BULLETIN DE LA S. M. F.

CHARLES TOROSSIAN

L'homomorphisme de Harish-Chandra pour les paires symétriques orthogonales et parties radiales des opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques

Bulletin de la S. M. F., tome 126, nº 3 (1998), p. 295-354

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_3_295_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 295–354.

L'HOMOMORPHISME DE HARISH-CHANDRA POUR LES PAIRES SYMÉTRIQUES ORTHOGONALES ET PARTIES RADIALES DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES

PAR CHARLES TOROSSIAN (*)

RÉSUMÉ. — On développe une théorie de la partie radiale pour les opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques généraux. On utilise cette théorie pour montrer que l'homomorphisme de Harish-Chandra, que nous avons défini dans nos travaux antérieurs, est à valeurs polynomiales (conjecture polynomiale) dans le cas des paires symétriques orthogonales. Nous montrons que, dans le cas résoluble, notre homomorphisme coïncide avec l'isomorphisme de Rouvière. Nous établissons des liens entre les techniques radiales du cas semi-simple et les techniques globales du cas nilpotent.

ABSTRACT. — HARISH-CHANDRA HOMOMORPHISM FOR ORTHOGONAL SYMMETRIC PAIRS AND RADIAL PARTS OF INVARIANT DIFFERENTIAL OPERATORS ON SYMMETRIC SPACES. — We define radial parts for invariant differential operators on general symmetric spaces. We use this theory to prove that our Harish-Chandra homomorphism is polynomial valued, in case of orthogonal symmetric pair. In case of solvable symmetric pairs, it coincides with Rouvière's isomorphism. We describe connections between radial technics in semi-simple case and global technics in nilpotent case.

1. Introduction, notations

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique au sens de Chevalley [3] de dimension finie sur $\mathbb{C}$, *i.e.* l'algèbre de Lie d'un groupe linéaire algébrique

(*) Texte reçu le 20 mai 1997, révisé le 4 novembre 1997, accepté le 15 avril 1998.
C. TOROSSIAN, CNRS URA 762-DMI, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75230 Paris CEDEX 05. Email : torossia@dmi.ens.fr.
Classification AMS : 22.70, 22.90, 17B30, 17B35, 17B99, 53.66, 53.73.

Mots clés : espaces symétriques, opérateurs différentiels, parties radiales, paires résolubles, paires orthogonales, idéaux résolubles, homomorphime de Harish-Chandra, conjecture polynomiale.

irréductible G sur $\mathbb{C}$. Soit σ une involution algébrique non triviale, *i.e.* la différentielle à l'origine d'un automorphisme involutif algébrique (on notera par la même lettre σ l'involution sur G et sa différentielle sur $\mathfrak{g}$) ; on note G^σ le sous-groupe des points fixes de σ dans G et K sa composante irréductible. On appelera $(\mathfrak{g},\sigma)$ une *paire symétrique* [5]. Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition en espaces propres relativement à σ, on dira la *σ-décomposition.* Soit $U[\mathfrak{g}]$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. On définit pour $X\in\mathfrak{k}$ le caractère

$$\delta(X)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}\,\mathrm{ad}(X).$$

On note $\mathfrak{k}^{-\delta}$ la sous-algèbre de $U[\mathfrak{g}]$ définie par

$$\{X-\delta(X)\,;\ X\in\mathfrak{k}\}$$

et $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$ la sous-algèbre des $\mathfrak{k}$-invariants pour l'action adjointe. L'un des points fondamentaux en analyse harmonique est de comprendre la nature de l'algèbre commutative

$$U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}\cap U[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$$

(*cf.* [15], [7]), qui est directement liée à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur l'espace symétrique G/K. Nous avons défini dans [23], ce que devrait être l'homomorphisme de Harish-Chandra dans ce contexte général, de $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}\cap U[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$ sur $\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ où $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ désigne l'espace des $\mathfrak{k}$-invariants dans l'algèbre symétrique $S[\mathfrak{p}]$. Nous allons rappeler brièvement la construction de cet homomorphisme.

Soit f dans l'orthogonal $\mathfrak{k}^\perp$ de $\mathfrak{k}$ dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de la forme bilinéaire B_f définie par

$$B_f(x,y)=f[x,y]\,;$$

c'est aussi le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$ pour l'action co-adjointe. Alors $\mathfrak{g}(f)$ est σ-stable et on note $\mathfrak{g}(f)=\mathfrak{k}(f)\oplus\mathfrak{p}(f)$ la décomposition relativement à σ. On dira que f est *régulier* si $\mathfrak{g}(f)$ est de dimension minimale lorsque f parcourt $\mathfrak{k}^\perp$ (on dit aussi, s'il y a confusion possible avec des notions similaires, mais ce n'est pas le cas dans cet article, f régulier dans $\mathfrak{k}^\perp$). Lorsque f est régulier, la sous-algèbre

$$\mathfrak{a}(f)=\mathfrak{p}(f)\oplus\big[\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(f)\big]$$

est nilpotente. On dira que f est *très régulier* si f est régulier et si la dimension de la partie semi-simple de $\mathfrak{a}(f)$, qui est un tore et que l'on note $\mathfrak{s}_f$, est maximale parmi les f réguliers. Nous avons $\mathfrak{s}_f \subset \mathfrak{p}(f)$ et tous ces tores sont conjugués par K ; leur dimension commune modulo le centre de $\mathfrak{g}$ est appelé *σ-rang*. Par exemple les paires symétriques nilpotentes sont de σ-rang 0.

Pour f très régulier, on note par

$$\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}_f)$$

le centralisateur de $\mathfrak{s}_f$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $(\mathfrak{g}_0, \sigma)$ est une paire symétrique algébrique de σ-rang 0. On note

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$$

sa σ-décomposition. Notons par

$$\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{s}_f)$$

les racines non nulles de la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action du tore $\mathfrak{s}_f$. En général, Δ n'est pas un système de racines au sens de Bourbaki. Toutefois pour $\alpha \in \Delta$, on a $-\alpha \in \Delta$; cette propriété permet de définir, suivant Bourbaki, des notions de chambres et de systèmes positifs. Soit donc $\mathcal{C}$ une chambre dans $\mathfrak{s}_f$ et notons par Δ^+ l'ensemble des racines positives correspondantes. On a $\Delta^+ \cap -\Delta^+ = \emptyset$. On note $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace propre associé à la racine α. On note

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in -\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha = (\mathfrak{n}^+)^\sigma.$$

Nous avons une décomposition généralisant la décomposition d'Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{n}^+$$

et une décomposition triangulaire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Afin de simplifier les notations dans cette introduction, notons U l'algèbre envelopante de $\mathfrak{g}$ et U_0 celle de $\mathfrak{g}_0$.

Pour $u \in U$, on définit l'élément $\Gamma(u) \in U_0 / U_0 \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$ par

$$u - \Gamma(u)^{-\rho} \in U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} + \mathfrak{n}^+ \cdot U \tag{1}$$

où ρ est le caractère de $\mathfrak{g}_0$ défini par

$$\rho(X) = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^+} \operatorname{ad}(X)$$

et $*^{-\rho}$ désigne le *décalage* (*shift* en anglais) par $-\rho$ (l'application de $\mathfrak{g}_0$

dans U_0 définie par $X \mapsto X - \rho(X)$ s'étend en un homomorphisme de U_0 appelé décalage). L'application Γ définit une application de $U/U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ dans $U_0/U_0 \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$ notée encore Γ. Lorsqu'on a $u \in U^{\mathfrak{k}}$, l'élément $\Gamma(u)$ est dans l'algèbre

$$(U_0/U_0 \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0})^{\mathfrak{k}_0} = U_0^{\mathfrak{k}_0}/U_0^{\mathfrak{k}_0} \cap U_0 \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$$

et est indépendant du choix de la chambre $\mathcal{C}$. La restriction de Γ à $(U/U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta})^{\mathfrak{k}} = U^{\mathfrak{k}}/U^{\mathfrak{k}} \cap U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ est un homomorphisme d'algèbres, appelé la *projection de Harish-Chandra.*

D'un autre côté, nous avons montré dans [24] que la symétrisation β_0 était un isomorphisme d'algèbres de $\mathrm{S}[\mathfrak{p}_0]^{\mathfrak{k}_0}$ sur $U_0^{\mathfrak{k}_0}/U_0^{\mathfrak{k}_0} \cap U_0 \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$, *i.e.* β_0 réalise un isomorphisme d'algèbres pour les paires symétriques de σ-rang 0. Donc pour $u \in U^{\mathfrak{k}}$, $\beta_0^{-1}(\Gamma(u))$ est dans l'espace $\mathrm{S}[\mathfrak{p}_0]^{M'}$ des invariants par le normalisateur $M' = N_K(\mathfrak{s}_f)$ de $\mathfrak{s}_f$ dans K. Grâce à une généralisation du théorème de restriction de Chevalley, nous avons au niveau des fractions rationnelles l'égalité $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} = S(\mathfrak{p}_0)^{M'}$, où l'on a noté $S(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de $S[\mathfrak{p}]$. Alors $\beta_0^{-1}(\Gamma(u))$ est la restriction d'un élément $\gamma(u)$ de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$.

La conjecture générale est la suivante (voir [8], [11], [24]) :

Pour $u \in U^{\mathfrak{k}}$, l'élément $\gamma(u)$ est en fait un polynôme, i.e. $\gamma(u) \in \mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$.

Dans la suite on nommera cette conjecture la *conjecture polynomiale.*

Comme indiqué dans [24], le terme de degré maximum de $\gamma(u)$ est dans $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et vaut exactement $\mathrm{gr}(u)$, où gr désigne la projection naturelle de $U/U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ dans son gradué associé $S[\mathfrak{g}]/S[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}$ identifié à $S[\mathfrak{p}]$, donc γ est un homomorphisme injectif de $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$. Ceci prouve que, si la conjecture est vraie, alors γ est un isomorphisme de $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ sur $\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$.

Le but de cet article est de prouver cette conjecture dans trois cas.

1) $\mathfrak{g}$ est orthogonale, c'est-à-dire qu'il existe une forme bilinéaire invariante, σ-invariante et non dégénérée.

2) $\mathfrak{g}$ est résoluble, dans ce cas γ est l'isomorphisme de Rouvière.

3) u est un élément de l'algèbre enveloppante d'un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

Rouvière [18] montre dans le cas où $\mathfrak{g}$ est résoluble, grâce à des méthodes inspirées de la conjecture de Kashiwara-Vergne [14], qu'une modification de la symétrisation est en fait un isomorphisme d'algèbres de $\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$. Notre méthode est différente et il nous semblait important d'établir les liens entre ces deux points de vue.

Je remercie Michel Duflo pour les discussions que nous avons eues.

Le premier cas inclut les paires symétriques réductives, mais il y a d'autres exemples de paires symétriques orthogonales. Par exemple, les algèbres de Lie orthogonales considérées comme des paires symétriques [13], ou les paires symétriques de Takiff, c'est-à-dire $(\mathfrak{g} \propto \mathfrak{g}^*, \sigma_1)$ où $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est une paire symétrique et σ_1 l'involution que l'on construit sur le produit semi-direct $\mathfrak{g} \propto \mathfrak{g}^*$ à partir de σ.

Notations supplémentaires.

L'article est divisé en parties, sections et paragraphes. Dans les parties 2 et 3, $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est une paire symétrique algébrique sur $\mathbb{C}$. Dans la partie 4, on considèrera des espaces symétriques réels.

Le dual de $\mathfrak{g}$ se note $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{k}^\perp$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}^*$. On pourra identifier $\mathfrak{k}^\perp$ avec $\mathfrak{p}^*$ grâce à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{C}[V]$ les fonctions polynomiales sur V et $S[V]$ l'algèbre symétrique; on a donc $S[V^*] = \mathbb{C}[V]$. On notera $S(V)$ le corps des fractions de $S[V]$.

On désignera par β la symétrisation de l'algèbre symétrique $S[\mathfrak{g}]$ sur l'algèbre enveloppante $U[\mathfrak{g}]$, et par la même lettre la symétrisation de $S[\mathfrak{p}]$ sur $U[\mathfrak{g}]/U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$; il s'agit d'isomorphismes d'espaces vectoriels.

Si $\mathfrak{g}$ est algébrique, on désignera par $\mathfrak{g}_u$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$ et par $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_u \oplus \mathfrak{p}_u$ la σ-décomposition associée. Si $(\mathfrak{h}, \sigma)$ est une sous-paire symétrique de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, on écrira parfois $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_\mathfrak{h}$ la σ-décomposition associée.

On écrira parfois pour simplifier $A_\mathfrak{k}(\mathfrak{g})$ pour l'algèbre $U[\mathfrak{g}]^\mathfrak{k}/U[\mathfrak{g}]^\mathfrak{k} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$. On appelle *homomorphisme de Harish-Chandra* l'homomorphisme injectif γ de $A_\mathfrak{k}(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}$ décrit dans nos articles antérieurs et dont on a rappelé la construction dans le cas algébrique en introduction; on écrira $\gamma_\mathfrak{g}$ s'il y a confusion possible.

On appelera *projection de Harish-Chandra* la restriction de l'application Γ à $A_\mathfrak{k}(\mathfrak{g})$ et à valeurs dans $A_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{g}_0)$.

Ces notations supplémentaires sont valables pour tout l'article. On introduira d'autres notations dans la partie 4.

2. L'homomorphisme de Harish-Chandra pour les paires symétriques orthogonales

2.1. Résultats préliminaires et définitions.

On va montrer que pour $u \in U[\mathfrak{g}]^\mathfrak{k}$, la fraction $\gamma(u)$ définie dans l'introduction est en fait bien définie au voisinage des points où l'on a une bonne notion de transversalité, moyennant l'existence d'une procédure de récurrence.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(\mathfrak{g},\sigma)$ *une paire symétrique algébrique qui n'est pas somme directe d'idéaux* σ*-stables. Soit* $f\in\mathfrak{k}^{\perp}=\mathfrak{p}^*$ *et supposons que* $\mathfrak{a}(f)=\mathfrak{p}(f)\oplus[\mathfrak{p}(f),\mathfrak{p}(f)]$ *possède un élément semi-simple non nul et central dans* $\mathfrak{a}(f)$*. On note* $\mathfrak{z}(f)_{ss}$ *la partie semi-simple du centre de* $\mathfrak{a}(f)$ *et par* $\mathfrak{g}_0$ *le centralisateur de* $\mathfrak{z}(f)_{ss}$ *dans* $\mathfrak{g}$*. Supposons que la conjecture polynomiale soit vraie pour* $\mathfrak{g}_0$ *; alors pour* $u\in A_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g})$*, la fraction* $\gamma(u)$ *est bien définie en* f*.*

Preuve. — Soient $\mathfrak{g}$ et $f\in\mathfrak{k}^{\perp}=\mathfrak{p}^*$ comme dans l'énoncé de la proposition. Il est facile de voir que le tore $\mathfrak{z}(f)_{ss}$ est inclus dans $\mathfrak{p}$ en considérant par exemple une décomposition de Lévi σ-stable. Soit $\mathfrak{g}_0$ le centralisateur de $\mathfrak{z}(f)_{ss}$ dans $\mathfrak{g}$. Par hypothèse on a $\mathfrak{g}\neq\mathfrak{g}_0$, sinon $\mathfrak{g}$ serait somme directe d'idéaux. Par ailleurs on a $\mathfrak{g}(f)\subset\mathfrak{g}_0$. En effet, on a $\mathfrak{a}(f)\subset\mathfrak{g}_0$ et l'action de $\mathfrak{z}(f)_{ss}$ sur $\mathfrak{g}$ fournit une décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus[\mathfrak{z}(f)_{ss},\mathfrak{g}]$ orthogonale pour la forme bilinéaire B_f. Je dis que la forme B_f est non dégénérée sur le second facteur. Pour le voir, il suffit de remarquer que le second facteur est σ-stable et que la dimension du facteur inclus dans $\mathfrak{k}$ est égale à la dimension du facteur inclus dans $\mathfrak{p}$; d'après un résultat de Kostant-Rallis [12], le noyau de la restriction de B_f à ce facteur, disons N, a la même propriété. Mais comme la décomposition de $\mathfrak{g}$ ci-dessus est orthogonale pour B_f, on en déduit que l'on a $N\cap\mathfrak{p}=0$; par suite $N=0$. En particulier on a $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}_0\neq\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}(f)\subset\mathfrak{g}_0$, d'où l'égalité $\mathfrak{g}_0(f\mid\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{g}(f)$. Cette observation implique le fait suivant : l'application naturelle

$$\phi : K\times\mathfrak{p}_0^*\longrightarrow\mathfrak{p}^*,\quad (k,g)\longmapsto \mathrm{Ad}(k)\cdot g \tag{2}$$

est une submersion en f. D'un autre côté, l'homomorphisme de Harish-Chandra est compatible avec la décomposition d'Iwasawa partielle

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}_0\oplus\mathfrak{n}^+,$$

où $\mathfrak{n}^+$ est la somme des espaces propres correspondants à un choix de racines positives pour l'action de $\mathfrak{z}(f)_{ss}$ dans $\mathfrak{g}$ (le lecteur comprendra qu'il s'agit d'une généralisation des résulats rappelés dans l'introduction, voir [24, chap. 2]). Par analogie avec (1), on note $\Gamma_0(u)$ l'élément de $A_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{g}_0)$ image de $u\in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$ par la projection de Harish-Chandra partielle. Alors les deux fractions $\gamma(u)\mid\mathfrak{p}_0^*$ et $\gamma_{\mathfrak{g}_0}(\Gamma_0(u))$ sont égales, où $\gamma_{\mathfrak{g}_0}$ désigne l'homomorphisme de Harish-Chandra pour la petite paire symétrique $(\mathfrak{g}_0,\sigma)$. L'hypothèse de récurrence pour $\mathfrak{g}_0$ affirme que $\gamma_{\mathfrak{g}_0}(\Gamma_0(u))$ est bien définie en $f_{|\mathfrak{p}_0}$; par conséquent $\gamma(u)$ est bien définie en f car ϕ est une submersion en f. $\square$

DÉFINITION 1. — *On dira que* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *est une* paire symétrique orthogonale *si* $\mathfrak{g}$ *admet une forme bilinéaire invariante,* σ*-invariante et non dégénérée.*

EXEMPLE 1 (Takiff généralisé, [17], [9]). — Soit (S, θ) une paire symétrique semi-simple et posons

$$\mathfrak{g} = S \otimes \mathbb{C}[T]/T^{n+1}$$

avec le crochet

$$[X \otimes T^a, Y \otimes T^b] = [X, Y] \otimes T^{a+b} \quad \text{si } a + b \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Alors cette algèbre de Lie est orthogonale pour la forme

$$B(X \otimes T^a, Y \otimes T^{n-a}) = K(X, Y)$$

avec $K(X, Y)$ la forme de Killing. Il est clair que l'on peut étendre l'involution θ de S à $\mathfrak{g}$. Alors $(\mathfrak{g}, \theta)$ est une paire symétrique orthogonale.

EXEMPLE 2. — Soit $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une paire symétrique ; alors $\mathfrak{g} \propto \mathfrak{g}^*$, produit semi-direct de $\mathfrak{g}$ avec son dual $\mathfrak{g}^*$, possède une involution qui prolonge σ et une forme invariante adéquate définie par

$$B\big((x, f), (y, g)\big) = f(y) + g(x).$$

EXEMPLE 3. — Soit A une algèbre (associative) commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et munie d'une forme bilinéaire vérifiant pour $(a, b, c) \in A^3$, $(ab, c) = (b, ac)$ (A est une algèbre de Frobenius). Si $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est une paire symétrique orthogonale, on forme $\mathfrak{g} \otimes A$. C'est une algèbre de Lie pour le produit

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab.$$

Définissons

$$\sigma_1(X \otimes a) = \sigma(X) \otimes a \quad \text{et} \quad (X \otimes a, Y \otimes b) = (X, Y)(a, b).$$

Alors $(\mathfrak{g} \otimes A, \sigma_1)$ est une paire symétrique orthogonale. On peut compliquer l'exemple en imposant une involution sur A. L'exemple 1 est un cas particulier de l'exemple 3.

LEMME 1 (voir [16]). — *Si* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *une paire symétrique orthogonale, il existe sur* $\mathfrak{g}$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, invariante et* σ*-invariante.*

Preuve. — Soit B une forme bilinéaire invariante non dégénérée et σ-invariante sur $\mathfrak{g}$. Écrivons

$$B = B_a + B_s$$

la décomposition canonique de B en forme alternée et symétrique. Elles sont encore invariantes et σ-invariantes. D'après [16] (ou Bourbaki), le noyau de B_a noté N_a contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; c'est donc un idéal de $\mathfrak{g}$, il est σ-stable. Notons N_s le noyau de B_s ; c'est aussi un idéal et on a $N_a \cap N_s = 0$ car B est non dégénérée, en particulier on a $[\mathfrak{g}, N_s] \subset N_s \cap N_a = 0$. Soit M un sous-espace vectoriel σ-stable qui contient N_a et supplémentaire de N_s, c'est automatiquement un idéal. On choisit une forme bilinéaire symétrique B_0 non dégénérée et σ-invariante sur N_s. Elle est invariante. La forme B_s restreinte à M est non dégénérée. Alors $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux (M, B_s) et (N_s, B_0). □

DÉFINITION 2. — *Sans perte de généralité, on peut supposer dans la définition des paires symétriques orthogonales que la forme est symétrique.*

Nous pouvons maintenant énoncer le premier théorème de cet article.

THÉORÈME 1. — *Soit* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *une paire symétrique orthogonale et algébrique sur* $\mathbb{C}$; *alors l'homomorphisme de Harish-Chandra est un isomorphisme d'algèbres de* $A_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g})$ *sur* $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$.

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ et par réduction à des cas spécifiques simples. D'après le lemme 1 ci-dessus, on peut supposer que la forme est symétrique. On suppose jusqu'à la fin de cette partie, que $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est une paire symétrique orthogonale. Les sections qui suivent constituent la démonstration du théorème 1.

