ dans l'hyperplan à l'infini de Δ. Il n'y a pas de projetantes D dans l'hyperplan $\{w_1 = 0\}$ car, s'il y en avait une, a aurait toutes ses coordonnées homogènes nulles. Si l'on se borne à cette famille de projetantes, il suffit de considérer la projection induite par $\dot{\pi}^a$, notée encore $\dot{\pi}^a$, de $\mathbb{CP}^n \setminus Q \cong \mathbb{C}^n$ dans $\Delta \setminus Q \cong \mathbb{C}^p$, c'est-à-dire une projection affine de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^p$.

Fixer a, de coordonnées homogènes $(0, a_1, \ldots, a_n)$, revient à fixer η tel que $a_j = \eta_j a_1$ pour $j = 2, \ldots, n$. La projection de tout point $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^p$ est définie par $\xi_j = z_j - \eta_j z_1$. L'hyperplan Q étant choisi, $\dot{\pi}^a$ est déterminé par η ; on posera $\dot{\pi}^a = \dot{\pi}_\eta = \dot{\pi}$.

On considère la réunion $X^a = X_\eta$ des droites projectives D_ν issues de a, contenues dans les 2-plans P appartenant à V' (voir 0.2) et passant par a. La restriction $\pi^a = \pi_\eta = \pi$ de $\dot{\pi}^a$ à X^a est la projection de centre a de X^a sur un ouvert $Y = Y^a$ de Δ, car l'application $\dot{\pi}^a$ est propre. À cause du choix des équations des droites D_ν, on se bornera, en général, à considérer l'ouvert $Y' = Y^a \setminus Q$ de $\Delta \setminus Q \cong \mathbb{C}^p$;

On suppose M de classe C^1 à singularités négligeables dans la section 3.1.

Pour tout η, on pose $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\eta = \pi_\eta(M \cap X_\eta)$; c'est une hypersurface de $Y \subset \Delta \cong \mathbb{CP}^p$.

Soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\eta$ l'ensemble des points $z \in X \setminus Q$ tels que tout point de $\pi^{-1}(\pi(z)) \cap M$ soit un point régulier de $\pi_{|M}$. Remarquons que $\mathcal{G}$ est la réunion de droites projectives issues de a et contenues dans X et que $X \setminus \mathcal{G}$ contient, en général, un ouvert non vide de $\mathbb{CP}^n$. Soit K l'ensemble des points critiques de $\pi_{|M}$, alors $\pi(\mathcal{G}) = Y \setminus \pi(K)$.

Le lemme suivant et sa démonstration se trouvent, à très peu près, dans [14, lemma 3.4].

3.1.2. LEMME. — *Soit $\dot{\pi} = \dot{\pi}_\eta$ une projection fixe sur Δ induisant une projection π de X sur Y. Alors*

(a) *on a $\mathcal{H}^{2p-1}(\pi(K)) = 0$ et $\pi(\mathcal{G})$ est un sous-ensemble ouvert, dense, connexe de $Y \subset \Delta$.*

Pour tout $z' \in \mathcal{M} \cap \pi(\mathcal{G})$, $M \cap \pi^{-1}(z')$ est un ensemble fini de points et il existe un voisinage Δ' de z' tel que $M \cap \pi^{-1}(\Delta') = M_1 \cup \ldots \cup M_r$, où M_j est une sous-variété connexe et $\pi_{|M_j}$ un plongement dans Δ', pour $j = 1, \ldots, r$.

(b) *Soit* $\operatorname{Sing} \mathcal{M}$ *la réunion des valeurs critiques $\pi(K)$ et des points où $\mathcal{M}$ n'est pas une sous-variété. Alors* $\operatorname{Sing} \mathcal{M}$ *est partout non dense dans $\mathcal{M}$ et $\Delta \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}$ est un ouvert connexe.*

Démonstration.

(a) L'égalité $\mathcal{H}^{2p-1}(\pi(K)) = 0$ résulte du théorème de Sard. Pour $z' \in \mathcal{M} \cap \pi(\mathcal{G})$, les points de $M \setminus \pi^{-1}(z')$ sont réguliers ; ils sont isolés puisque, au voisinage de chacun d'eux, $\pi_{|M}$ est un difféomorphisme. La projetante D passant par z' est fermée dans $X \setminus \{a\}$; M est relativement compacte dans un voisinage de D dans $X \setminus \{a\}$, donc $M \cap \pi^{-1}(z')$, étant compact, est fini ; la fin de l'assertion (a) résulte de ce qui précède.

(b) La preuve est identique à celle de [14, dém. (b) du lemme 3.4]. □

3.1.3. *Mise en place géométrique.* — Grâce à l'invariance de la condition (iii) par changement de coordonnées permis (voir remarque 1.4.0 et section 5.1), on choisit les coordonnées dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ pour que $\nu^* = 0$, alors $\eta^* = 0$. Le sous-espace $Y \setminus \mathcal{M}_0$ a, en général, une infinité dénombrable de composantes connexes $\mathcal{D}_q$, *i.e.* $Y \setminus \mathcal{M}_0 = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \mathcal{D}_q$ et on suppose que $\xi^* = 0$ appartient à $\mathcal{D}_0$.

Dans la suite, on suppose M de classe C^2, à singularités négligeables.

3.2. Fonctions G_ℓ^m.

3.2.1. *Préliminaires.* — Les équations de D_ν sont

$$\tilde{g}_j = \tilde{g}_j^\nu(w) = w_j - \xi_j w_0 - \eta_j w_1, \quad j = 2, \dots, n,$$

L'ensemble $D = D_\nu$ est une droite projective du plan projectif $P_{\nu'}$.

Dans cette section, on utilise les notations suivantes : le plan projectif $P_{\nu_\ell}^\ell = P^\ell$, d'équations $\tilde{g}_j(w) = 0$, pour $j \neq \ell$, est défini par la matrice ν_ℓ obtenue, à partir de ν, par suppression de la ligne d'indice ℓ, alors $\nu = \nu_{n-p+1}$.

Pour presque tout ν_ℓ, $\gamma^\ell = \gamma_\nu^\ell = P^\ell \cap M$ est une courbe réelle C^2 à singularités négligeables. Dans les coordonnées choisies, l'ensemble $L_\ell = P^\ell \cap Q$ est la droite à l'infini du plan projectif complexe P^ℓ. Pour presque tout hyperplan Q de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ choisi comme hyperplan à l'infini, $M \cap Q$ est vide ou est une sous-variété Γ^∞ de $X \cap Q$, de classe C^2 à singularités négligeables, de dimension $2p-3$. Pour presque tout $\tilde{\eta}^\ell = {}^t(\eta_{n-p+1}, \dots, \widehat{\eta_\ell}, \dots, \eta_n)$, on a $L_\ell \cap \Gamma^\infty = \emptyset$, *i.e.* γ^ℓ est *à distance finie* dans P^ℓ. L'ensemble $D = D_\nu$ est la droite projective d'équation $\tilde{g}_\ell(w) = 0$ du plan projectif P^ℓ. Alors, en supposant que D ne rencontre pas γ^ℓ, on pose :

$$G_\ell^m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^\ell} z_1^m \frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell},$$

$$\omega_m = z_1^m \bigwedge_{\ell=2}^{n} \frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell}\,; \qquad \text{c'est une forme de degré } p.$$

Soit

$$\Gamma_{j\varepsilon}^\ell = \{|g_j| = \varepsilon\} \cap \bigcap_{k\neq j,\ell} \{g_k = 0\} \cap M \cap X_\eta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\pi_j^\ell : \Gamma_{j\varepsilon}^\ell \to \gamma^\ell$ est un fibré en cercles sur γ^ℓ ; $\Gamma_{\nu\varepsilon}^\ell = \bigoplus_{j\neq\ell} \Gamma_{j\varepsilon}^\ell$ est un fibré en produit de $(p-1)$-cercles sur γ^ℓ, de projection $\widetilde{\pi} = \bigoplus_{j\neq\ell} \pi_j^\ell$.

3.2.2. Lemme. — *Supposons ν_0 et ν dans un voisinage assez petit de ν^* ; alors, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on a :*

(i) $G_\ell^m = \dfrac{(-1)^\ell}{(2\pi i)^p}\displaystyle\int_{\Gamma_{\nu_0\varepsilon}^\ell} \omega_m\,;$

(ii) *les fonctions scalaires G_ℓ^m sont holomorphes en ν au voisinage de ν_0.*

Remarque. — Ce lemme et sa démonstration sont analogues au résultat de Leray [29, ch. 10] concernant la dérivation des intégrales dépendant de paramètres.

Démonstration. — La forme différentielle ω_m est méromorphe dans $\mathbb{C}^n$, donc $\mathrm{d}\omega_m$ est de type $(p+1,0)$. La variété M étant maximalement complexe, on a $[M] = M^{2,1} + M^{1,2}$, alors $\mathrm{d}\omega_m$ est orthogonale à $[M]$, *i.e.* $\mathrm{d}\omega_{m\,|\,M} = 0$.

Supposons ν^* tel que $D_{\nu*}$ ne rencontre pas γ^ℓ, pour $\ell = 2, \ldots, n$; alors si ν et ν_0 sont dans un voisinage assez petit de ν^*, D_ν ne rencontre ni $\gamma_{\nu_0}^\ell$, ni $\Gamma_{\nu\varepsilon}^\ell$.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, pour $z \in \gamma^\ell$, on a :

$$\int_{\widetilde{\pi}^{-1}(z)} \bigwedge_{j\neq\ell} \frac{\mathrm{d}g_j}{g_j} = (2\pi i)^{p-1},$$

$$\begin{aligned} G_\ell^m &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^\ell} z_1^m \frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell} = \frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{\gamma^\ell} z_1^m \frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell}\int_{\widetilde{\pi}^{-1}(z)} \bigwedge_{j\neq\ell}\frac{\mathrm{d}g_j}{g_j} \\ &= \frac{(-1)^\ell}{(2\pi i)^p}\int_{\Gamma_{\nu\varepsilon}^\ell}\omega_m = \frac{(-1)^\ell}{(2\pi i)^p}\int_{\Gamma_{\nu_0\varepsilon}^\ell}\omega_m. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de $\mathrm{d}\omega_{m|M} = 0$ et de la formule de Stokes sur M.

Dans l'expression (i), la chaîne d'intégration est indépendante de ν, alors, par dérivation sous le signe somme, on obtient (ii). □

3.3. Étude des fonctions G^m et C_m.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$G^m = G_2^m, \quad C_m = \sum_{j=1}^{N^+}(f_j^+)^m - \sum_{j=1}^{N^-}(f_j^-)^m.$$

3.3.1. Lemme. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction G^m satisfait à :*

$$\frac{\partial G^m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1}\frac{\partial G^{m+1}}{\partial \xi_\ell}, \quad \ell = 2, \ldots, n.$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.2.2,

$$\text{(i)} \qquad G^m = \frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{\Gamma^2_{\nu_0\varepsilon}} \omega_m$$

est une fonction holomorphe de ν au voisinage de ν^*. On a :

$$g_\ell = z_\ell - \xi_\ell - \eta_\ell z_1, \quad \mathrm{d}g_\ell = \mathrm{d}z_\ell - \eta_\ell \mathrm{d}z_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\ell}\frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell} = \frac{-\mathrm{d}z_1}{g_\ell} + z_1\frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell^2},$$

$$\frac{\partial G^m}{\partial \eta_\ell} = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\pi i)^p}\int_{\Gamma^2_{\nu_0\varepsilon}} z_1^{m+1}\frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell^2}\wedge\bigwedge_{k\neq\ell}\frac{\mathrm{d}g_k}{g_k} - \frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\pi i)^p}\int_{\Gamma^2_{\nu_0\varepsilon}} z_1^m\frac{\mathrm{d}z_1}{g_\ell}\wedge\bigwedge_{k\neq\ell}\frac{\mathrm{d}g_k}{g_k}.$$

Mais $\displaystyle\int_{\Gamma^2_{\nu_0\varepsilon}} \mathrm{d}\Big(\frac{z_1^{m+1}}{g_\ell}\wedge\bigwedge_{k\neq\ell}\frac{\mathrm{d}g_k}{g_k}\Big) = 0$ car $b\Gamma^2_{\nu_0\varepsilon} = 0$ et

$$\mathrm{d}\Big(\frac{z_1^{m+1}}{g_\ell}\Big) = (m+1)\frac{z_1^m\,\mathrm{d}z_1}{g_\ell} - z_1^{m+1}\frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell^2};$$

donc

$$\frac{\partial G^m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1}\frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\pi i)^p}\int_{\Gamma^2_{\nu_0\varepsilon}} z_1^{m+1}\frac{\mathrm{d}g_\ell}{g_\ell^2}\wedge\bigwedge_{k\neq\ell}\frac{\mathrm{d}g_k}{g_k} = \frac{m}{m+1}\frac{\partial G^m}{\partial \xi_\ell}\cdot \quad □$$

3.3.2. LEMME. — *Pour tout ν assez voisin de ν^*, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a, avec $f_j = f_j^{\pm}$,*

$$\frac{\partial f_j^m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1} \frac{\partial f_j^{m+1}}{\partial \xi_\ell}, \quad \ell = 2, \ldots, n.$$

Démonstration. — D'après la condition (iii) du théorème II, on a $f_j \dfrac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} = \dfrac{\partial f_j}{\partial \eta_\ell} \cdot$ Pour $m \geq 1$,

$$\frac{\partial f_j^m}{\partial \eta_\ell} = m f_j^{m-1} \frac{\partial f_j}{\partial \eta_\ell} = m f_j^m \frac{\partial f_j}{\partial \xi_\ell} = \frac{m}{m+1} \frac{\partial f_j^{m+1}}{\partial \xi_\ell} \cdot \quad \square$$

3.3.3. PROPOSITION. — *Pour ν assez voisin de ν^* et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$G^m(\nu) = C_m(\nu) + P_m(\nu)$$

où $C_m = \sum_{j=1}^{N^+} (f_j^+)^m - \sum_{j=1}^{N^-} (f_j^-)^m$ et où P_m est un polynôme en ξ de degré m.

Démonstration. — Le lemme 3.3.2 entraîne la relation

$$\frac{\partial C_m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1} \frac{\partial C_{m+1}}{\partial \xi_\ell}, \quad \ell = 2, \ldots, n.$$

Supposons, pour $m \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\frac{\partial^{m+1} G^m}{\partial \xi_\ell^{m+1}} = \frac{\partial^{m+1} C_m}{\partial \xi_\ell^{m+1}} \cdot \tag{3.1}$$

Alors, d'après le lemme 3.3.1,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{m+2} G^{m+1}}{\partial \xi_\ell^{m+2}} &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi_\ell^{m+1}} \Big(\frac{\partial G^{m+1}}{\partial \xi_\ell} \Big) = \frac{m+1}{m} \frac{\partial^{m+1}}{\partial^{m+1} \xi_\ell} \frac{\partial G^m}{\partial \eta_\ell} \\
&= \frac{m+1}{m} \frac{\partial}{\partial \eta_\ell} \Big(\frac{\partial^{m+1} G^m}{\partial \xi_\ell^{m+1}} \Big) = \frac{m+1}{m} \frac{\partial}{\partial \eta_\ell} \Big(\frac{\partial^{m+1} C_m}{\partial \xi_\ell^{m+1}} \Big) \\
&= \frac{m+1}{m} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi_\ell^{m+1}} \frac{\partial C_m}{\partial \eta_\ell} = \frac{\partial^{m+2} C_{m+1}}{\partial \xi_\ell^{m+2}},
\end{aligned}$$

ce qui établit (3.1) pour $m+1$.

