BULLETIN DE LA S. M. F.

BENOÎT FRESSE

Algèbre des descentes et cogroupes dans les algèbres sur une opérade

Bulletin de la S. M. F., tome 126, nº 3 (1998), p. 407-433
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_3_407_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 407–433.

ALGÈBRE DES DESCENTES ET COGROUPES DANS LES ALGÈBRES SUR UNE OPÉRADE

PAR BENOÎT FRESSE (*)

RÉSUMÉ. — On considère l'algèbre des descentes graduée complétée $\Sigma^\wedge = \Pi_n \Sigma_n$ associée aux groupes symétriques S_n. Les idempotents eulériens $e^n \in \Sigma^\wedge$ forment une famille d'idempotents orthogonaux dans $\Sigma^\wedge$. On fixe une opérade algébrique $\mathcal{P}$ et on travaille dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres graduées. Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe. On montre que $\Sigma^\wedge$ agit de façon naturelle sur R ; par suite, on obtient une décomposition naturelle $R = \oplus_n e^n R$. On montre que la composante $e^1 R$ engendre R librement comme $\mathcal{P}$-algèbre. Dans le cas des algèbres commutatives $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, on retrouve un théorème de structure classique sur les algèbres de Hopf commutatives.

ABSTRACT. — DESCENT ALGEBRA AND COGROUPS IN ALGEBRAS OVER AN OPERAD. — We consider the complete graded descent algebra $\Sigma^\wedge = \Pi_n \Sigma_n$ which is associated to the symmetric group S_n. The eulerian idempotents $e^n \in \Sigma^\wedge$ form a sequence of orthogonal idempotents in $\Sigma^\wedge$. Fix an algebraic operad $\mathcal{P}$; we work in the category of graded $\mathcal{P}$-algebras. Let R be a connected graded $\mathcal{P}$-algebra equipped with a cogroup structure. We show that R suports a canonical $\Sigma^\wedge$-action. As a consequence, we obtain a decomposition $R = \oplus_n e^n R$. We show that the component $e^1 R$ generates R freely as an $\mathcal{P}$-algebra. In the case of commutative algebras $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, we recover a classical structure theorem on commutative Hopf algebras.

1. Introduction

Une algèbre de Hopf commutative est la donnée d'une algèbre commutative R munie d'un *coproduit* $\gamma : R \to R \otimes R$ et d'une *antipode* $\iota : R \to R$ vérifiant des relations classiques. Rappelons que le produit tensoriel représente le coproduit dans la catégorie des algèbres commutatives. Aussi on peut généraliser la notion d'algèbre de Hopf pour les

(*) Texte reçu le 1er avril 1998, accepté le 1er juin 1998.
Benoît FRESSE, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 (France). Email : fresse@math.unice.fr.
Classification AMS : 16W0, 18C, 05E10.

Mots clés : cogroupe, algèbre des descentes de Solomon, opérade.

algèbres associatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Poisson : dans la définition, on remplace le produit tensoriel par le coproduit dans la catégorie d'algèbres considérée. Génériquement, cette structure porte le nom de *cogroupe*. Dans cet article, on va travailler dans le cadre des algèbres sur une *opérade*. Une opérade est une structure algébrique spécifiant un type d'algèbres. Par exemple, on a une opérade pour les algèbres commutatives, pour les algèbres associatives, pour les algèbres de Lie, ou pour les algèbres de Poisson.

Il est bien connu (*cf.* [14]) que si R est une algèbre de Hopf commutative graduée connexe définie sur un corps de caractéristique nulle, alors R est une algèbre commutative libre. F. Patras a donné récemment une démonstration élégante de ce théorème (*cf.* [17]) qui a également l'avantage de fournir un module de générateurs canonique. Le but de cet article est de généraliser ce résultat pour les cogroupes des catégories d'algèbres sur une opérade. On établit le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade non-graduée unitale connexe* (*cf.* § 3). *Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe. On a une décomposition canonique* (*appelée la* décomposition en poids)

$$R = \bigoplus_{i\geq 1} R^{(i)}$$

avec la propriété suivante. Notons

$$T_i(\mathcal{P}, R^{(1)}) = \mathcal{P}(i) \otimes_{S_i} R^{(1)\otimes i}$$

la composante de degré i de la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par $R^{(1)}$. Le produit de $\mathcal{P}$-algèbre induit un isomorphisme

$$T_i(\mathcal{P}, R^{(1)}) \xrightarrow{\simeq} R^{(i)}.$$

En particulier, la $\mathcal{P}$-algèbre R est librement engendrée par $R^{(1)}$.

Dans le cas de l'opérade des algèbres commutatives $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, la composante $T_i(\mathcal{P}, -)$ est la composante de degré i de l'algèbre symétrique et on retrouve exactement le résultat classique (*cf.* [17]). Mentionnons que si R est la cogèbre tensorielle munie du coproduit de déconcaténation et du produit «shuffle», alors il est connu que la décomposition en poids de R fournit la décomposition en poids de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique (*cf.* [6], [7], [11], [12, chap. IV]).

La démonstration de F. Patras est basée sur l'étude de la structure de l'anneau des endomorphismes de R. Plus précisément, on se sert du produit de convolution dans $\operatorname{End} R$ pour construire des idempotents dans l'anneau des endomorphismes de R. Cette méthode n'est pas possible dans le cas général et doit être modifiée. En voici la raison. Fixons une opérade $\mathcal{P}$. Une *$\mathcal{P}$-algèbre* désigne une algèbre sur cette opérade $\mathcal{P}$. Le coproduit dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres n'est pas donné par le produit tensoriel. En général, l'expression du coproduit de deux $\mathcal{P}$-algèbres R et de S dépend de la structure d'algèbre de R et de S. Aussi, si $f : R \to R$ et $g : S \to S$ sont de simples applications linéaires, alors il n'y a pas moyen d'étendre f et g au coproduit $R \vee S$.

Voici notre méthode. On fixe un cogroupe R. On introduit $\Sigma^\wedge$, l'algèbre des descentes de Solomon, qui est munie d'un coproduit Δ, d'un produit $*$ appelé le *produit de convolution*, et d'un produit supplémentaire $\circ$ appelé le *produit de composition*. On se sert du produit de convolution $*$ pour construire une application $\Sigma^\wedge \to \operatorname{End} R$ qui commute au produit de composition. Le coproduit de $\Sigma^\wedge$ permet d'exprimer une relation de compatibilité entre l'action de $\Sigma^\wedge$ sur R et la structure d'algèbre de R. *In fine*, c'est cette relation de compatibilité qui permet d'étendre l'action de $s, t \in \Sigma^\wedge$ au coproduit $R \vee R$. Les idempotents donnant la décomposition en poids de R sont contenus dans $\Sigma^\wedge$.

Détaillons maintenant le contenu de l'article :

1) *L'algèbre des descentes de Solomon.* — On rappelle la description par générateurs et relations de l'algèbre des descentes de Solomon Σ.

2) *Action de l'algèbre des descentes sur un cogroupe.* — On construit l'action de l'algèbre des descentes sur un cogroupe.

3) *Décomposition d'un cogroupe. Théorème de structure.* — Dans ce paragraphe, on montre comment prouver le théorème de structure énoncé plus haut pour les cogroupes dans la catégorie des algèbres graduées sur une opérade au moyen de l'action de l'algèbre des descentes de Solomon. Dans le cas gradué, on retrouve les résultats de l'article [2]. La nouvelle démonstration a l'avantage de s'étendre au cadre différentiel gradué.

4) *Théorème de structure pour les cogroupes dans les algèbres de Hopf sur une opérade.* — On étend le théorème de structure du paragraphe précédent aux cogroupes dans la catégorie des algèbres sur une opérade qui sont munis d'une structure de cogèbre compatible.

5) *Théorème de structure pour les groupes dans les cogèbres sur une opérade.* — Dans ce paragraphe, en vue des applications en algèbre homologique, on énonce les résultats duaux à ceux obtenus dans les §§ 2–3.

Conventions. — On fixe un corps de base k de caractéristique nulle. On travaille principalement dans la catégorie des modules gradués qui est munie de son produit tensoriel habituel, l'opérateur de symétrie suivant la règle des signes. Un module gradué est supposé être nul en degré strictement négatif. On dit qu'un module gradué est *connexe* s'il est nul en degré zéro. Soit C une cogèbre. On utilise la convention de Sweedler pour représenter le coproduit de $c \in C$; explicitement :

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \in C \otimes C.$$

Remerciements. — Je suis infiniment reconnaissant à P. Cartier pour m'avoir indiqué les travaux de F. Patras. Je lui dois en particulier l'idée d'étendre ses démonstrations au cadre des algèbres sur une opérade.