2.2. Procédure de réduction.

Notons par B une forme bilinéaire symétrique invariante, σ-invariante et non dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on notera V^B l'orthogonal relativement à la forme B. Le résultat du théorème est évident si on a $\dim(\mathfrak{g}) = 1$. On suppose avoir démontré le théorème pour les paires symétriques algébriques orthogonales de dimension inférieure à n. Soit $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une paire symétrique algébrique orthogonale de dimension $n + 1$.

Notons par $Z(\mathfrak{g})_{ss}$ la partie semi-simple du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

On peut supposer que l'on a $Z(\mathfrak{g})_{ss} = 0$.

En effet, si l'on a $Z(\mathfrak{g})_{ss} \neq 0$ et $B|Z(\mathfrak{g})_{ss}$ non nul, alors on peut trouver une décomposition d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}_1$ orthogonale pour B. On prend pour $\mathfrak{s}$ un supplémentaire algébrique de $Z(\mathfrak{g})_{ss}^B \cap Z(\mathfrak{g})_{ss}$ dans $Z(\mathfrak{g})_{ss}$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{s}^B$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}_1$.

Si on a $Z(\mathfrak{g})_{ss} \neq 0$ et $B|Z(\mathfrak{g})_{ss} = 0$, on choisit un idéal σ-stable $\mathfrak{g}_1$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et contenant le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, de telle sorte que l'on ait la somme directe comme idéaux $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})_{ss} \oplus \mathfrak{g}_1$ (voir [3]). Soit $N_1 = \mathfrak{g}_1^B$, alors N_1 est un idéal qui est central dans $\mathfrak{g}$ (car on $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_1$) et $N_1 \cap Z(\mathfrak{g})_{ss} = 0$. La partie réductive de N_1 est dans $Z(\mathfrak{g})_{ss}$, elle est donc nulle. Ainsi N_1 est un idéal unipotent, donc inclus dans $\mathfrak{g}_1$. La décomposition $\mathfrak{g} = (Z(\mathfrak{g})_{ss} \oplus N_1) \oplus \mathfrak{g}_1 \cap Z(\mathfrak{g})_{ss}^B$ est directe comme idéaux, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au second facteur.

Examinons le cas $Z(\mathfrak{g})_{ss} = 0$.

Soit $f \in \mathfrak{p}^*$. Notons par x_f l'élément correspondant dans $\mathfrak{p}$ via la forme B, *i.e.* on a $B(x_f, x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. On a alors $\mathfrak{g}(f) = Z_{\mathfrak{g}}(x_f)$ le centralisateur de x_f dans $\mathfrak{g}$. Prenons une décomposition de Jordan $x_f = x_f^s + x_f^u$. Si on a $x_f^s \neq 0$, alors x_f^s est non nul et central dans $\mathfrak{a}(f) = \mathfrak{p}(f) \oplus [\mathfrak{p}(f), \mathfrak{p}(f)]$. Comme on a $Z(\mathfrak{g})_{ss} = 0$, il est clair que la petite paire symétrique $(\mathfrak{g}_0, \sigma)$ qui intervient dans la preuve de la proposition 1 est de dimension inférieure à n et orthogonale car la décomposition dans la preuve de la proposition 1, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus [\mathfrak{z}(f)_{ss}, \mathfrak{g}]$ est orthogonale pour B. Par hypothèse de récurrence, la conjecture polynomiale est vraie pour $\mathfrak{g}_0$, grâce à la proposition 1 ci-dessus ; on en déduit que l'homomorphisme de Harish-Chandra est bien défini en f.

Le problème est donc de montrer que c'est encore le cas pour les éléments f tel que $x_f^s = 0$.

D'un autre côté, si la variété des éléments unipotents dans $\mathfrak{p}$, notée $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$, est de codimension plus grande que deux, alors l'homomorphisme de Harish-Chandra sera polynomial à cause du principe de Hartogs.

Prenons une décomposition de Lévi σ-stable, $\mathfrak{g} = R \oplus \mathfrak{g}_u$, avec R un facteur réductif σ-stable. De telles décompositions existent (voir [23]). On a $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{N}_{R\cap\mathfrak{p}} + \mathfrak{p}_u$ où $\mathcal{N}_{R\cap\mathfrak{p}}$ désigne la variété des éléments unipotents de $R \cap \mathfrak{p}$. Ainsi si l'on suppose que $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ est de codimension inférieure à 1, alors $\mathcal{N}_{R\cap\mathfrak{p}}$ sera de codimension inférieure à 1 dans $R \cap \mathfrak{p}$. D'après la structure des paires symétriques réductives [5], la situation se résume aux deux cas suivants.

• *Premier cas :* $R = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{t}$ avec $\mathfrak{k}_1$ un idéal inclus dans $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$ un tore inclus dans $\mathfrak{p}$, $\dim(\mathfrak{t}) \leq 1$ et $[\mathfrak{t}, R] = 0$.

• *Deuxième cas :* $R = \mathfrak{k}_1 \oplus S$ avec $\mathfrak{k}_1$ un idéal inclus dans $\mathfrak{k}$, S simple, σ-stable de σ-rang 1 et $[\mathfrak{k}_1, S] = 0$.

Dans les deux cas le σ-rang of $\mathfrak{g}$ est inférieur à 1. Si c'est 0, il n'y a plus rien à démontrer (*cf.* introduction), on supposera dans la suite que le σ-rang de $\mathfrak{g}$ est donc 1.

2.3. Le premier cas.

Remarquons que $\mathfrak{p}$ est inclus dans $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^u$ qui est un idéal résoluble σ-stable.

L'homomorphisme de Harish-Chandra pour $\mathfrak{h}$ est compatible avec l'action extérieure de $\mathfrak{k}_1$. Pour tout u dans $\mathcal{A}_{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})$ qui est en plus $\mathfrak{k}_1$-invariant, $\gamma_{\mathfrak{h}}(u)$ sera $\mathfrak{k}_1$-invariant et donc $\mathfrak{k}$-invariant. Plus généralement, γ commute aux actions extérieures qui stabilisent la décompostion $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Comme $\mathfrak{h}$ est résoluble, on appliquera le théorème 2 de la partie 3 de cet article qui affirme que $\gamma_{\mathfrak{h}}$ est l'isomorphisme de Rouvière, en particulier polynomial et le théorème 3 de la partie 4 qui assure l'égalité $\gamma_{\mathfrak{g}}(u) = \gamma_{\mathfrak{h}}(u)$, égalité évidente dans ce cas spécial car on a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}$. Ceci termine la preuve dans le premier cas.

2.4. Le second cas.

Comme expliqué dans le premier cas, il suffit de montrer la conjecture polynomiale pour l'idéal $\mathfrak{h} = S \oplus \mathfrak{g}_u$, car on a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}$ et γ commute à l'action de $\mathfrak{k}_1$. Toutefois la forme bilinéaire symétrique B est en général dégénérée sur $\mathfrak{h}$. Désignons par $\boldsymbol{N}$ le noyau de $B_{|\mathfrak{h}}$. C'est un idéal de $\mathfrak{h}$ et il est dans $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ (car on a $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}$). On a de plus $[\boldsymbol{N}, \mathfrak{p}] \subset \boldsymbol{N} \cap \mathfrak{p} = 0$. Le quotient $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}/\boldsymbol{N}$ possède une involution et la forme B y est bien définie et non dégénérée. Par conséquent si $\mathfrak{k}_1$ est non nul, la dimension de $\mathfrak{h}_1$ est inférieure à n et on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence. Comme on a $S[\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}]^{\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}} = S[\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}_1]^{\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}_1}$, la conjecture polynomiale sera démontrée pour $\mathfrak{h}$ et par suite pour $\mathfrak{g}$.

On peut donc supposer sans perte de généralité dans ce second cas que l'on a $\mathfrak{g} = S \oplus \mathfrak{g}_u$ de σ-rang 1 avec S simple, σ-stable de σ-rang 1.

Considérons $Z = \mathfrak{g}_u^B$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_u$ pour la forme B. C'est un idéal de $\mathfrak{g}$ et on a $[Z, \mathfrak{g}_u] = 0$. Il y a encore deux sous-cas :

2.4.1. Premier sous-cas.

On a $Z + \mathfrak{g}_u \neq \mathfrak{g}_u$. Alors on a $S = Z$ car S est simple de même dimension que Z. Par suite, on a $[S, \mathfrak{g}_u] = 0$. On appliquera l'hypothèse de récurrence à chacun des facteurs, ou plus simplement on peut invoquer le théorème de Harish-Chandra pour les paires symétriques semi-simples et le théorème de Benoist pour les paires symétriques nilpotentes [1].

2.4.2. Deuxième sous-cas.

On a $Z + \mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_u$. Alors Z est un idéal unipotent, central dans $\mathfrak{g}_u$ et isomorphe comme S-module à S. Comme la forme B restreinte à $S \times Z$ est non dégénérée il est clair que Z s'identifie à S^* le dual de S et par suite à S comme S-module. La sous-algèbre $S \oplus Z$ est donc naturellement isomorphe à l'algèbre de Takiff de l'exemple 1, section 2.1, $S \oplus S \otimes T$. On écrira $S \otimes T$ pour Z.

Notons par q_B la forme quadratique sur $\mathfrak{p}$ associée à B, *i.e.* pour $x \in \mathfrak{p}$, on a

$$q_B(x) = B(x, x). \tag{3}$$

Notons par ω_B l'élément d'ordre deux de $\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ correspondant à q_B via l'identification, grâce à B, de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^*$.

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses du deuxième sous-cas, on a*

$$\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}} = \mathbb{C}[\omega_B] \otimes \mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]^{\mathfrak{k}} \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\big[\beta(\omega_B)\big] \otimes \beta\big(\mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]^{\mathfrak{k}}\big).$$

Preuve. — Soit $W = \mathfrak{g}_u \cap S^B$. Alors W est σ-stable, on a $W \cap Z = 0$. On a donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{S\oplus Z} \oplus \mathfrak{p}_W$ et comme on a $[\mathfrak{k}_Z, \mathfrak{p}_u] = 0$ on déduit les inclusions suivantes

$$\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}} \subset (\mathrm{S}[\mathfrak{p}_{S\oplus Z}] \otimes \mathrm{S}[\mathfrak{p}_W])^{\mathfrak{k}_Z} \subset \mathrm{S}[\mathfrak{p}_{S\oplus Z}]^{\mathfrak{k}_Z} \otimes \mathrm{S}[\mathfrak{p}_W]. \tag{4}$$

Par ailleurs l'espace $\mathrm{S}[\mathfrak{p}_{S\oplus Z}]^{\mathfrak{k}_Z} = \mathrm{S}[\mathfrak{p}_{S+S\otimes T}]^{\mathfrak{k}_{S\otimes T}}$ est facile à déterminer : il est engendré par $\mathfrak{p}_{S\otimes T}$ et un élément d'ordre deux noté ω. Sur cette paire symétrique de Takiff $S + S \otimes T$, on utilise la forme invariante et symétrique standard obtenue à partir de K forme de Killing de S, ce qui permet d'identifier les éléments symétriques avec des fonctions polynomiales. L'élément d'ordre deux est donné dans cette formulation par $\omega(x + y \otimes T) = K(x, y)$. On notera

$$\omega_T(x + y \otimes T) = K(x, x).$$

Voici quelques arguments concernant le calcul des invariants (voir [9], [17] pour d'autres résultats dans cette direction).

Soit $Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}_{S+S\otimes T}]$ une fonction polynomiale $\mathfrak{k}_{S\otimes T}$-invariante sur $\mathfrak{p}_{S+S\otimes T}$. On a pour tout x et y dans $\mathfrak{p}_S$

$$Q(x + y \otimes T) = Q\big(x + y \otimes T + [\mathfrak{k}_{S\otimes T}, x]\big). \tag{5}$$

Soit $x \in \mathfrak{p}_S$ tel que $K(x, x) \neq 0$, un tel élément est semi-simple régulier car le σ-rang de S est 1, on a donc pour tout $y \in \mathfrak{p}_S$

$$y - \frac{K(x, y)}{K(x, x)} x \in [\mathfrak{k}_S, x] \tag{6}$$

car S est de σ-rang 1, d'où

$$y \otimes T - \frac{\omega(x + y \otimes T)}{\omega_T(x + y \otimes T)} x \otimes T \in [\mathfrak{k}_S \otimes T, x] \tag{7}$$

et

$$Q(x + y \otimes T) = Q\Big(x + \frac{\omega(x + y \otimes T)}{\omega_T(x + y \otimes T)} x \otimes T\Big). \tag{8}$$

Prenons une décomposition de Q dans le produit tensoriel $\mathbb{C}[\mathfrak{p}_S] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}_{S\otimes T}]$, soit $Q = \sum_i Q_i R_i$ où les R_i sont homogènes. On note d_i leur degré. On a donc

$$Q(x + y \otimes T) = \sum_i Q_i(x) R_i(x \otimes T) \frac{\omega^{d_i}(x + y \otimes T)}{\omega_T^{d_i}(x)}. \tag{9}$$

Posons $R_i^T(x) = R_i(x \otimes T)$, avec $R_i^T \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}_S]$. On conclut que l'on a

$$Q(x + y \otimes T) = \sum_i \omega^{d_i}(x + y \otimes T) \frac{Q_i R_i^T}{\omega_T^{d_i}}(x). \tag{10}$$

En d'autres termes, au niveau de l'algèbre symétrique, on a montré que Q s'identifie à un élément de $\mathbb{C}[\omega] \otimes S(\mathfrak{p}_{S\otimes T})$ où $S(\mathfrak{p}_{S\otimes T})$ est le corps des fractions de $S[\mathfrak{p}_{S\otimes T}]$. Comme Q est polynomiale, on a nécessairement $Q \in \mathbb{C}[\omega] \otimes S[\mathfrak{p}_{S\otimes T}]$.

On a donc montré que l'on avait les inclusions suivantes

$$\mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}} \subset \big(\mathrm{S}[\mathfrak{p}_{S\oplus Z}] \otimes \mathrm{S}[\mathfrak{p}_W]\big)^{\mathfrak{k}_Z} \subset \mathrm{S}[\mathfrak{p}_{S\oplus Z}]^{\mathfrak{k}_Z} \otimes \mathrm{S}[\mathfrak{p}_W] \subset \mathbb{C}[\omega] \otimes S[\mathfrak{p}_u]. \tag{11}$$

Évidemment, ω est seulement $\mathfrak{k}_{S\oplus Z}$-invariant. Toutefois, on sait que ω_B est $\mathfrak{k}$-invariant. On écrit que ω_B est $\mathfrak{k}_Z$-invariant et par suite il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $\omega_B = \alpha\omega + \omega_u$ avec $\omega_u \in S[\mathfrak{p}_u]$. On a $\alpha \neq 0$, sinon on aurait pour $x \in S$ et $z \in Z$

$$B(x + z, x + z) = \omega_u(x^* + z^*) \tag{12}$$

avec $x^* \in \mathfrak{p}^*$ défini par $B(x, y) = \langle x^*, y\rangle$. Or le deuxième membre ne dépend pas de z, car on a $B(z, \mathfrak{p}_u) = 0$, ce qui n'est pas le cas du premier membre. On a donc $\alpha \neq 0$; sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha = 1$ et par suite $\omega - \omega_B \in S[\mathfrak{p}_u]$. Terminons la démonstration de la proposition.

Soit $Q \in \mathrm{S}[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et écrivons

$$Q = \sum_{n \leq M} \omega^n Q_n \tag{13}$$

avec $Q_n \in \mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]$. Comme on a $\omega - \omega_B \in S[\mathfrak{p}_u]$, on peut donc écrire aussi par substitution

$$Q = \sum_{n \leq M} \omega_B^n Q'_n \tag{14}$$

avec $Q'_n \in \mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]$. Les éléments de $\mathfrak{p}_S$ n'apparaissent qu'au travers des puissances de ω_B. Comme Q est ad($\mathfrak{k}$)-invariant, on conclut que Q'_M est ad($\mathfrak{k}$)-invariant. Une récurrence immédiate montre que tous les Q'_n sont en fait ad($\mathfrak{k}$)-invariants, ce qui termine la preuve de la proposition. L'égalité $\mathcal{A}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\beta(\omega_B)] \otimes \beta(\mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]^{\mathfrak{k}})$ se montre par récurrence sur le degré. $\square$

Pour terminer l'étude du deuxième sous-cas et par suite la démonstration du théorème 1, on va montrer que l'on a $\gamma(\beta(\omega_B)) = \omega_B$ ainsi que $\gamma(\beta(Q)) = Q$ pour tout $Q \in \mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]^{\mathfrak{k}}$. Toutefois, ceci ne voudra pas dire que β est un isomorphisme d'algèbres sur $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ comme le montre le calcul de la remarque 1 à la fin de cette partie.

Premier calcul explicite.

PROPOSITION 3. — *Avec les notations ci-dessus, on a* $\gamma(\beta(\omega_B)) = \omega_B$.

Preuve. — L'élément $\omega_B \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ est homogène d'ordre deux. On a donc $\omega_B^\sigma = \omega_B$, par suite on a $\beta(\omega_B)^\sigma = \beta(\omega_B)$. On a montré dans [24] en utilisant deux fois la formule de Lichnerowicz sur l'adjoint des opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques, que l'on avait pour $u \in \mathcal{A}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g})$

$$\Gamma(u^\sigma) = \Gamma(u)^\sigma \tag{15}$$

où u^σ désigne l'action naturelle de σ sur $U[\mathfrak{g}]$ et comme expliqué dans l'introduction (1), Γ désigne la projection de Harish-Chandra. Pour $u = \beta(\omega_B)$, on en déduit que $\beta_0^{-1}(\Gamma(u))$ est un polynôme d'ordre 2 pour la petite paire symétrique (*cf.* introduction) invariant par σ. Il ne contient donc pas de termes d'ordre 1. Comme par ailleurs le terme de degré 2 est la restriction de ω_B, il vient que $\beta_0^{-1}(\Gamma(u))$ est bien la restriction d'un polynôme $\mathfrak{k}$-invariant. On a donc $\gamma(\beta(\omega_B)) = \omega_B + C$ avec C une constante. Ceci suffit en ce qui concerne la conjecture polynomiale.

Toutefois il n'est pas très difficile de se convaincre que l'on a $C = 0$. On a montré que l'on avait $\omega_B - \omega \in S[\mathfrak{p}_u]$. Or dans le calcul de projection de Harish-Chandra, la constante C ne peut apparaître qu'à cause du décalage (*shift*). Ce décalage est sans effet sur les éléments unipotents, par conséquent le calcul de C ne dépend que de la contribution de ω ; en d'autres termes, il faut faire le calcul dans $S \oplus S \otimes T$ paire symétrique de Takiff de σ-rang 1, ce qui n'est pas difficile.

Par commodité pour le lecteur, on donne les détails du calcul. Sans perte de généralité, on peut supposer que le tore (dans l'introduction c'est le tore $\mathfrak{s}_f$) qui permet de définir la projection de Harish-Chandra est en fait un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}_S$ que l'on fixe. Le système de racines est donc inclus dans $\{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$. L'élément ω pour les algèbres de Takiff est construit de la façon suivante. On considère une base orthonormale de $\mathfrak{p}_S$ pour la forme de Killing K, disons $H, P_\alpha^i, P_{2\alpha}^j$, avec H dans le sous-espace de Cartan vérifiant $K(H,H) = 1$ et P_α^i une base de $\mathfrak{p} \cap (S_\alpha \oplus S_{-\alpha})$ vérifiant $K(P_\alpha^i, P_\alpha^i) = 1$ (idem pour $P_{2\alpha}^j$). On a alors

$$\omega = H(H \otimes T) + \sum_i P_\alpha^i (P_\alpha^i \otimes T) + \sum_j P_{2\alpha}^j (P_{2\alpha}^j \otimes T). \tag{16}$$

Prenons la symétrisation ; il vient

$$\begin{aligned} \beta(\omega_B) = H(H \otimes T) &+ \tfrac{1}{2} \sum_i P_\alpha^i (P_\alpha^i \otimes T) + (P_\alpha^i \otimes T) P_\alpha^i \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_j P_{2\alpha}^j (P_{2\alpha}^j \otimes T) + (P_{2\alpha}^j \otimes T) P_{2\alpha}^j. \end{aligned} \tag{17}$$

Écrivons $P_\alpha^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\alpha^i - (X_\alpha^i)^\sigma)$ avec $X_\alpha^i \in S_\alpha$. On a

$$[X_\alpha^\sigma, X_\alpha] = -K(X_\alpha^\sigma, X_\alpha) H_\alpha$$

avec H_α correspondant à la racine α via la forme de Killing. Comme on a $K(P_\alpha^i, P_\alpha^i) = 1$, il vient

$$K\big((X_\alpha^i)^\sigma, X_\alpha^i\big) = -1 \quad \text{et} \quad \big[(X_\alpha^i)^\sigma, X_\alpha^i\big] = H_\alpha.$$

Modulo $U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} + \mathfrak{n}^+ \cdot U$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \beta(\omega) \equiv H(H \otimes T) &+ \tfrac{1}{2} \sum_i -(X_\alpha^i)^\sigma (X_\alpha^i \otimes T) - \big((X_\alpha^i)^\sigma \otimes T)\big) X_\alpha^i \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_j \cdots. \end{aligned} \tag{18}$$

Par suite, on a

(19) $$\beta(\omega) \equiv H(H \otimes T) - \dim(S_\alpha)H_\alpha \otimes T - \dim(S_{2\alpha})H_{2\alpha} \otimes T.$$

Or on a $H_\alpha = \alpha(H)H$ et

$$\rho(H) = \tfrac{1}{2}\big(2\dim(S_\alpha)\alpha(H) + 2\dim(S_{2\alpha})2\alpha(H)\big),$$

d'où l'on tire

$$\beta(\omega) \equiv H(H \otimes T) - \rho(H)(H \otimes T).$$

Le décalage par ρ donne le résultat annoncé. $\square$

REMARQUE 1. — Prenons la paire symétrique de Takiff $\mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2) \otimes T$. On note H, X, Y la base de sl(2) donné par

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

On définit l'involution σ par

$$\sigma(H) = -H, \quad \sigma(X) = -Y.$$

Prenons les éléments

$$\omega = H(H \otimes T) + (X + Y)\big((X + Y) \otimes T\big),$$

$$\omega_T = (H \otimes T)^2 + \big((X + Y) \otimes T\big)^2.$$

Ils sont dans $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$. Alors, d'après la proposition 3, on a

(20) $$\gamma\big(\beta(\omega)\big) = \omega, \gamma\big(\beta(\omega_T)\big) = \omega_T,$$

mais un calcul direct montre que l'on a

(21) $$\gamma\big(\beta(\omega^2)\big) = \omega^2 - \tfrac{4}{3}\omega_T.$$

Cet exemple montre que β n'est pas un isomorphisme d'algèbres sur $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$. Toutefois le cas des paires symétriques de Takiff $S + S \otimes T$, avec S semi-simple de σ-rang arbitraire et plus généralement les paires symétriques de type $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T$ avec $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une paire symétrique quelconque, rentre dans le cadre des résultats de [23]. En effet, génériquement, il existe des polarisations σ-stable vérifiant la condition de Pukanszky. Par conséquent d'après [23], [24], on sait que $\beta \circ \partial_{J^{1/2}}$ est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$, qui est exactement l'inverse de γ. On a noté $J^{1/2}$ la racine carrée de la série formelle J sur $\mathfrak{p}$ définie par

$$J(X) = \det\nolimits_{\mathfrak{p}}\big(\sinh \mathrm{ad}(X)/\mathrm{ad}(X)\big).$$

On a noté $\partial_{J^{1/2}}$ l'opérateur différentiel d'ordre infini correspondant sur $S[\mathfrak{p}]$. On vérifiera sans peine sur l'exemple que l'on a bien

(22) $$\gamma\big(\beta(\partial_{J^{1/2}}\omega^2)\big) = \gamma\big(\beta(\omega^2 + \tfrac{4}{3}\omega_T)\big) = \omega^2.$$

Deuxième calcul explicite.