En outre (3.1) est satisfaite pour $m = 1$ d'après la condition (iii) du théorème II. Pour $m = 0$, G^0 est un entier, $C_0 = N^+ - N^-$, donc P_0 est un entier. Cela démontre la proposition 3.3.3, par récurrence sur m. $\square$

3.4. Extension et estimation des fonctions C_m.

3.4.1. — Rappelons que $\nu^* = 0$ d'après (3.1.3) ; donc $\eta^* = 0$. On fixe $\eta = 0$. On pose $\overline{\mathcal{G}} = \overline{(\mathcal{G})}_X$. Remarquons que $\overline{\mathcal{G}} = X_0 = X'$. Soit $\mathcal{G}_0$ la variété $\mathcal{G}$ pour $\eta = 0$. On travaille dans la variété $\overline{\mathcal{G}}_0$ qui est un cylindre dans $\mathbb{CP}^n \setminus Q \cong \mathbb{C}^n$ et qui est contenu dans la variété X.

La fonction $G^m(\xi) = G^m(\xi, 0)$ est définie sur $\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{M}_0$; $P_m(\xi) = P_m(\xi, 0)$ est un polynôme en ξ, de degré m, défini à partir du point $\xi^* = 0 \in \mathcal{D}_0$ mais qui a un sens pour tout $\xi \in \mathbb{C}^p$, donc, $G^m(\xi) - P_m(\xi)$, qui coïncide avec $C_m(\xi) = C_m(\xi, 0)$ pour $|\xi| < \varepsilon$, existe globalement sur $\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{M}_0$, d'où :

LEMME. — *Pour $\eta = 0$, chaque fonction $C_m(\xi)$, définie pour $|\xi| < \varepsilon$, a une extension holomorphe, notée encore $C_m(\xi)$, à $\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{M}_0$ telle que $C_m = G^m - P_m$.* $\square$

3.4.2. *Noyau de Bochner-Martinelli.* — Pour $\eta = 0$, la projection de $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par π_0 est $\xi = z' = (z_2, \ldots, z_n)$; en outre, $g = g_2 = z_2 - \xi_2$, P'_ν est le sous-espace affine $g_j = z_j - \xi_j = 0$ pour $j = 3, \ldots, n$; $\gamma_{\tilde{\xi}0} = M \cap \bigcap_{j=3}^{n} \{z_j = \xi_j\}$.

Pour presque tout $\tilde{\xi}$, $\gamma_{\tilde{\xi}0}$ est une courbe à distance finie dans $\mathbb{C}^2$, donc est compacte ; il en est de même de $\gamma'_{\tilde{\xi}0} = \pi_0(\gamma_{\tilde{\xi}0})$; $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\mathrm{d}z_2}{z_2 - \xi_2}$ est le noyau de Cauchy sur $\mathbb{C}$.

On considère le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^p$ (coordonnées $z' = (z_2, \ldots, z_n)$) (*cf.* [14, section 3.7])

$$k_\xi^p(z') = \frac{1}{(2\pi i)^p} \frac{(-1)^{p(p-1)/2}(p-1)!}{\big(\sum_{s=2}^{n} g_s \bar{g}_s\big)^p} \sum_{\ell=2}^{n} (-1)^\ell \bar{g}_\ell \bigwedge_{k=2}^{n} \mathrm{d}g_k \wedge \bigwedge_{k=2,\, k\neq\ell}^{n} \mathrm{d}\bar{g}_k$$

où $g_j = z_j - \xi_j$ pour $j = 2, \ldots, n$ et où z' est la variable. Soit

$$\psi_0 = \frac{C}{\big(\sum_{s=2}^{n} g_s \bar{g}_s\big)^{p-1}} g_n^{-1}\, \mathrm{d}g_n \wedge \sum_{\ell=2}^{n-1} (-1)^\ell \bar{g}_\ell \bigwedge_{k=2}^{n-1} \mathrm{d}g_k \wedge \bigwedge_{k=2,\, k\neq\ell}^{n-1} \mathrm{d}\bar{g}_k.$$

On vérifie que $\mathrm{d}''\psi_0 = k_\xi^p(z')$ pour une constante numérique C non explicitée ici.

Pour $\tilde{\xi}$ donné, soit B une boule ouverte de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{CP}^n \setminus Q$ contenant $\gamma_{\tilde{\xi}0}$. Alors $M_B = M \cap B$ est une sous-variété de B sur laquelle k_ξ^p et $z_1^m k_\xi^p$ sont lisses et intégrables.

La variété M_B définit un courant d'intégration maximalement complexe de degré 3,

$$M_B = M_B^{2,1} + M_B^{1,2}.$$

Alors

$$\langle M_B, \mathrm{d}\psi_0\rangle = \langle M_B^{1,2}, \mathrm{d}''\psi_0\rangle = \langle M_B, \mathrm{d}''\psi_0\rangle.$$

De la même façon, on a

$$\int_{M_B} \mathrm{d}(z_1^m\psi_0) = \int_{M_B} z_1^m \mathrm{d}''\psi_0 = \int_{M_B} z_1^m k_\xi^p.$$

Posons $\psi_0 = \psi_0^n$ et soit ψ_0^k la forme différentielle de même expression que ψ_0 pour $k \le n$ au lieu de n ; alors, le degré de ψ_0^k est $(2k-4)$. On pose aussi

$$M_0^{n+1} = M_0 = M \cap \overline{\mathcal{G}}_0, \quad M_0^k = M_0 \cap \{g_n = 0, \dots, g_k = 0\}$$

et on a $\dim M_0^k = (2k-5)$. On suppose que M est définie au voisinage de X, de sorte que ∂X coupe M transversalement et on choisit B de sorte que ∂B coupe M transversalement. On suppose aussi que M coupe $\partial\overline{\mathcal{G}}_0$ transversalement et on pose $M_{B0} = M_B \cap \overline{\mathcal{G}}_0$.

3.4.3. Lemme. — *On a :*

$$\text{(3.2)} \quad \begin{aligned}\int_{M_{B0}} z_1^m k_\xi^p(z') &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\xi 0}} z_1^m \frac{\mathrm{d}z_2}{z_2-\xi_2} \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \int_{M_0^{k+1}\cap(b\bar{\mathcal{G}}_0+bB)} z_1^m\psi_0^k \\ &= G^m(\xi) + \sum_{k=2}^n \int_{M_0^{k+1}\cap(b\bar{\mathcal{G}}_0+bB)} z_1^m\psi_0^k.\end{aligned}$$

La somme du second membre ne dépend que de la géométrie, de B et de m.

Démonstration. — On pose

$$M_{B\varepsilon} = M_{B0} \cap \big\{|g_n| \ge \varepsilon\big\}, \quad N_{B\varepsilon} = M_{B0} \cap \big\{|g_n| = \varepsilon\big\},$$

l'orientation étant définie par celle de $M_{B0} \cap \{|g_n| \le \varepsilon\}$,

$$M_{B0}^n = M_{B0} \cap \{g_n = 0\}.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}\int_{M_{B0}}(z_1^m k_\xi^p) &= \int_{M_{B0}} \mathrm{d}(z_1^m\psi_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_{B\varepsilon}} \mathrm{d}(z_1^m\psi_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{bM_{B\varepsilon}} z_1^m\psi_0 \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{N_{B\varepsilon}}\Big(z_1^m \frac{C}{(\varepsilon^2+\sum_{s=2}^{n-1} g_s\bar{g}_s)^{p-1}}\frac{\mathrm{d}g_n}{g_n}\wedge\dots\Big) \\ &\qquad\qquad + \int_{M\cap(b\bar{\mathcal{G}}_0+bB)} z_1^m\psi_0 \\ &= 2\pi i\int_{M^n_{B0}}(z_1^m k_\xi^{p-1}) + \int_{M\cap(b\bar{\mathcal{G}}_0+bB)} z_1^m\psi_0.\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est une valeur principale de Cauchy.

Alors, par récurrence sur p, on a (3.2), car $\gamma_{\tilde{\xi}0}$ est dans B. $\square$

3.4.4. — Soit $\rho(\xi)$ la distance de ξ à $\operatorname{Sing}\mathcal{M}_0$ dans $\mathbb{C}^p \cong \Delta\setminus Q$; pour tout $\delta' > 0$, $U_{\delta'} = \{\xi \in \mathbb{C}^p ; \rho(\xi) \le \delta'\}$ est un voisinage de $\operatorname{Sing}\mathcal{M}_0$ dans $\mathbb{C}^p$. Posons $\pi = \pi_0$ et $Y = \pi(X) = \pi(\bar{\mathcal{G}}_0)$.

LEMME. — *Pour tout ouvert relativement compact L de $Y\setminus \operatorname{Sing}\mathcal{M}_0$, il existe une constante β_L telle que, pour tout $\alpha > 1$ et pour tout $\xi\in L$, $|\xi|\le\alpha$, on ait*

$$\big|C_m(\xi)\big| \le \beta_L^m\,\alpha^m.$$

Démonstration. — Le compact $\overline{L}$ étant donné, il existe δ tel que $\overline{L}$ soit contenu dans $Y\setminus U_\delta$ et que la boule B de 3.4.2 contienne $\overline{L}$. Alors, pour $\xi\in\overline{L}$, on pose :

$$\widetilde{G}^m(\xi) = \int_{M_B} z_1^m\, k_\xi^p(z').$$

Sur M_B, z_1 est une fonction, éventuellement multiforme, de $z' = (z_2,\dots,z_n) = \xi \in \mathcal{M}_0$. On pose $\pi(M_B) = \mathcal{M}_{0B}$, alors :

$$\widetilde{G}^m(\xi) = \int_{\mathcal{M}_{0B}} z_1^m\, k_\xi^p(z').$$

Soit (V_ν) un recouvrement ouvert de $\mathbb{C}^p\setminus U_\delta$ tel que, pour tout ν, $\mu_\nu = V_\nu\cap\mathcal{M}_0$ soit une hypersurface connexe telle que $V_\nu\setminus\mu_\nu$ ait deux composantes connexes. Soit (χ_ν) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (V_ν), posons :

$$\widetilde{G}^m_\nu(\xi) = \int_{\mathcal{M}_{0B}} \chi_\nu\, z_1^m\, k_\xi^p.$$

On a :

$$\int_{M_{B0}} (z_1^m k_\xi^p) = \int_{\mathcal{M}_{0B}} \sum_\nu \chi_\nu z_1^m \, k_\xi^p = \sum_\nu \widetilde{G}_\nu^m(\xi).$$

Alors, d'après le lemme 3.4.3, on a :

$$(\dagger) \qquad G^m(\xi) = \sum_\nu \widetilde{G}_\nu^m(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \int_{M^{k+1}\cap(b\bar{\mathcal{G}}_0+bB)} z_1^m \psi_0^k.$$

On applique le théorème de Plemelj-Sokhotski généralisé [14, 3.18] à

$$\widetilde{G}_\nu^m(\xi) = \int_{\mathcal{M}_{0B}} \chi_\nu \, z_1^m \, k_\xi^p.$$

Alors

$$|\widetilde{G}_\nu^m|_{\infty,\mathcal{M}_{0B}} \le C'_\nu \|\chi_\nu z_1^m\|_{C^1(\mathcal{M}_{0B})},$$

d'où, sur $V_\nu \cap \bar{L} \subset\subset V_\nu$,

$$|\widetilde{G}_\nu^m|_\infty \le C_\nu \|\chi_\nu z_1^m\|_{C^1(\mathcal{M}_{0B})},$$

où C_ν, C'_ν sont des constantes ne dépendant que de la géométrie.

Alors, d'après ($\dagger$), sur le compact $\overline{L}$, il existe une constante β'_L telle que $|G^m|_\infty \le {\beta'}_L^m$.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et pour $|\xi| \le \varepsilon$, les fonctions $f_j^\pm$ sont définies et

$$|C_m(\xi)| = \Big| \sum_{j=1}^{N^+} (f_j^+)^m - \sum_{j=1}^{N^-} (f_j^-)^m \Big|.$$

Soit $\beta_1 = (N^+ + N^-) \sup\limits_{|\xi|\le\varepsilon} |f_j^\pm(\xi)|$; alors $|C_m(\xi)| \le \beta_1^m$.

Pour $|\xi| \le \varepsilon$, la relation $P_m = G^m - C_m$ entraîne l'existence d'une constante β_2 telle que $|P_m(\xi)| \le \beta_2^m$. Le polynôme P_m est de degré $\le m$ en $\xi = (\xi_2, \dots, \xi_n)$. Soit $A(m)$ le nombre de coefficients de P_m ; en considérant les valeurs de P_m pour $A(m)$ valeurs de ξ avec $|\xi| \le \varepsilon$, on obtient une majoration des modules de coefficients de P_m par $\beta_3^m / A(m)$.

Alors, pour $|\xi| \le \alpha$, on a $|P_m(\xi)| \le \beta_3^m \alpha^m$, d'où, pour l'extension de C_m, pour ξ dans le compact $\overline{L}$ de $\mathbb{C}^p \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$, il existe une constante β_L telle que

$$|C_m(\xi)| \le \beta_L^m \, \alpha^m. \quad \square$$

3.4.5. Lemme. — *Dans les notations de* 3.1.3, $C_m(\xi)$ *a une extension continue à* $\overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$.

Démonstration. — Cela résulte d'une assertion du théorème de Plemelj-Sokhotski généralisé [14, 3.18] appliqué à $G^m(\xi)$. $\square$

3.5. Construction d'une fonction méromorphe.

3.5.1. *Construction locale.* — D'après la condition (iii), il existe $\varepsilon > 0$ tel que les fonctions $f_j^{\pm}(\xi)$ soient définies pour $|\xi| \leq \varepsilon$. Alors la fonction

$$R(\xi; w) = \prod_{j=1}^{N^+} \big(w - f_j^+(\xi)\big) \prod_{j=1}^{N^-} \big(w - f_j^-(\xi)\big)^{-1} \tag{3.3}$$

est rationnelle en w sur $B(0, \varepsilon) \times \mathbb{C}$.