2. L'algèbre des descentes de Solomon

Dans ce paragraphe, on introduit l'algèbre des descentes de Solomon en donnant une description par générateurs et relations. Pour une présentation plus classique, on se reportera à [21] ou à [20, chap. 9].

2.1. Compositions. — On appelle *composition* une suite finie d'entiers $I = (i_1, \dots, i_r)$; l'entier r est appelé la *longueur* de I. On dit que I est *réduite* quand les entiers $i_1, \dots, i_r$ sont non nuls. À une composition quelconque I, on associe la composition réduite $\widetilde{I}$ obtenue en retirant les termes nuls.

2.2. L'algèbre des descentes de Solomon. — On notera Σ l'*algèbre graduée des descentes de Solomon* pour les groupes symétriques. En fait, Σ est une bigèbre cocommutative munie d'un produit associatif supplémentaire qu'on appelle le produit de composition. On note respectivement $*$ et Δ le produit et le coproduit de bigèbre ; on note $\circ$ le produit de composition.

Rappelons d'abord la structure de bigèbre. Pour le produit $*$, l'algèbre Σ est librement engendrée par des éléments notés p_i où $i \in \mathbb{N}^*$. L'unité du produit $*$ est notée p_0. Le coproduit Δ est défini par

$$\Delta p_n = \sum_{i+j=n} p_i \otimes p_j.$$

En fait, $\langle p_i,\ i \geq 0 \rangle$ est la cogèbre cocommutative colibre à un cogénérateur et Σ est l'algèbre de Hopf libre engendrée par cette cogèbre. Considérons une composition $I = (i_1, \dots, i_r)$; on note traditionellement

$$p_I = p_{i_1} * \cdots * p_{i_r}.$$

Comme p_0 est l'unité pour $*$, le produit p_I se réduit à $p_{\tilde{I}}$.

Le produit de composition est défini de la façon suivante. Soit $M = (m_{k,\ell})$ une matrice $p \times q$. On note respectivement :

- $C(M)$ la composition obtenue en sommant sur les colonnes :

$$C(M) = (m_{1,1} + \cdots + m_{p,1}\,, \ldots,\, m_{1,q} + \cdots + m_{p,q})\,;$$

- $L(M)$ la composition obtenue en sommant sur les lignes :

$$L(M) = (m_{1,1} + \cdots + m_{1,q},\, \ldots,\, m_{p,1} + \cdots + m_{p,q})\,;$$

- $T(M)$ la composition obtenue en énumérant les entrées de M colonne par colonne :

$$T(M) = (m_{1,1}, \ldots, m_{p,1}, \ldots, m_{1q}, \ldots, m_{p,q}).$$

Soient I et J deux compositions de longueurs respectives p et q. On pose

$$p_I \circ p_J = \sum_M p_{T(M)},$$

où M décrit l'ensemble des matrices $p \times q$ telles que $L(M) = I$, $C(M) = J$.

On a les formules de distributions

$$\Delta(u * v) = \sum_{(u),(v)} u_{(1)} * v_{(1)} \otimes u_{(2)} * v_{(2)}, \tag{1}$$

$$\Delta(u \circ v) = \sum_{(u),(v)} u_{(1)} \circ v_{(1)} \otimes u_{(2)} \circ v_{(2)}, \tag{2}$$

$$u \circ (v * w) = \sum_{(u)} (u_{(1)} \circ v) * (u_{(2)} \circ w). \tag{3}$$

L'identité (1) est contenue dans les axiomes de bigèbre ; les relations (2) et (3) se montrent par un calcul facile à partir de la définition du produit de composition ci-dessus.

2.3. L'algèbre des descentes complétée. — On note $\Sigma^\wedge$ l'algèbre obtenue en complétant Σ par rapport aux sous espaces

$$\Sigma_{\geq N} = \big\langle p_I,\ |I| \geq N \big\rangle.$$

C'est l'algèbre des descentes complétée $\Sigma^\wedge$ qui contient les idempotents définissant la décomposition en poids d'un cogroupe.

D'abord, soit

$$I = \sum_{n\geq 0} p_n.$$

L'élément I est une unité pour le produit de composition. On note ψ^n les éléments de $\Sigma^\wedge$ définis par la formule

$$\psi^n := I^{*n}.$$

On observe que I est groupe-like. Donc les ψ^n le sont également et ceci entraîne l'identité

$$\psi^n \circ \psi^m = \psi^{nm}.$$

Les *idempotents eulériens* e^i, $i \geq 0$, sont les éléments de $\Sigma^\wedge$ définis par

$$e^1 = \log I = \sum_n (-1)^{n+1} \frac{(I - p_0)^{*n}}{n}, \quad e^i = \frac{(e^1)^{*i}}{i!}.$$

Le premier idempotent e^1 est primitif car il est défini comme le logarithme d'un élément groupe-like.

Les éléments e^i forment un système complet d'idempotents d'orthogonaux pour le produit de composition. Explicitement, on a les relations d'othogonalités

$$e^i \circ e^j = \begin{cases} e^i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la formule de décomposition

$$I = \sum_{i\geq 0} e^i.$$

Cette formule est un cas particulier de la formule de décomposition

$$\psi^n = \sum_{i\geq 0} n^i e^i.$$

Pour une démonstration de ces propriétés, on se réfèrera à [4], [10], [20, chap. 9]. On pourra aussi se reporter à l'article [18] pour avoir une interprétation géométrique de la théorie combinatoire des idempotents eulériens. Pour les applications des idempotents eulériens en algèbre homologique, on se reportera aux références [6], [7], [11], [12, chap. IV].

3. Action de l'algèbre des descentes sur un cogroupe

On fixe une opérade non-graduée $\mathcal{P}$. On suppose $\mathcal{P}$ *unitale connexe*. Plus précisément, $\mathcal{P}$ a une unité $1 \in \mathcal{P}(1)$ et on suppose

$$\mathcal{P}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(1) = k \cdot 1.$$

Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée. On désigne par $\mu(r_1, \dots, r_n)$ l'image de $\mu \otimes (r_1 \otimes \dots \otimes r_n)$ par le produit de $\mathcal{P}$-algèbre $\mathcal{P}(n) \otimes R^{\otimes n} \to R$. L'unité $1 \in \mathcal{P}(1)$ agit comme l'identité. Explicitement, on a

$$1(r) = r, \quad \forall r \in R.$$

On note $T(\mathcal{P}, V)$ la $\mathcal{P}$-algèbre librement engendrée par V. Par définition

$$T(\mathcal{P}, V) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n}.$$

Pour $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $v_1, \dots, v_n \in V$, on note $\mu(v_1, \dots, v_n)$ le tenseur

$$\mu \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \in T(\mathcal{P}, V).$$

Pour une présentation de ces notions, on renvoie le lecteur aux références [5], [8], [9] ou au livre original de P. May [13].

3.1. Coproduit dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres. — Rappelons que la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres graduées est munie d'un *coproduit* noté $\vee$. Ce coproduit peut être réalisé de la façon suivante. Soient R_1, R_2 des $\mathcal{P}$-algèbres graduées. Considérons les morphismes

$$T\big(\mathcal{P}, T(\mathcal{P}, R_1) \oplus T(\mathcal{P}, R_2)\big) \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$$

définis par :

- le morphisme d_0 est induit par les produits de $\mathcal{P}$-algèbre

$$T(\mathcal{P}, R_i) \longrightarrow R_i, \quad i = 1, 2\,;$$

- le morphisme d_1 est le composé de l'injection canonique et du produit de l'opérade

$$T\big(\mathcal{P}, T(\mathcal{P}, R_1) \oplus T(\mathcal{P}, R_2)\big) \longrightarrow T\big(\mathcal{P}, T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)\big) \longrightarrow T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2).$$

Le module gradué $R_1 \vee R_2$ est le *coégaliseur* de d_0 et d_1, c'est-à-dire

$$R_1 \vee R_2 = \operatorname{coker}(d_0 - d_1).$$

De plus, le produit

$$T(\mathcal{P}, T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)) \longrightarrow T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$$

passe au quotient pour induire le produit de $\mathcal{P}$-algèbre de $R_1 \vee R_2$

$$T(\mathcal{P}, R_1 \vee R_2) \longrightarrow R_1 \vee R_2.$$

Cette construction montre que $R_1 \vee R_2$ possède en fait une structure de $\mathcal{P}$-algèbre bigraduée. Plus précisément, le module $T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$ est bigradué par le degré en R_1 et le degré en R_2. On vérifie que cette bigraduation passe au quotient sur $R_1 \vee R_2$. Comme le bidegré de $T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$ est clairement préservé par le produit de $\mathcal{P}$-algèbre, il en va de même pour $R_1 \vee R_2$.

La catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres graduées a un objet nul : le module 0 muni du produit trivial. Par suite on a une projection canonique

$$R_1 \vee R_2 \longrightarrow R_1 \oplus R_2.$$

Cette projection a une section naturelle, qui est la somme des injections canoniques

$$R_1 \longrightarrow R_1 \vee R_2 \longleftarrow R_2.$$

Finalement, on obtient que $R_1 \oplus R_2$ est un facteur direct canonique de $R_1 \vee R_2$ qu'on désigne comme la *composante linéaire* du coproduit $R_1 \vee R_2$. (En fait, $R_1 \oplus R_2$ est la somme des composantes de bidegré $(*, 0)$ et $(0, *)$.)

3.2. Cogroupes dans les algèbres sur une opérade. — Un *cogroupe* dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres graduées est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe R munie d'un coproduit $\gamma : R \to R \vee R$ vérifiant les relations usuelles

$$\gamma \vee R \cdot \gamma = R \vee \gamma \cdot \gamma, \tag{1}$$

$$R \vee 0 \cdot \gamma = 0 \vee R \cdot \gamma = R. \tag{2}$$

La relation (2) entraîne que la projection de γ sur la partie linéaire du coproduit $R \oplus R \hookrightarrow R \vee R$ est égale à l'identité sur chacune des copies de R. On note

$$\nabla : R \vee R \longrightarrow R$$

l'application égale à l'identité sur chacun des facteurs. L'observation précedente permet de montrer l'existence d'une antipode $\iota : R \to R$ vérifiant les relations

$$\nabla \cdot R \vee \iota \cdot \gamma = \nabla \cdot \iota \vee R \cdot \gamma = 0.$$

On se reportera aux articles [2] et [3] pour une étude détaillée de la structure de cogroupe dans le cadre des algèbres sur une opérade.

Dans la suite de l'article

$$\gamma^{(n)} : R \longrightarrow R^{\vee n} \quad \text{et} \quad \nabla^{(n)} : R^{\vee n} \longrightarrow R$$

représentent respectivement l'itéré n-ième du coproduit γ et l'itéré n-ième de la codiagonale ∇.

3.3. Action d'une cogèbre sur une $\mathcal{P}$-algèbre. — Soit C une cogèbre cocommutative augmentée. Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre. Une action de C sur R est la donnée d'une application $C \otimes R \to R$ vérifiant la relation de distribution

$$c \cdot \mu(r_1, \ldots, r_n) = \sum_{(c)} \mu(c_{(1)} \cdot r_1, \ldots, c_{(n)} \cdot r_n),$$

pour tout $c \in C$, $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $r_1, \ldots, r_n \in R$.

LEMME 3.4. — *Soient R_1, R_2 des $\mathcal{P}$-algèbres avec une action de C. Alors $R_1 \vee R_2$ est munie d'une action de C naturelle qui est caractérisée par la propriété suivante : les injections canoniques*

$$R_1 \longrightarrow R_1 \vee R_2 \longleftarrow R_2$$

commutent à l'action de C.

Preuve. — Décrivons l'action de C sur $R_1 \vee R_2$. Rappelons que $R_1 \vee R_2$ est un quotient de $T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$. On munit $R_1 \oplus R_2$ de l'action diagonale de C. On définit alors une application

$$C \otimes T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2) \longrightarrow T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2).$$

Explicitement, si

$$\mu(r_1, \ldots, r_n) \in \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} (R_1 \oplus R_2)^{\otimes n},$$

alors on pose

$$c \cdot \mu(r_1, \ldots, r_n) := \sum_{(c)} \mu(c_{(1)} \cdot r_1, \ldots, c_{(n)} \cdot r_n) \text{ (pour } c \in C).$$

L'action de C sur R_1, R_2 vérifiant la relation de distribution, on montre que l'action de $c \in C$ sur $T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$ coégalise d_1, d_2. Donc par passage au quotient, on obtient une application

$$C \otimes R_1 \vee R_2 \longrightarrow R_1 \vee R_2.$$

Comme le coproduit de C est coassociatif, l'action de C sur $T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$

vérifie la relation de distribution par rapport au produit de $\mathcal{P}$-algèbre. Finalement, le produit de $R_1 \vee R_2$ étant induit par le produit de $T(\mathcal{P}, R_1 \oplus R_2)$ par passage au quotient, l'action de C sur $R_1 \vee R_2$ vérifie la relation de distribution. Cette preuve montre également que l'action de C sur $R_1 \vee R_2$ est caractérisée par la propriété énoncée dans le lemme. $\square$

La proposition suivante est une conséquence immédiate du lemme 3.4.

PROPOSITION 3.5. — *Pour $i = 1, 2$, on se donne une $\mathcal{P}$-algèbre R_i avec une action de cogèbre $C_i \otimes R_i \to R_i$. La $\mathcal{P}$-algèbre $R_1 \vee R_2$ est munie d'une action de $C_1 \otimes C_2$ naturelle qui est caractérisée par la propriété suivante : les injections canoniques*

$$R_1 \longrightarrow R_1 \vee R_2 \longleftarrow R_2$$

commutent à l'action de $C_1 \otimes C_2$.

Mentionnons que les $\mathcal{P}$-algèbres R_1, R_2 sont munies de l'action de $C_1 \otimes C_2$ obtenue par restriction via les projections canoniques

$$C_1 \longleftarrow C_1 \otimes C_2 \longrightarrow C_2.$$

THÉORÈME 3.6. — *Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe. On a une unique action*

$$\Sigma^\wedge \otimes R \longrightarrow R$$

vérifiant les propriétés suivantes.

1) *L'élement p_n agit comme la projection sur la composante de degré n de R. Donc $p_0 = 0$ et $I = \sum_n p_n$ agit comme l'identité.*

On a les identités :

2) *pour $u \in \Sigma^\wedge$, $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et $r_1, \dots, r_m \in R$,*

$$u \cdot \mu(r_1, \dots, r_n) = \sum_{(u)} \mu(u_{(1)} \cdot r_1, \cdots, u_{(m)} \cdot r_m),$$

3) *pour $u, v \in \Sigma^\wedge$ et $r \in R$,*

$$(u \circ v) \cdot r = u \cdot (v \cdot r),$$

4) *pour $u, v \in \Sigma^\wedge$ et $r \in R$,*

$$(u * v) \cdot r = \nabla \cdot u \otimes v \cdot \gamma r.$$

Rappelons que $\psi^n \in \Sigma^\wedge$ est défini comme le produit I^{*n}. Aussi, de la relation de distribution 4), on déduit immédiatement :

LEMME 3.7. — *L'action de $\psi^n \in \Sigma^\wedge$ sur $r \in R$ est donnée par la formule*

$$\psi^n \cdot r = \nabla^{(n)} \gamma^{(n)} r.$$

Cette proposition généralise la construction classique des opérations d'Adams sur une algèbre de Hopf commutative (*cf.* [7], [17]).

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la preuve du théorème 3.6. On comparera cette preuve avec [16, chap. II].

Construction de l'action. — Le module $C = \langle p_i,\ i \geq 0 \rangle$ est une sous-cogèbre de $\Sigma^\wedge$. La propriété 1) définit une action de C sur R. Du fait que le produit de R respecte le degré, cette action est distributive par rapport au produit de R.

Par suite, la proposition 6.4 fournit une action de $C^{\otimes n}$ sur $R^{\vee n}$. En fait, on peut clairement identifier cette action :

OBSERVATION. — *Rappelons que $R^{\vee n}$ est une $\mathcal{P}$-algèbre n-graduée. Le tenseur $p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_n}$ agit sur $R^{\vee n}$ comme la projection sur la composante de multidegré $(i_1, \ldots, i_n)$.*

La relation 4) force la définition de l'action $\Sigma^\vee \otimes R \to R$. Soit $I = (i_1, \ldots, i_n)$; on pose :

$$p_I \cdot r = \nabla^{(n)} \cdot p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_n} \cdot \gamma^{(n)} r.$$

Il reste à vérifier les propriétés 2), 3) et 4). En fait, la relation 4) est une conséquence immédiate de la définition et de l'associativité de γ et Δ.