On termine l'étude du deuxième sous-cas.

PROPOSITION 4. — *Pour* $Q \in \mathrm{S}[\mathfrak{p}_u]^{\mathfrak{k}}$, *on a* $\gamma(\beta(Q)) = Q$.

Preuve. — C'est un cas particulier du théorème 3 à la fin de cet article. $\square$

Tous les cas ont été examinés, le théorème 1 est démontré $\square$.

3. Partie radiale des opérateurs différentiels invariants et application aux paires symétriques résolubles

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *une paire symétrique résoluble, alors l'homomorphisme de Harish-Chandra coïncide avec l'isomorphisme de Rouvière.*

Comme nous l'avons déjà expliqué dans [25], il suffit de démontrer ce théorème dans le cas des paires symétriques algébrique sur $\mathbb{C}$. En fait ce théorème est vrai dans pour toute paire symétrique sur un corps commutatif de caractéristique nulle (il suffit d'utiliser le théorème d'Ado et le principe de Lefschetz).

Soit J la série formelle sur $\mathfrak{p}$ définie par

$$J(X) = \det_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{\sinh(\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}\Big), \tag{23}$$

$J^{1/2}$ sa racine carrée et $\partial_{J^{1/2}}$ l'opérateur différentiel d'ordre infini sur $S[\mathfrak{p}]$ associé. Dans [18], Rouvière montre, pour les paires symétriques *résolubles*, que l'application de $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ sur $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ définie par

$$Q \longmapsto \beta(\partial_{J^{1/2}} Q)$$

est un isomorphisme d'algèbres. Le but de cette partie est de montrer que notre définition de l'homomorphisme de Harish-Chandra coïncide avec l'isomorphisme de Rouvière. La méthode de Rouvière est inspirée de la conjecture de Kashiwara-Vergne [14] et utilise certains résultats sur la fonction $e_\epsilon(x, y)$. Nous renvoyons le lecteur aux références [19], [20] pour les définitions et les propriétés fondamentales. Toutefois nous utiliserons très peu de choses sur la fonction e_ϵ et c'est pourquoi nous n'insisterons pas sur sa définition.

En général, dans le cas résoluble, il n'existe pas de polarisation σ-stable pour les formes linéaires dans $\mathfrak{p}^*$. La méthode employée par Benoist [1] dans le cas nilpotent ne se généralise pas telle quelle.

Notre méthode s'inspire du cas semi-simple, ceci donne un exemple d'application des techniques du semi-simple au cas résoluble. L'idée est de montrer que les parties K-radiales des opérateurs différentiels invariants coïncident à « l'infini » avec les parties N-radiales qui définissent par construction l'homomorphisme de Harish-Chandra et d'utiliser les résultats de Rouvière sur l'écriture des opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique résoluble en coordonnées exponentielles.

3.1. Parties radiales des opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques généraux.

Dans cette section, ainsi que dans les sections 3.2 et 3.3, le contexte est celui des espaces symétriques réels. Nous sommes amenés à considérer des notions de géométrie différentielle qui trouvent un cadre plus naturel dans le cas réel. Les notions que nous avons introduites en introduction se généralisent sans peine au cas réel ; l'existence de décomposition triangulaire est assurée dès que les tores utilisés sont déployés.

Soit donc G un groupe de Lie sur $\mathbb{R}$ muni d'une involution σ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{p}$ un tore déployé, c'est-à-dire un sous-espace abélien tel que les endomorphismes $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(S)$ (pour $S \in \mathfrak{s}$) soient semi-simples sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans toute cette section 3.1, ainsi que dans les sections 3.2 et 3.3, que l'on dispose d'un tel tore et qu'il n'est pas central dans $\mathfrak{g}$.

3.1.1. Notations et matériel de base.

Par analogie, on note $\mathfrak{g}_0$ le centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$, c'est une sous-paire symétrique de $\mathfrak{g}$. On note

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$$

sa σ-décomposition. On note $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{s})$ l'ensemble des racines non nulles de la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action de $\mathfrak{s}$, cet ensemble a les mêmes propriétés que dans l'introduction. Désignons par $\mathcal{C}$ un choix de chambre au sens de Bourbaki pour la collection des hyperplans dans $\mathfrak{s}$ associés aux formes linéaires $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{s})$. On note par Δ^+ les racines positives associées à cette chambre $\mathcal{C}$. On a $\Delta^+ \cap -\Delta^+ = \emptyset$. On note par $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace propre associé à la racine α. On en déduit les décompositions d'Iwasawa et triangulaire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}^+ \tag{24}$$

avec

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in -\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{25}$$

Les sous-algèbres $\mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{n}^-$ dépendent de la chambre $\mathcal{C}$; on notera $\mathfrak{n}^+_{\mathcal{C}}, \mathfrak{n}^-_{\mathcal{C}}$ lorqu'on voudra rappeler cette dépendance (ou s'il y a confusion possible). Les notations $U[\mathfrak{g}], U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}, \delta$, *etc.* désignent les mêmes objets que dans l'introduction mais sur $\mathbb{R}$.

Soit $u \in U[\mathfrak{g}]$. Définissons $u_0 \in U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta}$ par la condition

$$u - u_0 \in \mathfrak{n}^-_{\mathcal{C}} \cdot U[\mathfrak{g}] + U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta} \tag{26}$$

(le lecteur notera qu'il s'agit du caractère $-\delta$ et non pas du caractère $-\delta_0$ et que l'on a pris la sous-algèbre $\mathfrak{n}^-$). Le tore $\mathfrak{s}$ n'étant pas nécessairement un tore du genre $\mathfrak{s}_f$ de l'introduction, il convient ici de préciser que l'élement $u_0^{\rho_{-\mathcal{C}}}$ est bien indépendant du choix de la chambre $\mathcal{C}$ lorsqu'on a $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$. On a noté $\rho_{-\mathcal{C}}$ le caractère de $\mathfrak{g}_0$ défini par

$$\rho_{-\mathcal{C}}(\cdot) = \frac{1}{2} tr_{\mathfrak{n}^-_{\mathcal{C}}} \operatorname{ad}(\cdot)$$

et $u_0^{\rho_{-\mathcal{C}}}$ le décalage de u_0 par le caractère $\rho_{-\mathcal{C}}$. On a

$$-\delta + \rho_{-\mathcal{C}} = -\delta_0\,;$$

on a donc $u_0^{\rho_{-\mathcal{C}}} \in U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$. Pour montrer cette indépendance, il suffit de reprendre la démonstration de [24, chap. 2] pour constater que seul intervient le fait que $\mathfrak{s}$ est un tore déployé dans $\mathfrak{p}$. La condition « être un tore $\mathfrak{s}_f$ » concerne uniquement l'injectivité de l'homomorphisme $u \mapsto u_0^{\rho_{-\mathcal{C}}}$. En définitive, on a une projection de $U[\mathfrak{g}]/U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ dans $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$ définie par

$$u \longmapsto u_0^{\rho_{-\mathcal{C}}} \tag{27}$$

dont la restriction à $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ est un homomorphisme dans $U[\mathfrak{g}_0]^{\mathfrak{k}_0}/U[\mathfrak{g}_0]^{\mathfrak{k}_0} \cap U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$ indépendant du choix de la chambre $\mathcal{C}$ (mais il n'est pas forcément injectif).

Notons par K la composante connexe de G^σ (cette lettre K ne désigne pas en général un groupe compact) et notons N^+, N^- les sous-groupes unipotents (connexes) correspondants à $\mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{n}^-$. Notons $G_0 = Z_G(\mathfrak{s})$ le centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans G; il a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ (on ne confondra pas la notation G_0 avec la composante connexe de G qui contient l'origine), et notons $K_0 = K \cap G_0$. On a (*cf.* [24]), $N^+G_0 \cap K = K_0$ et N^+G_0/K_0 est un ouvert de G/K .

Par commodité pour le lecteur qui n'est pas très familier avec les β-densités, nous faisons quelques rappels de géométrie différentielle. Pour X variété différentiable (*i.e.* de classe $\mathcal{C}^\infty$), on note $T(X)$ le fibré tangent et

$\mathcal{C}^\infty(X)$ les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$. On note, pour $\beta \in \mathbb{C}$, par $|\Lambda|^\beta(X)$ le fibré en droites complexes des β-densités sur X (*cf.* [10, p. 53]), c'est-à-dire le fibré dont la fibre en $x \in X$ (les β-densités en x) est définie par

$$(28)\quad |\Lambda|^\beta(X)_x = \big\{s : \Lambda^{\max}T(X)_x - \{0\} \mapsto \mathbb{C},\ \forall\lambda \in \mathbb{R} - \{0\},\\ \forall\omega \in \Lambda^{\dim X}T(X)_x - \{0\},\ s(\lambda\omega) = |\lambda|^\beta s(\omega)\big\}.$$

Lorsqu'on a $\beta = 1$, on parle du *fibré des densités*; lorsqu'on a $\beta = \frac{1}{2}$, on parle de *demi-densités*. Les sections (continues, différentiables, ...) du fibré des β-densités sont appelés simplement *β-densités* (continues, différentiables, ...) sur X. On peut intégrer sur une variété différentiable les densités continues à support compact (*cf.* [10]) ; si μ est une densité continue à support compact sur X, on note simplement cette intégrale

$$(29)\qquad \int_X \mu.$$

Lorsque E est un fibré différentiable au-dessus de X, on note E^* son fibré dual et on appelle *β-densité de E* une section du fibré $|\Lambda|^\beta(X) \otimes E$. On note par $\mathcal{C}_c^\infty(E)$ l'espace des sections différentiables de E à support compact. C'est un espace vectoriel topologique, localement convexe, limite inductive d'espaces de Fréchet. On note par $\mathcal{C}^\infty(E)$ l'espace des sections différentiables de E ; c'est un espace de Fréchet. On appelle *section généralisée* du fibré E un élément du dual topologique de $\mathcal{C}_c^\infty(|\Lambda|(X) \otimes E^*)$. On a une injection

$$(30)\qquad \mathcal{C}^\infty(E) \hookrightarrow \mathcal{C}^{-\infty}(E)$$

définie pour $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$ et $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(|\Lambda|(X) \otimes E^*)$ par

$$(31)\qquad \langle s, \mu\rangle = \int_X \big\langle s(x), \mu(x)\big\rangle$$

où $\langle s(x), \mu(x)\rangle$ désigne la contraction naturelle de $|\Lambda|(X)_x \otimes E_x \otimes E_x^*$ dans $|\Lambda|(X)_x$. En particulier on a l'injection

$$\mathcal{C}^\infty\big(|\Lambda|^{1/2}(X)\big) \hookrightarrow \mathcal{C}^{-\infty}\big(|\Lambda|^{1/2}(X)\big),$$

i.e. toute demi-densité différentiable sur X est une demi-densité généralisée (voir [10, p. 303] pour les détails).

Soit H un sous-groupe de Lie fermé de G et soit χ un caractère de H. On note E_χ ou $E_\chi(G/H)$ le fibré en droites $G \times_H \mathbb{C}_\chi$. Par construction du fibré, on a pour $g \in G, h \in H, \xi \in \mathbb{C}$,

$$\big(gh, \chi(h)^{-1}\xi\big) \equiv (g, \xi).$$

Les sections de E_χ s'identifient aux fonctions ϕ sur G telles que l'on ait $\phi(gh) = \chi(h)^{-1}\phi(g)$ pour $g \in G$ et $h \in H$. *Dans cet article on ne fera pas de distinction entre la fonction ϕ et la section du fibré E_χ qui lui est associée.*

On note par Δ_G la fonction module du groupe G définie pour $g \in G$ par

$$\Delta_G(g) = \big|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g)\big|^{-1} \tag{32}$$

et pour H un sous-groupe de Lie fermé de G, on définit pour $h \in H$

$$\Delta_{G,H}(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h) = \big|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)\big|. \tag{33}$$

On notera par d_G (resp. d_H) une mesure de Haar invariante à gauche sur G (resp. sur H). Ces choix déterminent une densité sur G (resp. sur H) encore notée d_G (resp. d_H). Dans cet article $d_G, d_H, \ldots$ désigneront toujours des densités.

Introduisons maintenant $d_{G/H}$. C'est une densité du fibré $E_{\Delta_{G,H}}$ invariante à gauche. Pour $g \in G$, on définit une densité au point gH notée $d_{G/H}(g)$, *i.e.* on a $d_{G/H}(g) \in |\Lambda|(G/H)_{gH}$, par la formule

$$d_{G/H}(g)(g_* \operatorname{pr}_{\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})} \omega) = \frac{d_G(1)(\omega \wedge \nu)}{d_H(1)(\nu)} \tag{34}$$

où $\omega \in \Lambda^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}}(\mathfrak{g}), \nu \in \Lambda^{\dim \mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ avec $\omega \wedge \nu \neq 0$ et pr désigne la projection de $\Lambda(\mathfrak{g})$ sur $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. On a d'après la formule (34) pour $g \in G$ et $h \in H$,

$$d_{G/H}(gh) = \Delta_{G,H}^{-1}(h) d_{G/H}(g)\,; \tag{35}$$

ainsi $d_{G/H}$ est une section jamais nulle du fibré $|\Lambda|(G/H) \otimes E_{\Delta_{G,H}}$ et elle est invariante par construction.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, la fonction

$$\phi : g \longmapsto \int_H \varphi(gh)\Delta_{G,H}^{-1}(h) d_H(h)$$

est une section du fibré $E_{\Delta_{G,H}^{-1}}$. La contraction $\langle\phi, d_{G/H}\rangle$, notée simplement $\phi d_{G/H}$, est une densité sur G/H. On a la formule

$$\text{(36)}\qquad \begin{aligned}\int_{G/H}\phi d_{G/H} &= \int_{G/H}\Big(\int_H \varphi(gh)\Delta_{G,H}^{-1}(h)d_H(h)\Big)d_{G/H}(g)\\ &= \int_G \varphi(g)d_G(g).\end{aligned}$$

Introduisons maintenant $d_{G/H}^{1/2}$; c'est une section de $|\Lambda|^{1/2}(G/H)\otimes E_{\Delta_{G,H}^{1/2}}$. Comme d_G est une densité positive, on peut définir $d_G^{1/2}$ (resp. $d_H^{1/2}$) qui sera alors une demi-densité positive. Alors $d_{G/H}^{1/2}$ est définie par une formule analogue à (34), c'est-à-dire pour $g\in G$, $d_{G/H}^{1/2}(g)$ est une demi-densité au point gH définie par la formule (mêmes notations que (34))

$$\text{(37)}\qquad d_{G/H}^{1/2}(g)(g_*\operatorname{pr}_{\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}\omega) = \frac{d_G^{1/2}(1)(\omega\wedge\nu)}{d_H^{1/2}(1)(\nu)}.$$

Cette formule (37) justifie notre notation. On a d'après la formule (37) pour $g\in G$ et $h\in H$,

$$d_{G/H}^{1/2}(gh) = \Delta_{G,H}^{-1/2}(h)d_{G/H}^{1/2}(g)\,;$$

ainsi $d_{G/H}^{1/2}$ est une section jamais nulle du fibré $|\Lambda|^{1/2}(G/H)\otimes E_{\Delta_{G,H}^{1/2}}$ et elle est invariante. Comme on a canoniquement $E_{\Delta_{G,H}^{1/2}}\otimes E_{\Delta_{G,H}^{1/2}} = E_{\Delta_{G,H}}$, on en déduit la formule $d_{G/H}^{1/2}d_{G/H}^{1/2} = d_{G/H}$, formule évidente par ailleurs d'après (37).

On peut maintenant, grâce à $d_{G/H}^{1/2}$, écrire pour μ demi-densité à support compact sur G/H, $\mu = \phi d_{G/H}^{1/2}$ avec $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(E_{\Delta_{G,H}^{-1/2}})$ (on ne note plus la contraction pour alléger les notations déjà assez chargées). Plus généralement, pour $\tilde\theta$ une demi-densité généralisée, on peut écrire $\tilde\theta = \theta d_{G/H}^{1/2}$ avec $\theta\in\mathcal{C}^{-\infty}(E_{\Delta_{G,H}^{-1/2}})$. Alors $\phi d_{G/H}$ est une densité du fibré $E_{\Delta_{G,H}^{1/2}} = (E_{\Delta_{G,H}^{-1/2}})^*$ et on a alors la formule

$$\text{(38)}\qquad \langle\tilde\theta,\mu\rangle = \big\langle\theta,\phi(x)d_{G/H}\big\rangle = \int_{G/H}\theta(x)\phi(x)d_{G/H}(x).$$

La section généralisée $\theta \in \mathcal{C}^{-\infty}(E_{\Delta_{G,H}^{-1/2}})$ s'identifie à une fonction généralisée sur G vérifiant pour $g \in G$ et $h \in H$,

$$\theta(gh) = \Delta_{G,H}^{1/2}(h)\theta(g).$$

On ne fera plus de distinction entre ces présentations.

On identifiera les opérateurs différentiels sur les demi-densités avec les opérateurs différentiels sur les sections du fibré $E_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$. On étend l'action des opérateurs différentiels aux demi-densités généralisées. Pour

$$u \in \big(U[\mathfrak{g}]/U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}\big)^{\mathfrak{k}} = U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta},$$

on notera par D_u l'opérateur différentiel G-invariant sur les demi-densités naturellement associé [11, p. 280]. Tout opérateur différentiel du fibré $E_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$ qui est G-invariant est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des opérateurs D_u. D'après un résultat fondamental de Lichnerowicz [15] généralisé par Duflo [7], l'adjoint formel de D_u est D_{u^σ}, ce qui explique pourquoi cette algèbre est commutative et pourquoi on se doit de travailler sur les demi-densités au lieu des fonctions. Pour $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(|\Lambda|^{1/2}(G/K))$, avec $\mu = \phi d_{G/K}^{1/2}$ on a, par définition,

$$D_u(\mu) = D_u(\phi) d_{G/K}^{1/2}\,;$$

par suite, on a sur la demi-densité généralisée $\tilde{\theta} = \theta d_{G/K}^{1/2}$

$$\begin{aligned} \langle D_u\tilde{\theta}, \mu\rangle = \langle \tilde{\theta}, D_{u^\sigma}\mu\rangle &= \int_{G/K} \theta(x) D_{u^\sigma}(\phi)(x) d_{G/K}(x) \\ &= \int_{G/K} D_u(\theta)(x)\phi(x) d_{G/K}(x). \end{aligned} \tag{39}$$

D'une manière générale on ajoute, comme le lecteur peut s'en rendre compte, 0 en indice ou en exposant pour les notations concernant les petits espaces symétriques G_0/K_0. Par exemple, pour $v_0 \in (U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0})^{\mathfrak{k}_0}$, on note $D_{v_0}^0$ l'opérateur différentiel invariant sur les demi-densités de G_0/K_0 qui est associé à v_0. On notera par p la projection naturelle de G sur G/K (et par conséquent par p_0 la projection naturelle de G_0 sur G_0/K_0).

3.1.2. Géométrie locale des espaces symétriques.

Soit Φ l'application naturelle définie par

$$\begin{aligned} \Phi : K \times G_0/K_0 &\longrightarrow G/K, \\ (k, xK_0) &\longmapsto kxK. \end{aligned} \tag{40}$$

On note pour simplifier pour $g \in G$, $g^\sigma = \sigma(g)$ et $g^{-\sigma} = \sigma(g)^{-1}$. La sous-algèbre $\mathfrak{n}^+$ est définie par (25) et dépend d'un choix de chambre.