Soit $\rho > 0$ tel que $|f_j^{\pm}(\xi)| < \rho$ pour tout j et tout $|\xi| < \varepsilon$. Alors, dans $B' = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \rho)} \subset \mathbb{C}$ (coordonnée w), on a $|\, f_j^{\pm}/w\,| < 1$. Pour des déterminations convenables du logarithme, on a :

$$\begin{aligned}\log R(\xi; w) &= \sum_j \log w\Big(1 - \Big(\frac{f_j^+}{w}\Big)\Big) - \sum_k \log w\Big(1 - \Big(\frac{f_k^-}{w}\Big)\Big)\\ &= C_0 \log w - \sum_j \sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big)\Big(\frac{f_j^+}{w}\Big)^m + \sum_k \sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big)\Big(\frac{f_k^-}{w}\Big)^m\end{aligned}$$

où $C_0 = N^+ - N^-$ est une constante entière. À cause de la convergence normale de la série en w dans B', on peut modifier l'ordre des termes et

$$R(\xi; w) = w^{C_0} \exp\Big[-\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big) C_m(\xi) w^{-m}\Big]$$

3.5.2. PROPOSITION. — *Sur* $((B(0, \alpha) \setminus \mathcal{M}_0) \cap L) \times (\mathbb{C} \setminus B(0, \beta_L \alpha))$, *la fonction*

$$R(\xi; w) = w^{C_0} \exp\Big[-\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big) C_m(\xi) w^{-m}\Big] \tag{3.4}$$

est une fonction holomorphe et, pour tout q, *elle a une extension continue* R^q *à*

$$\big(B(0, \alpha) \cap (\overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0) \cap L\big) \times \big(\mathbb{C} \setminus B(0, \beta_L \alpha)\big). \tag{3.5}$$

Démonstration. — La fonction C_m est holomorphe sur $(B(0, \alpha) \setminus \mathcal{M}_0) \cap Y$ d'après sa définition et est continue sur chaque $\overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$ (lemme 3.4.5). D'après le lemme 3.4.4, la convergence de la série (3.4) en w est normale sur tout compact de L ; donc sa somme $R(\xi; w)$ est holomorphe dans son domaine de définition ; en outre, pour tout q, elle a une extension continue à l'ensemble (3.5). $\square$

3.5.3. LEMME (E.E. Levi, *cf.* [14, cor. 2.9]). — *Soient* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}^p$ *(coordonnée* ξ*),* $a > 0$*,* $B' = \mathbb{C} \setminus B(0,a) \subset \mathbb{C}$ *(coordonnée* w*),* $F \in \mathcal{O}(\Omega \times B') \cap C(\overline{\Omega} \times B')$*,* E *une partie de* Ω*. Si, pour tout* $\xi \in E$*, la fonction holomorphe* $F_\xi(w) = F(\xi; w)$ *a une extension rationnelle à* $\mathbb{C}$ *et si* E *est un ouvert non vide, alors* F *a une extension méromorphe à* $\Omega \times \mathbb{C}$*, rationnelle en* w*, à coefficients continus sur* $\overline{\Omega}$

3.5.4. PROPOSITION. — *La fonction* $R(\xi; w)$ *est rationnelle en* w *dans* $\mathcal{D}_0 \times \mathbb{C}$*, à coefficients holomorphes dans* $\mathcal{D}_0$ *et continus dans* $\overline{\mathcal{D}}_0 \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$*.*

Démonstration. — $\xi = 0$ appartient à $\mathcal{D}_0$; on applique le lemme 3.5.3 à $F = R^0$ définie dans 3.5.2, avec $E = B(0, \varepsilon)$ (3.5.1), on tient compte de (3.3) et on fait croître α indéfiniment. □

3.5.5. LEMME. — *Soit* L *un ouvert relativement compact de* $Y \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$*, alors :*

(i) *Pour tout* $\alpha > 1$*, la série* $R(\xi; w)$ *est égale à* $\sum_{m=-\infty}^{C_0} A_m(\xi) w^m$ *et converge uniformément sur tout compact dans*

$$\big((B(0,\alpha) \setminus \mathcal{M}_0) \cap L\big) \times \big(\mathbb{C} \setminus B(0, \beta_L \alpha)\big).$$

(ii) *Tout coefficient* A_m *est une fonction polynômiale d'un nombre fini de* C_ℓ*.*

Démonstration. — Elle résulte de 3.5.2. par réarrangement des termes. □

3.5.6. LEMME. — *Pour tout ouvert* L *relativement compact de l'ensemble* $Y \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$*, la fonction* R *possède les propriétés suivantes :*

(i) *La restriction de* A_m *à* $\mathcal{D}_q$ *se prolonge continûment à* $\overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$ *en une fonction* A_{qm}*.*

(ii) *Pour tout* $\xi \in L \cap (\overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0)$*,* $R^q(\xi; w)$ *est holomorphe en* w *sur* $\mathbb{C} \setminus B(0, \beta_L \alpha)$ *et a pour développement de Laurent*

$$R^q(\xi; w) = \sum_{m=-\infty}^{C_0} A_{qm}(\xi) w^m.$$

(iii) *Soient* $\operatorname{Reg} \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0 \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{M}_0$ *et* $\mathcal{M}_*$ *une composante connexe de* $L \cap \operatorname{Reg} \mathcal{M}_0 \cap \overline{\mathcal{D}}_q \cap \overline{\mathcal{D}}_{q'}$ *; alors* $\pi^{-1}(\mathcal{M}_*) \cap M$ *est la réunion des graphes d'un nombre fini* r *de fonctions* $h_s(\xi) \in C^2(\mathcal{M}_*)$ *et*

$$R^q(\xi; w) = \prod_{s=1}^{r} \big(w - h_s(\xi)\big)^{\pm 1} R^{q'}(\xi; w)$$

sur $(L \cap B(0,\alpha) \cap \mathcal{M}_*)) \times (\mathbb{C} \setminus B(0, \beta_L \alpha)$*, où figure l'exposant* $+1$ *si* $\mathcal{M}_*$*, avec son orientation, est contenue dans le bord de* $\mathcal{D}_q$ *et l'exposant* -1 *si* $\mathcal{M}_*$ *est dans le bord de* $\mathcal{D}_{q'}$*.*

(iv) *Pour tout* $\xi \in \overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{M}_0$, $R^q(\xi; w)$ *est rationnelle en* w *et ses coefficients sont holomorphes en* ξ *sur* $\mathcal{D}_q$ *et continus sur* $\overline{\mathcal{D}}_q \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{M}_0$.

Démonstration.

La partie (i) résulte de l'expression de A_m en fonction des C_ℓ (3.5.5) et du lemme 3.4.5.

La partie (ii) résulte, comme la première assertion de la proposition 3.5.2, de l'estimation des coefficients C_m (lemme 3.4.4).

La partie (iii) résulte, du fait que $Y \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{M}_0$ est connexe puisque $\mathcal{H}^{2p-1}(\operatorname{Sing}\mathcal{M}_0) = 0$, de la formule du saut du théorème de Plemelj généralisé.

La partie (iv) est vérifiée dans $\mathcal{D}_0$ (prop. 3.5.4) et ensuite, en passant d'un $\mathcal{D}_q$ à un $\mathcal{D}_{q'}$ adjacent, *i.e.* en traversant le bord d'un $\mathcal{D}_q$, à l'aide de (iii) et du théorème de Levi généralisé [14, cor. 3.20].

4. Condition suffisante dans X : construction d'une p-chaîne holomorphe

Supposons $(\xi^*, \eta^*) = 0$. La condition (iii) du théorème II est valide pour $|\xi| < \alpha$, $|\eta| < \alpha$ si $\alpha > 0$ est suffisamment petit.

On va d'abord démontrer (iii) $\Rightarrow$ (i) *sous l'hypothèse supplémentaire*

$$X = \bigcup_{|\eta|<\alpha} X_\eta.$$

4.1. Définition de la fonction R_η.

La fonction méromorphe R est définie dans $H_0 = (X_0 \setminus \pi_0^{-1}(\mathcal{M}_0)) \setminus Q$ d'après le lemme 3.5.6. Faisons varier le centre a de la projection $\dot{\pi}^a$ (voir 3.1.1) dans le plan à l'infini Q, ce qui revient à faire varier η. On a établi le lemme 3.5.6 pour $\eta = 0$. D'après la condition (iii) du théorème II, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|\eta| < \alpha$, la construction de la section 3.5 soit valide sur $H_\eta = (X_\eta \setminus \pi_\eta^{-1}(\mathcal{M}_\eta)) \setminus Q \cong (Y_\eta \setminus \mathcal{M}_\eta) \times \mathbb{C}$. On note R_η la fonction définie sur H_η comme R est définie sur H_0. On a :

$$\log R_\eta(\xi; w) = C_0 \log w - \sum_{m=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big) C_m(\xi, \eta) w^{-m}.$$

4.2. Propriétés des coefficients $C_m = C_m(\xi, \eta)$.

4.2.1. — Comme dans le cas $\eta = 0$, C_0 est un entier localement constant.

4.2.2. Lemme. — *Pour* $|\eta| < \alpha$ *et* $\xi \in Y_\eta \setminus \mathcal{M}_\eta$, *on a :*

$$\frac{\partial C_m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1} \frac{\partial C_{m+1}}{\partial \xi_\ell}. \tag{4.1}$$

Démonstration. — D'après 3.3.3 et sa démonstration, pour ν assez voisin de $\nu^* = 0$, on a

$$G^m(\nu) = C_m(\nu) + P_m(\nu) \tag{4.2}$$

et C_m satisfait à (4.1).

D'après 3.3.1, pour $\xi \in Y_\eta \setminus \mathcal{M}_\eta$, la fonction G^m satisfait à

$$\frac{\partial G^m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1}\frac{\partial G^{m+1}}{\partial \xi_\ell}, \qquad \ell = 2, \ldots, n.$$

Alors, d'après (4.2), $P_m(\xi, \eta)$ satisfait, au voisinage de 0, à

$$\frac{\partial P_m}{\partial \eta_\ell} = \frac{m}{m+1}\frac{\partial P_{m+1}}{\partial \xi_\ell}, \qquad \ell = 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Puisque P_m est un polynôme en ξ, il satisfait à (4.3) globalement en ξ, pour η au voisinage de 0.

Alors (4.1), pour $|\eta| < \alpha$ et $\xi \in Y_\eta \setminus \mathcal{M}_\eta$, résulte de (4.2) et de (4.3). $\square$

4.3. Définition de T dans H_η.

4.3.1. — La projection $\dot{\pi}_\eta$ applique tout point $(z_1, \ldots, , z_n) \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus Q$ sur ξ dans $\Delta \setminus Q$ de coordonnées $(\xi_j = z_j - \eta_j z_1)$ avec $j = 2, \ldots, n$. La fonction R_η satisfait à

$$\log R_\eta(\xi; z_1) = C_0 \log z_1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big) C_m(\xi, \eta) z_1^{-m}\,; \tag{4.4}$$

donc le second membre de (4.4) est défini dans H_η et a pour expression

$$\Phi_\eta(z_1, \ldots, z_n) = C_0 \log z_1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{m}\Big) C_m(z_2 - \eta_2 z_1, \ldots, z_n - \eta_n z_1; \eta) z_1^{-m}.$$

On pose :

$$\mathcal{R}_\eta(z_1, \ldots, z_n) = \exp \Phi_\eta(z_1, \ldots, z_n).$$

4.3.2. — Soit $\rho_\eta(\xi)$ la distance de ξ à $\operatorname{Sing} \mathcal{M}_\eta$ dans $\mathbb{C}^p \cong \Delta \setminus Q$; pour tout $\delta' > 0$,

$$U_{\eta\delta'} = \{\xi \in \mathbb{C}^p\,;\ \rho_\eta(\xi) \leq \delta'\}$$

est un voisinage de $\operatorname{Sing} \mathcal{M}_\eta$ dans $\mathbb{C}^p$; d'autre part, on a $Y_\eta = \pi_\eta(X_\eta) = \pi_\eta(\overline{\mathcal{G}}_\eta)$.

Considérons

$$H_{\eta\delta} = H_\eta \setminus \pi_\eta^{-1}(U_{\eta\delta}).$$

D'après le théorème de Poincaré-Lelong [28],

$$T_{\eta\delta} = \frac{i}{\pi}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\bigl|\mathcal{R}_{\eta|H_{\eta\delta}}\bigr|$$

est une p-chaîne holomorphe de $H_{\eta\delta}$.

4.4. Définition de T dans $X \setminus M$.

Les démonstrations des lemmes techniques de ce paragraphe seront données dans le cas où M est lisse de classe C^2.

On pose $z = (z_1, \dots, z_n)$.

4.4.1. LEMME. — *Pour $|\eta'| < \alpha$ et $|\eta''| < \alpha$ et pour $|\eta' - \eta''|$ assez petit, on a $T_{\eta'\delta} = T_{\eta''\delta}$ dans $H_{\eta'\delta} \cap H_{\eta''\delta}$.*

Démonstration. — Dans $H_{\eta\delta}$, pour $|z_1|$ assez grand pour assurer la convergence normale de la série, on a :

$$(4.5)\quad \frac{\partial\Phi_\eta}{\partial\eta_\ell}(z) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\Bigl[\frac{\partial C_m}{\partial\xi_\ell}(-z_1) + \frac{\partial C_m}{\partial\eta_\ell}\Bigr](z_2 - \eta_2 z_1, \dots, z_n - \eta_n z_1; \eta)z_1^{-m}$$

pour $\ell = 2, \dots, n$. D'après le lemme 4.2.2, on a

$$\frac{\partial C_m}{\partial\eta_\ell} = \frac{m}{m+1}\frac{\partial C_{m+1}}{\partial\xi_\ell}$$

et le second membre de (4.5) s'écrit

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\frac{\partial C_m}{\partial\xi_\ell}z_1^{-m+1} - \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{m}{m+1}\frac{\partial C_{m+1}}{\partial\xi_\ell}z_1^{-m} = \frac{\partial C_1}{\partial\xi_\ell}(z_2 - \eta_2 z_1, \dots, z_n - \eta_n z_1; \eta).$$

Alors, pour $\ell = 2, \dots, n$, on a par unicité dans tout $H_{\eta\delta}$:

$$(4.6)\qquad \mathcal{R}_\eta^{-1}\frac{\partial\mathcal{R}_\eta}{\partial\eta_\ell}(z) = \frac{\partial C_1}{\partial\xi_\ell}(z_2 - \eta_2 z_1, \dots, z_n - \eta_n z_1; \eta).$$

Pour $|\eta'| < \alpha$ et $|\eta''| < \alpha$, fixons η' et η'' suffisamment voisins dans $\mathbb{C}^p$ et soit A un voisinage connexe du segment $[\eta', \eta'']$ dans $\mathbb{C}^p$; pour δ suffisamment petit, on a $G_{A\delta} = \bigcap_{\eta\in A} H_{\eta\delta} \neq \emptyset$.

Soient $\mathcal{A} = \mathcal{A}(z;\eta)$ une fonction holomorphe pour $\eta \in A$ et $z \in G_{A\delta}$; on pose $\mathcal{R}'_\eta = (\exp \mathcal{A}) \cdot \mathcal{R}_\eta$ et on a

$$\frac{\partial \mathcal{R}'\eta}{\partial \eta_\ell} = (\exp \mathcal{A}) \cdot \mathcal{R}_\eta \Big[\frac{\partial \mathcal{A}_\eta}{\partial \eta_\ell} + \mathcal{R}_\eta^{-1} \frac{\partial \mathcal{R}_\eta}{\partial \eta_\ell}\Big] = (\exp \mathcal{A}) \cdot \mathcal{R}_\eta \Big[\frac{\partial \mathcal{A}_\eta}{\partial \eta_\ell} + \frac{\partial C_1}{\partial \xi_\ell}\Big].$$

Choisissons $\mathcal{A}$ pour que

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \eta_\ell}(z,\eta) = -\frac{\partial C_1}{\partial \xi_\ell}(z_2 - \eta_2 z_1, \ldots, z_n - \eta_n z_1; \eta) \tag{4.7}$$

pour $\ell = 2, \ldots, n$. Alors $\mathcal{A}$ est déterminé par le système (4.7) d'EDP linéaires, d'ordre p, à l'addition près d'une fonction holomorphe en z sur $G_{A\delta}$; $\exp \mathcal{A}$ est holomorphe sans zéro et $\mathcal{R}'_\eta = (\exp \mathcal{A}) \cdot \mathcal{R}_\eta$ est indépendant de η, pour $|\eta| < \alpha$. En outre,

$$\mathrm{d}'\,\mathrm{d}'' \log \big|\mathcal{R}'_{\eta|H_{\eta\delta}}\big| = \mathrm{d}'\,\mathrm{d}'' \log \big|\mathcal{R}_{\eta|H_{\eta\delta}}\big| = \frac{\pi}{i}\, T_{\eta\delta}.$$

Donc, pour $\eta', \eta'' \in A$, on a $T_{\eta'\delta} = T_{\eta''\delta}$ dans $G_{A\delta}$.