Preuve de la relation 2). — Soient $r_1, \ldots, r_m \in R$. On montre la relation pour

$$p_I \cdot \mu(r_1, \ldots, r_m) = \nabla^{(n)} \cdot p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_n} \cdot \gamma^{(n)} \cdot \mu(r_1, \ldots, r_m).$$

Comme γ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres, on a l'identité

$$\gamma^{(n)} \mu(r_1, \ldots, r_m) = \mu(\gamma^{(n)} r_1, \ldots, \gamma^{(n)} r_m).$$

Aussi, on a l'identité

$$\begin{aligned} &p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_n} \cdot \gamma^{(n)} \mu(r_1, \ldots, r_m) \\ &\quad = \sum \mu\big((p_{i(1)_1} \otimes \cdots \otimes p_{i(1)_n}) \cdot \gamma^{(n)} r_1, \ldots, (p_{i(m)_1} \otimes \cdots \otimes p_{i(m)_n}) \cdot \gamma^{(n)} r_m\big). \end{aligned}$$

On somme sur les entiers $i(\ell)_k$ tels que

$$i(1)_k + \cdots + i(m)_k = i_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Finalement, si on forme les compositions

$$I(\ell) = \big(i(\ell)_1, \dots, i(\ell)_n\big), \quad \ell = 1, \dots, m,$$

alors on obtient l'identité

$$p_I \cdot \mu(r_1, \dots, r_m) = \sum \mu\big(p_{I(1)} \cdot r_1, \dots, p_{I(m)} \cdot r_m\big).$$

On voit immédiatement que $\sum p_{I(1)} \otimes \cdots \otimes p_{I(m)}$ est le coproduit m-ième de p_I.

Preuve de la relation 3). — On fixe $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, i_q)$. On va calculer la composée

$$p_I \cdot p_J = \nabla^{(p)} \cdot p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_p} \cdot \gamma^{(p)} \cdot \nabla^{(q)} \cdot p_{j_1} \otimes \cdots \otimes p_{j_q} \cdot \gamma^{(q)}.$$

Il s'agit essentiellement de regrouper les facteurs appartenant à $\Sigma^\wedge$, les coproduits et les codiagonales. On commence par permuter $\gamma^{(p)}$ et $\nabla^{(q)}$:

FAIT. — *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} R^{\vee q} \arrow[rr, "\nabla^{(q)}"] \arrow[d, "(\gamma^{(p)})^{\vee q}"'] & & R \arrow[d, "\gamma^{(p)}"] \\ (R^{\vee p})^{\vee q} \arrow[r, "\text{Shuffle}"] & (R^{\vee q})^{\vee p} \arrow[r, "(\nabla^{(q)})^{\vee p}"] & R^{\vee p} \end{tikzcd}$$

Ensuite, on commute $(\gamma^{(p)})^{\vee q}$ et $p_{j_1} \otimes \cdots \otimes p_{j_q}$:

AFFIRMATION. — *On a l'identité*

$$(\gamma^{(p)})^{\vee q} \cdot p_{j_1} \otimes \cdots \otimes p_{j_q} = \sum_M p_{m_{1,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{1,q}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,q}} \cdot (\gamma^{(p)})^{\vee q}$$

où $M = (m_{k,\ell})$ décrit l'ensemble des matrices $p \times q$ telles que $C(M) = J$.

Preuve. — On a vu que l'application

$$p_{j_1} \otimes \cdots \otimes p_{j_q} : R^{\vee q} \longrightarrow R^{\vee q}$$

est la projection sur la composante de multidegré $(j_1, \dots, j_q)$. Dans le membre de droite, on projette sur les composantes de multidegré $(m_{1,1}, \dots, m_{p,1}, \dots, m_{1,q}, \dots, m_{p,q})$ avec

$$m_{1,1} + \cdots + m_{p,1} = j_1, \ \dots, \ m_{1,q} + \cdots + m_{p,q} = j_q.$$

L'affirmation résulte du fait que chaque copie de $\gamma^{(p)} : R \to R^{\vee p}$ préserve le degré total. $\square$

AFFIRMATION. — *La composée*

$$p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_p} \cdot (\nabla^{(q)})^{\vee p} \cdot \mathrm{Shuffle} \cdot p_{m_{1,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{1,q}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,q}}$$

est égale à

$$(\nabla^{(q)})^{\vee p} \cdot \mathrm{Shuffle} \cdot p_{m_{1,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{1,q}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,q}}$$

si $L(M) = I$ et est nulle sinon.

Preuve. — Comme pour l'affirmation précédente, cet énoncé résulte du fait que chaque copie de $\nabla^{(p)}$ préserve le degré total. □

Pour conclure, on utilise le fait que γ est associatif et le fait que ∇ est associatif et commutatif; finalement, on obtient l'identité

$$p_I \cdot p_J = \sum_M \nabla^{(pq)} \cdot p_{m_{1,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,1}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{1,q}} \otimes \cdots \otimes p_{m_{p,q}} \cdot \gamma^{(pq)},$$

où M décrit l'ensemble des matrices $p \times q$ telles que $L(M) = I$ et $C(M) = J$. Ceci complète la preuve de la relation d'associativité 3). □

4. Décomposition d'un cogroupe. Théorème de structure

THÉORÈME 4.1. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade non-graduée unitale connexe. Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe.*

1) *On a la formule de décomposition canonique*

$$R = \bigoplus_{i \geq 1} e^i R,$$

l'action des $e^i \in \Sigma^\wedge$ sur R étant fournie par le théorème 3.6.

2) *Le produit de $\mathcal{P}$-algèbre induit un isomorphisme*

$$\mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} (e^1 R)^{\otimes n} \xrightarrow{\simeq} e^n R.$$

Par suite la $\mathcal{P}$-algèbre R est librement engendrée par $e^1 R$ (soit explicitement $T(\mathcal{P}, e^1 R) = R$).

4.2. Poids. — L'image de e^i est également notée $R^{(i)}$. Comme dans le cadre des algèbres de Hopf commutatives, on appelle $R^{(i)}$ la *composante de poids i* de R. Mentionnons que vu la formule de décomposition $\psi^n = \sum n^i e^i$, la composante $R^{(i)}$ s'identifie à l'espace propre de ψ^n associé à la valeur propre n^i.

4.3. Module des indécomposables. — Si R est une $\mathcal{P}$-algèbre, alors on note QR le module des indécomposables de A. Le module QR est le conoyau de l'application donnée par le produit de $\mathcal{P}$-algèbre

$$\bigoplus_{n\geq 2} \mathcal{P}(n) \otimes R^{\otimes n} \longrightarrow R.$$

Le théorème précédent entraine en particulier que e^1R est isomorphe à QR. En d'autre termes, e^1R est une section canonique du module quotient QR.

Preuve du théorème 4.4. — On comparera cette démonstration avec celle de [16, chap. III].

1) Commençons par une série d'observations.

Comme ψ^n est groupe-like, ψ^n agit comme un morphisme d'algèbres sur R. En conséquence, vu l'observation faite au § 4.2, le produit de $\mathcal{P}$-algèbre préserve le poids. Explicitement

$$r_1 \in R^{(i_1)}, \dots, r_n \in R^{(i_n)} \implies \mu(r_1, \dots, r_n) \in R^{(i_1+\dots+i_n)}.$$

Comme $R^{(i)} = 0$ pour $i \leq 0$, ceci entraîne que l'image de $\mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} R^{\otimes n}$ par le produit est contenu dans la partie de poids supérieur à n, soit $\bigoplus_{i\geq n} R^{(i)}$.

De même, on montre que $R^{\vee n}$ est multigradué par le poids. L'élément $r \in R^{\vee n}$ est homogène de poids $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si

$$\psi^{k_1} \vee \dots \vee \psi^{k_n}(r) = k_1^{\alpha_1} \cdots k_n^{\alpha_n} r.$$

En fait, l'algèbre $T(\mathcal{P}, R^{\oplus n})$ a une graduation en poids naturelle, qui induit la graduation de $R^{\vee n}$ par passage au quotient. On a clairement

$$R^{\vee n (1,\dots,1)} = \mathcal{P}(n) \otimes R^{(1)\otimes n}.$$

Le morphisme $\nabla^{(n)}$ préserve le poids total (car il revient au même de dire que le produit de $\mathcal{P}$-algèbre préserve le poids total).