LEMME 2. — *L'application Φ est une submersion en (k, xK_0) si et seulement si on a*

$$\det_{\mathfrak{n}^+}\Big(\frac{\operatorname{Ad} x^{-1} - \operatorname{Ad} x^{-\sigma}}{2}\Big) \neq 0.$$

Preuve. — L'action diagonale de K_0 dans $K \times G_0/K_0$ définie pour $k \in K, k_0 \in K_0$ et $x \in G_0$ par $(k, xK_0) \cdot k_0 = (kk_0, k_0^{-1}xK_0)$ est libre, ce qui permet de définir l'espace quotient $K \times_{K_0} G_0/K_0$. L'application Φ se factorise à travers cette variété quotient qui a même dimension que G/K. Maintenant Φ est une submersion en (k, xK_0) si et seulement si c'est une submersion en $(1, xK_0)$ et par suite si la différentielle de Φ est surjective. Via les identifications usuelles des espaces tangents pour les espaces symétriques, on trouve que $d\Phi$ en $(1, xK_0)$ s'identifie à l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} \times \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0 &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \\ (X, Y) &\longmapsto \operatorname{Ad}(x^{-1})X + Y. \end{aligned}$$

La sous-algèbre $\mathfrak{k}_0$ s'identifie, par l'action diagonale tangente de K_0, au sous-espace

$$\big\{(Y, -\operatorname{Ad}(x^{-1})Y), Y \in \mathfrak{k}_0\big\}$$

de $\mathfrak{k} \times \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$, sous-espace qui est évidemment inclus dans le noyau de $d\Phi$. La condition de submersion est équivalente à $\operatorname{Ad}(x^{-1}) \cdot \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. On vérifie que cette condition s'écrit

$$\det_{\mathfrak{n}^+}\Big(\frac{\operatorname{Ad} x^{-1} - \operatorname{Ad} x^{-\sigma}}{2}\Big) \neq 0. \quad \Box \tag{41}$$

Soit j la fonction définie sur G_0 par

$$j(x) = \Big|\det_{\mathfrak{n}^+}\Big(\frac{\operatorname{Ad} x^{-1} - \operatorname{Ad} x^{-\sigma}}{2}\Big)\Big|. \tag{42}$$

Alors $j(x)$ est indépendant du choix de $\mathfrak{n}^+$, car on a

$$j(x)^2 = \Big|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0}\Big(\frac{\operatorname{Ad} x^{-1} - \operatorname{Ad} x^{-\sigma}}{2}\Big)\Big|.$$

Soit $\mathcal{U}$ le sous-ensemble de G_0/K_0 défini par

$$\mathcal{U} = \big\{xK_0 \in G_0/K_0\,;\ j(x) \neq 0\big\}. \tag{43}$$

C'est un ouvert de G_0/K_0 qui ne dépend pas du choix de $\mathfrak{n}^+$ et Φ est une submersion en tout point de $K \times \mathcal{U}$. Cet ouvert $\mathcal{U}$ est σ-stable, K_0-invariant à gauche et contient les $\exp(S)$ avec S un élément du tore $\mathfrak{s}$ tel que $\alpha(S) \neq 0$ pour toutes racines α (n'oublions pas qu'on a fait l'hypothèse que $\mathfrak{s}$ n'était pas central dans $\mathfrak{g}$). Notons $\widetilde{\mathcal{U}} = p_0^{-1}(\mathcal{U})$; c'est un ouvert de G_0.

On fixe une chambre $\mathcal{C}$ et par conséquent le système Δ^+. Notons par $\mathfrak{l}$ le sous-espace $[\mathfrak{s}, \mathfrak{p}]$; il est stable pour l'action de K_0 et on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{l}$.

Soit $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Comme on a

$$\mathrm{Ad}(x^{-1})\mathfrak{l} + \mathfrak{l} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{n}^+,$$

on peut écrire pour $N^- \in \mathfrak{n}^-$,

$$N^- = \mathrm{Ad}(x^{-1})L_1 + L_2.$$

Écrivons $L_1 = N_1 + N_1^\sigma$ and $L_2 = N_2 + N_2^\sigma$, avec $N_i \in \mathfrak{n}^-$. Alors il vient l'égalité

$$N^- = (\mathrm{Ad}\, x^{-1} - \mathrm{Ad}\, x^{-\sigma}) \cdot N_1 ;$$

par suite on déduit les identités suivantes

$$\begin{aligned} N_1 &= (\mathrm{Ad}\, x^{-1} - \mathrm{Ad}\, x^{-\sigma})^{-1} \cdot N^- \\ &= (1 - \mathrm{Ad}\, x\, \mathrm{Ad}\, x^{-\sigma})^{-1}\, \mathrm{Ad}\, x \cdot N^-, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= -\mathrm{Ad}\, x^{-\sigma}(\mathrm{Ad}\, x^{-1} - \mathrm{Ad}\, x^{-\sigma})^{-1} \cdot N^- \\ &= -(1 - \mathrm{Ad}\, x^{-\sigma}\, \mathrm{Ad}\, x)^{-1}\, \mathrm{Ad}\, x^{-\sigma}\, \mathrm{Ad}\, x \cdot N^-. \end{aligned} \tag{45}$$

Écrivons pour $u \in U[\mathfrak{g}]$

$$u \equiv u_0 + \sum N_i^- u_i \pmod{U[\mathfrak{g}] \cdot k^{-\delta}} \tag{46}$$

avec u_0 comme dans la formule (26) ; alors on a aussi

$$N_i^- u_i = \big(\mathrm{Ad}(x^{-1})L_1^i\big)u_i + L_2^i u_i = \big(\mathrm{Ad}(x^{-1})L_1^i\big)u_i + [L_2^i, u_i] + u_i L_2^i \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &\equiv [L_2^i, u_i] + u_i\big(\delta(L_2^i) - \delta(L_1^i)\big) \\ &\qquad + \big(\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot (L_1^i + \delta(L_1^i))\big)u_i \pmod{U[\mathfrak{g}] \cdot k^{-\delta}}. \end{aligned} \tag{48}$$

On note $\mathfrak{l}^\delta$ le sous-espace de $U[\mathfrak{g}]$ défini par $\{L + \delta(L) ;\ L \in \mathfrak{l}\}$. En invoquant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et en faisant une récurrence sur l'ordre de u, on obtient un unique élément $i_x(u) \in U_0/U_0 \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta}$ tel que l'on ait (le lecteur notera le caractère $-\delta$)

$$u - 1 \otimes i_x(u) \in \beta\big(S[\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot \mathfrak{l}^\delta]\, \mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot \mathfrak{l}^\delta\big) \otimes U[\mathfrak{g}_0] + U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}. \tag{49}$$

Remarque. — La raison pour laquelle on prend le soin de considérer $\mathfrak{l}^\delta$ apparaîtra au paragraphe 3.1.4.

Maintenant, lorsqu'on a $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$ et à cause de l'unicité de $i_x(u)$, on a, pour $m \in M' = N_K(\mathfrak{s})$ le normalisateur de $\mathfrak{s}$ dans K,

$$i_{mx}(u) = i_x(u), \tag{50}$$

$$i_{xm}(u) = \mathrm{Ad}(m)^{-1} \cdot i_x(u). \tag{51}$$

Notons symboliquement

$$S \to \infty$$

avec $S \in \mathfrak{s}$, pour signifier que l'on a $\alpha(S) \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$ uniformément pour S dans un cône à base compacte inclus dans la chambre $\mathcal{C}$.

Pour $X \in \mathfrak{g}_0$, notons R^0_X le champ de vecteurs sur G_0 invariant à gauche associé, *i.e.* pour ϕ fonction sur G_0 et $g \in G_0$ on a

$$R^0_X\phi(g) = \phi(g, X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\phi\big(g\exp(\epsilon X)\big)_{|\epsilon=0}. \tag{52}$$

On étend R^0 à toute l'algèbre enveloppante $U[\mathfrak{g}_0]$.

On rappelle que u_0 est défini par la formule (26) ; cet élément dépend du choix de la chambre $\mathcal{C}$ et que l'on a $\widetilde{\mathcal{U}} = p_0^{-1}(\mathcal{U})$ (43).

LEMME 3. — *Pour $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$ et $u \in U[\mathfrak{g}]$, on peut écrire*

$$i_x(u) = u_0 + \sum_i g_i(x)w_i$$

avec (w_i) base de $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta}$ et g_i fonctions régulières sur $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant pour tout $v \in U[\mathfrak{g}_0]$,

$$\lim_{S\to\infty}(R^0_v g_i)(y\exp S) = 0$$

uniformément pour y dans un compact de G_0.

Preuve. — Par construction, on peut écrire

$$i_x(u) = u_0 + \sum_i g_i(x)w_i$$

(somme finie) avec (w_i) base de $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta}$ et g_i fonction régulière. Seule l'assertion sur le comportement des dérivées de g_i est à montrer. Montrons par récurrence sur l'ordre de u que l'on peut écrire

$$u = u_0 + \sum_i g_i(x)w_i + \sum_{i,j} g_{i,j}(x)\beta(\mathrm{Ad}\,x^{-1}v_j)w_i \pmod{U\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}} \tag{53}$$

avec (v_j) base de $S[\mathfrak{l}^\delta]\mathfrak{l}^\delta$ et g_i, $g_{i,j}$ fonctions régulières sur $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant aussi les estimées annoncées. Remarquons que ces fonctions forment une algèbre.

Dans la formule (48), il y a trois termes.

Les deux premiers termes se traitent de la façon suivante. En invoquant l'hypothèse de récurrence pour les termes u_i et $[L_2^i, u_i]$ de (48), il suffit de montrer que les termes L_1 et L_2 de (48) peuvent s'écrire sous la forme $\sum h_i(x)L_i$ avec L_i base de $\mathfrak{l}$ et h_i fonction régulière sur $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant $\lim_{S\to\infty}(R_v^0 h_i)(y\exp S) = 0$ (uniformément pour y dans un compact de G_0). Comme on a $L_1 = N_1 + N_1^\sigma$ il suffit de le faire pour N_1 (on fera de même avec L_2). Or d'après (44), on a

$$N_1(x) = (1 - \operatorname{Ad} x \operatorname{Ad} x^{-\sigma})^{-1} \operatorname{Ad} x \cdot N^-,$$

que l'on peut écrire $\sum h_i(x)N_i$ avec N_i une base de $\mathfrak{n}^-$ adaptée à la décomposition en espaces propres. Alors pour y dans un compact C de G_0 et S assez grand on a $y\exp(S) \in \widetilde{\mathcal{U}}$ et

$$N_1(y\exp S) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(2n+1)\operatorname{ad}(S)}\big(\operatorname{Ad}(yy^{-\sigma})\big)^n \operatorname{Ad} y \cdot N^-,$$

la convergence étant uniforme. En effet on a, pour tout n,

$$\big\|(\operatorname{Ad}(yy^{-\sigma}))^n \operatorname{Ad} y\big\| \le M^n$$

avec M constante dépendant du compact C. Ceci assure la convergence uniforme de la série et $\lim_{S\to\infty} h_i(y\exp S) = 0$ (uniformément en $y \in C$).

Pour $v \in U[\mathfrak{g}_0]$ la matrice $R_v^0[(\operatorname{Ad}(yy^{-\sigma}))^n \operatorname{Ad} y]$ vérifiera le même type de majoration (on applique R_v^0 à chacun des cœfficients de la matrice correspondant à $(\operatorname{Ad}(yy^{-\sigma}))^n \operatorname{Ad} y)$; on en déduit alors le résultat annoncé. Ceci termine l'argument pour les deux premiers termes de (48).

Le troisième terme de (48) demande plus d'attention. On doit décomposer l'expression suivante

$$\big\{\operatorname{Ad} x^{-1} \cdot (L_1^i(x) + \delta(L_1^i(x))\big\}u_i. \tag{54}$$

On écrit, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour u_i et en mettant l'indice i en exposant pour la lisibilité de cette formule,

$$u_i = u_0^i + \sum_n g_n^i(x)w_n + \sum_{n,m} g_{n,m}^i(x)\beta(\operatorname{Ad} x^{-1}v_m)w_n. \tag{55}$$

On a montré que $L_1^i(x)$ s'écrit sous la forme $\sum_j h_j^i(x)L_j$ avec h_j^i fonction vérifiant les estimées et L_j une base de $\mathfrak{l}$. Il faut donc seulement voir que dans le produit (54) le terme

$$\operatorname{Ad} x^{-1} \cdot \big(L_j + \delta(L_j)\big)\beta(\operatorname{Ad} x^{-1} \cdot v_m)w_n \tag{56}$$

se décompose comme il faut (pour les autres c'est évident). On décompose $(L_j + \delta(L_j))\beta(v_m)$ dans $U[\mathfrak{k}]$, il vient

$$(L_j + \delta(L_j))\beta(v_m) = \sum_{a,b} c_{a,b}\beta(v_a)t_b + \sum_b c_b t_b \tag{57}$$

avec $c_b, c_{a,b}$ des constantes et (t_b) une base de $U[\mathfrak{k}_0]$. On a donc dans $U[\mathfrak{g}]$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot (L_j + \delta(L_j))\beta(\mathrm{Ad}\, x^{-1} v_m) \\ = \sum_{a,b} c_{a,b}\beta(\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot v_a)(\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot t_b) + \sum_b c_b \,\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot t_b.\end{aligned} \tag{58}$$

Enfin on décompose $(\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot t_b)$ dans la base (w_i) de $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta}$, il vient

$$(\mathrm{Ad}\, x^{-1} \cdot t_b) = \sum_i \alpha_i(x) w_i \pmod{U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}} \tag{59}$$

avec $\alpha_i(x)$ des fonctions régulières sur $\mathcal{U}$. On a $\alpha_i(x \exp S) = \alpha_i(x)$; par conséquent ces termes ne perturbent pas les conclusions puisqu'on va les multiplier par $h_j^i(x) g_{n,m}(x)$. $\square$

REMARQUE. — Les détails de la démonstration montrent qu'*a priori*, même le troisième terme de (48) contribue dans le calcul de $i_x(u)$.

REMARQUE. — L'interprétation de cet élément $i_x(u)$, pour $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$ est claire quand on fait agir l'opérateur D_u sur des fonctions régulières bi-K semi-invariantes. Toutefois il n'existe pas forcément de telles fonctions dans ce cadre très général, ce qui nous amène aux fonctions généralisées. Il convient d'être plus prudent en ce qui concerne ces dernières. L'objet du paragraphe 3.1.4 sera de montrer que cet élément correspond encore dans ce contexte à la partie K-radiale relativement au petit espace symétrique G_0/K_0.

3.1.3. Image inverse des demi-densités.

On a vu que l'application Φ définie par (40) se factorise à travers la variété $K \times_{K_0} G_0/K_0$ et que c'est une submersion sur l'ouvert $K \times_{K_0} \mathcal{U}$ (43) et par suite un isomorphisme local. En d'autres termes pour $xK_0 \in \mathcal{U}$ ($x \in G_0$) il existe un voisinage V_x de $1 \in K$ et un voisinage $\mathcal{U}_x$ de xK_0 dans $\mathcal{U}$, tels que les fibres de l'application Φ sur l'ouvert

$$\bigcup_{k_0 \in K_0} V_x k_0 \times k_0^{-1} \mathcal{U}_x \tag{60}$$

sont exactement les K_0 orbites pour l'action diagonale. Pour simplifier les notations on notera $V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x$ l'image de cet ouvert dans $K \times_{K_0} G_0/K_0$.

Fixons des densités de Haar d_{G_0} (resp. d_{K_0}) sur G_0 (resp. K_0). Définissons $d_K \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}$ sur $K \times_{K_0} G_0/K_0$. C'est une densité d'un fibré au-dessus de $K \times_{K_0} G_0/K_0$. Les sections de ce fibré s'identifient aux fonctions ϕ sur $K \times G_0$ vérifiant pour $t \in K, k_1 \in K_0, k_2 \in K_0$ et $g \in G_0$

$$\phi(tk_1, k_1^{-1}gk_2) = \Delta_{K,K_0}^{-1}(k_1)\Delta_{G_0,K_0}^{-1}(k_2)\phi(t,g). \tag{61}$$

Pour ψ fonction sur $K \times G_0$, à support compact en la première variable et à support compact modulo K_0 en la deuxième variable, vérifiant pour $t \in K, k_0 \in K_0$ et $g \in G_0$, $\psi(t, gk_0) = \Delta_{G_0,K_0}(k_0)\psi(t,g)$, on a la formule

$$\int_{K\times_{K_0}G_0/K_0}\Big(\int_{K_0}\psi(tk_0, k_0^{-1}x)\Delta_{K,K_0}^{-1}(k_0)d_{K_0}(k_0)\Big)d_K \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}(t,x) \tag{62}$$

$$= \int_{K\times G_0/K_0}\psi(t,x)d_K(t)d_{G_0/K_0}(x). \tag{63}$$

On vérifiera sans problème que, ce que l'on intègre dans (62), est bien une densité et qu'il s'agit de l'image de la densité figurant dans (63) par la submersion naturelle de $K \times G_0/K_0$ dans $K\times_{K_0}G_0/K_0$.

On définira de même

$$(d_K \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0})^{1/2} = d_K^{1/2} \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}^{1/2}$$

qui sera une demi-densité d'un fibré au-dessus de $K \times_{K_0} G_0/K_0$. Les sections de ce fibré s'identifient aux fonctions ϕ sur $K \times G_0$ vérifiant pour $t \in K, k_1 \in K_0, k_2 \in K_0$ et $g \in G_0$

$$\phi(tk_1, k_1^{-1}gk_2) = \Delta_{K,K_0}^{-1/2}(k_1)\Delta_{G_0,K_0}^{-1/2}(k_2)\phi(t,g). \tag{64}$$

Soit maintenant μ, une demi-densité à support compact sur l'image de $V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x$ par Φ. Écrivons

$$\mu = \phi(g)d_{G/K}^{1/2},$$

avec $\phi(gk) = \Delta_{G,K}^{1/2}(k)\phi(g)$. En appliquant la formule de changement de variables, on peut écrire $\mu = \Phi_*\nu$ avec ν demi-densité sur $V_x \times_{K_0}\mathcal{U}_x$. On a pour $t \in V_x$ et $x \in \mathcal{U}_x$,

$$\nu = \phi(t,x)j^{1/2}(x)d_K^{1/2} \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}^{1/2} \tag{65}$$

avec

$$j(x) = \Big| \det_{\mathfrak{n}^+} \frac{\operatorname{Ad} x^{-1} - \operatorname{Ad} x^{-\sigma}}{2} \Big| \tag{66}$$

et $\phi(t,x) = \phi(tx)$ (les densités d_{G_0} et d_{K_0} sont ajustées de telle sorte qu'il n'y ait pas de facteur scalaire dans la formule (65)).

Vérifions que cette expression définit bien une demi-densité. Il est facile de voir que l'on a pour $k_0 \in K_0$ et $x \in G_0$

$$j(xk_0) = j(k_0x) = j(x)\big|\det_{\mathfrak{n}^+}(\operatorname{Ad} k_0)\big|^{-1} = j(x)\Delta_{K,K_0}^{-1}(k_0). \tag{67}$$

Il vient alors pour $t \in V_x, x \in \mathcal{U}_x$ et $k_0 \in K_0$

$$\begin{aligned} \phi(t,xk_0)j^{1/2}(xk_0) &= \phi(t,x)j^{1/2}(x)\Delta_{G,K}^{1/2}(k_0)\Delta_{K,K_0}^{-1/2}(k_0) \\ &= \phi(t,x)j^{1/2}(x)\Delta_{G_0/K_0}^{1/2}(k_0), \end{aligned} \tag{68}$$

$$\phi(tk_0, k_0^{-1}x)j^{1/2}(k_0^{-1}x) = \phi(t,x)j^{1/2}(x)\Delta_{K,K_0}^{1/2}(k_0). \tag{69}$$

3.1.4. Parties radiales des opérateurs différentiels invariants.

Soit maintenant D un opérateur différentiel K-invariant sur les demi-densités de G/K. En général, il n'existe pas de bon quotient par K sur G/K au point xK ($x \in G_0$ avec $xK_0 \in \mathcal{U}$ (43)) et par conséquent la partie radiale des opérateurs différentiels K-invariants n'est pas bien définie. Toutefois pour les opérateurs de la forme D_u avec $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$, il existe un opérateur différentiel K_0-invariant du fibré des demi-densités sur G_0/K_0, sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset G_0/K_0$ que l'on notera $\operatorname{Rad}(D)$ et qui aura la même partie radiale, c'est à dire la même action sur les fonctions généralisées θ de G vérifiant pour $g \in G, k_1 \in K$ et $k_2 \in K$

$$\theta(k_1gk_2) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(k_1)\Delta_{G,K}^{1/2}(k_2)\theta(g). \tag{70}$$

D'une certaine manière, on repousse les difficultés dans G_0/K_0. Comme on travaille ici sur les demi-densités (au lieu habituellement des fonctions), l'analyse bi K-invariante consiste à étudier des fonctions généralisées vérifiant la condition de covariance (70).

PROPOSITION 5. — *Pour $xK_0 \in \mathcal{U}$ et $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$, on a*

$$\operatorname{Rad}(D_u)_x = j^{1/2}R^0_{i_x(u)}j^{-1/2}.$$

Preuve et définition. — Soit $\tilde{\theta} = \theta d_{G/K}^{1/2}$ une demi-densité généralisée sur G/K, $\Delta_{G,K}^{-1/2}$-semi invariante à gauche, avec θ une fonction généralisée K-semi invariante des deux cotés vérifiant (70).

Il est légitime de restreindre la section θ à $\mathcal{U} \hookrightarrow G/K$ car le front d'onde est transverse. Notons $\theta_{\mathcal{U}}$ la restriction de θ à $\mathcal{U}$. Pour $x \in \widetilde{\mathcal{U}} = p_0^{-1}(\mathcal{U})$ et $k_0 \in K_0$, on a

$$\theta_{\mathcal{U}}(xk_0)j(xk_0)^{1/2} = \Delta_{G_0,K_0}^{1/2}(k_0)\theta_{\mathcal{U}}(x)j(x)^{1/2}, \tag{71}$$

à cause de (67) et (70). On a aussi

$$\theta_{\mathcal{U}}(k_0x)j(k_0x)^{1/2} = \Delta_{G_0,K_0}^{-1/2}(k_0)\Delta_{K,K_0}^{-1}(k_0)\theta_{\mathcal{U}}(x)j(x)^{1/2}. \tag{72}$$

Ainsi $\theta_{\mathcal{U}}j^{1/2}d_{G_0/K_0}^{1/2}$ est une demi-densité généralisée de G_0/K_0 sur l'ouvert $\mathcal{U}$, K_0-semi invariante à gauche avec caractère donné par (72).