D'après le lemme 3.1.2, pour δ fixé, le nombre de composantes connexes de $\pi_\eta(H_{\eta\delta}) \setminus \pi_\eta(M)$ est fini ; alors le support de la chaîne holomorphe $T_{\eta\delta}$ contient un nombre fini, uniformément borné sur A, de composantes irréductibles ; les composantes irréductibles de $\operatorname{spt} T_{\eta'\delta}$ et de $\operatorname{spt} T_{\eta''\delta}$ qui rencontrent $G_{A\delta}$ coïncident sur $G_{A\delta}$, avec leurs multiplicités. Pour $|\eta' - \eta''|$ et A suffisamment petits, toute composante irréductible de $\operatorname{spt} T_{\eta\delta}$, $\eta \in A$, qui rencontre $H_{\eta'\delta} \cap H_{\eta''\delta}$ rencontre aussi $G_{A\delta}$; alors les composantes irréductibles de $\operatorname{spt} T_{\eta'\delta}$ et de $\operatorname{spt} T_{\eta''\delta}$ qui rencontrent $H_{\eta'\delta} \cap H_{\eta''\delta}$ coïncident dans $G_{A\delta}$ avec leurs multiplicités, donc aussi dans $H_{\eta'\delta} \cap H_{\eta''\delta}$. $\square$

4.4.2. — Pour $\eta \in B_\alpha = B(0,\alpha)$, on considère la p-chaîne holomorphe $T_{\eta\delta}$ de $H_{\eta\delta}$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in B_\alpha$, il existe un nombre fini de points η^j, avec $j = 1, \ldots, J$, sur le segment $[\eta_1, \eta_2] \subset B_\alpha$ tels que $\eta^1 = \eta_1$, $\eta^J = \eta_2$ et que $|\eta^j - \eta^{j+1}|$ soit suffisamment petit au sens du lemme 4.4.1. Alors on a $T_{\eta^j\delta} = T_{\eta^{j+1}\delta}$ sur $H_{\eta^j\delta} \cap H_{\eta^{j+1}\delta}$ pour $j = 1, \ldots, J-1$. Donc il existe une p-chaîne holomorphe $T_{\eta_1\eta_2\delta}$ de $\bigcup_{j=1,\ldots,J} H_{\eta^j\delta}$ égale à $T_{\eta^j\delta}$ sur $H_{\eta^j\delta}, j = 1, \ldots, J$.

Posons $X'' = X \setminus Q$. On note

$$T^\delta = \bigcup_{\eta \in B_\alpha} T_{\eta\delta}$$

la p-chaîne holomorphe de $\bigcup_{\eta \in B_\alpha} H_{\eta\delta} = X'_\delta$ telle que $T^\delta{}_{|H_{\eta\delta}} = T_{\eta\delta}$; cela a un sens d'après ce qui précède.

4.4.3. Lemme. — *Il existe une p-chaîne holomorphe unique T' de $X''\setminus M$ telle que, pour tout $\delta > 0$, $T'_{|X'_\delta} = T^\delta$. En outre, T' est de masse localement finie au voisinage de M.*

Démonstration.

(a) *Pour tout $z \in X'' \setminus M$, il existe $\delta > 0$ tel que $z \in X'_\delta$.* En effet, la projection, de centre z, de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ dans Q, envoie la sous-variété M sur une sous-variété L_z, de dimension $(2p-1)$, localement fermée de Q, (avec éventuellement des singularités).

Il suffit de choisir le centre a de la projection π^a dans l'ouvert de $(X \cap Q) \setminus L_z$ pour que la droite (a, z) soit contenue dans X_η où η est le paramètre caractérisant a.

Les droites projectives de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ forment la grassmannienne $G_{\mathbb{C}}(2, n+1)$; les 2-plans vectoriels de $\mathbb{C}^{n+1}$ sont définis par $(n-1)$ équations linéaires dont les premiers membres ont deux coefficients non homogènes (voir 3.1.1), donc $\dim_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}(2, n+1) = 2(n-1)$.

Pour que $\zeta \in M$ soit un point critique pour la projection dont une projetante est la droite projective D passant par ζ, il faut et il suffit que la droite affine complexe D', définie par D, appartienne au plus petit espace affine complexe contenant l'espace tangent à M en ζ ; cet espace est isomorphe à $\mathbb{C}^p$. La variété $\mathcal{V}$ de ces droites D, quand ζ décrit M, est de dimension réelle $2p - 1 + 2p = 4p - 1$.

Soit z un point de $X'' \setminus M$; la droite (z, a) est déterminée par le point $a \in X \cap Q$; elle décrit donc une variété $\mathcal{K}$, de dimension réelle $2p$ dans $G_{\mathbb{C}}(2, n+1)$.

Génériquement, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} \cap \mathcal{K} = 4p - 1 + 2p - 4p < 2p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Donc, pour a dans un ouvert dense de $X \cap Q$, la droite (a, z) ne passe par aucun point critique de $\pi^a{}_{|M}$; alors il existe $\delta > 0$ tel que, η étant le paramètre caractérisant a, $\pi_\eta^{-1}(U_{\eta\delta})$ ne rencontre pas la droite (a, z), alors z appartient à $H_{\eta\delta}$, donc à X'_δ ; ce qui achève la démonstration de (a).

(b) *Pour tout ouvert κ relativement compact de $X''\setminus M$, il existe $\delta > 0$ tel que $\bar{\kappa} \subset X'_\delta$. Pour tout $0 < \delta' < \delta$, on a $T^{\delta'}{}_{|\kappa} = T^\delta{}_{|\kappa}$.*

Pour tout point $z \in \bar{\kappa}$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $z \in X'_{\delta_1}$, d'après (a). Alors, il existe un voisinage ouvert N_z de z tel que, pour $z_1 \in X'_{\frac{1}{2}\delta_1}$. Le compact $\bar{\kappa}$ est recouvert par un nombre fini de tels ouverts, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\bar{\kappa} \subset X'_\delta$; alors $T^\delta = \bigcup_{\eta \in B_\alpha} T_{\eta\delta}$ est défini dans $X'' \setminus (M \cup V_\delta) = X'_\delta$.

La fonction $\mathcal{R}_\eta$ est définie dans H_η ; pour tout $\eta \in B_\alpha$, on a dans $H_{\eta\delta}$

$$T_{\eta\delta} = \frac{i}{\pi} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log \bigl|\mathcal{R}_{\eta|H_{\eta\delta}}\bigr|.$$

Dans $H_{\eta\delta'}$, $T_{\eta\delta'}$ est défini à partir de la restriction à $H_{\eta\delta'}$ de la même fonction $\mathcal{R}_\eta$ et $H_{\eta\delta} \subset H_{\eta\delta'}$, donc :

$$T_{\eta\delta'|H_{\eta\delta}\cap\kappa} = T_{\eta\delta|H_{\eta\delta}\cap\kappa}.$$

Mais d'après (4.4.2) on a $\bigcup\limits_{\eta\in B_\alpha} H_{\eta\delta} = X'_\delta$; alors $T^{\delta'}{}_{|\kappa} = T^{\delta}{}_{|\kappa}$ d'après ce qui précède.

(c) *Il existe un courant* $T' = \lim\limits_{\delta\to 0} T^\delta$ *de* $X'' \setminus M$ *défini de la façon suivante.*

Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{\cdot}(X'' \setminus M)$, il existe κ relativement compact dans $X''\setminus M$ et $\delta > 0$ tels que $\bar\kappa \subset X'_\delta$ et que $\operatorname{spt}\varphi \subset \kappa$; on pose $T'(\varphi) = T^\delta(\varphi)$. On vérifie que l'application $\mathcal{D}^{\cdot}(X'' \setminus M) \to \mathbb{C}$, qui envoie φ sur $T'(\varphi)$, est un courant.

(d) *Au voisinage de tout point* $z \in X'' \setminus M$, T' *est une chaîne holomorphe, de masse localement finie au voisinage de* M.

Le point z a un voisinage κ relativement compact dans $X'' \setminus M$; il existe $\delta > 0$ tel que $\bar\kappa \subset X'_\delta$ et $\eta \in B_\alpha$ tels que $z \in H_{\eta\delta}$; alors $\kappa \cap H_{\eta\delta}$ est un voisinage de z dans $H_{\eta\delta}$ dans lequel T' est donné par la chaîne holomorphe $T_{\eta\delta}$ définie par la fonction méromorphe $\mathcal{R}_\eta$ de H_η.

Pour tout point $z \in M$, soit π_{η_0} une projection pour laquelle il n'existe aucun point critique sur $\pi_\eta^{-1}(\pi_\eta(z))$ pour $\eta = \eta_0$, alors il en est de même pour η dans un voisinage assez petit de η_0 dans $\mathbb{C}^p$ et il existe un voisinage κ' de $\zeta = \pi_\eta(z)$, relativement compact dans Y_η dans lequel $Y_\eta \setminus \mathcal{M}$ a un nombre fini de composantes connexes. Au-dessus de chacune d'elles, le nombre de feuillets de $\operatorname{spt} T'$ est fixe et fini ; comme conséquence de l'inégalité de Wirtinger, le volume de $\operatorname{spt} T'$, donc aussi la masse de T', sont finis au voisinage de z.

Cela prouve, à la fois, que T' est une p-chaîne holomorphe et que T' est de masse localement finie au voisinage de M. $\square$

4.4.4. LEMME. — *T' se prolonge en une p-chaîne holomorphe unique T dans $X \setminus M$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que $\operatorname{spt} T'$ est de volume localement fini au voisinage de Q ; le volume est évalué à l'aide de la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{C}P^n$.

Pour tout point ζ de $(X \setminus M) \cap Q$, il existe un voisinage U_ζ de ζ et $\eta_0 \in B_\alpha$ tels que, pour η dans un voisinage assez petit de η_0, $\pi_{\eta|M}$ soit sans point critique dans $H_\eta \cap \pi_\eta^{-1}(\pi_\eta(U_\zeta))$, alors $Y'_{\eta\zeta} = (Y_\eta \setminus \mathcal{M}_\eta) \cap \pi_\eta(U_\zeta)$ a un nombre fini de composantes connexes. Il en résulte que $\operatorname{spt} T'$ est un revêtement fini à nombre fixe de feuillets au-dessus de chaque composante connexe de $Y'_{\eta\zeta}$ et, comme conséquence de l'inégalité de Wirtinger, spt T' est de volume $2p$-dimensionnel fini dans U_ζ.

D'après le théorème de Bishop-Stoll [2], [38], spt T' a une extension holomorphe à $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus M$. $\square$

4.4.5. LEMME. — *Dans les notations de* 4.4, *le courant* T *a une extension simple* $\mathcal{T}$ *à* X *telle que* $\mathrm{d}\mathcal{T} = M$.

Démonstration.

(a) Pour tout point $\zeta \in M$, il existe un voisinage V_ζ de ζ et $\eta_0 \in B_\alpha$ tels que, pour η dans un voisinage assez petit de η_0, $\pi_{\eta|M}$ soit sans point critique dans $H_\eta \cap \pi_\eta^{-1}(\pi_\eta(V_\zeta))$; alors $Y''_{\eta\zeta} = (Y_\eta \setminus \mathcal{M}_\eta) \cap \pi_\eta(V_\zeta)$ a un nombre fini de composantes connexes. Il en résulte que spt T' est un revêtement fini, à nombre fixe de feuillets au dessus de chaque composante connexe de $Y''_{\eta\zeta}$ et, comme conséquence de l'inégalité de Wirtinger, spt T' est de volume $2p$-dimensionnel fini dans V_ζ, donc T a une exension simple $\mathcal{T}$.

(b) Comme T est fermé dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus M$, on a spt $\mathrm{d}\mathcal{T} \subset M \cdot T$; donc $\mathcal{T}$ étant localement plat [14], $\mathrm{d}\mathcal{T}$ est localement plat, de support contenu dans M ; d'après le théorème du support, on a $\mathrm{d}\mathcal{T} = kM$ où k est une fonction L^1_{loc} ; de plus $\mathrm{d}\mathrm{d}\mathcal{T} = 0$ entraîne que k est localement constante et $\mathcal{T}$, donc aussi $\mathrm{d}\mathcal{T}$ étant localement rectifiables, on a $k \in \mathbb{Z}$.

Puisque $\mathcal{T}$ est défini à partir de T_0, elle-même définie par la fonction $R_0(\xi, z_1)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}R_0}{R_0} = C_0\frac{\mathrm{d}z_1}{z_1} + \sum_{m=1}^{+\infty} C_m(\xi)\frac{\mathrm{d}z_1}{z_1^{m+1}}\cdot \tag{4.8}$$

Au voisinage d'un point lisse ξ^0 de $\mathcal{M}_0$, d'après le lemme 3.5.6, (iii), on a

$$R^q(\xi; z_1) = \big(z_1 - h(\xi)\big)R^{q'}(\xi; z_1) \tag{4.9}$$

pour un choix convenable de l'ordre dans lequel on écrit q et de q'.

Dans les notations de la section 1, pour $\eta = 0$, le saut de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}} \frac{\mathrm{d}g}{g} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\nu'}} \frac{\mathrm{d}z_2}{z_2 - \xi_2}\mathrm{d}z_2$$

en ξ^0 est $+1$, d'après la formule de l'indice.

D'après (4.8), on a

$$C_0 = C_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z_1 - h(\xi)| = \varepsilon} \frac{\mathrm{d}R_0}{R_0}\cdot$$

Le saut de C_0 est $+1$, d'après (4.9).

D'après la démonstration du lemme 2.3 et d'après la proposition 3.3.3 pour $m = 0$, l'expression $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{bT}\dfrac{dz_2}{z_2-\xi_2}\,dz_2$ est égale, à l'addition près d'une constante P_0, au nombre de points d'intersection C_0^q de la droite $D(\xi,0)$ et du support de T, chaque composante irréductible de $\operatorname{spt} T$ étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité pour $\xi \in \mathcal{D}_q$; donc les sauts des intégrales de $\dfrac{dz_2}{z_2-\xi_2}\,dz_2$, en ξ^0, par rapport à $d\mathcal{T} = kM$ et par rapport à M, sont égaux; il en résulte $k = 1$. $\square$

4.5. Cas où X est un domaine 2-concave quelconque.

4.5.1. — Dans la suite, on suppose que X est un domaine 2-concave de $\mathbb{C}P^n$ au sens de 0.2, contenant le sous-espace projectif P^* de dimension 2; on suppose aussi que la matrice $\nu^* = (\xi^*, \eta^*)$, figurant dans la condition (iii) du théorème II, est (0, 0).

Il existe $\alpha > 0$ tel que la condition (iii) soit valide pour $|\xi| < \alpha$ et $|\eta| < \alpha$. Pour $\eta = 0$, la donnée des fonctions $f_j^{\pm}$ détermine une p-chaîne holomorphe au-dessus d'un ouvert de $\Delta \setminus Q \cong \mathbb{C}^p$, à l'aide de la fonction méromorphe R (formule (3.3)). On a, ensuite, étendu cette p-chaîne holomorphe pour ξ variant dans $Y_0 \setminus \pi_0(M)$ avec $Y_0 = \pi_0(X_0)$, puis, on a considéré la sous-variété 2-concave ouverte $\bigcup_{|\eta|<\alpha} X_\eta$ de $\mathbb{C}P^n$ qu'on notera X^0.

On a résolu le problème du bord dans X^0 pour la donnée $M^0 = M \cap X^0$, par une p-chaîne holomorphe T^0 de $X^0 \setminus M$ dont l'extension simple (notée aussi T^0) à X^0 satisfait à $dT^0 = M \cap X^0$.

4.5.2. LEMME. — *Si le problème du bord est résolu dans le domaine 2-concave X^2 de $\mathbb{C}P^n$ pour la donnée $M^2 = M \cap X^2$, alors la solution T^2 peut être étendue en une chaîne holomorphe T^3 d'un domaine 2-concave $X^3 \supset X^2$, solution du problème $dT^3 = M^3$ où $M^3 = M \cap X^3$.*

Démonstration. — On pose $\eta = (\eta_2, \eta')$. On a $X = \bigcup_{\nu' \in V'} P_{\nu'}$, où V' est un ouvert connexe de $G_{\mathbb{C}}(3, n+1)$ (voir section 1.2). On pose

$$X^2 = \bigcup_{\nu' \in V_2'} P_{\nu'}$$

où V_2' est un ouvert connexe de $G_{\mathbb{C}}(3, n+1)$.