Le produit de $\mathcal{P}$-algèbre induit une application

$$\Pi_n : \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} R^{(1)\otimes n} \longrightarrow R^{(n)}.$$

Réciproquement, l'image de l'action de $(e^1)^{\otimes n}$ sur $R^{\vee n}$ est contenue dans $R^{\vee n(1,\dots,1)}$. On note alors S_n le morphisme composé

$$R^{(n)} \xrightarrow{\gamma^{(n)}} R^{\vee n} \xrightarrow{(e^1)^{\otimes n}/n!} R^{\vee n(1,\dots,1)} \xrightarrow{\mathrm{Proj}} \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} R^{(1)\otimes n}.$$

On va montrer que Π_n et S_n sont des isomorphismes réciproques.

2) On a d'abord le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
R^{(n)} & \xrightarrow{\gamma^{(n)}} & R^{\vee n} & \xrightarrow{(e^1)^{\otimes n}/n!} & R^{\vee n(1,\dots,1)} & \xrightarrow{\nabla^{(n)}} & R^{(n)} \\
\big\downarrow{=} & & & & \big\downarrow{\text{Proj}} & & \big\downarrow{=} \\
R^{(n)} & & \xrightarrow{\quad S_n \quad} & & \mathcal{P}(n)\otimes_{S_n} R^{(1)\otimes n} & \xrightarrow{\Pi_n} & R^{(n)}
\end{array}$$

D'où on déduit

$$\Pi_n S_n = \nabla^{(n)} \cdot \frac{(e^1)^{\otimes n}}{n!} \cdot \gamma^{(n)} = \frac{(e^1)^{*n}}{n!} = e^n.$$

Ce qui montre que $\Pi_n S_n$ est l'identité sur $R^{(n)}$.

3) Reste à montrer $S_n\Pi_n = 1$. Soit $\mu(r_1,\dots,r_n)$ un élément de $\mathcal{P}(n)\otimes_{S_n} R^{(1)\otimes n}$. On a

$$\begin{aligned}
S_n\Pi_n\big(\mu(r_1,\dots,r_n)\big) &= \text{Proj}\cdot\frac{(e^1)^{\otimes n}}{n!}\cdot\gamma^{(n)}\mu(r_1,\dots,r_n)\\
&= \text{Proj}\cdot\frac{(e^1)^{\otimes n}}{n!}\cdot\mu(\gamma^{(n)}r_1,\dots,\gamma^{(n)}r_n)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{((e^1)^{\otimes n})}\text{Proj}\,\mu\big((e^1)^{\otimes n}_{(1)}\gamma^{(n)}r_1,\dots,(e^1)^{\otimes n}_{(n)}\gamma^{(n)}r_n\big).
\end{aligned}$$

Rappelons que e^1 est primitif. Donc chaque facteur du coproduit $(e^1)^{\otimes n}_{(k)} \in \Sigma^{\wedge\otimes n}$ est un produit tensoriel de p_0 et de e^1. De plus,

$$(e^1)^{\otimes n}_{(1)} \otimes\cdots\otimes (e^1)^{\otimes n}_{(n)}$$

contient au total n facteurs e^1. Comme l'action de $p_0\otimes\cdots\otimes p_0$ sur un $\gamma^{(n)}r_k$ est nulle, il ne faut considérer que les termes $(e^1)^{\otimes n}_{(1)}\otimes\cdots\otimes(e^1)^{\otimes n}_{(n)}$ où les e^1 ont été également répartis. Ces termes sont indexés par les permutations de S_n ; on a

$$(e^1)^{\otimes n}_{(k)} = p_0\otimes\cdots\otimes e^1\otimes\cdots\otimes p_0,$$

avec e^1 à la position $\sigma(k)$, σ désignant une certaine permutation. Dans ce cas, $(e^1)^{\otimes n}_{(k)}\gamma^{(n)}$ est la projection sur la $\sigma(k)$-ième copie de la composante linéaire de $R^{\vee n}$. En effet, $\gamma^{(n)}(r)$ est l'identité sur la partie linéaire de $R^{\vee n}$, et la partie quadratique est nécessairement annulée par

$$p_0\otimes\cdots\otimes e^1\otimes\cdots\otimes p_0.$$

D'où on déduit immédiatement

$$\frac{1}{n!}\sum_{((e^1)^{\otimes n})} \operatorname{Proj}\mu\big((e^1)^{\otimes n}_{(1)}\gamma^{(n)}r_1,\dots,(e^1)^{\otimes n}_{(n)}\gamma^{(n)}r_n\big) = \mu(r_1,\dots,r_n).$$

Soit $S_n\Pi_n = 1$. ▯

4.4. Algèbres différentielles graduées. — Une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée (en abrégé *dg-$\mathcal{P}$-algèbre*) est une $\mathcal{P}$-algèbre R avec une différentielle $\delta : R \to R$, qui est une dérivation pour le produit de $\mathcal{P}$-algèbre. Explicitement, δ vérifie l'identité de Leibniz

$$\delta\mu(r_1,\dots,r_n) = \sum_{i=1}^{n} \pm\mu(r_1,\dots,\delta r_i,\dots,r_n),$$

pour $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $r_1,\dots,r_n \in R$. On préférera utiliser la terminologie de dg-$\mathcal{P}$-algèbre *réduite* pour les dg-$\mathcal{P}$-algèbres nulles en degré 0.

THÉORÈÙME 4.5. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade non-graduée unitale connexe. Soit R une dg-$\mathcal{P}$-algèbre munie d'une structure de cogroupe.* (*On demande que le coproduit de R, $\gamma : R \to R \vee R$, soit un morphisme de dg-$\mathcal{P}$-algèbres.*)

1) *Dans la formule de décomposition du théorème* 4.1

$$R = \bigoplus_{i\geq 1} e^i R$$

chaque composante est stable par la différentielle.

2) *Le produit de $\mathcal{P}$-algèbre induit un isomorphisme de dg-$\mathcal{P}$-algèbres*

$$T(\mathcal{P}, e^1R) \longrightarrow R$$

et R est la dg-$\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par e^1R.

Preuve. — On a vu que $\psi^i = \nabla^{(i)}\gamma^{(i)}$ (*cf.* lemme 3.7). Par suite, ψ^i commute à la différentielle. Comme $R = \bigoplus_i e^iR$ est une décomposition en espace propre pour ψ^i (*cf.* 4.2), on en déduit immédiatement que chaque composante e^iR est stable par la différentielle. De ce résultat, on obtient en particulier que le produit $T(\mathcal{P}, e^1R) \to R$ est un morphisme de dg-$\mathcal{P}$-algèbres, et c'est un isomorphisme d'après le théorème 4.1. ▯

4.6. Homotopie. — Si V est un dg-module, alors π_*V désigne l'homologie de V. Clairement, si R est une dg-$\mathcal{P}$-algèbre, alors π_*R est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée. Rappelons que QR désigne le module des indécomposables de R. Mentionnons que la différentielle de R induit une différentielle sur QR. Le résultat suivant généralise un théorème classique pour les algèbres de Hopf différentielles graduées commutatives réduites (*cf.* [19, Appendice B]).

COROLLAIRE 4.7. — *Soit R une dg-$\mathcal{P}$-algèbre réduite munie d'une structure de cogroupe. Alors π_*R est une $\mathcal{P}$-algèbre graduée libre et on a $Q\pi_*R = \pi_*QR$.*

Preuve. — En fait, si $R = T(\mathcal{P}, V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par V, alors, d'après la formule de Künneth, $\pi_*R = T(\mathcal{P}, \pi_*V)$. Supposons que R soit un cogroupe. Alors $R = T(\mathcal{P}, e^1R)$ et $\pi_*R = T(\mathcal{P}, \pi_*(e^1R))$. Rappelons que e^1R est une section canonique de QR (*cf.* 4.3). Le corollaire s'ensuit immédiatement. ▯

4.8. Remarque. — En fait, dans les applications en algèbre homologique mentionnées dans l'article [2], c'est ce corollaire qui est utilisé. Cependant, comme dans la preuve du théorème 4.5, on utilise de manière cruciale que e^1R fournit une section de QR dans R, il n'est pas possible de prouver le théorème 4.5 avec les méthodes développées dans l'article [2].