Comme Φ est une submersion sur $K \times_{K_0} \mathcal{U}$, on peut considérer l'image inverse de $\tilde{\theta}$, ie $\tilde{\vartheta} = \Phi^*(\tilde{\theta})$. Écrivons

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta(t,x)d_K^{1/2} \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}^{1/2} \tag{73}$$

avec ϑ section généralisée d'un fibré au dessus de $K \times_{K_0} \mathcal{U}$. Les sections de ce fibré s'identifient aux fonctions ϕ sur $K \times G_0$ vérifiant pour $t \in K$, $k_1 \in K_0$, $k_2 \in K_0$ et $g \in G_0$

$$\phi(tk_1, k_1^{-1}gk_2) = \Delta_{K,K_0}^{1/2}(k_1)\Delta_{G_0,K_0}^{1/2}(k_2)\phi(t,g). \tag{74}$$

Alors on a pour $t \in K, x \in \widetilde{\mathcal{U}}$

$$\vartheta(t,x) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(t)\theta_{\mathcal{U}}(x)j(x)^{1/2}. \tag{75}$$

(Le facteur $j^{1/2}$ provient du fait que l'on considère des demi-densités.)

On peut restreindre la section généralisée ϑ à $\mathcal{U} \hookrightarrow K \times_{K_0} \mathcal{U}$, l'injection étant donnée par $xK_0 \mapsto (1, xK_0)$. On note $\mathcal{U}_1$ l'image de $\mathcal{U}$ dans $K \times_{K_0} \mathcal{U}$ et $\vartheta_{\mathcal{U}_1}$ la restriction de ϑ. On a alors

$$\vartheta_{\mathcal{U}_1} = j^{1/2}\theta_{\mathcal{U}} \tag{76}$$

et $\vartheta_{\mathcal{U}_1}d_{G_0/K_0}^{1/2} = j^{1/2}\theta_{\mathcal{U}}d_{G_0/K_0}^{1/2}$ est une demi-densité généralisée sur $\mathcal{U}$.

Prenons $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}$. Par définition on cherche un opérateur différentiel $\mathrm{Rad}(D_u)$ (du fibré des demi-densités) sur $\mathcal{U}$ et K_0-invariant tel que l'on ait

$$(\mathrm{Rad}\, D_u)(\vartheta_{\mathcal{U}_1}) = (\Phi^* D_u \tilde{\theta})_{\mathcal{U}_1}, \tag{77}$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{Rad}\, D_u)(j^{1/2}\theta_{\mathcal{U}}) = j^{1/2}(D_u\theta)_{\mathcal{U}}. \tag{78}$$

(On a pris de soin de détailler toutes les étapes pour faire apparaître de manière naturelle ce facteur $j^{1/2}$.)

Le problème est local. Soient $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{O}_x$ un ouvert de G/K contenant xK que l'on peut supposer, sans perte de généralité, être l'image par Φ de $V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x$ (60). Prenons (Y, z) comme coordonnées locales près de xK, avec Y dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{l} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{p}]$ (via l'application exponentielle) et $z \in \mathcal{U}_x$, c'est-à-dire on a $(\exp(Y), z) \in V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x$. Notre fonction généralisée ne dépend essentiellement que de la variable z, puisqu'on a

$$\theta\big(\exp(Y)z\big) = \mathrm{e}^{-\delta(Y)}\theta_{\mathcal{U}}(z).$$

Ce qui veut dire que le calcul de $D_u(\theta)_{\mathcal{U}}$ est identique à celui de $(D_u(\psi))_{\mathcal{U}}$ avec ψ section régulière (du fibré $E_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$) sur $\mathcal{O}_x$ vérifiant

$$\psi\big(\exp(Y)z\big) = \mathrm{e}^{-\delta(Y)}\psi_{\mathcal{U}}(z)$$

(*i.e.* sans l'hypothèse de K_0 invariance à gauche).

Maintenant pour $z \in p_0^{-1}(\mathcal{U}_x)$ et

$$C \in \beta(S[\mathrm{Ad}\, z^{-1} \cdot \mathfrak{l}^{\delta}]\, \mathrm{Ad}\, z^{-1} \cdot \mathfrak{l}^{\delta}) \otimes U[\mathfrak{g}_0] + U \cdot \mathfrak{k}^{-\delta},$$

on a $(C\psi)(z) = 0$ (*cf.* [11, p. 309] pour un calcul similaire), d'où l'on tire que l'on a sur l'ouvert $p_0^{-1}(\mathcal{U}_x)$

$$j^{1/2}(z) D_u(\psi)_{\mathcal{U}}(z) = j^{1/2}(z) R^0_{i_z(u)}(\psi_{\mathcal{U}})(z). \tag{79}$$

Je donne ici quelques explications sur la signification du membre de droite de (79). La section $\psi_{\mathcal{U}}$ vue comme fonction sur un ouvert $p_0^{-1}(\mathcal{U}_x)$ de G_0 vérifie la condition de covariance à droite

$$\psi_{\mathcal{U}}(zk_0) = \psi_{\mathcal{U}}(z)\Delta_{G,K}^{1/2}(k_0),$$

pour $z \in p_0^{-1}(\mathcal{U}_x)$ et $k_0 \in K_0$. À z fixé, on a $i_z(u) \in U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta}$. On a défini R^0 en (52). Alors le membre de droite de (79) est par définition de cette notation classique

$$R^0_{i_z(u)}(\psi_{\mathcal{U}})(z) = \psi_{\mathcal{U}}\big(z, i_z(u)\big), \tag{80}$$

(c'est-à-dire au point z on applique l'opérateur $R^0_{i_z(u)}$). À cause de la covariance à droite de $\psi_{\mathcal{U}}$, l'action de $U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta}$ est triviale. Cet opérateur est bien défini sur les sections car on a (51) $i_{xk_0}(u) = \operatorname{Ad} k_0^{-1}\cdot i_x(u)$ et par conséquent on a, pour $k_0 \in K_0$,

$$R^0_{i_{zk_0}(u)}(\psi_{\mathcal{U}})(zk_0) = \Delta^{1/2}_{G,K}(k_0) R^0_{i_z(u)}(\psi_{\mathcal{U}})(z). \tag{81}$$

L'opérateur est K_0-invariant à gauche car on a $i_{k_0x}(u) = i_x(u)$.

On conclut que l'on a, sur les fonctions généralisées $\Delta^{-1/2}_{G,K}$-semi invariantes à gauche, pour $xK_0 \in \mathcal{U}$

$$\operatorname{Rad}(D_u)(j^{1/2}\theta_{\mathcal{U}})(x) = j^{1/2}(x) D^0_{i_x(u)}(\theta_{\mathcal{U}})(x). \tag{82}$$

On peut alors prendre pour définition de la partie radiale $\operatorname{Rad}(D_u)$ l'opérateur différentiel sur $\mathcal{U}$ agissant sur les demi-densités $\phi d^{1/2}_{G_0/K_0}$ de G_0/K_0 et défini par la formule pour $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$

$$\operatorname{Rad}(D_u)(\phi)(x) = j^{1/2}(x) R^0_{i_x(u)}(j^{-1/2}\phi)(x). \tag{83}$$

Cet opérateur différentiel est K_0-invariant à gauche car $R^0_{i_x(u)}$ est invariant et j vérifie (67). $\square$

Notons $\operatorname{Diff}(|\Lambda|^{1/2}(G_0/K_0))$ le faisceau d'algèbres des opérateurs différentiels du fibré des demi-densités sur G_0/K_0. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de G_0/K_0. Considérons l'algèbre

$$\big(\mathcal{C}^\infty(p_0^{-1}(\mathcal{O})) \otimes U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0}\big)^{K_0} \tag{84}$$

des invariants pour l'action $(x \in p_0^{-1}(\mathcal{O}), k_0 \in K_0)$

$$k_0\cdot(\phi(x)\otimes v) = \phi(xk_0)\otimes \operatorname{Ad} k_0\cdot v \tag{85}$$

avec $\phi \in \mathcal{C}^\infty(p_0^{-1}(\mathcal{O}))$ et $v \in U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$. On a une application injective

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{C}^\infty(p_0^{-1}(\mathcal{O})) \otimes U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0}\big)^{K_0} &\longrightarrow \operatorname{Diff}\big(|\Lambda|^{1/2}(G_0/K_0)\big)(\mathcal{O}),\\ \phi\otimes v &\longmapsto \phi R^0_v.\end{aligned} \tag{86}$$

Cette application est aussi surjective si l'ouvert $\mathcal{O}$ est un ouvert de coordonnées.

L'opérateur $\mathrm{Rad}(D_u)$, comme on vient de le définir, est dans l'algèbre

$$\big(\mathcal{C}^\infty(p_0^{-1}(\mathcal{U}))\otimes U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0}\big)^{K_0}.$$

Pour $u\in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}\cap U[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$, on rappelle que u_0 est défini par (26), $u_0^{\rho-c}$ est défini par (27) et $\widetilde{\mathcal{U}}=\{x\in G_0\,;\ xK_0\in\mathcal{U}\}$. La proposition suivante précise l'écriture de $\mathrm{Rad}(D_u)$ dans l'algèbre $(\mathcal{C}^\infty(p_0^{-1}(\mathcal{U}))\otimes U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0})^{K_0}$.

Proposition 6. — *Pour $u\in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}\cap U[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$, on peut écrire*

$$\mathrm{Rad}(D_u)=u_0^{\rho-c}+\sum g_i(x)u_i$$

(somme finie), avec (u_i) base de $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0]\cdot\mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$ et g_i fonctions régulières sur $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant, pour tout $v\in U[\mathfrak{g}_0]$,

$$\lim_{S\to\infty}(R_v^0 g_i)(y\exp S)=0$$

uniformément pour y dans un compact de G_0.

Preuve. — On a par définition (83) $\mathrm{Rad}(D_u)=j^{1/2}R^0_{i_x(u)}(j^{-1/2})$, avec d'après (66) pour $x\in G_0$

$$j(x)=\Big|\det\nolimits_{\mathfrak{n}^+}\frac{\mathrm{Ad}\,x^{-1}-\mathrm{Ad}\,x^{-\sigma}}{2}\Big|=\big|\det\nolimits_{\mathfrak{n}^-}\mathrm{Ad}\,x^{-1}\big|q(x)\tag{87}$$

avec

$$q(x)=\Big|\det\nolimits_{\mathfrak{n}^-}\Big(\frac{1-\mathrm{Ad}\,x^{-\sigma}\,\mathrm{Ad}\,x}{2}\Big)\Big|,\tag{88}$$

d'où l'on tire pour $x\in\widetilde{\mathcal{U}}$,

$$j^{-1/2}(x)=|\det\nolimits_{\mathfrak{n}^-}\mathrm{Ad}\,x|^{1/2}q(x)^{-1/2}.$$

Cette fonction q vérifie uniformément pour y dans un compact de G_0 et $v\in U[\mathfrak{g}_0]\mathfrak{g}_0$,

$$\lim_{S\to\infty}q(y\exp S)=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\dim\mathfrak{n}^-},\quad \lim_{S\to\infty}(R_v^0q)(y\exp S)=0.\tag{89}$$

(Pour le voir, on peut utiliser la formule du déterminant $\det(1+A)=\sum\mathrm{tr}\Lambda^nA$). On a des estimées similaires pour $q^{1/2}$ et $q^{-1/2}$.

Maintenant d'après le lemme 3, on peut écrire $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$

$$i_x(u) = u_0 + \sum h_i(x) w_i \tag{90}$$

avec (w_i) base de $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta}$ (le lecteur notera le caractère $-\delta$) et h_i fonctions régulières sur $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant la condition énoncée dans le lemme 3. On a donc comme opérateur différentiel,

$$\begin{aligned} j^{1/2} R^0_{i_x(u)} j^{-1/2} = q^{1/2}(x) |\det_{\mathfrak{n}^-} \operatorname{Ad} x|^{-1/2} \Big(R^0_{u_0} + \sum h_i(x) R^0_{w_i} \Big) \\ |\det_{\mathfrak{n}^-} \operatorname{Ad} x|^{1/2} q^{-1/2}(x). \end{aligned} \tag{91}$$

Or la conjugaison par $|\det_{\mathfrak{n}^-} \operatorname{Ad} x|^{1/2}$, caractère de G_0, est équivalente au décalage par ρ_{-C} ; donc (91) s'écrit

$$q^{1/2}(x) R^0_{u_0^{\rho_{-C}}} q^{-1/2}(x) + \sum h_i(x) q^{1/2}(x) R^0_{u_i} q^{-1/2}(x) \tag{92}$$

avec $u_i = w_i^{\rho_{-C}} \in U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$. Les (u_i) forment une base de $U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$. D'après les estimées sur $q^{-1/2}$, $q^{1/2}$ et celles de h_i, on déduit que la formule (92) s'écrit sous la forme cherchée (les fonctions qui vérifient les estimées de la proposition forment une algèbre stable par l'action des opérateurs R^0_v), *i.e.* sous la forme

$$R^0_{u_0^{\rho_{-C}}} + \sum g_i(x) R^0_{u_i} \tag{93}$$

avec $u_i \in U[\mathfrak{g}_0]/U[\mathfrak{g}_0] \cdot \mathfrak{k}_0^{-\delta_0}$ et g_i fonctions régulières sur $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant pour tout $v \in U[\mathfrak{g}_0]$, $\lim_{S \to \infty} (R^0_v g_i)(y \exp S) = 0$ uniformément pour y dans un compact de G_0. $\square$

REMARQUE. — Lorsque le tore $\mathfrak{s}$ est un tore $\mathfrak{s}_f$ de l'introduction, la proposition ci-dessus dit « heuristiquement » que l'on a

$$\lim_{S \to +\infty} \operatorname{Rad}(D_u)_{x \exp S} = D^0_{\Gamma(u)}$$

avec $\Gamma(u)$ la projection de Harish-Chandra. Ainsi on peut résumer la situation en disant « heuristiquement » que la partie K-radiale à l'infini est égale à la partie N^--radiale pour les opérateurs différentiels G-invariants sur l'espace symétrique G/K. On peut remarquer qu'il n'y a pas lieu d'effectuer des décalages car on travaille directement sur les demi-densités. Ce type de résultats est bien connu dans le cas semi-simple et se généralise au cas général.

3.2. Prolongement local des fonctions généralisées.

Dans cette section G/K est encore un espace symétrique sur $\mathbb{R}$.

On suppose que l'on dispose encore d'un tore $\mathfrak{s}$ comme dans la section précédente. On conserve les notations de la section précédente. L'indice ou l'exposant 0 désigne une notation ou une notion se reportant à $\mathfrak{g}_0$. On désigne par $\mathrm{sp}(\operatorname{ad} X)$ le spectre de $\operatorname{ad}(X)$, *i.e.* l'ensemble de ses valeurs propres complexes et par $\Im$ la partie imaginaire d'un nombre complexe. On note $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{g}$. On note Exp la composée $p \circ \exp$ de $\mathfrak{p}$ dans G/K.

3.2.1. Extension locale.

Soit $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ une demi-densité généralisée sur G_0/K_0 vérifiant pour $k_0 \in K_0$ et $x \in G_0$

$$\theta^0(k_0 x) = \Delta^{-1}_{K,K_0}(k_0)\Delta^{-1/2}_{G_0,K_0}(k_0)\theta^0(x). \tag{94}$$

Remarquons que l'on a alors

$$\theta^0(k_0 x k_0^{-1}) = \Delta^{-1}_{G,K}(k_0)\theta^0(x). \tag{95}$$

L'existence de telles demi-densités n'est bien sûr pas assurée, toutefois on appliquera, à la fin de cet article, les résultats de ce paragraphe à une classe d'espaces symétriques où il y a assez de telles demi-densités généralisées.

Fixons $x \in G_0$ avec $xK_0 \in \mathcal{U}$ (43). Soit $\mathcal{O}_x$ un voisinage ouvert de xK dans G/K.

Comme dans (60), soient V_x un petit voisinage de 1 dans K et $\mathcal{U}_x$ un petit voisinage de $xK_0 \in G_0/K_0$, tels que la restriction de l'application

$$\begin{aligned} \Phi : V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x &\longrightarrow G/K, \\ (k, zK_0) &\longmapsto kzK \end{aligned} \tag{96}$$

soit un isomorphisme sur son image. Sans perte de généralité, on peut supposer que cette image est $\mathcal{O}_x$.

Soit $\theta d^{1/2}_{G/K}$ la demi-densité généralisée sur l'ouvert $\mathcal{O}_x$ définie par la condition pour $(k, y) \in V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x$,

$$\Phi^*(\theta d^{1/2}_{G/K}) = \Delta^{-1/2}_{G,K}(k)\theta^0(y) d^{1/2}_K \otimes_{K_0} d^{1/2}_{G_0/K_0}. \tag{97}$$

La semi-invariance (94) imposée à θ^0 montre que $\theta d^{1/2}_{G/K}$ est bien définie sur $\mathcal{O}_x$ et θ s'identifie à une fonction généralisée semi-invariante sur l'ouvert $p^{-1}(\mathcal{O}_x)$. En particulier pour $g \in p^{-1}(\mathcal{O}_x)$, k_1 dans un voisinage suffisamment petit de $1 \in K$ (dépendant de g) et $k_2 \in K$, on a

$$\theta(k_1 g k_2) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(k_1)\Delta_{G,K}^{1/2}(k_2)\theta(g). \tag{98}$$

D'après (73), (75), on a sur l'ouvert $\mathcal{U}_x$,

$$\theta_{\mathcal{U}}(y) = j^{-1/2}(y)\theta^0(y). \tag{99}$$

En d'autres termes, $\theta d_{G/K}^{1/2}$ est une extension locale près de xK de $\theta^0 d_{G_0/K_0}^{1/2}$ qui est localement K semi-invariante à gauche. On dira simplement *extension locale.* Remarquons qu'il n'est pas vrai, en général que l'on puisse étendre globalement $\theta^0 d_{G_0/K_0}^{1/2}$.

3.2.2. Extension locale dans le cas tangent.

Définissons $\pi(X)$ pour $X \in \mathfrak{p}_0$ par la formule

$$\pi(X) = \left|\det_{\mathfrak{n}^+}(\operatorname{ad} X)\right|. \tag{100}$$

Cette définition de $\pi(X)$ est indépendante du choix de $\mathfrak{n}^+$ car on a

$$\pi(X)^2 = \left|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0}(\operatorname{ad} X)\right|. \tag{101}$$

Soit $\boldsymbol{U}$ l'ouvert défini par

$$\boldsymbol{U} = \left\{X \in \mathfrak{p}_0\ ;\ \pi(X) \neq 0\right\}. \tag{102}$$

Notons $T\Phi$ l'application naturelle définie par

$$\begin{aligned} T\Phi : K \times \mathfrak{p}_0 &\longrightarrow \mathfrak{p}, \\ (k, X) &\longmapsto \operatorname{Ad} k \cdot X. \end{aligned} \tag{103}$$

De manière analogue au lemme 2, on a le résultat suivant.

LEMME 4. — *L'application $T\Phi$ est une submersion sur l'ouvert $K \times \boldsymbol{U}$.*

Preuve. — Le calcul du jacobien au point $(1, X)$ donne exactement $\pi(X)$. $\square$

L'action diagonale de K_0 dans $K \times \mathfrak{p}_0$ définie pour $k \in K, k_0 \in K_0$ et $X \in \mathfrak{p}_0$ par

$$(k, X) \cdot k_0 = (kk_0, \operatorname{Ad} k_0^{-1} X)$$

est libre, ce qui permet de définir l'espace quotient $K \times_{K_0} \mathfrak{p}$. L'application $T\Phi$ se factorise à travers cette variété. Par suite c'est un isomorphisme local sur $K \times_{K_0} \boldsymbol{U}$. En d'autres termes pour $X \in \boldsymbol{U}$, il existe un voisinage V_X de $1 \in K$ et un voisinage U_X de X dans $\boldsymbol{U}$, tels que les fibres de l'application $T\Phi$ sur l'ouvert

$$\bigcup_{k_0 \in K_0} V_X k_0 \times \operatorname{Ad} k_0^{-1} \cdot U_X \tag{104}$$

sont exactement les K_0-orbites pour l'action diagonale. Pour simplifier les notations on notera $V_X \times_{K_0} U_X$ l'image de cet ouvert dans $K \times_{K_0} \mathfrak{p}_0$.

On fixe une densité dY de Lebesgue sur $\mathfrak{p}$ (resp dZ sur $\mathfrak{p}_0$) adaptée à $d_{G,K}$ (resp à d_{G_0/K_0}), c'est-à-dire que l'on a pour ψ, fonction à support compact près de 0 dans $\mathfrak{p}_0$,

$$\operatorname{Exp}_*(\psi dZ) = \phi d_{G_0/K_0},$$

avec $\phi(\exp X) = J_0(X)^{-1}\psi(X)$ pour X dans le support de ψ. On définit $d_{K_0} \otimes_{K_0} dZ$, (resp. $d_{K_0}^{1/2} \otimes_{K_0} dZ^{1/2}$) de manière analogue à $d_K \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}$ (resp $d_K^{1/2} \otimes_{K_0} d_{G_0/K_0}^{1/2}$). C'est une densité (resp. une demi-densité) d'un fibré au-dessus de $K \times_{K_0} \mathfrak{p}_0$ dont les sections s'identifient aux fonctions φ sur $K \times \mathfrak{p}_0$ vérifiant pour $k \in K, k_1 \in K_0$ et $X \in \mathfrak{p}_0$,

$$\varphi(kk_1, \operatorname{Ad} k_1^{-1} \cdot X) = \Delta_{G,K}^{-1}(k_1)\varphi(k, X) \tag{105}$$

(resp. $\varphi(kk_1, \operatorname{Ad} k_1^{-1} \cdot X) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(k_1)\varphi(k, X)$).