Soit W' un ouvert assez petit, connexe de $G_{\mathbb{C}}(3, n+1)$ tel que :

1) $W' \cap V_2' \neq \emptyset$ et $W' \not\subset V_2'$;

2) pour tout $P_{\nu'}$ appartenant à W', $P_{\nu'} \cap M$ soit une courbe à distance finie dans $\mathbb{C}P^n \setminus Q \cong \mathbb{C}^n$.

Alors, pour tout $\eta' \in W'$ et pour η_2 tel que (η_2, η') définisse un centre de projection dans $X \cap Q$, et pour $|\xi| < \beta$ assez petit, les droites D_ν, avec $\nu = (\xi, \eta)$, rencontrent, génériquement, le support de T^2 en des points p_j en nombre fini. Le raisonnement fait pour établir la nécessité de la condition (iii), (section 2), montre que la condition (iii) est satisfaite pour (ξ, η), $|\xi| < \beta, (\eta_2, \eta')$ avec $\eta' \in W'$.

Alors, la chaîne T^2 est étendue, par le raisonnement de la section 4.4, en une chaîne holomorphe T^3, solution de $\mathrm{d}T^3 = M^3$ dans la sous-variété $X^3 = \bigcup_{\nu' \in V' \cup W'} P_{\nu'}$. □

4.5.3. Proposition. — *Dans les hypothèses et notations du théorème* II, *et pour* $n = p + 1$, *la condition* (iii) *entraîne la condition* (i).

Démonstration. — D'après le lemme 4.5.2 et parce que la condition (iii) est ouverte, il existe une sous-variété 2-concave ouverte X^1, maximale dans X, et une chaîne holomorphe T^1 dans $X^1 \setminus M$ prolongeant T^0 dont l'extension simple à X^1, notée encore T^1, vérifie $\mathrm{d}T^1 = M \cap X^1$.

Montrons que $X^1 = \overline{(X^1)}_X$. On a

$$X^1 = \bigcup_{\nu' \in V_1'} P_{\nu'}$$

où V_1' est un ouvert connexe de $G_{\mathbb{C}}(3, n+1)$. Soit $b \in \overline{(X^1)}_X$. Tout 2-plan projectif passant par b est déterminé par une droite projective d dans $Q \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^p$; $M \cap Q$ est une sous-variété de Q, de dimension $(2p-3)$. Les droites d disjointes de $M \cap Q$ constituent un ouvert partout dense de $G_{\mathbb{C}}(2, p+1)$. Alors, il existe un ouvert assez petit, connexe, W_1' de $G_{\mathbb{C}}(3, n+1)$ tel que

1) $W_1' \cap V_1' \neq \emptyset$;

2) pour tout $P_{\nu'}$ appartenant à W_1', $P_{\nu'} \cap M$ soit une courbe à distance finie dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus Q \cong \mathbb{C}^n$.

Alors la démonstration du lemme 4.5.2 montre que la condition (iii) est satisfaite par (ξ, η), avec $|\xi| < \beta$ assez petit, $\eta = (\eta_2, \eta')$ où $\eta' \in W_1'$. D'après la maximalité de X^1, on a $\nu' \in V_1'$; donc $b \in X^1$ et X^1 est fermé dans X.

Le sous-ensemble $X^1 \neq \emptyset$ étant ouvert et fermé dans X connexe, on a $X^1 = X$; donc la chaîne holomorphe $T = T^1$ de $X \setminus M$ a une extension simple à X, notée encore T, qui satisfait à $\mathrm{d}M = T$. □

Cela établit le théorème 1.4 pour $n = p + 1$. □

5. Condition suffisante en dimension $n \geq p+1$

Dans cette section, on suppose que X est un domaine $(n-p+1)$-concave de $\mathbb{C}P^n$.

5.1. Invariance de la condition (iii) par projection dans un sous-espace $\Pi \cong \mathbb{C}P^{p+1}$ de $\mathbb{C}P^n$.

5.1.1. *Projection de* $\mathbb{C}P^n$ *dans* Π. — On considère une projection de $\mathbb{C}P^n$ sur un sous-espace projectif $\Pi \cong \mathbb{C}P^{p+1}$. Chaque projetante, étant un sous-espace projectif qui coupe Π en un point, est de dimension $(n-p-1)$; elle est déterminée par un sous-espace projectif fixe A et par un point de $\mathbb{C}P^n \setminus A$, donc $\dim_{\mathbb{C}} A = n-p-2$. On désigne la projection par π_A et A est appelé le *centre* de π_A. On suppose, en outre, que A est contenu dans l'hyperplan à l'infini Q de $\mathbb{C}P^n$.

L'application π_A est propre, alors $\pi_A(X)$ est un ouvert de Π ; le domaine X étant réunion de sous-espaces projectifs de dimension $(n-p+1)$, $\pi_A(X)$ est réunion de sous-espaces projectifs de Π de dimension complexe 2. Donc $Z = Z_A = \pi_A(X)$ est un *domaine* 2*-concave de* Π.

5.1.2. *Étude de* $\pi_A(M)$. — Dans les notations de 5.1.1, on vérifie que, M étant de classe C^2, pour A générique, $\pi_{A|M\setminus\tau}$ est une immersion dans Π. De plus $\mathcal{H}^{2p-1}(\pi(\tau)) = 0$, d'après [37].

De même, pour A générique, la sous-variété des projetantes qui coupent M en deux points distincts, est de dimension réelle $2(p-2)$. Alors, pour $p \geq 2$, il peut exister des projetantes bisécantes de M qui définissent, dans $\pi_A(M \setminus \tau)$, des singularités fermées, de mesure de Hausdorff $(2p-4)$-dimensionnelle positive finie. De sorte que :

> *$\pi_A(M)$ est une sous-variété de Π, de classe C^2 à singularités négligeables.*

5.1.3. *Projection permise* π_A.

La restriction de π_A à $\mathbb{C}P^n \setminus Q \cong \mathbb{C}^n$ est une projection

$$\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{p+1} \cong \Pi \setminus Q.$$

On a $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-p} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{p-1}$ où les coordonnées sont, respectivement, $(z_1, \ldots, z_{n-p})$, z_{n-p+1} et $(z_{n-p+2}, \ldots, z_n)$.

S'il existe un système de coordonnées $(v_1, \ldots, v_{p+1})$ de $\mathbb{C}^{p+1}$ tel que $\pi_{|\mathbb{C}^{n-p}}$ soit une projection sur $\mathbb{C}$ (de coordonnée v_1) et que $\pi_{|\mathbb{C}^{n-p}\times\mathbb{C}}$ soit une projection sur $\mathbb{C}^2$ de coordonnées (v_1, v_2), on dit que π_A est une *projection permise*.

Alors π est définie par

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 z_1 + \cdots + a_{n-p} z_{n-p} + a_0, \\ v_2 &= z_{n-p+1} + b_1 z_1 + \cdots + b_{n-p} z_{n-p} + b_0, \\ v_j &= \sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k + c_j, \quad j = 3, \ldots, p+1, \end{aligned}$$

où les coefficients sont des constantes complexes telles que le rang de la matrice des coefficients de $z_1, \ldots, z_n$ soit $p+1$. Dans la suite, on utilisera des projections permises qui sont telles que

$$b_{jj+n-p-1} = 1, \quad b_{jk} = 0$$

pour $k \neq j+n-p-1$ et $j = 3, \ldots, p+1$, *i.e.*

$$v_j = z_{j+n-p-1} + c_j \quad \text{pour } j = 3, \ldots, p+1.$$

Dans $\Pi \setminus Q$, les sous-espaces D de la section 1.1 sont définis par les équations

$$g'_j = v_j - \xi'_j - \eta'_j v_1 = 0, \qquad j = 2, \ldots, p+1\,;$$

on note

$$\xi' = {}^t(\xi'_2, \ldots, \xi'_{p+1}), \quad \eta' = {}^t(\eta'_2, \ldots, \eta'_{p+1})\,;$$

de même, dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus Q$, les sous-espaces analogues sont définis par les équations

$$g_k = z_k - \xi_k - \eta_k^1 z_1 - \cdots - \eta_k^{n-p} z_{n-p} = 0, \quad k = n-p+1, \ldots, n.$$

Alors,

$$\begin{aligned} g'_2 &= z_{n-p+1} + b_1 z_1 + \ldots + b_{n-p} z_{n-p} + b_0 - \xi'_2 \\ &\qquad - \eta'_2 (a_1 z_1 + \ldots + a_{n-p} z_{n-p} + a_0) \\ &= z_{n-p+1} - (\xi'_2 - b_0 - \eta'_2 a_0) - (\eta'_2 a_1 - b_1) z_1 \\ &\qquad - \cdots - (\eta'_2 a_{n-p} - b_{n-p}) z_{n-p} \\ &= g_{n-p+1}, \end{aligned}$$

et pour $j = 3, \ldots, p+1$,

$$\begin{aligned} g'_j &= z_{j+n-p-1} + c_j - \xi'_j - \eta'_j (a_1 z_1 + \cdots + a_{n-p} z_{n-p} + a_0) \\ &= z_{j+n-p+1} - (\xi'_j - c_j - \eta'_j a_0) - \eta'_j a_1 z_1 - \cdots - \eta'_j a_{n-p} z_{n-p} \\ &= g_{j+n-p-1}. \end{aligned}$$

On a :

$$
(5.1)\qquad \begin{cases} \xi_2' - b_0 - \eta_2' a_0 = \xi_{n-p+1}, \\ \eta_2' a_1 - b_1 = \eta_{n-p+1}^1, \dots, \ \eta_2' a_{n-p} - b_{n-p} = \eta_{n-p+1}^{n-p}, \\ \xi_j' - c_j - \eta_j' a_0 = \xi_{j+n-p-1}, \\ \eta_j' a_1 = \eta_{j+n-p-1}^1, \dots, \ \eta_j' a_{n-p} = \eta_{j+n-p-1}^{n-p}. \end{cases}
$$

Les coefficients a_ℓ, b_ℓ, c_ℓ doivent satisfaire à la condition

$$
(*)\qquad \begin{cases} \xi_2' - b_0 - \eta_2' a_0 \text{ est dans un voisinage donné de } \xi_{n-p+1}^* \,; \\ \xi_j' - c_j - \eta_j' a_0 \text{ est dans un voisinage donné de } \xi_{j+n-p-1}^* \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } j = 3, \dots, p+1 \,; \\ \eta_2' a_1 - b_1 \text{ est dans un voisinage donné de } {\eta_{n-p+1}^1}^* \,; \\ \dots \\ \eta_2' a_{n-p} - b_{n-p} \text{ est dans un voisinage donné de } {\eta_{n-p+1}^{n-p}}^* \,; \\ \eta_j' a_1 \text{ est dans un voisinage donné de } {\eta_{j+n-p-1}^1}^* \,; \\ \dots \\ \eta_j' a_{n-p} \text{ est dans un voisinage donné de } {\eta_{j+n-p-1}^{n-p}}^* \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } j = 3, \dots, p+1. \end{cases}
$$

Génériquement, $P_{\nu'} \cap M = \gamma_{\nu'}$ est une courbe réelle, fermée, C^2 à singularités négligeables, à distance finie. En outre, $\pi_A(\gamma_{\nu'})$ est aussi C^2 à singularités négligeables, à distance finie.

5.1.4. Proposition. — *Dans les notations de* 1.4 *et de* 5.1.3, *pour toute projection permise* $\pi_A : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \Pi \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{p+1}$ *satisfaisant à la condition* (*), $\pi_A(M)$ *satisfait à la condition* (iii) *du théorème* II *dans* Π.

Démonstration. — Dans $\Pi \setminus Q$, considérons l'intégrale

$$
G'(\xi', \eta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi(\gamma_{\nu'})} v_1 \frac{\mathrm{d}(v_2 - \eta_2' v_1)}{v_2 - \xi_2' - \eta_2' v_1}.
$$

On a :

$$
G'(\xi', \eta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\nu'}} (a_1 z_1 + \dots + a_{n-p} z_{n-p} + a_0) \frac{\mathrm{d}g}{g}
$$

avec

$$
g = g_{n-p+1} = z_{n-p+1} - (\xi_2' - b_0 - \eta_2' a_0) - (\eta_2' a_1 - b_1) z_1 \\ - \dots - (\eta_2' a_{n-p} - b_{n-p}) z_{n-p}.
$$

Alors, en posant

$$\varphi_j^{\pm}(\xi', \eta') = \big(a_1 f_{j1}^{\pm} + \cdots + a_{n-p} f_{jn-p}^{\pm} - a_0\big)(\xi, \eta)$$

où (ξ', η') et (ξ, η) sont liés par les relations (5.1), on vérifie, comme dans la démonstration de la proposition 5.3.2 de [9], la relation

$$D_{\xi'}^2 G'(\xi', \eta') = D_{\xi'}^2 \Big(\sum_{j=1}^{N^+} \varphi_j^+(\xi', \eta') - \sum_{j=1}^{N^-} \varphi_j^-(\xi', \eta') \Big)$$

où les fonctions $\varphi_j^{\pm}(\xi', \eta')$ sont holomorphes et satisfont aux relations différentielles de la condition (iii) dans Π, au voisinage d'un point convenable (ξ'^*, η'^*) de $\mathbb{C}^{2p}$. $\square$

5.2. Définitions et notations.

On suppose que la variété M de X, de dimension $(2p-1)$, satisfait à la condition (iii) du théorème II, les coordonnées étant choisies comme dans 1.3. Pour construire une p-chaîne holomorphe T de $X \setminus M$ ayant une extension simple (notée encore T) à X telle que $M = \mathrm{d}T$, on va utiliser une méthode de projection analogue à celle qui a été introduite par Harvey, Lawson et Shiffman (voir [14], [15], [18]). Alors, dans les hypothèses de la proposition 5.1.4, la condition (iii) du théorème II est satisfaite par $\pi_A(M)$ dans $Z = \pi_A(X) \subset \Pi$. D'après le théorème II pour $n = p+1$ (prop. 4.5.3), il existe une p-chaîne T' de $\pi_A(X) \setminus \pi_A(M)$ ayant une extension simple (notée encore T') telle que $\mathrm{d}T' = \pi_A(M)$.

5.2.1. — Soient $a = (a_1, \dots, a_{n-p}) \in \mathbb{C}^{n-p}$, $b = (b_1, \dots, b_{n-p}) \in \mathbb{C}^{n-p}$; on considère la projection permise π_A telle que $\pi_b^a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{p+1}$ associée soit définie par

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 z_1 + \cdots + a_{n-p} z_{n-p}, \\ v_2 &= b_1 z_1 + \cdots + b_{n-p} z_{n-p} + z_{n-p+1}, \\ v_\ell &= z_{\ell+n-p-1} \quad \text{pour } \ell = 3, \dots, p+1. \end{aligned}$$

Dans les notations de 5.1.3, prenons $\eta' = 0$, alors $\xi'_\ell = \xi_{\ell+n-p-1}$ pour $\ell = 2, \dots, p+1$. Lorsque $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, la condition (*) de la proposition 5.1.4 est satisfaite pour b dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-p}$ et pour ξ' voisin de 0 dans $\mathbb{C}^p$; elle subsiste pour η' voisin de 0 dans $\mathbb{C}^p$, alors a doit être dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-p}$.

Dans Π, on applique la méthode décrite dans les sections 3 et 4 ; la condition (iii) pour $\pi_b^a(M)$ étant valide au voisinage de $(\xi', \eta') = (0, 0)$.