Pour cette raison, dans les exemples de l'article [2], on établit d'abord que π_*R est un cogroupe avant d'appliquer le théorème de structure à π_*R. Rappelons l'argument sous-jacent généralement utilisé. Soient R_1, R_2 des $\mathcal{P}$-algèbres ; on a un morphisme canonique

$$\pi_*(R_1) \vee \pi_*(R_2) \longrightarrow \pi_*(R_1 \vee R_2).$$

Pour $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, le coproduit est donné par le produit tensoriel, et le morphisme ci-dessus est un isomorphisme d'après la formule de Künneth. Ce résultat est aussi valable pour $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, l'opérade des algèbres associatives, et $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$, l'opérade des algèbres de Lie. Un autre exemple (le cas $\mathcal{P} = \mathcal{L}eib$, l'opérade des algèbres de Leibniz) est traité par J.-M. Oudom dans l'article [15]. En conséquence, si R est munie d'une structure de cogroupe, alors π_*R est munie du coproduit

$$\pi_*R \longrightarrow \pi_*(R \vee R) \xleftarrow{\simeq} \pi_*R \vee \pi_*R.$$

Dans tout les cas, pour pouvoir utiliser cet argument, il est nécessaire d'avoir une formule explicite du coproduit pour pouvoir établir la formule de Künneth

$$\pi_*(R_1) \vee \pi_*(R_2) \simeq \pi_*(R_1 \vee R_2).$$

Car malheureusement, cette formule n'est pas vraie pour toute opérade (c'est par exemple le cas pour l'opérade de Poisson $\mathcal{P} = \mathcal{P}ois$). Donc, dans le cas général, le théorème 4.5 semble nécessaire pour comprendre la structure de π_*R.

4.9. Algèbres complètes. — Maintenant, notre but est d'établir un théorème de structure des cogroupes dans le cadre des algèbres non-graduées. Il est nécessaire de remplacer l'hypothèse de connexité par une hypothèse de complétude pour établir le théorème.

On a une notion évidente d'idéal pour les $\mathcal{P}$-algèbres qui coïncide avec la notion classique d'idéal pour $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, d'idéal bilatère pour $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, et d'idéal de Lie pour $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$. Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre. On note R^n l'image de

$$\bigoplus_{i \geq n} \mathcal{P}(i) \otimes R^{\otimes i} \longrightarrow R$$

par le produit de $\mathcal{P}$-algèbre. Dans le cas $\mathcal{P} = \mathcal{C}om, \mathcal{A}s$, R^n est la puissance n-ième de R; dans le cas $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$, R^n est le n-ième terme de la série centrale descendante. En général, R^n est un idéal de R et le quotient R/R^n est une $\mathcal{P}$-algèbre qui est nilpotente en un sens naturel. On dit que R est *complète* (ou *pronilpotente*) si

$$R = \lim_n R/R^n.$$

On a un procédé de complétion pour les $\mathcal{P}$-algèbres. Par ce procédé, on transporte toute construction de la catégorie $\mathcal{P}$-algèbres (comme la construction de la $\mathcal{P}$-algèbre libre ou du coproduit des $\mathcal{P}$-algèbres) dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres complètes. On a donc une notion de cogroupe pour les $\mathcal{P}$-algèbres complètes. Dans ce cadre, le théorème de structure des cogroupes s'énonce comme suit :

THÉORÈME 4.10. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade unitale connexe. Soit R une $\mathcal{P}$-algèbre complète munie d'une structure de cogroupe. Alors R est une $\mathcal{P}$-algèbre complète libre.*

Dans l'article [2], le théorème de structure pour les algèbres graduées connexes apparait comme un cas particulier du théorème précédent. Ici, à l'opposé, on va montrer que le théorème précédent se déduit du théorème 4.1.

4.11. Modules gradués non-signés. — Plus exactement, on déduit le théorème 4.10 de la variante du théorème 4.1 dans le cadre gradué *non-signé.* Dans ce cadre, on suppose que la permutation de deux tenseurs ne produit pas de signe.

Essentiellement, cela signifie que l'on modifie l'opérateur de symétrie de la catégorie monoïdale dans laquelle on travaille. Dans les deux cas (signé ou non-signé), on munit la catégorie des modules gradués du produit tensoriel habituel

$$(U \otimes V)_n = \bigoplus_{i+j=n} U_i \otimes V_j.$$

Dans le cas signé, l'opérateur de symétrie $c_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$ est donné par

$$c_{U,V}(u \otimes v) := (-1)^{|u|\cdot|v|} v \otimes u.$$

Dans le cas non-signé, il est donné par

$$c_{U,V}(u \otimes v) := v \otimes u.$$

Il devrait être clair que les résultats des paragraphes précédents restent valables dans le cadre des modules gradués non-signés.

Preuve du théorème 4.10. — Le principe de cette démonstration est classique. A une $\mathcal{P}$-algèbre R on associe la $\mathcal{P}$-algèbre graduée (non signée)

$$\operatorname{gr} R := \bigoplus_{n \geq 1} R^n / R^{n+1}.$$

Supposons que R soit un cogroupe dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres complètes. Alors $\operatorname{gr} R$ est cogroupe dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres graduées (non-signées). Donc d'après le théorème de structure pour les cogroupes dans les $\mathcal{P}$-algèbres graduées (non-signées), on a un isomorphisme

$$T(\mathcal{P}, e^1 \operatorname{gr} R) \longrightarrow \operatorname{gr} R.$$

Soit $V \subseteq R$, une section de $e^1 \operatorname{gr} R \subseteq \operatorname{gr} R$ dans R. On considère le morphisme

$$T(\mathcal{P}, V) \longrightarrow R$$

induit par l'inclusion $V \hookrightarrow R$. L'assertion précédente entraîne que ce morphisme induit un isomorphisme par passage au gradué associé. Donc c'est un isomophisme entre les algèbres complétées. $\square$

5. Théorème de structure pour les algèbres de Hopf sur une opérade

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathcal{P}$ est une *opérade de Hopf* (*cf.* [5]). On commence par rappeler la définition de cette notion. Notre catégorie de base est la catégorie des cogèbres *non-augmentées.*

5.1. Opérades de Hopf. — Rappelons qu'on peut définir une notion d'opérade dans toute catégorie monoïdale symétrique. Les cogèbres (graduées) forment une catégorie monoïdale symétrique : le produit tensoriel de deux cogèbres est muni d'une structure de cogèbre naturelle. Une opérade dans cette catégorie monoïdale est appelée une *opérade de Hopf.*

En fait, $\mathcal{P}$ est une opérade de Hopf si chaque $\mathcal{P}(n)$ est muni d'une structure de cogèbre compatible avec l'action de S_n et si les produits d'opérades

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n) \longrightarrow \mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n)$$

sont des morphismes de cogèbres. Si $\mathcal{P}$ est une opérade de Hopf, alors le produit tensoriel de deux $\mathcal{P}$-algèbres est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre canonique. Ainsi $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, l'opérade des algèbres commutatives, $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, l'opérade des algèbres associatives, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}ois$, l'opérade des algèbres de Poisson sont des opérades de Hopf. Une *$\mathcal{P}$-algèbre de Hopf* est une cogèbre H munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre compatible. Explicitement, on demande que le produit de $\mathcal{P}$-algèbre

$$\mathcal{P}(n) \otimes H^{\otimes n} \longrightarrow H$$

soit un morphisme de cogèbres.

5.2. Cogèbres augmentées/non-augmentées. — Insistons sur le fait que l'on travaille avec des cogèbres non-augmentées. Cependant, à une cogèbre non-augmentée C, on peut associer la cogèbre augmentée $C_+ = k \oplus C$. Si $c \in C$, alors le coproduit de c dans $C_+ \otimes C_+$ est obtenu en ajoutant

$$c \otimes 1 + 1 \otimes c \in C \otimes k \oplus k \otimes C$$

au coproduit de c dans $C \otimes C$. En particulier, si C est munie du produit nul, alors C_+ est primitive.

Soit H une cogèbre connexe ($H_0 = 0$). Pour $\mathcal{P} = \mathcal{C}om, \mathcal{A}s, \mathcal{P}ois$, H est une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf si H_+ est respectivement, une algèbre de Hopf commutative, une algèbre de Hopf non-commutative, une algèbre de Hopf-Poisson commutative (*cf.* [1]).