Soit $\zeta^0 dZ^{1/2}$ une demi-densité généralisée sur $\mathfrak{p}_0$ vérifiant pour $k_0 \in K_0$ et $Z \in \mathfrak{p}_0$

$$\zeta^0(\operatorname{Ad} k_0 \cdot Z) = \Delta_{G,K}^{-1}(k_0)\zeta^0(Z). \tag{106}$$

Fixons $X \in \boldsymbol{U}$. Soit O_X un voisinage ouvert de X dans $\mathfrak{p}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $T\Phi(V_X \times_{K_0} U_X) = O_X$ avec $V_X \times_{K_0} U_X$ comme en (104).

Soit $\zeta d^{1/2}Y$ la demi-densité généralisée sur l'ouvert O_X, définie par la condition pour $(k, Z) \in V_X \times_{K_0} U_X$

$$(T\Phi)^*(\zeta d^{1/2}Y) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(k)\zeta^0(Z) d_K^{1/2} \otimes_{K_0} d^{1/2}Z. \tag{107}$$

La semi-invariance imposée à ζ^0 (106) montre que $\zeta d^{1/2}Y$ est bien définie sur O_X et ζ s'identifie à une fonction généralisée semi-invariante sur l'ouvert de O_X. En particulier pour $Y \in O_X$, et k suffisament proche de $1 \in K$, on a

$$\zeta(\mathrm{Ad}\, k \cdot Y) = \Delta_{G,K}^{-1}(k)\zeta(Y) \tag{108}$$

(car la demi-densité $\zeta d^{1/2}Y$ est par définition $\Delta_{G,K}^{-1/2}$-semi invariante donc ζ est $\Delta_{G,K}^{-1}$-semi invariante).

On dira que $\zeta d^{1/2}Y$ est l'*extension locale* dans le cas tangent de $\zeta^0 d^{1/2}Z$. On peut restreindre la fonction généralisée ζ à l'ouvert U_X. Notons par ζ_U cette restriction. On a alors d'après la formule du jacobien pour $Z \in U_X$,

$$\zeta_U(Z) = \pi^{-1/2}(Z)\zeta^0(Z). \tag{109}$$

3.2.3. Extension locale et application exponentielle.
Soient

$$\mathfrak{g}' = \{X, \Im(\mathrm{sp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)) \subset]-i\pi, i\pi[\},$$
$$\mathcal{V} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}, \quad \mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \cap \mathfrak{p}_0.$$

Alors l'application Exp est une submersion de $\mathcal{V}$ sur G/K, dont les fibres coïncident avec l'ensemble

$$\Gamma = \{Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}\,;\ \exp(2Z) = 1\}. \tag{110}$$

On note J pour la fonction sur $\mathfrak{p}$ définie en (23) par

$$J(X) = \det_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{\sinh(\mathrm{ad}\, X)}{\mathrm{ad}\, X}\Big)$$

et par J_0 son analogue sur $\mathfrak{p}_0$, *i.e.* on a pour $X \in \mathfrak{p}_0$,

$$J_0(X) = \det_{\mathfrak{p}_0}\Big(\frac{\sinh(\mathrm{ad}\, X)}{\mathrm{ad}\, X}\Big).$$

On a le résultat facile suivant

LEMME 5. — *Pour $X \in \mathfrak{p}_0$, on a $|J(X)|\pi(X) = j(\exp X)|J_0(X)|$.*

On déduit du lemme que l'on a $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{U} \cap \mathcal{V}_0) \subset \mathcal{U}$.

Soit $X \in \boldsymbol{U} \cap \mathcal{V} = \boldsymbol{U} \cap \mathcal{V}_0$ et posons $x = \exp(X) \in \widetilde{\mathcal{U}}$.

Considérons $\mathcal{O}_x = \Phi(V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x)$ voisinage de xK dans G/K comme dans (60) et dans le paragraphe 3.2.1. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe U_X voisinage de X dans $\boldsymbol{U} \cap \mathcal{V}_0$ tel que l'on ait

$$\mathcal{U}_x = \exp_0(U_X)K_0 = \mathrm{Exp}_0(U_X). \tag{111}$$

Notons $O_X = (T\Phi)(V_x \times_{K_0} U_X)$; c'est un voisinage de X dans $\mathfrak{p}$. Alors on a $O_X \subset \mathcal{V}$ et $\mathrm{Exp}(O_X) = \mathcal{O}_x$.

Soit $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ une demi-densité généralisée sur G_0/K_0, vérifiant pour $k_0 \in K_0$ et $z \in G_0$

$$\theta^0(k_0 z) = \Delta^{-1}_{K,K_0}(k_0)\Delta^{-1/2}_{G_0,K_0}(k_0)\theta^0(z). \tag{112}$$

Sur $\mathcal{V}_0$, l'application Exp_0 est une submersion ; on peut donc considérer la demi-densité généralisée image inverse $\mathrm{Exp}_0^*(\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0})$. Écrivons

$$\zeta^0 d^{1/2} Z = \mathrm{Exp}_0^*(\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}).$$

Alors, on a pour $Z \in \mathcal{V}_0$ (remarquons que l'on a $J_0(Z) > 0$)

$$\zeta^0(Z) = J_0(Z)^{1/2}\theta^0(\exp Z). \tag{113}$$

D'où l'on tire que ζ^0 vérifie la condition de semi-invariance pour $k_0 \in K_0$ et $Z \in \mathcal{V}_0$

$$\zeta^0(\mathrm{Ad}\, k_0 \cdot Z) = \Delta^{-1}_{G,K}(k_0)\zeta^0(Z). \tag{114}$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
V_x \times_{K_0} \mathcal{U}_x & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathcal{O}_x \subset G/K \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Exp}_0} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Exp}} \\
V_x \times_{K_0} U_X & \xrightarrow{\quad T\Phi\quad} & O_X \subset \mathfrak{p}.
\end{array}$$

Toutes les flèches sont des submersions ; on peut donc considérer les images inverses de fonctions généralisées sur ces espaces (ou les images inverses de sections généralisées de fibrés au-dessus de ces espaces).

Soit $\theta d^{1/2}_{G/K}$ l'extension locale de $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ sur l'ouvert $\mathcal{O}_x$. Soit $\zeta d^{1/2} Y$ l'extension locale dans le cas tangent de $\zeta^0 d^{1/2} Z$ sur l'ouvert O_X.

L'image inverse par Exp de $\theta d_{G/K}^{1/2}$ vérifie pour $Y \in O_X$ (remarquons que l'on a $J(Y) > 0$ pour $Y \in \mathcal{V}$)

$$\mathrm{Exp}^*(\theta d_{G/K}^{1/2}) = J^{1/2}(Y)\theta(\exp Y) dY^{1/2}. \tag{115}$$

On a alors l'égalité de demi-densités généralisées

$$(T\Phi)^*\big(J^{1/2}\theta(\exp) dY^{1/2}\big) = \zeta(k, Z) d_{K_0}^{1/2} \otimes_{K_0} dZ^{1/2} \tag{116}$$

avec $\zeta(k, Z)$ fonction généralisée sur $K \times U_X$ vérifiant pour (k, Z) dans $K \times U_X$

$$\zeta(k, Z) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(k) J^{1/2}(Z) \pi^{1/2}(Z) \theta_{\mathcal{U}}(\exp Z). \tag{117}$$

Cette expression vaut d'après le lemme 5 et (99)

$$\Delta_{G,K}^{-1/2}(k) j^{1/2}(Z) J_0^{1/2}(Z) \theta_{\mathcal{U}}(\exp Z) = \Delta_{G,K}^{-1/2}(k) J_0^{1/2}(Y) \theta^0(\exp Z). \tag{118}$$

D'après (113), cette expression vaut

$$\Delta_{G,K}^{-1/2}(k) \zeta^0(Z). \tag{119}$$

C'est la formule qui définit $\zeta d^{1/2}Y$ (107). En d'autres termes, la K-extension est compatible avec l'application Exp.

3.3. Partie radiales des opérateurs différentiels dans le cas tangent.

On peut développer de manière similaire au cas G/K une théorie de la partie radiale des opérateurs différentiels sur l'espace tangent au point base c'est-à-dire sur $\mathfrak{p}$. Nous donnons dans cette section des précisions. On conserve les notations introduites dans les deux sections précédentes. En particulier, on suppose toujours que l'on dispose d'un tore $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{p}$ déployé et non central dans $\mathfrak{g}$.

3.3.1. Décomposition de l'algèbre symétrique.

Notons $\mathfrak{q}$ le sous-espace de $\mathfrak{p}$ défini par $[\mathfrak{s}, \mathfrak{k}]$. On a $\mathfrak{q} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{l}]$. On déduit de la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{q}$, la décomposition de l'algèbre symétrique

$$S[\mathfrak{p}] = S[\mathfrak{p}_0] \oplus S[\mathfrak{p}]\mathfrak{q}, \tag{120}$$

ce qui définit une projection de $S[\mathfrak{p}]$ sur $S[\mathfrak{p}_0]$. Pour $Q \in S[\mathfrak{p}]$, on notera Q_0 sa projection sur $S[\mathfrak{p}_0]$. On généralise dans ce contexte général les résultats de [26, p. 92] et [4] du cas réductif.

Pour $Y \in \mathfrak{k}$, on note $d(Y)$ la dérivation de $S[\mathfrak{p}]$ qui prolonge l'action de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(Y)$. Pour $Z \in \mathfrak{p}$, on note M_Z la multiplication par Z dans $S[\mathfrak{p}]$. Pour $X \in \mathfrak{p}$ et $Y \in \mathfrak{k}$, posons

$$S_X(Y) = M_{[Y,X]} + d(Y). \tag{121}$$

Alors S_X est une représentation de $\mathfrak{k}$ dans $S[\mathfrak{p}]$ que l'on prolonge à l'algèbre enveloppante $U[\mathfrak{k}]$. Pour $X \in \mathfrak{p}$, l'application T_X de $U[\mathfrak{k}] \otimes S[\mathfrak{p}]$ dans $S[\mathfrak{p}]$ est définie pour $v \in U[\mathfrak{k}]$ et $Q \in S[\mathfrak{p}]$ par

$$T_X(v \otimes Q) = S_X(v)Q. \tag{122}$$

On a alors le lemme suivant (on rapelle que $\boldsymbol{U}$ est défini par (102)).

Lemme 6. — *Pour $X \in \boldsymbol{U}$, l'application T_X est une bijection de $\beta(S[\mathfrak{l}]) \otimes S[\mathfrak{p}_0]$ dans $S[\mathfrak{p}]$.*

Preuve. — C'est la même démonstration que celle du lemme 2.5 de [4]; on a même

$$\sum_{d_1+d_2\leq m} T_X\big(\beta(S^{d_1}[\mathfrak{l}]) \otimes S^{d_2}[\mathfrak{p}_0]\big) = \sum_{d\leq m} S^d[\mathfrak{p}]. \quad \square \tag{123}$$

Pour $Q \in S[\mathfrak{p}]$ et $X \in \boldsymbol{U}$, notons $I_X(Q)$ l'unique élément de $S[\mathfrak{p}_0]$ tel que l'on ait

$$Q = T_X\big(1 \otimes I_X(Q) + \beta(S[\mathfrak{l}^{2\delta}] \cdot \mathfrak{l}^{2\delta}) \otimes S[\mathfrak{p}_0]\big). \tag{124}$$

Maintenant, lorsque Q est dans $S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et à cause de l'unicité de $I_X(Q)$, on a pour $m \in M' = N_K(\mathfrak{s})$ le normalisateur de $\mathfrak{s}$ dans K et $X \in \boldsymbol{U}$

$$\mathrm{Ad}\, m \cdot I_X(Q) = I_{\mathrm{Ad}\, m \cdot X}(Q). \tag{125}$$

Pour $X \in \boldsymbol{U}$, $\mathrm{ad}(X)$ est une bijection de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{q}$, on notera par $c(X)$ la bijection inverse.

Définition 3. — *On note par $\mathcal{E}$ l'algèbre (non unitaire) des fonctions sur $\boldsymbol{U}$ engendrée par les coefficients de la matrice $c(X)$.*

Le résultat suivant généralise [4, th. 2.7]; c'est l'analogue dans le cas tangent du lemme 3.

LEMME 7. — *Soit $Q \in S[\mathfrak{p}]$. On peut écrire (somme finie)*

$$I_X(Q) = Q_0 + \sum g_i(X)Q_i$$

avec (Q_i) base de $S[\mathfrak{p}_0]$ et $g_i \in \mathcal{E}$.

Preuve. — Comme dans le lemme 3, on va monter plus précisément par récurrence que l'on a (somme finie)

$$Q = Q_0 + \sum_i g_i(X)Q_i + \sum_{i,j} g_{i,j}(X)T_X(\beta(V_j) \otimes Q_i) \tag{126}$$

avec (V_j) une base de $S[\mathfrak{l}^{2\delta}] \cdot \mathfrak{l}^{2\delta}$ et $g_i, g_{i,j}$ dans $\mathcal{E}$. On peut supposer Q homogène de degré m. On fait une récurrence sur m.

Écrivons $Q = Q_0 + \sum P_i R_i$ avec $P_i \in \mathfrak{q}$ et R_i de degré $m-1$. On a pour $X \in \boldsymbol{U}$, $\operatorname{ad}(X)c(X)P_i = P_i$ et

$$c(X)P_i = \sum_j c_{i,j}(X)L_j \tag{127}$$

avec L_j une base fixée de $\mathfrak{l}$ et $c_{i,j} \in \mathcal{E}$. On déduit que

$$M_{P_i} = \sum_j c_{i,j}(X)M_{[X,L_j]} \tag{128}$$

vaut d'après (121)

$$-\sum_j c_{i,j}(X)S_X(L_j) + \sum_j c_{i,j}(X)d(L_j). \tag{129}$$

D'où l'on tire

$$\begin{aligned} Q = Q_0 + \sum_{i,j} c_{i,j}(X)d(L_j)R_i + \sum_{i,j} c_{i,j}(X)2\delta(L_j)R_i \\ - \sum_{i,j} c_{i,j}(X)S_X\big(L_j + 2\delta(L_j)\big)R_i. \end{aligned} \tag{130}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence pour $d(L_j)R_i$ et R_i, puis le fait que S_X est une représentation de $U[\mathfrak{k}]$ pour conclure. □

REMARQUE. — Les détails de cette démonstration montrent que tous les termes dans (130) contribuent *a priori* dans le calcul de $I_X(Q)$. En effet, l'hypothèse de récurrence pour R_i fournira des termes de la forme

$$R_i = Q_0^i + \sum_a g_a^i(X)Q_a + \sum_{a,b} g_{a,b}^i(X)T_X\big(\beta(V_b)\otimes Q_a\big). \tag{131}$$

Examinons le produit $S_X(L_j + 2\delta(L_j))R_i$. Il trois termes :

$$\begin{aligned} &S_X\big(L_j + 2\delta(L_j)\big)Q_0^i \\ &\qquad + \sum_a g_a^i(X)S_X\big(L_j + 2\delta(L_j)\big)Q_a \\ &\qquad\qquad + \sum_{a,b} g_{a,b}^i(X)S_X\big(L_j + 2\delta(L_j)\big)S_X\big(\beta(V_b)\big)Q_a. \end{aligned} \tag{132}$$

Les deux premiers ne contribuent pas dans le calcul de $I_X(Q)$, ce qui n'est pas le cas du troisième terme.

3.3.2. Partie radiale dans le cas tangent.

Pour les mêmes raisons déjà expliquées dans le cas des espaces symétriques, il n'existe pas de bon quotient de $\mathfrak{p}$ par K ; par conséquent, la partie radiale des opérateurs différentiels K-invariants sur $\mathfrak{p}$ n'est pas bien définie si on se contente des définitions habituelles. Toutefois pour les opérateurs de la forme $\partial(Q)$ avec $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$, il existe un opérateur différentiel sur $\boldsymbol{U}$, K_0 invariant, agissant sur le fibré des demi-densités, qu'on notera $\mathrm{Rad}(\partial(Q))$ et qui aura la même partie radiale, *i.e.* qui aura la même action sur demi-densités généralisées $\zeta d^{1/2}Y$ sur $\mathfrak{p}$ vérifiant pour $k \in K$ et $Y \in \mathfrak{p}$,

$$\zeta(\mathrm{Ad}\, k \cdot Y) = \Delta_{G,K}^{-1}(k)\zeta(Y). \tag{133}$$

PROPOSITION 7. — *Pour $X \in \boldsymbol{U}$ et $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$, on a*

$$\mathrm{Rad}\big(\partial(Q)\big)_X = \pi^{1/2}\partial^0\big(I_X(Q)\big)\pi^{-1/2}.$$

Preuve et définition. — Ce sont les mêmes arguments que dans le cas G/K proposition 5, que l'on redonne rapidement. Voir paragraphe 3.2.2 pour le rappel des notations.

Soit $\zeta d^{1/2}Y$ une demi-densité généralisée sur $\mathfrak{p}$, vérifiant la condition de covariance (133). Alors ζ est une fonction généralisée sur $\mathfrak{p}$. On peut la restreindre à $\boldsymbol{U} \hookrightarrow \mathfrak{p}$ car le front d'onde est transverse. Notons ζ_U cette restriction. Alors $\pi^{1/2}\zeta_U d^{1/2}Z$ est une demi-densité généralisée sur $\boldsymbol{U} \subset \mathfrak{p}_0$ et elle vérifie la condition de covariance pour $k_0 \in K_0$ et $Z \in \boldsymbol{U}$

$$(\pi^{1/2}\zeta_U)(\mathrm{Ad}\, k_0 \cdot Z) = \Delta_{G,K}^{-1}(k_0)\pi^{1/2}(Z)\zeta_U(Z). \tag{134}$$

Comme $T\Phi$ (paragraphe 3.2.2) est une submersion sur $K\times_{K_0}\boldsymbol{U}$, on peut considérer l'image inverse de $\zeta d^{1/2}Y$. On a alors

$$(T\Phi)^*(\zeta d^{1/2}Y)=\tilde{\zeta}d_K^{1/2}\otimes_{K_0}d^{1/2}Z \tag{135}$$

avec pour $(k,Z)\in K\times\boldsymbol{U}$

$$\tilde{\zeta}(k,Z)=\Delta_{G,K}^{-1/2}(k)\pi^{1/2}(Z)\zeta_U(Z). \tag{136}$$

Prenons $Q\in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$; on note $\partial(Q)$ l'opérateur différentiel à cœfficients constants associé. C'est un opérateur sur le fibré des demi-densités sur $\mathfrak{p}$.

On cherche un opérateur différentiel $\operatorname{Rad}(\partial(Q))$ tel que l'on ait sur $\boldsymbol{U}$

$$\operatorname{Rad}(\partial(Q))(\pi^{1/2}\zeta_U)=\pi^{1/2}(\partial(Q)\zeta)_U. \tag{137}$$

On fixe $X\in\boldsymbol{U}$ et on considère un voisinage dans $\mathfrak{p}$ que l'on suppose être l'ouvert O_X comme dans le paragraphe 3.2.2. Comme dans la preuve de la proposition 5, on se ramène au calcul de $\partial(Q)(\psi)$ avec ψ fonction sur O_X vérifiant pour Y dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{l}$ et $Z\in U_X$

$$\psi\big(\operatorname{Ad}(\exp Y)\cdot Z\big)=\mathrm{e}^{-2\delta(Y)}\psi(Z) \tag{138}$$

(le lecteur remarquera que l'on a $\mathrm{e}^{-2\delta(Y)}=\Delta_{G,K}^{-1}(\exp Y)$). Alors d'après [26] ou [4] on a pour $C\in T_Z(\beta(S[\mathfrak{l}^{2\delta}]\cdot\mathfrak{l}^{2\delta})\otimes S[\mathfrak{p}_0])$ et $Z\in U_X$

$$(C\psi)(Z)=0. \tag{139}$$

On déduit alors de la définition de $I_Z(Q)$ que l'on a sur U_X (on écrit ∂^0 pour indiquer qu'il s'agit d'opérateurs dans $\mathfrak{p}_0$)

$$\big(\partial(Q)\psi\big)(Z)=\big(\partial^0(I_Z(Q))\psi_U\big)(Z). \tag{140}$$

On peut donc prendre comme définition de $\operatorname{Rad}(\partial(Q))$ au point $X\in\boldsymbol{U}$

$$\operatorname{Rad}\big(\partial(Q)\big)_X=\pi^{1/2}\partial^0\big(I_X(Q)\big)\pi^{-1/2}. \tag{141}$$

C'est un opérateur différentiel K_0-invariant d'après (125). □

Pour terminer le parallèle avec les résultats dans le cas G/K, on doit donner des estimées pour les cœfficients de $\operatorname{Rad}(\partial(Q))_X$. On a le résultat suivant.

PROPOSITION 8. — *Pour $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ on peut écrire (somme finie)*

$$\mathrm{Rad}\big(\partial(Q)\big)_X = \partial^0(Q_0) + \sum_i g_i(X)\partial^0(Q_i)$$

avec (Q_i) une base de $S[\mathfrak{p}_0]$ et g_i des fonctions régulières sur $\boldsymbol{U}$ vérifiant pour tout $V^0 \in S[\mathfrak{p}_0]$,

$$\lim_{S\to\infty}(\partial^0(V^0)g_i)(Z+S) = 0$$

uniformément pour Z dans un compact de $\mathfrak{p}_0$.

Preuve. — D'après le lemme 7, on peut écrire (somme finie)

$$I_X = Q_0 + \sum_i h_i(X)Q_i$$

avec (Q_i) une base de $S[\mathfrak{p}_0]$ et h_i des fonctions dans l'algèbre $\mathcal{E}$ (voir définition 3).