Pour cela, on considère le centre de la projection $\pi_0 : \mathbb{C}^{p+1} \to \mathbb{C}^p$ dans $\Pi \cap Q$ déterminé par $\eta' = 0$; dans $\Pi \setminus Q$, on a la forme linéaire $g' = v_2 - \xi'_2$.

On considère les coefficients $C_m(\xi')$, pour $m \in \mathbb{N}$, définis d'abord localement par les fonctions scalaires

$$\varphi_j^{\pm}(\xi') = a \cdot f_j^{\pm}(\xi) = \sum_{\ell=1}^{n-p} a_\ell f_{j\ell}^{\pm}(\xi, 0).$$

Les coefficients $C_m(\xi')$ ont une extension à tout $\xi' \in \mathbb{C}^p \setminus \pi \circ \pi_b^a(M)$.

On remarque que la projection $\pi_0 : \mathbb{C}^{p+1} \to \mathbb{C}^p$ envoie $(v_1, \dots, v_{p+1})$ sur $(v_2, \dots, v_{p+1})$, de sorte que $\pi_0 \circ \pi_b^a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, envoyant z sur $(v_2, \dots, v_{p+1})$, est indépendante de a et sera notée π_b.

On pose :

$$X'' = X \setminus Q \subset \mathbb{C}^n, \quad Z'' = Z \setminus Q \subset \mathbb{C}^{p+1}.$$

5.2.2. — On définit la fonction

$$\varphi^{ab}(\xi', v_1) = C_0 \log v_1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} C_m(\xi') v_1^{-m}$$

telle que $\exp \varphi^{ab}(\xi', v_1)$ prolonge la fonction

$$\prod_{j=1}^{N^+} \big(v_1 - \varphi_j^+(\xi')\big) \prod_{j=1}^{N^-} \big(v_1 - \varphi_j^-(\xi')\big)^{-1} \tag{5.2}$$

au complémentaire de $\pi_0^{-1}(\pi_b(M))$ pour ξ' assez petit et v_1 assez grand.

La projection $\pi_0 : \mathbb{C}^{p+1} \to \mathbb{C}^p$ est définie par

$$(v_1, \dots, v_{p+1}) \longmapsto \xi = \begin{pmatrix} \xi'_2 = v_2 = b_1 z_1 + \ldots + b_{n-p} z_{n-p} + z_{n-p+1} \\ \xi'_\ell = v_\ell = z_{\ell+n-p-1}, \quad \ell = 3, \dots, p+1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la fonction de z

$$\begin{aligned} \varphi^{ab}[z] &= C_0 \log(a_1 z_1 + \ldots + a_{n-p} z_{n-p}) \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} C_m(b_1 z_1 + \cdots + b_{n-p} z_{n-p} + z_{n-p+1}, z_{n-p+2}, \dots, z_n) \\ &\qquad\qquad \times (a_1 z_1 + \cdots + a_{n-p} z_{n-p})^{-m}. \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{R}^{ab}[z] = \exp \varphi^{ab}[z]$ a une extension méromorphe à

$$K^b = \mathbb{C}^n \setminus \pi_b^{-1}\big(\pi_b(M)\big).$$

D'après la formule de Poincaré-Lelong [28],

$$T^{ab} = \frac{i}{\pi}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log\big|\mathcal{R}^{ab}[z]\big|$$

est une $(n-1)$-chaîne holomorphe de K^b dont le diviseur associé est engendré par les projetantes de la projection π_b^a qui s'appuient sur les composantes irréductibles, munies de leurs multiplicités, du diviseur associé à la chaîne holomorphe de Π

$$\tau_{ab} = \frac{i}{\pi}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log\big|\exp\varphi^{ab}(\xi', v_1)\big|$$

5.3. Lemme. — *Pour* (ξ,η) *au voisinage* $(\xi^*,\eta^*) = (0,0)$ *et pour* η *fixé, la donnée des fonctions* $f_j^{\pm}(\xi,\eta)$, *satisfaisant à la condition* (1.2), *définit une* p*-chaîne holomorphe* t, *dans un ouvert* U *de* X'' *assez petit, indépendant de* η, *comme graphe de*

$$(5.3)\qquad \begin{gathered} (z_1,\dots,z_{n-p}) = f_j^{\pm}(\xi,\eta),\\ z_\ell = \xi_\ell + \eta_\ell f_j^{\pm}(\xi,\eta),\quad \ell = n-p+1,\dots,n, \end{gathered}$$

avec la multiplicité ± 1 *dans un ouvert* U_η *de* X''.

Démonstration. — Pour $\eta = \eta_1$, les fonctions $f_j^{\pm}(\xi,\eta_1)$ définissent, localement, une p-chaîne holomorphe t_1 ; pour η quelconque fixé, assez voisin de η^* dans un ouvert U_η de $\mathbb{C}^n$, les sous-espaces D_ν, $(\nu = (\xi,\eta))$ coupent t_1 aux points z définis par (5.3), les fonctions $f_j^{\pm}(\xi,\eta)$ satisfaisant aux équations (1.2) d'après 2.4.1 ; U est l'intérieur de l'intersection des U_η. $\square$

Dans cette section $\eta' = 0$, alors, pour la projection π_b^a, on a :

$$\eta_{n-p+1} = (\eta_{n-p+1}^1,\dots,\eta_{n-p+1}^{n-p}) = -(b_1,\dots,b_{n-p}) = -b,$$

$$\eta_{j+n-p+1}^{n-p} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 3,\dots,p+1.$$

La chaîne holomorphe t a pour projection par π_b^a, dans $\pi_b^a(U) \subset \Pi$, le diviseur de la fonction méromorphe (5.2).

La p-chaîne holomorphe t de U est contenue dans $T^{ab}{}_{|U}$ dans le sens suivant : le support de $t_{|U\cap K^b}$ est contenu dans le support de $T^{ab}{}_{|U}$, les mutiplicités des composantes irréductibles respectives des deux chaînes sont compatibles.

5.4. Construction de la chaîne T' de $X'' \setminus M$.

5.4.1 *Intersection de chaînes.* — L'intersection d'ensembles analytiques complexes de dimension complexe $(n-1)$ a un sens; on peut en donner un à l'intersection d'un nombre fini de $(n-1)$-chaînes holomorphes en tenant compte des multiplicités.

5.4.2. *Intersection des chaînes T^{ab} dans K^b.* — Supposons d'abord $b = 0$; soit $\alpha = (a^1, \dots, a^{n-p})$ un ensemble de $(n-p)$ points dans un voisinage W de 0, assez petit, dans $\mathbb{C}^{n-p}$. Considérons les fonctions méromorphes $\mathcal{R}^{a^k} = \mathcal{R}^{a^k 0}$ pour $k = 1, \dots, n-p$; chacune d'elles définit une $(n-1)$-chaîne holomorphe T^{a^k} de K^0. Considérons l'intersection

$$T_0^\alpha = \bigcap_{k=0}^{n-p} T^{a^k}.$$

Pour évaluer la dimension de T_0^α, il suffit d'évaluer, au voisinage de chaque point z^0, la dimension de $\operatorname{spt} T_0^\alpha$. Au voisinage de z^0, soient $\rho_q^{a^k}$, pour $q = 1, \dots, Q$, les facteurs holomorphes irréductibles distincts de la fonction méromorphe $\mathcal{R}^{a^k}$; alors, $\operatorname{spt} T^{a^k}$ est l'ensemble des zéros de $\rho^{a^k} = \prod_{q=1}^{Q} \rho_q^{a^k}$.

Pour que la dimension de T_0^α soit p en z^0, il suffit que la matrice $(\partial\rho^{a^k}/\partial z_\ell)_{k,\ell=1,\dots,n-p}$ soit de rang $(n-p)$ en presque tout point de $\operatorname{spt} T_0^\alpha$ au voisinage de z^0, *i.e.* que

$$[\alpha] = \det\Big(\frac{\partial\rho^{a^k}}{\partial z_\ell}[z]\Big) = \frac{\partial\rho^{a^1}}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial\rho^{a^{n-p}}}{\partial v_1} \det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^{n-p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-p}^1 & \cdots & a_{n-p}^{n-p} \end{pmatrix} \neq 0$$

en presque tout point de l'intersection des supports des diviseurs des fonctions ρ^{a^k} pour $k = 1, \dots, n-p$. Le coefficient $\dfrac{\partial\rho^{a^1}}{\partial v_1} \cdots \dfrac{\partial\rho^{a^{n-p}}}{\partial v_1}$ est une fonction méromorphe des variables z et a^k, donc est différent de 0 sur un ouvert dense de $\mathcal{K}^0 \times W^{n-p}$ où $\mathcal{K}^0$ est un voisinage de z^0 dans K^0. Le déterminant $\det\big(a_\ell^k\big)$ est différent de zéro dans un ouvert dense de W^{n-p}. Cela prouve que, pour un choix de (a^k), $k = 1, \dots, n-p$, convenable dans un ouvert dense de W^{n-p}, les composantes irréductibles de $\operatorname{spt} T_0^\alpha$ sont de dimension pure p presque partout, donc partout, par connexité.

Pour tout choix de α tel que $[\alpha] \neq 0$, $T_0^\alpha{}_{|U}$ contient t au sens de la fin de la section 5.3, et il est de même dimension que t. Soit $T_0 = \bigcap_{\alpha,[\alpha]\neq 0} T_0^\alpha$; alors $T_{0|U} = t$.

Dans le cas où b est choisi dans un voisinage assez petit de 0 dans $\mathbb{C}^{n-p}$, la situation se déduisant de celle pour $b = 0$, par petite perturbation, le résutat subsiste pour la p-chaîne holomorphe T_b de K_b définie comme T_0 dans K_0, d'où :

5.4.3. LEMME. — *Dans les notations de* 5.4.2, *la chaîne holomorphe T_b dans K^b est de dimension complexe p.*

5.4.4. LEMME. — *Pour b dans un voisinage de* 0 *assez petit de $\mathbb{C}^{n-p}$, on a $\bigcup_b K^b = X''$.*

Démonstration. — Pour tout $z \in X''$, la projection de centre z de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sur Q envoie M sur une sous-variété L_z (avec des singularités éventuelles) de Q, de dimension $\leq 2p-1$, il suffit de choisir le centre de projection A de dimension réelle $2n-2p-4$, disjoint de L_z, ce qui est possible, et de choisir b satisfaisant aux hypothèses de 5.1.3, pour que $z \in K^b$. $\square$

5.4.5. LEMME. — *Dans les notations de* 5.4.2, *soit $U_b = U \cap K^b$. Alors, pour b_1, b_2 dans un voisinage de* 0 *assez petit de $\mathbb{C}^{n-p}$, on a $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$ et $T_{b_1} = T_{b_2}$ sur $K^{b_1} \cap K^{b_2}$.*

Démonstration. — Comme K^b est dense dans X'', on a $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$. Dans $U_{b_1} \cap U_{b_2}$, on a $T_{b_1} = T_{b_2}$ car les deux chaînes coïncident avec $t_{|U_{b_1} \cap U_{b_2}}$, donc les composantes irréductibles des supports de T_{b_1} et de T_{b_2} qui rencontrent $U_{b_1} \cap U_{b_2}$, ainsi que leurs multiplicités, coïncident partout où elles sont définies. Pour presque tout (a, b) assez voisin de $(0,0)$, les composantes irréductibles des supports des τ_{ab} et leurs multiplicités se correspondent bijectivement. On considère une composante irréductible de T_{b_1} dans $K^{b_1} \cap K^{b_2}$; ses projections sur les τ_{ab} sont aussi des composantes irréductibles de ces dernières; alors, nécessairement, une composante irréductible de T_{b_2} se projette aussi dessus, donc coïncide avec la composante irréductible de T_{b_1}. $\square$

5.4.6. — Comme dans 4.4.2, $T' = \bigcup_b T_b$ a un sens et est une p-chaîne holomorphe de $X'' \setminus M$. Alors, d'après les lemmes 5.4.4 et 5.4.5, on a :

5.4.7. PROPOSITION. — *Il existe une p-chaîne holomorphe unique T' de $X'' \setminus M$ telle que $T'|_{K^b} = T_b$, pour tout b dans un voisinage assez petit de* 0 *dans $\mathbb{C}^{n-p}$.*

5.5. Construction de la solution.

5.5.1. LEMME. — *T' a une extension à $X \setminus M$ qui est une p-chaîne holomorphe.*

Démonstration. — Le raisonnement de la démonstration du lemme 4.4.4 s'étend compte tenu de l'existence des projections $\pi_b^a T$ sur des p-chaînes holomorphes, de codimension 1 de de Π. ▯

5.5.2. LEMME. — *T a une extension simple $\mathcal{T}$ à X telle que* $\mathrm{d}\mathcal{T} = M$.

Démonstration.

(a) $\operatorname{spt} T$ est de volume $2p$-dimensionnel localement fini au voisinage de M, d'après le fait qu'il en est ainsi pour presque toute projection $\operatorname{spt} \pi_b^a T$ au voisinage de $\pi_b^a M$, d'après la partie (a) de la démonstration du lemme 4.4.5.

(b) $\mathrm{d}\mathcal{T} = M$ d'après le lemme 4.4.5 car $\mathrm{d}\pi_b^a T = \pi_b^a M$ pour presque toute π_b^a. ▯

6. Démonstration du théorème I

6.1. PROPOSITION. — *Soient X un domaine q-concave de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ tel que $n - p + 1 \leq q \leq n$ et M une sous-variété C^2 de X, fermée, orientée et de dimension $(2p-1)$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est le bord d'une p-chaîne holomorphe de X de masse localement finie ;*

(ii) *M est maximalement complexe, il existe une matrice ν'^* telle que pour ν' dans un voisinage assez petit de ν'^*, pour tout sous-espace projectif $P_{\nu'}$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ contenu dans X possédant la propriété suivante : $M \cap P_{\nu'}$ est une courbe $\gamma_{\nu'}$ de $P_{\nu'}$ à distance finie, il existe une 1-chaîne holomorphe $S_{\nu'}$ de $P_{\nu'}$, de masse finie, de bord $\gamma_{\nu'}$, qui dépend de façon continue de ν'.*

Démonstration.

La partie (i) signifie qu'il existe une p-chaîne holomorphe T de $X \setminus M$ ayant une extension simple, notée aussi T, à X telle que $\mathrm{d}T = [M]$. Pour presque tout $P_{\nu'}$, où ν' est assez voisin de ν'^*, $\gamma_{\nu'} = M \cap P_{\nu'}$ est une courbe réelle à distance finie et $S_{\nu'} = P_{\nu'} \cap T$ est une 1-chaîne holomorphe telle que $\mathrm{d}S_{\nu'} = [\gamma_{\nu'}]$ qui dépend holomorphiquement de ν'.

Cela prouve (i) $\Rightarrow$ (ii).

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i).

6.2.1. LEMME. — *La condition* (ii) *entraîne qu'il existe un ouvert U de X rencontrant M et une p-chaîne holomorphe T_U de $U \setminus M$ ayant une extension simple à U, notée aussi T_U, telle que* $\mathrm{d}T_U = [M \cap U]$.

Démonstration. — Soit V_* un voisinage de ν'^* tel que, pour $\nu' \in V_*$, la condition (ii) soit satisfaite. Considérons une projection π de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ dans un sous-espace projectif $\Delta \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^p$ définie, à distance finie, par les projetantes D_ν

$$z \longmapsto \xi_j = z_j - \eta_j^1 z_1 - \ldots - \eta_j^{n-p} z_{n-p}$$

pour $j = n-p+1, \ldots, n$ et avec $\nu = (\xi, \eta)$, η fixe.