PROPOSITION 5.3. — *Le foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres crée le coproduit.*

Preuve. — Soient H_1, H_2 deux $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf. On note Δ_1, Δ_2 le coproduit de H_1, H_2. On note $i_1 : H_1 \to H_1 \vee H_2$ et $i_2 : H_2 \to H_1 \vee H_2$ les injections canoniques. On définit le *coproduit* de $H_1 \vee H_2$

$$\Delta : H_1 \vee H_2 \longrightarrow (H_1 \vee H_2) \otimes (H_1 \vee H_2)$$

comme la somme, pour $k = 1, 2$, des morphismes

$$H_k \xrightarrow{\Delta_k} H_k \otimes H_k \xrightarrow{i_k \otimes i_k} (H_1 \vee H_2) \otimes (H_1 \vee H_2).$$

On vérifie sans difficulté que Δ est coassociatif. De plus, si on se donne une paire de morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf, $H_1 \to X$, $H_2 \to X$, alors il existe un unique morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres complétant le diagramme

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r] \arrow[dr] & H_1 \vee H_2 \arrow[d, dashed] & H_2 \arrow[l] \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On voit que ce morphisme est compatible avec la structure de cogèbre de $H_1 \vee H_2$. Cette affirmation est une conséquence immédiate de la définition du coproduit de $H_1 \vee H_2$ et du fait que $\Delta : X \to X \otimes X$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. $\square$

PROPOSITION 5.4. — *Soit H une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf munie d'une structure de cogroupe. (En particulier, on demande que le coproduit de H, $\gamma : H \to H \vee H$, soit un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf.) On considère l'action de $\Sigma^\wedge$ sur H fournie par le théorème* 3.6. *Cette action est compatible avec la structure de cogèbre*; *plus précisément, pour $u \in \Sigma^\wedge$ et $r \in H$, on a l'identité* :

$$\Delta(u \cdot r) = \sum_{(u),(r)} (u_{(1)} \cdot r_{(1)}) \otimes (u_{(2)} \cdot r_{(2)}).$$

Preuve. — Si $I = (i_1, \dots, i_n)$, alors on a

$$p_I \cdot r = \nabla^{(n)} \cdot p_{i_1} \otimes \cdots \otimes p_{i_n} \cdot \gamma^{(n)} r.$$

On va permuter Δ avec chacun des facteurs de la composée de droite. Il n'est pas difficile de montrer que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} H^{\vee n} \arrow[r, "\nabla^{(n)}"] \arrow[d, "\Delta"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ H^{\vee n} \otimes H^{\vee n} \arrow[r, "\nabla^{(n)} \otimes \nabla^{(n)}"] & H \otimes H \end{tikzcd}$$

Maintenant, on utilise le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\gamma^{(n)}"] \arrow[d, "\Delta"'] & H^{\vee n} \arrow[r, "p_{i_1} \cdots p_{i_n}"] \arrow[d, "\Delta"] & H^{\vee n} \arrow[d, "\Delta"] \\ H \otimes H \arrow[r, "\gamma^{(n)} \otimes \gamma^{(n)}"] & H^{\vee n} \otimes H^{\vee n} \arrow[r, "\sum (p_{i'_1} \cdots p_{i'_n}) \otimes (p_{i''_1} \cdots p_{i''_n})"] & H^{\vee n} \otimes H^{\vee n} \end{tikzcd}$$

La somme

$$\sum (p_{i'_1}\cdots p_{i'_n})\otimes(p_{i''_1}\cdots p_{i''_n})$$

s'étend sur l'ensemble des compositions $I' = (i'_1,\ldots,i'_n)$ et $I'' = (i''_1,\ldots,i''_n)$ telles que

$$i'_1 + i''_1 = i_1\,,\ldots,\, i'_n + i''_n = i_n.$$

Le premier carré du diagramme commute du fait que γ est un morphisme de cogèbres. Rappelons que $H^{\vee n}$ est multigradué et que $p_{i_1}\cdots p_{i_n}$ agit sur $H^{\vee n}$ comme la projection sur la composante de multidegré $(i_1,\ldots,i_n)$. De même, $(p_{i'_1}\cdots p_{i'_n})\otimes(p_{i''_1}\cdots p_{i''_n})$ agit sur $H^{\vee n}\otimes H^{\vee n}$ comme la projection sur la composante de multidegré $(i'_1,\ldots,i'_n,i''_1,\ldots,i''_n)$ pour la graduation évidente de $H^{\vee n}\otimes H^{\vee n}$. Comme Δ préserve le degré total, on en déduit que le deuxième carré du diagramme commute. Finalement, on a obtenu

$$\Delta(p_I\cdot r) = \sum_{I',I''} p_{I'}\otimes p_{I''}\cdot(\Delta r).$$

Comme $\sum_{I',I''} p_{I'}\otimes p_{I''}$ est le coproduit de p_I dans $\Sigma^\wedge$, la proposition est prouvée. $\square$

On a

$$\Delta e^n = \sum_{i+j=n} e^i\otimes e^j.$$

En conséquence on déduit de la proposition précédente et du théorème 4.1 le résultat suivant :

THÉORÈME 5.5. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Hopf. On suppose $\mathcal{P}$ non-graduée et unitale connexe. Soit H une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf munie d'une structure de cogroupe.*

1) *On considère la décomposition en poids fournie par le théorème* 4.1

$$H = \bigoplus_{i\geq 1} e^i H.$$

Le coproduit $\Delta : H\to H\otimes H$ préserve le poids total. Explicitement

$$\Delta(e^n H)\subseteq \bigoplus_{i+j=n} e^i H\otimes e^j H.$$

En particulier, Δ est nul sur la composante e^1H.

2) *Le produit de $\mathcal{P}$-algèbre induit un isomorphisme de $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf*

$$T(\mathcal{P}, e^1H)\longrightarrow H$$

et H est la $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf libre engendrée par e^1H muni du coproduit nul.

6. Théorème de structure pour les groupes dans les cogèbres sur une opérade

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathcal{P}$ est une opérade avec $\mathcal{P}(n)$ de dimension finie pour tout n.

6.1. Cogèbres sur une opérade. — Une *$\mathcal{P}$-cogèbre graduée* est un module gradué X avec des coproduits

$$\mathcal{P}(n) \otimes X \longrightarrow X^{\otimes n}$$

équivariant par rapport à l'action de S_n et associatif par rapport au produit de l'opérade. De plus, on suppose que l'unité de l'opérade agit comme l'identité. Si $\mu \in \mathcal{P}(n)$, $x \in X$, alors $\mu^*(x)$ désigne l'image de $\mu \otimes x$ par le coproduit de X.

Le dual du produit d'opérade

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n) \longrightarrow \mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n)$$

induit un coproduit de $\mathcal{P}$-cogèbre sur

$$C(\mathcal{P}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{P}(n)^* \otimes V^{\otimes n})^{S_n}.$$

En fait, $C(\mathcal{P}, V)$ représente la $\mathcal{P}$-cogèbre colibre coengendrée par V.

Comme pour les algèbres, on a une réalisation explicite du produit cartésien de deux $\mathcal{P}$-cogèbres graduées X_1 et X_2. Considérons les morphismes

$$C(\mathcal{P}, X_1 \oplus X_2) \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} C\big(\mathcal{P}, C(\mathcal{P}, X_1) \oplus C(\mathcal{P}, X_2)\big)$$

définis par :

- le morphisme δ_0 est induit par les coproduits de $\mathcal{P}$-cogèbre

$$X_i \longrightarrow C(\mathcal{P}, X_i), \quad i = 1, 2\,;$$

- le morphisme δ_1 est le composé du dual du produit de l'opérade et de la projection canonique

$$C(\mathcal{P}, X_1 \oplus X_2) \longrightarrow C\big(\mathcal{P}, C(\mathcal{P}, X_1 \oplus X_2)\big) \longrightarrow C\big(\mathcal{P}, C(\mathcal{P}, X_1) \oplus C(\mathcal{P}, X_2)\big).$$

On vérifie que l'égaliseur de δ_0, δ_1 est préservé par le coproduit de $C(\mathcal{P}, X_1 \oplus X_2)$. Donc $\ker(\delta_0 - \delta_1)$ est une sous-$\mathcal{P}$-cogèbre de $C(\mathcal{P}, X_1 \oplus X_2)$. En fait, on constate que $\ker(\delta_0 - \delta_1)$ s'identifie au produit $X_1 \times X_2$.

Finalement, on peut définir la notion de groupe dans les $\mathcal{P}$-cogèbres :

6.2. Groupes dans les cogèbres sur une opérade. — Un *groupe* dans la catégorie des $\mathcal{P}$-cogèbres graduées est une $\mathcal{P}$-cogèbre graduée connexe X munie d'un produit $\gamma : X \times X \to X$ vérifiant les relations usuelles

$$\gamma \cdot X \times \gamma = \gamma \cdot \gamma \times X, \tag{1}$$

$$\gamma \cdot X \times 0 = \gamma \cdot 0 \times X = X. \tag{2}$$

On note $\Delta : X \to X \times X$ l'application égale à l'identité sur chacun des facteurs. Comme pour les cogroupes, l'existence d'une antipode $\iota : X \to X$ vérifiant les relations

$$\gamma \cdot X \times \iota \cdot \Delta = \gamma \cdot \iota \times X \cdot \Delta = 0$$

est automatiquement assurée.