Montrons dans un premier temps que les fonctions de cette algèbre vérifient les estimées annoncées. Il suffit de le faire pour les coefficients de la matrice $c(X)$. Or l'application linéraire $\mathrm{ad}(X)$ ($X \in \boldsymbol{U}$) de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{q}$ est conjuguée à l'endomorphisme $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}^+}(X)$. Maintenant, comme endomorphisme de $\mathfrak{n}^+$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{ad}(Z)+\mathrm{ad}(S)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{ad}\,Z)^n(\mathrm{ad}\,S)^{-n-1} \tag{142}$$

pour Z dans un compact de $\mathfrak{p}_0$ et S suffisament grand pour que cette série converge uniformément. Sous cette forme, les estimées sur les dérivées sont alors évidentes.

Montrons maintenant que la conjugaison par $\pi^{1/2}$ ne change pas la conclusion sur les estimées. On a par définition $\pi(X) = |\det_{\mathfrak{n}^+}\mathrm{ad}(X)|$. Pour $A \in \mathfrak{p}_0$, un calcul facile montre que l'on a

$$\big(\partial^0(A)\pi\big)(X) = \pi(X)\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}^+}\big((\mathrm{ad}\,X)^{-1}\,\mathrm{ad}\,A)\big). \tag{143}$$

On en déduit que l'on a aussi pour $X \in \boldsymbol{U}$

$$\pi^{1/2}(X)\big(\partial^0(A)\pi^{-1/2}\big)(X) = -\tfrac{1}{2}\pi^{-1}(X)(\partial^0(A)\pi)(X), \tag{144}$$

ce qui montre que $\pi^{1/2}(\partial^0(A)\pi^{-1/2})$ est dans l'algèbre $\mathcal{E}$. En fait, l'algèbre $\mathcal{E}$ est stable par les dérivations $\partial^0(A)$. Cela découle du calcul suivant (*cf.* [4])

$$\partial^0(A)\big[(\operatorname{ad}X)^{-1}\big] = -(\operatorname{ad}X)^{-1}(\operatorname{ad}A)(\operatorname{ad}X)^{-1}. \tag{145}$$

Une récurrence facile montre alors que pour tout $V^0 \in S[\mathfrak{p}_0]$, les fonctions

$$\pi^{1/2}(X)\big(\partial^0(V^0)\pi^{-1/2}\big)(X) \tag{146}$$

sont encore dans l'algèbre $\mathcal{E}$. L'opérateur

$$\operatorname{Rad}\big(\partial(Q)\big)_X = \pi^{1/2}\partial^0\big(I_X(Q)\big)\pi^{-1/2}$$

s'écrit donc

$$\partial^0(Q_0) + \sum_i g_i(X)\partial^0(Q_i) \tag{147}$$

avec g_i fonctions dans l'algèbre $\mathcal{E}$ et vérifiant *a fortiori* les estimées annoncées. □

3.3.3. Action des parties radiales des opérateurs différentiels et coordonnées exponentielles.

Ce paragraphe est une sorte de glossaire. On écrit les différentes formules que l'on peut obtenir en combinant les théories développées dans les sections précédentes. Les notations sont celles précédemment utilisées.

Soient $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$ et $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$. Soit $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ une demi-densité généralisée sur G_0/K_0, vérifiant la condition de covariance (94). Soit $X \in \boldsymbol{U} \cap \mathcal{V}$ (*cf.* (102), 3.2.3), posons $x = \exp(X)$. Notons $\theta d^{1/2}_{G/K}$ l'extension locale de $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ près du point xK. On a alors sur l'ouvert $\mathcal{U}_x$ (60)

$$\operatorname{Rad}(D_u)\theta^0 = j^{1/2}[D_u\theta]_{\mathcal{U}_x}. \tag{148}$$

Considérons

$$\zeta^0 d^{1/2}Z = \operatorname{Exp}_0^*(\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0})$$

la demi-densité généralisée sur $\mathcal{V}_0$ image réciproque par la submersion Exp_0. Notons $\zeta d^{1/2}Y$ l'extension locale de $\zeta^0 d^{1/2}Z$ près du point X. On a alors sur l'ouvert U_X

$$\operatorname{Rad}\big(\partial(Q)\big)\zeta^0 = \pi^{1/2}\big[\partial(Q)\zeta\big]_{U_X}. \tag{149}$$

Définissons maintenant l'image réciproque de D_u en coordonnéees exponentielles. C'est l'opérateur différentiel D_u^{Exp} sur les demi-densités de $\mathfrak{p}$ (au moins là où Exp est une submersion) défini pour μ demi-densité sur G/K, par

$$D_u^{\mathrm{Exp}}(\mathrm{Exp}^*\,\mu) = \mathrm{Exp}^*(D_u\mu). \tag{150}$$

On étend l'action de cet opérateur différentiel aux demi-densités généralisées. En particulier, comme on a sur l'ouvert $\mathcal{V}$

$$\mathrm{Exp}^*(\theta d_{G/K}^{1/2}) = J^{1/2}(Y)\theta(\exp Y)d^{1/2}Y, \tag{151}$$

on en déduit sur l'ouvert $O_X \subset \mathfrak{p}$

$$(D_u\theta)\circ\exp = J^{-1/2}D_u^{\mathrm{Exp}}(J^{1/2}\theta\circ\exp). \tag{152}$$

Utilisons maintenant la définition de $\mathrm{Rad}(D_u)$. D'après (148), on obtient sur U_X

$$\big(\mathrm{Rad}(D_u)\theta^0\big)\circ\exp_0 = (j^{1/2}\circ\exp_0)J^{-1/2}\big[D_u^{\mathrm{Exp}}(J^{1/2}\theta\circ\exp)\big]_{U_X}. \tag{153}$$

Comme on a $J\pi = jJ_0$, on déduit l'équation finale sur U_X

$$\big(\mathrm{Rad}(D_u)\theta^0\big)\circ\exp_0 = J_0^{-1/2}\pi^{1/2}\big[D_u^{\mathrm{Exp}}(J^{1/2}\theta\circ\exp)\big]_{U_X}. \tag{154}$$

Comme l'extension commute à l'application exponentielle et vu la définition de ζ^0 et de ζ, on a d'après (149) sur l'ouvert U_X

$$\mathrm{Rad}\big(\partial(Q)\big)[J_0^{1/2}\theta^0\circ\exp_0] = \pi^{1/2}\big[\partial(Q)(J^{1/2}\theta\circ\exp)\big]_{U_X}. \tag{155}$$

3.4. Résultats de Rouvière sur les opérateurs différentiels invariants en coordonnées exponentielles.

Dans cette section on ne suppose plus que l'on dispose d'un tore $\mathfrak{s}$.

Dans le cas résoluble, Rouvière [19] a montré que les opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques prennent une forme assez simple lorqu'on les applique sur les fonctions généralisées K-invariantes. Plus précisément, prenons $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et considérons l'élément

$$u = \beta(\partial_{J^{1/2}}Q) \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}]\cdot\mathfrak{k}^{-\delta}$$

(*cf.* notations au début de cette partie et 3.2.3). Soit D_u l'opérateur sur les demi-densités associé à u et D_u^{Exp} l'image inverse par l'application

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{p} \longmapsto G/K, \quad \mathrm{Exp}(X) = \exp(X)K.$$

C'est un opérateur différentiel sur les demi-densités de $\mathfrak{p}$. Le résultat de Rouvière peut s'énoncer ainsi : près de l'origine on a, dans le cas résoluble,

$$D_u^{\exp} - \partial(Q) \in \mathcal{I} \tag{156}$$

où $\mathcal{I}$ est l'idéal à droite engendré par les champs adjoints venant de l'action de $\mathfrak{k}$, *i.e.* par les opérateurs

$$\Xi_A = \big\langle [A, X], \partial_X \big\rangle + \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{ad}\, A)$$

avec $A \in \mathfrak{k}$.

En fait le résultat de Rouvière porte sur les distributions et n'est pas formulé exactement sous cette forme, mais nous allons revenir sur ce point. On va traduire et rappeler dans cette section les résultats de Rouvière de [21] et [19] pour les demi-densités généralisées dans le cas des espaces symétriques généraux puis dans le cas des espaces symétriques résolubles.

On considère pour commencer un espace symétrique G/K quelconque. Soit $\mathcal{W}$ un ouvert connexe de $\mathfrak{p}$, K-invariant, stable par les homothéties de rapport $t \in [-1, 1]$, sur lequel l'application Exp est un difféomorphisme sur son image. Soit V une distribution sur $\mathcal{W}$, Rouvière définit dans [21] la distribution $\widetilde{V}$ sur les sections du fibré $E_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$, par

$$\langle \widetilde{V}, \phi \rangle = \langle V, \varphi \rangle \tag{157}$$

avec φ une fonction à support compact dans $\mathcal{W}$ et

$$\phi d_{G/K}^{1/2} = \mathrm{Exp}_*(\varphi d^{1/2} X).$$

On a $\phi(\exp X) = J^{-1/2}(X)\varphi(X)$ pour X dans le support de φ. Comme on l'a dit dans le début de cette partie, on ne fait pas de distinction (même au niveau des notations), entre ϕ section du fibré $E_{\Delta_{G,K}^{-1/2}}$ et la fonction semi-invariante sur G qui lui correspond.

Soit $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}^{-\infty}(|\Lambda|^{1/2})$ la demi-densité généralisée correspondant à $\widetilde{V}$, *i.e.* on a pour $\mu = \phi(g) d_{G/K}^{1/2}$ demi-densité à support dans $\mathrm{Exp}(\mathcal{W})$

$$\langle \tilde{\theta}, \mu \rangle = \langle \widetilde{V}, \phi \rangle. \tag{158}$$

Écrivons

$$\tilde{\theta} = \theta d_{G/K}^{1/2} \tag{159}$$

avec $\theta \in \mathcal{C}^{-\infty}(E_{\Delta_{G,K}^{-1/2}})$. Alors la distribution V correspond à la demi-densité généralisée

$$\mathrm{Exp}^*(\theta d_{G/K}^{1/2}) = J^{1/2}\theta \circ \exp d^{1/2}X. \tag{160}$$

On a donc pour φ à support compact dans $\mathcal{W}$ ($\phi d_{G/K}^{1/2} = \mathrm{Exp}_*(\varphi d^{1/2}X)$)

$$\langle V, \varphi\rangle = \langle J^{1/2}\theta \circ \exp d^{1/2}X, \varphi(X)d^{1/2}X\rangle \tag{161}$$

$$= \int_{\mathfrak{p}} \theta \circ \exp(X) J^{1/2}(X)\varphi(X)dX \tag{162}$$

$$= \int_{G_0/K_0} \theta(x)\phi(x)d_{G/K}(x).$$

Maintenant, si V est K-invariante comme distribution, alors θ vérifie pour $k \in K$ et $X \in \mathcal{W}$

$$\theta \circ \exp(\mathrm{Ad}\, k \cdot X) = \Delta_{G,K}^{-1}(k)\theta \circ \exp(X) \tag{163}$$

c'est-à-dire que $\theta \circ \exp$ vérifie la condition de covariance déjà rencontrée dans les sections précédentes.

Soit $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et considérons l'élément

$$u = \beta(\partial_{J^{1/2}}Q) \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}.$$

En coordonnées exponentielles, on a sur $\mathcal{W}$, par définition de D_u^{Exp} sur les demi-densités généralisées,

$$D_u^{\mathrm{Exp}}(J^{1/2}\theta \circ \exp) = J^{1/2}(D_u\theta) \circ \exp. \tag{164}$$

Pour les distributions V qui sont K-invariantes sur un ouvert près de l'origine, Rouvière montre que l'on a

$$\widetilde{{}^tD_u}\widetilde{V} = \left[{}^tq(X, \partial_X)V\right]^{\sim} \tag{165}$$

où $q(X, \partial_X)$ est une opérateur différentiel sur $\mathfrak{p}$ correspondant au symbole

$$q(X, \xi) = e_\epsilon(X, \partial_\xi)Q(\xi) \tag{166}$$

et $e_\epsilon(.,.)$ la fonction analytique définie dans [21]. Nous ne précisons pas ce qu'est exactement cette fonction car, dans le cas des paires symétriques résolubles, on a $e_\epsilon(.,.) = 1$ [18]. Dans ce cas on a $q(X,\xi) = Q(\xi)$ et l'équation (165) est valable pour les distributions K-invariantes sur l'ouvert $\mathcal{W}$ (voir [18, p. 574]). En particulier si G est connexe résoluble et G/K simplement connexe le résultat de Rouvière est valable sur l'ouvert $\mathcal{V}$ (3.2.3).

On a donc dans le *cas résoluble* pour notre opérateur D_u

$$(167)\qquad \langle \widetilde{{}^t D_u \widetilde{V}}, \phi \rangle = \langle \widetilde{[{}^t\partial(Q)V]}, \phi \rangle.$$

Si $\widetilde{V}$ correspond à la demi-densité généralisée $\tilde{\theta}$, alors ${}^t\widetilde{D_u}\widetilde{V}$ correspond à la demi-densité $D_{u^\sigma}(\tilde{\theta})$ (d'après la formule de Lichnerowicz) et on en déduit que l'on a pour $\phi d_{G/K}^{1/2} = \mathrm{Exp}_*(\varphi d^{1/2}X)$, avec φ à support compact dans $\mathcal{W}$,

$$(168)\qquad \int_{G/K} D_{u^\sigma}(\theta)(x)\phi(x)d_{G,K}(x) = \int_{\mathfrak{p}} J^{1/2}(X)\theta(\exp X)\partial(Q)(\varphi)(X)dX$$
$$= \int_{\mathfrak{p}} D_{u^\sigma}^{\mathrm{Exp}}(J^{1/2}\theta \circ \exp)\varphi(X)dX.$$

On conclut que l'on a l'égalité suivante sur $\mathcal{W}$

$$(169)\qquad D_{u^\sigma}^{\mathrm{Exp}}(J^{1/2}\theta \circ \exp) = \partial(Q^\wedge)(J^{1/2}\theta \circ \exp)$$

avec $Q^\wedge(X) = Q(-X)$. Comme on a $u = \beta(\partial_{J^{1/2}}Q)$, on en déduit l'égalité $u^\sigma = \beta(\partial_{J^{1/2}}Q^\wedge)$. Finalement dans le cas résoluble le résultat de Rouvière s'écrit simplement sur les demi-densités généralisées $\zeta d^{1/2}X$, vérifiant la condition de covariance pour $k \in K, X \in \mathcal{W}$, $\zeta(\mathrm{Ad}\, k \cdot X) = \Delta_{G,K}^{-1}(k)\zeta(X)$,

$$(170)\qquad D_u^{\mathrm{Exp}}\zeta = \partial(Q)\zeta.$$

Comme on l'a dit au début de cette section, on a le résultat plus fort suivant toujours pour le cas résoluble :

$$(171)\qquad D_u^{\exp} - Q(\partial_X) \in \mathcal{I}$$

où $\mathcal{I}$ est l'idéal à gauche des opérateurs différentiels à coefficients analytiques engendré par les champs de vecteurs adjoints

$$\Xi_A = \big\langle [A,X], \partial_X \big\rangle + \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{ad}\, A)$$

($A \in \mathfrak{k}$), voir [14] pour le cas des groupes. Grâce à notre dictionnaire, la présence de ce caractère $\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{ad}\, A)$ est naturelle.

3.5. Preuve du théorème 2.

Nous disposons maintenant grâce au matériel des sections 3.1, 3.2 et 3.3 de tous les ingrédients pour démontrer le théorème 2 dont nous rappelons l'énoncé.

THÉORÈME. — *Soit* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *une paire symétrique résoluble ; alors l'homomorphisme de Harish-Chandra coïncide avec l'isomorphisme de Rouvière.*

La difficulté de ce théorème réside dans le fait que les méthodes de Rouvière sont globales, comme d'ailleurs toute la théorie autour du résoluble, tandis que les méthodes du semi-simple sont radiales. Le matériel des sections précédentes est donc un pont entre les deux théories.

Comme nous l'avons déjà signalé, il est impératif, quand on travaille dans le cadre le plus général, d'introduire tous les caractères qui apparaissent dans les sections précédentes. Toutefois dans le cas où $\mathfrak{g}$ est résoluble, l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est unipotent. Par conséquent l'idéal $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$ est résoluble mais de plus $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ est unipotent et de fait tous les caractères de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ sont triviaux.

Il suffit de démontrer le théorème 2 pour $\mathfrak{h}$, car l'homomorphisme de Harish-Chandra (tel que nous l'avons défini dans l'introduction) pour $\mathfrak{g}$ coincide avec celui de $\mathfrak{h}$. Par ailleurs d'après le principe de Lefschetz on peut supposer aussi que l'on est dans la situation algébrique sur $\mathbb{C}$.

On suppose donc que $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est résoluble algébrique sur $\mathbb{C}$ de σ-rang non nul (sinon il n'y a rien à démontrer, *cf.* introduction) avec $\mathfrak{k}$ unipotent et on se donne G algébrique complexe et irréductible d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On va considérer nos groupes complexes comme des groupes de Lie réels.

Rappelons ici quelques faits sur le passage du complexe au réel. Si on note dans un premier temps $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, l'espace réel sous-jacent à $\mathfrak{g}$, alors il existe une injection ι complexe de $\mathfrak{g}$ dans $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$, donnée par la formule

$$X \longmapsto \frac{1}{2}(X \otimes 1 - iX \otimes i),$$

pour $X \in \mathfrak{g}$. Le champ de vecteur $\iota(X)$ est un champ de vecteurs holomorphes sur le groupe de Lie réel G, lorsqu'on considère sa structure complexe. Pour $f \in \mathfrak{p}^*$ posons $f_1 = \Re(f)$, la partie réelle de f. Alors on a $2f_1(\iota(X)) = f(X)$ et l'application $f \mapsto f_1$ est K-équivariante. Pour A un $\mathbb{C}$-endomorphisme sur $\mathfrak{g}$, on a

$$\det_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}(A) = \left|\det_{\mathfrak{g}}(A)\right|^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}(A) = 2\Re\big(\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(A)\big).$$

L'injection ι s'étend aux algèbres enveloppantes et fournit une injection complexe de $U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels invariants (à coefficients complexes) sur les demi-densités de G/K c'est-à-dire

$$U[\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}]^{\mathfrak{k}} \otimes \mathbb{C}/U[\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}]^{\mathfrak{k}} \otimes \mathbb{C} \cap U[\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}] \otimes \mathbb{C} \cdot \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}^{-\delta_{\mathbb{R}}}.$$

Pour $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$, on notera $D_{\iota(u)}$ l'opérateur différentiel associé sur les demi-densités de G/K.

On fixe $Q \in S[\mathfrak{p}]^{\mathfrak{k}}$ et on définit $u \in U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}}/U[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{k}} \cap U[\mathfrak{g}] \cdot \mathfrak{k}^{-\delta}$ par $u = \beta(\partial_{J^{1/2}}Q)$. On veut montrer que l'on a $\gamma_{\mathfrak{g}}(u) = Q$, c'est-à-dire $\Gamma(u) = \beta_0(Q_0)$, avec $\Gamma(u)$ la projection de Harish-Chandra (1) et Q_0 la restriction de Q à $\mathfrak{p}_0^*$ (voir l'introduction pour les notations).

On prend pour $\mathfrak{s}$ la partie déployée du tore associé à un élément très régulier dans $\mathfrak{p}^*$ (*cf.* introduction). Ce tore réel n'est pas central dans $\mathfrak{g}$ sinon $\mathfrak{g}$ serait de σ-rang nul. On se retrouve donc dans la situation étudiée dans les sections 3.1, 3.2 et 3.3. Les notations sont celles de 3.1 qui sont alors cohérentes avec celles de l'introduction.

Soit donc $\mathfrak{g}_0$ le centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{p}_0^*$ générique ; on pose $f_1 = \Re(f)$ la partie réelle de f. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'orbite réelle $\Omega = \mathrm{Ad}(K_0) \cdot 2f_1$ est tempérée. La désintégration de la mesure de Lebesgue fournit génériquement une mesure tempérée T_f sur Ω. Soit $\widehat{T_f}$ la transformée de Fourier de cette mesure ; c'est une fonction généralisée sur $\mathfrak{p}_0$.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est algébrique (au sens de Chevalley) ; on peut donc parler du spectre d'un élément (noté $\mathrm{sp}(X)$). Soit $\mathcal{W}$ l'ouvert de $\mathfrak{p}$ défini par

$$\mathcal{W} = \{X \in \mathfrak{p}\,;\ \Im(\mathrm{sp}(X)) \subset\,]-\tfrac{1}{4}i\pi, \tfrac{1}{4}i\pi[\,\}. \tag{172}$$

On a $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ (voir 3.2.3) et Exp est un difféomorphisme de $\mathcal{W}$ sur son image. On peut appliquer le résultat de Rouvière sur cet ouvert. Posons $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W} \cap \mathfrak{p}_0$. On a $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_0$.

Soit $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ la demi-densité généralisée sur $\mathrm{Exp}(\mathcal{W}_0)$ définie par la condition sur $\mathcal{W}_0$

$$\theta^0 \circ \exp = J_0^{-1/2}\widehat{T_f}. \tag{173}$$

Alors $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ vérifie la condition de covariance (94), qui dans notre cas exprime juste l'invariance (rappelons que le groupe K_0 est unipotent).