Comme précédemment, on désigne par Q l'hyperplan $w_0 = 0$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. On choisit la projection π pour que, ν_0' étant dans V_*, le sous-espace $P_{\nu_0'}$ rencontre $\pi(M) = \mathcal{M}$ en des points dans un voisinage $\mathcal{U}$ desquels $\mathcal{M}$ soit une hypersurface lisse dans Δ, à distance finie, que $\pi_{|M}$ soit une bijection de $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cap M$ sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{M}$, et que, pour ν_0', π et $\mathcal{U}$ convenables, $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cap M$ soit à distance finie, *i.e.* ne rencontre pas Q. Pour un choix convenable des coordonnées dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, on aura $\eta_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, donc aussi $\eta_0' = 0$, $\xi_0' = 0$. Enfin, on choisira, pour $\mathcal{U}$, un voisinage de $P_{\nu_0'} \cap (\Delta \setminus Q)$, réunion de sous-espaces $P_{\nu'} \cap (\Delta \setminus Q)$; de façon précise, en modifiant éventuellement ν'^* et V_*, on prend

$$\mathcal{U} = (\Delta \setminus Q) \cap \bigcup_{\xi' \in V_* \cap \{\eta' = 0\}} P_{(\xi', 0)}.$$

La variété M étant contenue dans X, la q-concavité de X entraîne que $U = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ est contenu dans X.

D'après (ii), dans $P_{\nu'}$, $M \cap P_{\nu'} = \gamma_{\nu'}$ est le bord d'une 1-chaîne holomorphe $S_{\nu'}$; $\pi(S_{\nu'})$ est une 1-chaîne holomorphe $\mathcal{S}_{\nu'}$ portée par la droite complexe $\Delta \cap P_{\nu'}$ et de bord $\mathcal{M} \cap P_{\nu'}$. Donc $\operatorname{spt} S_{\nu'}$ est un revêtement, éventuellement ramifié, de $\operatorname{spt} \mathcal{S}_{\nu'}$. L'ensemble des points singuliers de $\operatorname{spt} S_{\nu'}$ et des points critiques de $\pi_{|\operatorname{spt} S_{\nu'}}$ est discret ; il en est de même de sa projection $\sigma_{\nu'}$ sur $\operatorname{spt} \mathcal{S}_{\nu'}$. Quand $P_{\nu'} = P_{(\xi', 0)}$ varie, $\sigma_{\nu'}$ décrit une variété continue Σ de dimension $(2p-2)$.

On désigne, désormais par $|W|$ le support d'un courant W et par $|T_U|$ la réunion des $|S_{\nu'}|$. Soient

$$T_U = \bigcup_{\nu' \in V_*} S_{\nu'}, \quad |T_U|_0 = |T_U| \setminus \pi^{-1}(\Sigma),$$

$$\mathcal{N}_0 = \pi\big(|T_U|_0\big) \cup (\mathcal{M} \cap \mathcal{U}) \subset \mathcal{U} \subset \Delta \setminus Q \cong \mathbb{C}^p.$$

La restriction F de π^{-1} à $\mathcal{N}_0$ et à valeurs dans $|T_U|_0$ est une fonction vectorielle, propre, à plusieurs déterminations continues en général ; comme $f = F_{|\mathcal{M}}$ a pour graphe $M \cap \pi^{-1}(\mathcal{U})$ qui est maximalement complexe, alors f est CR (*cf.* [14, lemma 3.6]); pour tout $\nu' \in V_*$ éventuellement rétréci, $F_{| |\mathcal{S}_{\nu'}| \setminus \sigma_{\nu'}}$ est holomorphe puisque $\operatorname{spt} S_{\nu'}$ est un ensemble analytique complexe; F est continue sur $\mathcal{N}_0$ puisque $S_{\nu'}$ varie continûment avec ν'.

Pour tout $\nu' \in V_*$, on considère l'ouvert maximal $\mathcal{S}^j_{\nu'}$ de $|\mathcal{S}_{\nu'}|$ dont le bord contient une seule composante connexe $\gamma^j_{\nu'}$ de $\pi(\gamma_{\nu'})$ et qui est une courbe holomorphe rétractable. Soit

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\nu' \in V_*, j} \mathcal{S}^j_{\nu'} \cup \mathcal{M}.$$

Alors $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^p$ feuilleté de façon lissse par des courbes holomorphes à bord lisse contenant $\gamma^j_{\nu'}$. Après un éventuel rétrécissement de V_*, pour tout $\nu' \in V_*$, $P_{\nu'}$ est transversal à $\mathcal{M}$. Alors d'après [20, lemma 6], la fonction F est CR, donc holomorphe sur $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$.

Montrons que F se prolonge de façon holomorphe à $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$.

(i) $\mathcal{N}_0$ est connexe car Σ est de codimension réelle 2; il en est de même de son intérieur $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$.

(ii) Soit $\mathcal{N}'$ le domaine d'existence d'une extension holomorphe de F dans $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$. Reste à montrer que $\mathcal{N}'$ est fermé dans $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$. Supposons $\mathcal{N}' \subsetneqq \mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$. Soit $z \in \overline{\mathcal{N}'}$; il existe un ouvert u_z de $\mathbb{C}^p$ contenant z, réunion de domaines des $|\mathcal{S}_{\nu'}|$, pour tout $\nu' \in V'_* \subset V_*$, tel que $\mathcal{N}' \cap u_z \neq \emptyset$, et une sous-variété lisse μ_z de $u_z \cap \mathcal{N}'$, de dimension $(2p-1)$, transverse à $|\mathcal{S}_{\nu'}|$, pour $\nu' \in V'_*$, de façon que la composante connexe de $(|\mathcal{S}_{\nu'}| \setminus \mu_z) \cap u_z$ d'intersection non vide avec $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{N}'$ soit rétractable. Alors, d'après [20, lemma 6], F est holomorphe dans u_z ; donc z appartient à $\mathcal{N}'$. Comme $\mathcal{N}'$ est un ouvert et un fermé non vide de $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$, F est holomorphe dans $\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}$.

La fonction holomorphe F étant propre, $F(\mathcal{N}_0 \setminus \mathcal{M}) = |T_U| \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$ est une sous-variété analytique complexe; mais $|T_U| \cap \pi^{-1}(\Sigma)$ étant de codimension réelle 2, d'après le théorème de structure de Harvey-Shiffman [18], $|T_U|$ est un ensemble analytique complexe de dimension complexe p; il en résulte que T_U est une p-chaîne holomorphe de $U \setminus M$. D'après sa construction, elle a une extension simple à U, notée encore T_U, telle que $\mathrm{d}T_U = [M \cap U]$. ▯

6.2.2. — La démonstration de la proposition s'achève comme suit.

D'après le lemme 6.2.1 et d'après la démonstration de la condition nécessaire du théorème II, la condition (locale) (iii) du théorème II est satisfaite.

D'après le théorème II, la condition (i) de la proposition est satisfaite. ▯

6.3. Abandon de l'hypothèse de continuité de la donnée locale.

6.3.1. — On suppose $\nu = (\xi, \eta)$ avec $\eta = 0$ comme dans 6.2.1. Soit

$$E = \{\nu' \,;\; |\nu' - \nu'^{\tilde{*}}| < \delta\}$$

une boule centrée en $\nu'^{\tilde{*}} = (\xi^{\tilde{*}}, 0)$ dans $\mathbb{C}^{p-1}$ telle que tout sous-espace projectif $P_{\nu'}$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, pour $\nu' \in E$, soit contenu dans X. Il existe une boule E de centre et de rayon convenables telle que l'hypothèse suivante soit satisfaite :

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} \text{Pour tout } \nu' \in E,\ M \cap P_{\nu'} \text{ est une courbe réelle } \gamma_{\nu'} \text{ de } P_{\nu'}, \\ \text{lisse de classe } C^2, \text{ à distance finie, et il existe une 1-chaîne} \\ \text{holomorphe } S_{\nu'} \text{ de } P_{\nu'} \setminus \gamma_{\nu'}, \text{ de masse finie, ayant une extension} \\ \text{simple à } P_{\nu'}, \text{ notée encore } S_{\nu'}, \text{ telle que } \mathrm{d}S_{\nu'} = \gamma_{\nu'}. \end{cases}$$

6.3.2. Proposition. — *Dans les notations ci-dessus, supposons l'hypothèse* (H) *satisfaite. Alors, il existe $\nu'^* \in E$ et un voisinage $\mathcal{U}(\nu'^*)$ de ν'^* dans E tels que, pour tout $\nu' \in \mathcal{U}(\nu'^*)$, il existe une 1-chaîne holomorphe $\widetilde{S}_{\nu'}$ de $P_{\nu'} \setminus \gamma_{\nu'}$, de masse finie, satisfaisant à $d\widetilde{S}_{\nu'} = \gamma_{\nu'}$, et dépendant de ν' de façon C^1.*

6.4. Démonstration de 6.3.2.

Soit Σ une surface de Riemann à bord, compacte, de structure complexe J. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ muni de la métrique induite par la métrique de Fubini-Study et soit $s : (\Sigma, J) \to V$ une application holomorphe; $s(\Sigma)$ est appelée une surface de Riemann de V et s une surface de Riemann de V paramétrée par (Σ, J).

6.4.1. — Si S est une 1-chaîne holomorphe d'un ouvert de $P_{\nu'}$, on a $S = \sum n_j[V_j]$ où V_j est un ensemble analytique complexe irréductible de dimension 1 et $n_j \in \mathbb{Z}$, où $[V_j]$ est le courant d'intégration sur V_j et où la somme est localement finie. On appelle *volume de S*, l'expression

$$\operatorname{vol} S = \sum |n_j| \operatorname{vol} V_j$$

où $\operatorname{vol} V_j$ est le volume 2-dimensionnel de l'ensemble analytique V_j ; $\operatorname{vol} S$ est aussi la masse du courant S.

6.4.2. Lemme. — *Dans les notations ci-dessus, pour tout $\nu' \in E$, il existe une 1-chaîne holomorphe $\widehat{S}_{\nu'}$ de $P_{\nu'} \setminus \gamma_{\nu'}$, avec $\mathrm{d}\widehat{S}_{\nu'} = \gamma_{\nu'}$, minimisant le volume des 1-chaînes holomorphes $S_{\nu'}$ telles que $\mathrm{d}S_{\nu'} = \gamma_{\nu'}$.*

Démonstration. — Pour ν' donné, on pose $P = P_{\nu'}$, $\gamma = \gamma_{\nu'}$, $S = S_{\nu'}$, 1-chaîne holomorphe de $P \setminus \gamma$, ayant une extension simple $\overline{S}$ à P telle que $\mathrm{d}\overline{S} = \gamma$. Soit $v = \min_S\{\mathrm{vol}\, S\,;\ \mathrm{d}\overline{S} = \gamma\}$; il existe une suite (S_j) de 1-chaînes holomorphes de $P \setminus \gamma$, avec $\mathrm{d}\overline{S}_j = \gamma$, de volume uniformément borné, telle que $\mathrm{vol}\, S_j \to v$. Alors, d'après [14, th. 4.2] qui généralise un résultat de [2], il existe une sous-suite (S_{j_k}) convergeant dans la topologie plate, vers une 1-chaîne holomorphe $\widehat{S}$ de volume v, de l'ouvert $P \setminus \gamma$.

De même, d'après le théorème de compacité de Federer, $(\overline{S}_{j_k})$ converge dans la toplologie plate, sur P, vers une extension $\overline{\widehat{S}}$ de $\widehat{S}$ à P qui est nécesairement l'extension simple de $\widehat{S}$. Alors $\mathrm{d}\overline{S}_{j_k} = \gamma$ et $(\mathrm{d}\overline{S}_{j_k})$ converge au sens des courants vers $\mathrm{d}\overline{\widehat{S}}$, donc $\mathrm{d}\overline{\widehat{S}} = \gamma$. $\square$

6.4.3. — Pour tout $\nu' \in E$, il existe des surfaces réelles $\Sigma_{\nu' k}$, à bord lisse, de genre $g_{\nu' k}$ fini, en nombre fini, une structure complexe $J_{\nu' k}$ sur $\Sigma_{\nu' k}$ et des immersions holomorphes $s_{\nu' k} : (\Sigma_{\nu' k}, J_{\nu' k}) \to P_{\nu'} \setminus \gamma_{\nu'}$ telles que

$$(\ddagger) \qquad \widehat{S}_{\nu'} = \sum_{k=1}^{K_{\nu'}} n_{\nu' k} s_{\nu' k}(\Sigma_{\nu' k}).$$

Posons $E_N = \{\nu' \in E\,;\ \mathrm{vol}\, \widehat{S}_{\nu'} \leq N\}$. On a :

$$\mathrm{vol}\, \widehat{S}_{\nu'} = \sum_{k=1}^{K_{\nu'}} |n_{\nu' k}|\, \mathrm{vol}\, s_{\nu' k}(\Sigma_{\nu' k}).$$

Alors, pour tout $\nu' \in E_N$ et pour tout k, $\mathrm{vol}\, s_{\nu' k}(\Sigma_{\nu' k}) \leq N$.

6.4.4. Lemme. — *Il existe un entier $G > 0$ tel que, pour tout $\nu' \in E_N$, pour tout k, dans l'expression* $(\ddagger)$, *le genre $g_{\nu' k}$ de $\Sigma_{\nu' k}$ soit majoré par G.*

Démonstration. — La surface de Riemann $\sigma_{\nu' k} = s_{\nu' k}(\Sigma_{\nu' k})$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ a un ensemble fini $\tau_{\nu' k}$ de points singuliers; $s_{\nu' k}$ est un morphisme de désingularisation : il est propre et c'est un isomorphisme en dehors de $s_{\nu' k}^{-1}(\tau_{\nu' k})$.

Soit $z_0 \in \tau_{\nu' k}$. Il y a un nombre fini de composantes irréductibles de $\sigma_{\nu' k}$ en z_0 ; $s_{\nu' k}^{-1}(z_0)$ est un ensemble fini dont chaque point corrrespond à une composante irréductible. Toute telle composante est définie par un développement de Puiseux au voisinage de z_0 qui décrit localement le morphisme $s_{\nu' k}$.

La métrique de Fubini-Study de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ induit une métrique sur l'ouvert $\sigma_{\nu' k} \setminus \tau_{\nu' k}$. L'image réciproque de cette métrique, sur $\Sigma_{\nu' k} \setminus s_{\nu' k}^{-1}(\tau_{\nu' k})$ s'étend à $\Sigma_{\nu' k}$, éventuellement par 0 sur $s_{\nu' k}^{-1}(\tau_{\nu' k})$; elle peut être lissée en une métrique sur $\Sigma_{\nu' k}$.

On va utiliser la formule de Gauss-Bonnet, donnée dans [42, p. 26–28], sur $\Sigma_{\nu' k}$:

$$2\pi\chi(\Sigma_{\nu' k}) = \int_{b\Sigma_{\nu' k}} \kappa + \int_{\Sigma_{\nu' k}} K\Omega$$

où κ est la courbure géodésique de $\partial\Sigma_{\nu' k}$, K la courbure de Gauss et Ω l'élément de volume de $\Sigma_{\nu' k}$, respectivement.

La première intégrale porte sur la courbe réelle $\partial\Sigma_{\nu' k}$ sur laquelle la métrique induite est non singulière; $\partial\Sigma_{\nu' k}$ dépendant de façon C^1 de ν', et d'après le calcul fait dans [42, p. 28], κ est uniformément bornée en ν' ; il en est de même de l'intégrale.

On vérifie, à l'aide des développements de Puiseux au voisinage de $\sigma_{\nu' k} \setminus \tau_{\nu' k}$, que $K\Omega$ et la deuxième intégrale sont uniformément bornées en ν'.