On peut dualiser les résultats obtenus dans les paragraphes précédents pour les $\mathcal{P}$-algèbres. On va simplement énoncer les résultats principaux obtenus pour les $\mathcal{P}$-cogèbres graduées. Le fait de travailler avec des cogèbres permet de s'affranchir des hypothèses de finitude dans les applications en algèbre homologique (*cf.* [2, § 5]).

6.3. Action d'une cogèbre sur une $\mathcal{P}$-algèbre. — Soit C une cogèbre cocommutative augmentée. Soit X une $\mathcal{P}$-cogèbre. Une action de C sur X est la donnée d'un produit vérifiant la relation de distribution suivante. Soient $c \in C$ et $x \in X$. Pour $\mu \in \mathcal{P}(n)$, on note

$$\mu^*(x) = \sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_n.$$

La relation de distribution s'écrit

$$\mu^*(c \cdot x) = \sum_{(c)} (c_{(1)} \cdot x_1) \otimes \cdots \otimes (c_{(n)} \cdot x_n).$$

PROPOSITION 6.4. — *Pour $i = 1, 2$, on se donne une $\mathcal{P}$-cogèbre X_i, avec une action de cogèbre $C_i \otimes X_i \to X_i$. La $\mathcal{P}$-cogèbre $X_1 \times X_2$ est munie d'une action de $C_1 \otimes C_2$ naturelle qui est caractérisée par la propriété suivante : les projections canoniques*

$$X_1 \longleftarrow X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$$

commutent à l'action de $C_1 \otimes C_2$.

Comme pour les $\mathcal{P}$-algèbres, on munit X_1, X_2 de l'action de $C_1 \otimes C_2$ obtenue par restriction via les projections canoniques

$$C_1 \longleftarrow C_1 \otimes C_2 \longrightarrow C_2.$$

THÉORÈME 6.5. — *Soit X une $\mathcal{P}$-cogèbre graduée connexe munie d'une structure de groupe. On a une unique action*

$$\Sigma^\wedge \otimes X \longrightarrow X$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1) *L'élement p_n agit comme la projection sur la composante de degré n de R. Donc $p_0 = 0$ et $I = \sum_n p_n$ agit comme l'identité.*

On a les identités :

2) *Soient $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et $x \in X$; on note $\mu^*(x) = \sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Pour $u \in \Sigma^\wedge$, on a*

$$\mu^*(u \cdot x) = \sum_{(u)} (u_{(1)} \cdot x_1) \otimes \cdots \otimes (u_{(n)} \cdot x_n).$$

3) *$(u \circ v) \cdot x = v \cdot (u \cdot x)$, pour $u, v \in \Sigma^\wedge$ et $x \in X$.*

4) *$(u * v) \cdot x = \gamma \cdot u \otimes v \cdot \Delta x$, pour $u, v \in \Sigma^\wedge$ et $x \in X$.*

THÉORÈME 6.6. — *On suppose le corps de base de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{P}$ une opérade non-graduée unitale connexe. De plus on suppose chaque module $\mathcal{P}(n)$ de dimension finie. Soit X une $\mathcal{P}$-cogèbre graduée connexe munie d'une structure de cogroupe.*

1) *On a la formule de décomposition canonique*

$$X = \oplus_{i \geq 1} e^i X,$$

l'action des $e^i \in \Sigma^\wedge$ sur X étant fournie par le théorème 6.5.

2) *Le coproduit de $\mathcal{P}$-cogèbre induit un isomorphisme*

$$e^n X \xrightarrow{\simeq} \left(\mathcal{P}(n)^* \otimes (e^1 X)^{\otimes n}\right)^{S_n}.$$

Par suite X est la $\mathcal{P}$-cogèbre colibre coengendrée par $e^1 X$ (soit explicitement $C(\mathcal{P}, e^1 X) = X$).

Soit X une $\mathcal{P}$-cogèbre graduée. Une codérivation est un morphisme $\delta : X \to X$ de degré -1 vérifiant la relation de Leibniz suivante : avec les notations introduites plus haut, on a

$$\delta \mu^*(x) = \sum \pm x_1 \otimes \cdots \otimes \delta x_i \otimes \cdots \otimes x_n.$$

Une dg-$\mathcal{P}$-cogèbre est une $\mathcal{P}$-cogèbre X munie d'une codérivation δ avec $\delta^2 = 0$. On a un théorème de structure pour les groupes dans les dg-$\mathcal{P}$-cogèbres dual au théorème 4.5. On va uniquement énoncer la version duale du corollaire 4.7. Si X est une cogèbre, alors PX désigne le module des éléments primitifs de X, qui est défini comme le noyau des coproduits

$$X \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 2} \big(\mathcal{P}(n)^* \otimes X^{\otimes n}\big)^{S_n}.$$

PROPOSITION 6.4. — *Soit X une dg-$\mathcal{P}$-cogèbre connexe munie d'une structure de groupe. Alors $\pi_* X$ est une $\mathcal{P}$-cogèbre graduée colibre et on a $\pi_*(PX) = P\pi_*(X)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] DRINFEL'D (V.G.). — *Quantum groups*, in 'Proceedings International Congress in Mathematics', Berkeley, 1986 p. 798–820.

[2] FRESSE (B.). — *Cogroups in algebras over an operad are free algebras*, Comment. Math. Helv., à paraître.

[3] FRESSE (B.). — *Lie theory of formal groups over an operad*, J. Algebra, t. **202**, 1998, p. 455–511.

[4] GARSIA (A.M.), REUTENAUER (C.). — *A decomposition of Solomon's descent algebra*, Adv. Math., t. **77**, 1989, p. 189–262.

[5] GETZLER (E.), JONES (J.D.S.). — *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, prépublication, 1994.

[6] GERSTENHABER (M.), SCHACK (S.D.). — *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Algebra, t. **48**, 1987, p. 229–247.

[7] GERSTENHABER (M.), SCHACK (S.D.). — *The shuffle bialgebra and the cohomology of commutative algebras*, J. Pure Appl. Algebra, t. **70**, 1991, p. 263–272.

[8] GINZBURG (V.), KAPRANOV (M.M.). — *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., t. **76**, 1995, p. 203–272.

[9] LODAY (J.-L.). — *La renaissance des opérades, in 'Séminaire Bourbaki, 1994-1995'*, Astérisque, t. **237**, 1996, p. 47–74.

[10] LODAY (J.-L.). — *Série de Hausdorff, idempotents Euleriens et algèbres de Hopf*, Expo. Math., t. **12**, 1994, p. 165–178.

[11] LODAY (J.-L.). — *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math., t. **96**, 1989, p. 205–230.

[12] LODAY (J.-L.). — *Cyclic homology*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, Springer-Verlag, t. **301**, 1992.

[13] MAY (J.P.). — *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, t. **271**, 1972.

[14] MILNOR (J.W.), MOORE (J.C.). — *On the structure of Hopf algebras*, Ann. Math., t. **81**, 1965, p. 211–264.

[15] OUDOM (J.-M.). — *Coproduct and cogroups in the category of graded dual Leibniz algebras*, in 'Operads : Proceedings of renaissance conferences, 1995', Contemp. Math., t. **202**, 1997, p. 115–135.

[16] PATRAS (F.). — *L'algèbre des descentes d'une bigèbre graduée*, J. Algebra, t. **170**, 1994, p. 547–566.

[17] PATRAS (F.). — *La décomposition en poids des algèbres de Hopf*, Ann. Inst. Fourier, t. **43**, 1993, p. 1067–1087.

[18] PATRAS (F.). — *Construction géometrique des idempotents eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild*, Bull. Soc. Math. Fr., t. **119**, 1991, p. 173–198.

[19] QUILLEN (D.). — *Rational homotopy theory*, Ann. of Math., t. **90**, 1969, p. 205–295.

[20] REUTENAUER (C.). — *Free Lie Algebras*, London Math. Soc. Mon., Clarendon Press, t. **7**, 1993.

[21] SOLOMON (L.). — *A decomposition of the group algebra of a finite Coxeter group*, J. Algebra, t. **9**, 1968, p. 220–239.