Soit $X \in \boldsymbol{U} \cap \mathcal{W}$ (102). Posons $x = \exp(X)$. On note $\theta d^{1/2}_{G/K}$ l'extension locale sur $\mathcal{O}_x$ de $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ près du point xK (voir section 3.2). Appliquons la formule (154) et utilisons le résultat de Rouvière dans le cas résoluble (170). Il vient sur l'ouvert U_X et par suite sur $\boldsymbol{U} \cap \mathcal{W}$

$$\big((\mathrm{Rad}\, D_{\iota(u)})\theta^0\big) \circ \exp_0 = J_0^{-1/2}\pi^{1/2}\big[\partial(\iota(Q))(J^{1/2}\theta \circ \exp)\big]_{U_X}. \tag{174}$$

Appliquons la formule (155) : il vient sur l'ouvert U_X de $\mathfrak{p}_0$

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{Rad}\, D_{\iota(u)})\theta^0\big) \circ \exp_0 &= J_0^{-1/2}\big(\mathrm{Rad}\,\partial(\iota(Q))\big)\big(J_0^{1/2}\theta^0 \circ \exp_0\big)\\ &= J_0^{-1/2}\big(\mathrm{Rad}\,\partial(\iota(Q))\big)\big(\widehat{T_f}\big).\end{aligned} \tag{175}$$

Soit $S \in \mathfrak{s}$; c'est par construction un élément central dans $\mathfrak{g}_0$; on a donc pour $Z \in \mathcal{W}_0$

$$\widehat{T_f}(Z+S) = \mathrm{e}^{i2f_1(S)}\widehat{T_f}(Z), \tag{176}$$

$$\theta^0 \circ \exp_0(S+Z) = e^{i2f_1(S)}\theta^0 \circ \exp_0(Z). \tag{177}$$

Maintenant, à cause de la forme bien particulière de ces fonctions généralisées sur $\mathcal{W}_0$, on va pouvoir faire tendre S vers l'infini. Plus précisément, soit ψ une fonction à support compact inclus dans $\mathcal{W}_0$. Posons pour $Z \in \mathfrak{p}_0$

$$\psi_S(Z) = \psi(Z-S). \tag{178}$$

Alors pour S assez grand on aura $\operatorname{supp}(\psi_S) \subset \boldsymbol{U} \cap \mathcal{W}$. On peut appliquer l'opérateur $\operatorname{Rad}(\partial(\iota(Q)))$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{p}_0} &\big(\operatorname{Rad}\partial(\iota(Q))\widehat{T_f}\big)(Z)\psi_S(Z)dZ \\ &= \int_{\mathfrak{p}_0} \big(\operatorname{Rad}\partial(\iota(Q))\widehat{T_f}\big)(Z+S)\psi(Z)dZ\end{aligned} \tag{179}$$

qui peut s'écrire selon la proposition 8

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{p}_0} &\big[\partial^0(\iota(Q_0))\widehat{T_f}\big](Z+S)\psi(Z)dZ \\ &+ \sum_i \int_{\mathfrak{p}_0} g_i(Z+S)\big[\partial^0(\iota(Q_i))\widehat{T_f}\big](Z+S)\psi(Z)dZ.\end{aligned} \tag{180}$$

On a $\iota(Q_0)(2if_1) = Q_0(f)$ et d'après (176), cette expression vaut aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2if_1(S)}\Big\{&Q_0(if)\int_{\mathfrak{p}_0} \widehat{T_f}(Z)\psi(Z)dZ \\ &+ \sum_i \int_{\mathfrak{p}_0} \big[\partial^0(\iota(Q_i))\widehat{T_f}\big](Z)g_i(Z+S)\psi(Z)dZ\Big\}.\end{aligned} \tag{181}$$

Or d'après la proposition 8, la famille de fonctions à support compact (fixe) paramétrées par S

$$Z \longmapsto g_i(Z+S)\psi(Z) \tag{182}$$

tend vers 0 quand $S \to \infty$, uniformément en Z dans le support compact de ψ. Les dérivées de cette famille de fonctions tendent aussi vers 0 uniformément. On a donc une convergence vers 0 dans la topologie des fonctions à support compact. Par conséquent, (181) est équivalent, quand $S \to \infty$, à

$$e^{2if_1(S)} Q_0(if) \int_{\mathfrak{p}_0} \widehat{T_f}(Z)\psi(Z)dZ \tag{183}$$

à condition que $Q_0(if)\int_{\mathfrak{p}_0} \widehat{T_f}(Z)\psi(Z)dZ$ ne soit pas nul, ce que l'on peut supposer puisque f est générique (Q_0 est non nul) et que l'on peut trouver un ψ à support dans un voisinage arbitrairement proche de 0 dans $\mathfrak{p}_0$, tel que $\int_{\mathfrak{p}_0} \widehat{T_f}(Z)\psi(Z)dZ$ soit non nul.

Soit $\phi d^{1/2}_{G_0/K_0}$ la demi-densité image directe $\mathrm{Exp}_*(\psi d^{1/2} Z)$. C'est une demi-densité à support compact dans G_0/K_0 et on a pour $Z \in \mathcal{W}_0$

$$\phi(\exp_0 Z) = J_0^{-1/2}\psi(Z). \tag{184}$$

Soit $s = \exp_0 S$. Définissons ϕ_s sur G_0/K_0 par

$$\phi_s(zK_0) = \phi(zs^{-1}K_0). \tag{185}$$

Alors pour S assez grand on aura $\mathrm{supp}(\phi_s) \subset \mathcal{U} \cap \mathrm{Exp}(\mathcal{W}_0)$ (voir (43)). On peut donc appliquer l'opérateur $\mathrm{Rad}\, D_{\iota(u)}$. On a donc d'après la proposition 6 (pour simplifier ces notations très lourdes, j'écris ici ρ pour $\rho_{-\mathcal{C}}$)

$$\begin{aligned}(186)\quad \int_{G_0/K_0} &(\mathrm{Rad}\, D_{\iota(u)}\theta^0)(z)\phi_s(z) d_{G_0/K_0}(z) \\ &= \int_{G_0/K_0} \Big[R^0_{\iota(u_0^\rho)} + \sum_i g_i R^0_{\iota(v_i)}\Big](\theta^0)(z)\phi(zs^{-1}) d_{G_0/K_0}(z),\end{aligned}$$

qui vaut d'après (177)

$$\begin{aligned}(187)\quad e^{2if_1(S)}\Big\{ &\int_{G_0/K_0} [R^0_{\iota(u_0^\rho)}\theta^0](z)\phi(z) d_{G_0/K_0}(z) \\ &+ \sum_i \int_{G_0/K_0} \Big[R^0_{\iota(u_i)}\theta^0\Big](z) g_i(zs)\phi(z) d_{G_0/K_0}(z)\Big\}.\end{aligned}$$

Soit φ une fonction à support compact dans $\exp(\mathcal{W}_0)K_0$ telle que l'on ait pour $g \in G_0$

$$\phi(g) = \int_{K_0} \varphi(gk) d_{K_0}(k). \tag{188}$$

(Il n'y a pas de caractère car le goupe K_0 est unipotent.)

Comme on a pour $k \in K_0$ et $z \in p_0^{-1}(\mathcal{U}) = \widetilde{\mathcal{U}}$,

$$\sum_i g_i(zk) \operatorname{Ad} k \cdot u_i = \sum_i g_i(z) u_i,$$

on peut écrire pour S assez grand

$$\begin{aligned}(189) \quad \sum_i \int_{G_0/K_0} [R^0_{\iota(u_i)} \theta^0](z) g_i(zs) \phi(z) d_{G_0/K_0}(z)\} \\ = \sum_i \int_{G_0} [R^0_{\iota(u_i)} \theta^0](y) g_i(ys) \varphi(y) d_{G_0}(y).\end{aligned}$$

D'après la proposition 6, la famille (de paramètre s) de fonctions à support compact fixe dans G_0

$$(190) \qquad y \longmapsto g_i(ys)\varphi(y)$$

tend vers 0 dans la topologie des fonctions à support compact. Par conséquent, (187) est équivalent à

$$(191) \qquad \mathrm{e}^{2if_1(S)} \int_{G_0/K_0} [R^0_{\iota(u_0^\rho)} \theta^0](z) \phi(z) d_{G_0/K_0}(z)$$

à condition que ce terme soit non nul, ce que l'on peut aussi supposer. En effet, on a par définition de la projection de Harish-Chandra

$$(192) \qquad u_0^{\rho - c} = \Gamma(u),$$

cet élément est donc non nul (à cause de l'injectivité de la projection de Harish-Chandra). Par ailleurs, le petit espace symétrique G_0/K_0 est de σ-rang nul. On a montré dans [24, chap. 2] que la demi-densité généralisée $\theta^0 d^{1/2}_{G_0/K_0}$ était, sur l'ouvert $\operatorname{Exp}(\mathcal{W}_0)$, fonction propre sous l'action des opérateurs différentiels G_0-invariants sur les demi-densités de G_0/K_0, avec pour valeur propre $\beta_0^{-1}(\Gamma(u))(if)$ (que l'on peut supposer non nul car $\beta_0^{-1}(\Gamma(u))$ est non nul et f générique). On a donc sur $\mathcal{W}_0$

$$(193) \qquad [R^0_{\iota(u_0^\rho)} \theta^0] \circ \exp_0 = \beta^{-1}(\Gamma(u))(if) \theta^0 \circ \exp_0 .$$

Le terme dominant dans (187) est donc

$$(194) \qquad \mathrm{e}^{2if_1(S)} \beta_0^{-1}(\Gamma(u))(if) \int_{G_0/K_0} \theta^0(z) \phi(z) d_{G_0/K_0}(z).$$

REMARQUE. — L'action de l'opérateur $\partial_{J_0^{1/2}}$ est sans effet sur les éléments de $S[\mathfrak{p}_0]^{\mathfrak{k}_0}$; ceci résulte de [24] et peut aussi se voir sur la formule (193) en appliquant le résultat de Rouvière au petit espace symétrique résoluble G_0/K_0.

Comme on a pour $Z \in \mathfrak{p}_0$, $J_0(Z+S) = J_0(Z)$, la formule (175) s'écrit finalement pour S assez grand

$$\begin{aligned}
(195)\qquad & \int_{G_0/K_0} (\operatorname{Rad} D_{\iota(u)}\theta^0)(z)\phi_s(z)d_{G_0/K_0}(z) \\
& \qquad = \int_{\mathfrak{p}_0} (\operatorname{Rad} D_{\iota(u)}\theta^0)(\exp_0 Z)\phi_s(\exp_0 Z)J_0(Z)dZ \\
(196)\qquad & \qquad = \int_{\mathfrak{p}_0} \big[\operatorname{Rad}(\partial(\iota(Q)))\widehat{T}_f\big](Z)\psi_S(Z)dZ.
\end{aligned}$$

Le comportement asymptotique des deux membres (194), (183) donne l'égalité non triviale

$$(197)\quad \beta_0^{-1}\big(\Gamma(u)\big)(if) \int_{\mathfrak{p}_0} \theta^0(\exp_0 Z)J_0^{1/2}(Z)\psi(Z)dZ = Q_0(if) \int_{\mathfrak{p}_0} \widehat{T}_f(Z)\psi(Z)dZ.$$

On déduit de tout cela, vu la définition de θ^0, que pour un ensemble Zariski dense de formes linéaires $f \in \mathfrak{p}_0^*$ on a

$$(198)\qquad Q_0(if) = \beta_0^{-1}\big(\Gamma(u)\big)(if).$$

Par suite les fractions rationnelles Q et $\gamma_{\mathfrak{g}}(u)$ sont égales, et il vient l'égalité

$$(199)\qquad \gamma_{\mathfrak{g}}(u) = Q,$$

ce qui signifie que l'homomorphisme de Harish-Chandra pour les paires symétriques résolubles algébriques complexes coïncide avec l'isomorphisme de Rouvière. Par le principe de Lefschetz, ce fait s'étend aux paires symétriques résolubles algébriques sur un corps commutatif de caractéristique nulle et par suite à toutes les paires symétriques résolubles en caractéristique nulle par les méthodes standards (voir [25]). Le théorème 2 est démontré. □

4. Application de la théorie de la partie radiale

Dans cette partie on démontre la conjecture polynomiale pour les éléments qui viennent de l'algèbre enveloppante d'un idéal résoluble. On utilise les notations de l'introduction. Plus précisément, montrons le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *une paire symétrique algébrique sur* $\mathbb{C}$ *et* $\mathfrak{h}$ *un idéal résoluble et* σ*-stable. Soit* $Q \in S[\mathfrak{p}_\mathfrak{h}]^{\mathfrak{k}}$; *alors on a*

$$\gamma_\mathfrak{g}\big(\beta(\partial_{J_\mathfrak{g}^{1/2}} Q)\big) = \gamma_\mathfrak{h}\big(\beta(\partial_{J_\mathfrak{h}^{1/2}} Q)\big) = Q.$$

Preuve. — On écrit, comme indiqué en introduction, $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_\mathfrak{h}$ pour la σ-décomposition de $\mathfrak{h}$. Comme on l'a déjà fait remarquer lors de la démonstration du théorème 2, section 3.5, seul l'idéal $\mathfrak{p}_\mathfrak{h} \oplus [\mathfrak{p}_\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_\mathfrak{h}]$ joue un rôle. Sans perte de généralité on peut donc supposer que $\mathfrak{k}_\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ est unipotent (rappelons que si $\mathfrak{h}$ est résoluble $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ est unipotent).

Le σ-rang de $\mathfrak{h}$ est plus petit que celui de $\mathfrak{g}$. Pour le voir, prenons $f \in \mathfrak{p}^*$ très régulier tel que $h = f \mid \mathfrak{h}$ soit aussi très régulier dans $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})^*$. Un tel élément existe car les éléments très réguliers forment un ouvert de Zariski non vide. On note alors $\mathfrak{s}_h \subset \mathfrak{h}$ le tore associé à $h \in \mathfrak{h}^*$ (dans l'algèbre $\mathfrak{h}$). On a

$$[\mathfrak{s}_h, \mathfrak{g}] = \big[\mathfrak{s}_h, [\mathfrak{s}_h, \mathfrak{g}]\big] \subset [\mathfrak{s}_h, \mathfrak{h}], \tag{200}$$

d'où l'on tire $\mathfrak{s}_h \subset \mathfrak{s}_f$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_f} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_h}$ (on note $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_f}$ le centralisateur de $\mathfrak{s}_f$ dans $\mathfrak{g}$).

On en déduit les décompositions compatibles

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^- \oplus \mathfrak{h}^{\mathfrak{s}_h} \oplus \mathfrak{h}^+, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h}^- \oplus \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_h} \oplus \mathfrak{h}^+ = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_f} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Maintenant la projection de Harish-Chandra partielle sur $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_h}$ est compatible à l'homomorphisme de Harish-Chandra de $\mathfrak{g}$. On se ramène à étudier ce qui se passe dans $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}_h}$ pour l'idéal résoluble (σ-stable) $\mathfrak{h}^{\mathfrak{s}_h}$ qui est de σ-rang nul.

On peut donc sans perte de généralité se ramener au cas où $\mathfrak{h}$ est de σ-rang égal à 0. Ce que nous faisons.

Soit f un élément très régulier (dans $\mathfrak{p}^*$), $\mathfrak{s}_f$ son tore associé, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{n}^+$ une décomposition d'Iwasawa associée (*cf.* introduction) et $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}^+$ une décomposition triangulaire. On a une décompostion compatible

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^+. \tag{201}$$

Écrivons pour simplifier

$$\mathfrak{h}_- = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}_+ = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}^{\mathfrak{s}_f} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0. \tag{202}$$

Il ne s'agit pas en général d'une décomposition triangulaire de $\mathfrak{h}$ au sens de l'introduction car le σ-rang de $\mathfrak{h}$ est nul.

Soit $Q \in S[\mathfrak{p}_\mathfrak{h}]^\mathfrak{k}$ et soit v l'élément de $\mathcal{A}_{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})^\mathfrak{k} \subset \mathcal{A}_\mathfrak{k}(\mathfrak{g})$ (*cf.* notations de l'introduction) défini par

$$v = \beta(\partial_{J_\mathfrak{g}^{1/2}} Q). \tag{203}$$

On a $\partial_{J_\mathfrak{g}^{1/2}} Q = \partial_{J_\mathfrak{h}^{1/2}} Q$, car $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

D'après le théorème 2, on a $\gamma_\mathfrak{h}(v) = Q$. Pour démontrer le théorème, on doit comparer Q_0 la restriction de Q à $\mathfrak{p}_0^*$ avec $\beta_0^{-1}(\Gamma_\mathfrak{g}(v))$ et montrer l'égalité

$$\beta_0^{-1}(\Gamma_\mathfrak{g}(v)) = Q_0. \tag{204}$$

Soit $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{s}_f \oplus \mathfrak{h}$. C'est une paire symétrique résoluble (l'algèbre dérivée est résoluble) dont le σ-rang n'est pas forcément 0 ni la dimension de $\mathfrak{s}_f$. Cependant la décomposition

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_- \oplus (\mathfrak{s}_f \oplus \mathfrak{h}^{\mathfrak{s}_f}) \oplus \mathfrak{h}_+ = \mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{h}_1^{\mathfrak{s}_f} \oplus \mathfrak{h}_+ \tag{205}$$

est bien une décomposition de $\mathfrak{h}_1$ associée à l'action du tore réel $\mathfrak{s}$ avec $\mathfrak{s}$ la partie déployée du tore $\mathfrak{s}_f$. On peut supposer que l'action du tore $\mathfrak{s}$ n'est pas centrale dans $\mathfrak{h}_1$, sinon on a $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_0$ et il n'y rien à démontrer.

La sous-paire symétrique $(\mathfrak{h}_1^{\mathfrak{s}_f}, \sigma) \subset (\mathfrak{h}_1, \sigma)$ est de σ-rang nul. On peut donc reprendre pas à pas, pour $(\mathfrak{h}_1, \sigma)$, les arguments de la preuve du théorème 2, section 3.5. Le seul endroit où l'hypothèse sur le tore intervient concerne la non nullité des termes dominants dans les expressions asymptotiques (194), (183). Dans notre situation présente les éléments v et Q sont non seulement $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$-invariants mais aussi $\mathfrak{k}$-invariants ; par conséquent $\beta_0^{-1}(\Gamma_\mathfrak{g}(v))$ et Q_0 sont encore non nuls, et par conséquent la conclusion (198) reste valable. On déduit de tout cela que l'on a

$$\beta_0^{-1}(\Gamma_\mathfrak{g}(v)) = Q_0, \tag{206}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3. $\square$

On déduit du théorème 3 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. — *Soient* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *une paire symétrique algébrique sur* $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_u$ *le radical unipotent de* $\mathfrak{g}$ *et* $Q \in S[\mathfrak{p}_u]^{\mathfrak{k}}$; *alors on a* $\gamma_{\mathfrak{g}}(\beta(Q)) = Q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENOIST (Y.). — *Analyse harmonique sur les espaces symétriques*, J. Functional Analysis, t. **59**, 1984, p. 211–253.

[2] BOURBAKI (N.). — *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, 6.* — Masson, Paris, 1981.

[3] CHEVALLEY (C.). — *Théorie des groupes de Lie,* 2. — Hermann, Paris, 1951.

[4] CLERC (J.-L.). — *Le comportement à l'infini des fonctions de Bessel généralisées*, Advances in Maths, t. **66**, 1987, p. 31–61.

[5] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes.* — Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[6] DUFLO (M.). — *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **10**, 1977, p. 107–144.

[7] DUFLO (M.). — *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, t. **289**, 1979, p. 135–137.

[8] DUFLO (M.). — in *Open problems in representation theory of Lie groups*, Conference on analysis on homogeneous spaces. — T. Oshima ed., August 25–30, Kataka, Japon, 1986.

[9] GEOFFRIAU (F.). — *Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Takiff*, Ann. Math. Blaise Pascal, t. **1,** n° 2, 1994, p. 15–31.

[10] GUILLEMIN (V.), STERNBERG (S.). — *Geometric asymptotics*, Math. Surveys, Amer. Math. Soc., Providence, t. **14**, 1977.

[11] HELGASON (S.). — *Groups and Geometric Analysis.* — New-York London, Academic Press, 1984.

[12] KOSTANT (B.), RALLIS (S.). — *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math., t. **93**, 1971, p. 753–809.

[13] HILGERT (J.), NEEB (K.H.). — *Orthogonal Lie algebras with cone potential*, Communication in Algebra, t. **24**, 1996, p. 433–444.

[14] KASHIWARA (M.), VERGNE (M.). — *The Campbell-Haussdorff formula and invariant hyperfunctions*, Invent. Math., t. **47**, 1978, p. 249–272.

[15] LICHNEROWICZ (A.). — *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, t. **257**, 1963, p. 3548–3550.

[16] MEDINA (A.), REVOY (P.). — *Algèbres de Lie orthogonales, modules orthogonaux*, Communication in Algebra, t. **21** (7), 1993, p. 2295–2315.

[17] RAIS (M.), TAUVEL (P.). — *Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie*, J. Reine ang. Mathematik, t. **425**, 1992, p. 123–140.

[18] ROUVIÈRE (F.). — *Espaces symétriques et méthodes de Kashiwara-Vergne*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **19**, 1986, p. 553–581.

[19] ROUVIÈRE (F.). — *Invariant analysis and contractions of symmetric spaces, I*, Compositio Math., t. **73**, 1990, p. 241–270.

[20] ROUVIÈRE (F.). — *Invariant analysis and contractions of symmetric spaces, II*, Compositio Math., t. **80**, 1991, p. 111–136.

[21] ROUVIÈRE (F.). — *Fibrés en droite sur un espace symétrique et analyse invariante*, J. Funct. Analysis, t. **124**, 1994, p. 263–291.

[22] SPRINGER (T.A.). — *Linear algebraic groups*. — Birkhäuser, Boston, 1981.

[23] TOROSSIAN (C.). — *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques*, I : *Méthodes des orbites*, J. Funct. Analysis, t. **117**, 1993, p. 118–173.

[24] TOROSSIAN (C.). — *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques*, II : *L'homomorphisme de Harish-Chandra généralisé*, J. Funct. Analysis, t. **117**, 1993, p. 173–214.

[25] TOROSSIAN (C.). — *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques 2*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. **317**, 1993, p. 817–819.

[26] WARNER G.). — *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, II. — Springer-Verlag, Berlin, 1972.