Alors, $\chi(\Sigma_{\nu' k})$, est majoré par un entier indépendant de (ν', k), donc $g_{\nu' k}$ est majoré par un entier G. $\square$

6.4.5. Proposition de Saks-Uhlenbeck précisée. — *Soit (s_j) une suite de surfaces de Riemann de V, paramétrées par (Σ, J_j). On suppose que les volumes des $s_j(\Sigma)$ sont uniformément bornés. Alors, il existe une sous-suite, notée encore (s_j), ayant les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe un ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Sigma$ tel que les applications holomorphes $s_j : (\Sigma, J_j) \to V$ convergent uniformément dans la topologie C^1 sur les compacts de $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.*

(ii) *L'application limite $s : (\Sigma, J) \to V$ s'étend à une application holomorphe de Σ tout entière.*

(iii) *Si (s_j) ne converge C^1 sur aucun voisinage du point $x_1 \in \Sigma$, alors il existe une application holomorphe $\tilde{s} : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to V$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\tilde{s}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ soit contenue dans la limite de Hausdorff de $(s_j(\Delta_\varepsilon(x_1)))$ et*

$$\liminf_{j\to\infty} \operatorname{vol} s_j\big(\Delta_\varepsilon(x_1)\big) \geq \operatorname{vol} s\big(\Delta_\varepsilon(x_1)\big) + \operatorname{vol} \tilde{s}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$$

où $\Delta_\varepsilon(x_1) = B(x_1, \varepsilon)$.

(iv) *Dans le cas (iii), la limite de Hausdorff de $(s_j(\Delta_\varepsilon(x_1)))$ est $s(\Delta_\varepsilon(x_1)) \cup \bigcup_{j=1}^{N} C_j$, où chaque C_j est une courbe rationnelle, i.e. l'image de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ par une application holomorphe non constante $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to X$.*

La proposition est déduite de [22, prop. 3.1], de [35, th. 4.4, 4.6]; elle est analogue aux résultats de [13, section 1.5] pour laquelle on renvoie aussi à [1, VIII].

6.4.6. LEMME. — *Pour tout entier $N > 0$, $E_N = \{\nu' \in E\,;\ \operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'} \leq N\}$ est fermé.*

Démonstration. — La structure de la 1-chaîne holomorphe de volume minimal $\widehat{S}_{\nu'}$ dépend seulement de $\gamma_{\nu'} = M \cap P_{\nu'}$; en particulier, le nombre $K_{\nu'}$, et les multiplicités $n_{\nu' k}$ des composantes de $\widehat{S}_{\nu'}$, sont uniformément bornés pour $\nu' \in E_N$, parce que $\gamma_{\nu'}$ dépend de ν' de façon C^1 ; les genres $g_{\nu' k}$ sont majorés par G, pour $\nu' \in E_N$, d'après le lemme 6.4.4. Soient $\nu'_{**} \in \overline{E_N}$ et (ν'_j) une suite de points de E_N convergeant vers ν'_{**} ; on a $\operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'_j} \leq N$. Les sous-suites (ν'_{j_ℓ}) telle que, dans la représentation (‡), $K_{\nu'}$, les $n_{\nu' k}$ et les $g_{\nu' k}$ soient fixés, sont en nombre fini ; choisissons-en une qui soit infinie et que nous noterons (ν'_{j_ℓ}). Pour k fixé, les surfaces $\Sigma_{\nu' k}$ ont même topologie ; posons $\Sigma_k = \Sigma_{\nu' k}$. Alors, d'après 6.4.5, il existe une sous-suite (ν'_{j_λ}) telle que, pour tout $k \in [1, \ldots, K_{\nu'}]$, la suite $(s_{\nu'_{j_\lambda}}(\Sigma_k))$ converge, au sens de 6.4.5, vers une surface de Riemann $s^*_k(\Sigma_k)$, donc la suite $(\widehat{S}_{\nu'_{j_\lambda}})$ converge vers une 1-chaîne holomorphe S^* de $X \setminus M$ satisfaisant à $\operatorname{vol} S^* \leq N$. En outre, la convergence est C^1, au voisinage de $\gamma_{\nu'_{**}}$, donc S^* a une extension simple à P, notée encore S^*, telle que $\mathrm{d}S^* = \gamma_{\nu'_{**}}$. De plus, on a $\operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'_{**}} \leq \operatorname{vol} S^* \leq N$. □

6.4.7. — On a $E = \bigcup_N E_N$; d'après le lemme 6.4.6 et le théorème de Baire, il existe N^* tel que E_{N^*} contienne une boule

$$B(\nu'_*, \rho) = \big\{ |\nu' - \nu'_*| < \rho \big\}.$$

Dans $B(\nu'_*, \rho)$, on choisit ν'_{**} tel que

$$(\dagger) \qquad \operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'_{**}} \geq \sup_{\nu' \in B(\nu'_*, \rho)} \operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'} - \varepsilon$$

où ε est défini plus loin.

6.4.8. LEMME. — *$\widehat{S}_{\nu'}$ est de classe C^1 en ν' au voisinage de ν'_{**}.*

Démonstration. — Soit $B(\nu'_{**}, \delta)$ une boule contenue dans $B(\nu'_*, \rho)$. Pour δ assez petit, pour $\nu' \in B(\nu'_{**}, \delta)$, on a :

$$(\dagger\dagger) \qquad \operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'} \geq \sup_{\mu' \in B(\nu'_*, \rho)} \operatorname{vol} \widehat{S}_{\mu'} - \frac{3}{2}\, \varepsilon.$$

En effet, sinon il existerait une suite (ν'_j), $\nu'_j \in B(\nu'_*, \rho)$ tendant vers ν'_{**} telle que

$$\operatorname{vol} \widehat{S}_{\nu'_j} < \sup_{\mu' \in B(\nu'_*, \rho)} \operatorname{vol} \widehat{S}_{\mu'} - \frac{3}{2}\, \varepsilon.$$

Alors,

$$\operatorname{vol}\widehat{S}_{\nu'_j} \leq \limsup_{j\to\infty} \operatorname{vol}\widehat{S}_{\nu'_j} \leq \sup_{\mu'\in B(\nu'_*,\rho)} \operatorname{vol}\widehat{S}_{\mu'} - \frac{3}{2}\,\varepsilon,$$

ce qui contredit (†)

Soit (ν'_j) une suite de points de $B(\nu'_{**},\delta)$ convergeant vers ν'_{**}. Il existe une sous-suite notée encore (ν'_j) telle que $\widehat{S}_{\nu'_j}$ converge vers une 1-chaîne holomorphe $S_{\nu'_{**}}$ au sens de (6.4.5 (i), (ii)) pour chacune de ses composantes.

D'après (6.4.5 (iii), (iv)), on a

$$\liminf_{j\to\infty} \operatorname{vol}\widehat{S}_{\nu'_j} \geq \operatorname{vol} S_{\nu'_{**}} + \sum_{\alpha\in A} \operatorname{vol}\tilde{s}_\alpha(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$$

où A est fini et où $\tilde{s}_\alpha$ est une application holomorphe non constante $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to X$. Soit $\mathbb{C}\mathrm{P}^1{}_*$ un sous-espace projectif de dimension 1 de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, alors $\operatorname{vol}\mathbb{C}\mathrm{P}^1{}_* \leq \operatorname{vol}\tilde{s}_\alpha(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$.

Prenons pour ε le nombre $\frac{1}{2}\operatorname{vol}\mathbb{C}\mathrm{P}^1{}_*$.

À cause de la condition (††) et du fait que $\widehat{S}_{\nu'_{**}}$ est de volume minimal, on a

$$\operatorname{vol}\widehat{S}_{\nu'_{**}} \leq \operatorname{vol} S_{\nu'_{**}} \leq \operatorname{vol}\widehat{S}_{\nu'_{**}} + \frac{3}{2}\,\varepsilon.$$

D'après (6.4.5 (iii), (iv)), on a $S_{\nu'_{**}} = \widehat{S}_{\nu'_{**}}$; de plus $A = \emptyset$, donc $\widehat{S}_{\nu'_{**}}$ est la limite de $S_{\nu'_j}$, au sens de Hausdorff. Alors, l'ensemble des points exceptionnels de (6.4.5 (i)) est vide et d'après (6.4.5 (i)), la convergence est C^1.

La limite $\widehat{S}_{\nu'_{**}}$ étant indépendante de la suite (ν'_j) choisie, et le raisonnement étant valide pour tout ν' de $B(\nu'_{**},\delta)$, $\widehat{S}_{\nu'}$ est de classe C^1 dans $B(\nu'_{**},\delta)$. □

La proposition 6.3.2 est démontrée pour $\nu'^* = \nu'_{**}$, $\mathcal{U}(\nu'^*) = B(\nu'_{**},\rho)$ et $\widetilde{S}_{\nu'} = \widehat{S}_{\nu'}$. □

6.5. Démonstration du théorème I (M lisse de classe C^2).

D'après la Proposition 6.3.2, dans la condition (ii), la 1-chaîne holomorphe $S_{\nu'}$ peut être remplacée par la 1-chaîne holomorphe $\widehat{S}_{\nu'}$ continue de classe C^1 en ν' dans un voisinage assez petit de ν'^* ; alors la condition (ii) de 6.1 est satisfaite, d'où le théorème. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUDIN (M.), LAFONTAINE (J.) ed. — *Holomorphic curves in Symplectic Geometry*, Progress in Math., Birkhäuser, t. **117**, 1994.

[2] BISHOP (E.). — *Conditions for the analyticity of certain sets*, Michigan Math. J., t. **11**, 1964, p. 289–304.

[3] BOCHNER (S.), MARTIN (W.T.). — *Several complex variables*, Princeton Math. Ser., t. **10**, 1948.

[4] CHIRKA (E.M.). — *Complex analytic sets, Mathematics and its applications, 46.* — Kluwer Academic Publishers, 1989; Russian edition 1985.

[5] DARBOUX (L.). — *Théorie des surfaces*, I, 2e éd. — Gauthier-Villars, Paris, 1914.

[6] DINH TIEN CUONG (P.). — *Chaînes holomorphes à bord rectifiable*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **322,** Série I, 1996, p. 1135–1140.

[7] DINH TIEN CUONG (P.). — *Enveloppe polynômiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable*, Institut de Mathématiques de Jussieu, prépublication 93, 1996, à paraître dans Acta Mathematica.

[8] DOLBEAULT (P.). — *On holomorphic chains with given boundary in* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, Springer Lectures Notes, t. **1089**, 1983, p. 118–129.

[9] DOLBEAULT (P.), HENKIN (G.). — *Surfaces de Riemann de bord donné dans* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$*, Contributions to complex analysis and analytic geometry*, Aspects of Math., Vieweg, t. **26**, 1994, p. 163–187.

[10] DOLBEAULT (P.), HENKIN (G.). — *Chaînes holomorphes de bord donné dans* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, Institut de Mathématiques de Jussieu, prépublication 76, 1996.

[11] DOLBEAULT (P.), POLY (J.B.). — *Variations sur le problème des bords dans* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, prépublication, 1995.

[12] GINDIKIN (S.), HENKIN (G.). — *Integral geometry for* $\bar{\partial}$*-cohomology in q-linear concave domains in* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, Funct. Anal. and Appl., t. **12**, 1978, p. 247–261.

[13] GROMOV (M.). — *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Inv. math., t. **82**, 1985, p. 307–347.

[14] HARVEY (R.). — *Holomorphic chains and their boundaries*, Proc. Symp. Pure Math., t. **30**, vol. 1, 1977, p. 309–382.

[15] HARVEY (R.), LAWSON (B.). — *On boundaries of complex analytic varieties, I*, Ann. of Math., t. **102**, 1975, p. 233–290.

[16] HARVEY (R.), LAWSON (B.). — *On boundaries of complex analytic varieties, II*, Ann. of Math., t. **106**, 1977, p. 213–238.

[17] Harvey (R.), Lawson (B.). — *Complex analytic geometry and measure theory*, Proc. Symp. Pure Math., t. **44**, 1986, p. 261–274.

[18] Harvey (R.), Shiffman (B.). — *A characterization of holomorphic chains*, Ann. of Math. (2), t. **99**, 1974, p. 553–587.

[19] Henkin (G.), Leiterer (J.). — *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, Progress in Math., Birkhaüser, Boston, t. **74**, 1988.

[20] Henkin (G.), Tumanov (A.E.). — *Local characterization of holomorphic automorphisms of Siegel domains*, Funct. Anal. and Appl., t. **17**, 1983, p. 285–294.

[21] Hörmander (L.). — *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator*, Acta Math., t. **113**, 1965, p. 89–152.

[22] Ivashkovich (S.M.). — *The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds*, Inv. Math., t. **109**, 1992, p. 47–54.

[23] Jöricke (B.). — *Some remarks concerning holomorphically convex hulls and envelopes of holomorphy*, Math. Z., t. **218**, 1995, p. 143–157.

[24] King (J.). — *Open problems in geometric function theory*, Proceedings of the fifth international symposium, division of Math., p. 4, The Taniguchi foundation, 1978.

[25] Kohn (J.J.), Rossi (H.). — *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold*, Ann. of Math., t. **81**, 1965, p. 451–472.

[26] Koppelman (W.). — *The Cauchy integral for functions of several complex variables*, Bull. A.M.S., t. **73**, 1967, p. 372–377.

[27] Lawrence (M.G.). — *Polynomial hulls of rectifiable curves*, Amer. J. Math., t. **117**, 1995, p. 405–417.

[28] Lelong (P.). — *Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$*, J. Analyse Math., t. **12**, 1964, p. 365–407.

[29] Leray (J.). — *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III)*, Bull. S.M.F., t. **87**, 1959, p. 81–180.

[30] Levy (H.). — *On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for functions of two complex variables*, Ann. of Math., t. **64**, 1956, p. 514–522.

[31] Porten (E.). — *A Hartogs–type theorem for meromorphic mappings*, preprint 1997.

[32] Rossi (H.). — *Continuation of subvarieties of projective varieties*, Amer. J. of Math., t. **91**, 1969, p. 565–575.

[33] ROTHSTEIN (W.). — *Bemerkung zur theorie komplexen Raüme*, Math. Ann., t. **137**, 1959, p. 304–315.

[34] ROTHSTEIN (W.), SPERLING (H.). — *Einsetzer und analytischer Flächenstücke in Zyklen auf komplexer Raüme*, Festshrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass 1815–1965 (Behnke und Kopfermann, ed.). Westentsche Verlag, Köln, 1965, p. 531–554.

[35] SACKS (J.), UHLENBECK (K.). — *The existence of minimal 2-spheres*, Ann. of Math., t. **113**, 1981, p. 1–24.

[36] SARKIS (F.). — *CR meromorphic extension and the non embedding of the Andreotti–Rossi CR structure in the projective space*, Institut de Mathématiques de Jussieu, prébublication **116**, 1997.

[37] SHIFFMAN (B.). — *On the removal of singularities of analytic sets*, Michigan Math. J., t. **15**, 1968, p. 111–120.

[38] STOLL (W.). — *Über die Fortsetzbarkeit analytischer Mengen endlichen Oberflächeninhaltes*, Arch. Math., t. **9**, 1958, p. 167–175.

[39] STOUT (E.L.). — *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables*, Duke Math. J., t. **44**, 1977, p. 105–108.

[40] TRÉPREAU (J.-M.). — *Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2 dans $\mathbb{C}^2$*, Inv. Math., t. **83**, 1986, p. 583–592.

[41] WERMER (J.). — *The hull of a curve in $\mathbb{C}^n$*, Ann. of Math., t. **68**, 1958, p. 550–561.

[42] WU (H.-H.). — *The equidistribution theory of holomorphic curves*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, t. **64**, 1970.