

# BULLETIN DE LA S. M. F.

VINCENT COLIN

## **Recollement de variétés de contact tendues**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 127, n° 1 (1999), p. 43-69

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1999\\_\\_127\\_1\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_1_43_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## RECOLLEMENT DE VARIÉTÉS DE CONTACT TENDUES

PAR VINCENT COLIN (\*)

---

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement des structures de contact tendues vis-à-vis d'opérations de chirurgie le long de disques et de tores. Le résultat principal affirme que lorsqu'on recolle deux variétés de contact tendues de dimension 3 le long de deux tores incompressibles, la variété résultante est tendue pourvu que les structures de départ soient universellement tendues et les tores quasi pré-lagrangiens (c'est par exemple le cas si  $\xi$  trace sur les tores considérés un feuilletage en cercles). De plus, on construit un exemple qui montre que sans cette dernière hypothèse, la nouvelle variété peut être vrillée. On combine alors ces techniques de chirurgie et un résultat récent de Y. Eliashberg et W. Thurston pour construire une structure de contact tendue sur «presque» toute variété graphée ainsi que sur une nouvelle classe de sphères d'homologie toroïdales.

ABSTRACT. — GLUING TIGHT CONTACT MANIFOLDS. — We study the behaviour of tight contact structures under surgery operations along disks and tori. The main result says that if one glues two tight contact manifolds along incompressible tori, the resulting manifold is tight provided that the original structures are universally tight and that the tori are quasi pre-lagrangian (for instance it is the case if  $\xi$  induces on the tori a foliation by circles). Moreover, we construct an example which shows that without this last assumption, the new manifold can be overtwisted. As an application of these techniques, using a recent theorem of Y. Eliashberg and W. Thurston, we construct a tight contact structure on “almost” every graph manifold and on a new class of toroidal homology spheres.

### 1. Introduction

En dimension 3, on distingue deux principales classes de structures de contact : les structures vrillées et les structures tendues.

Les premières sont flexibles et ont été, sur les variétés fermées, complètement classifiées par Y. Eliashberg [E1] : il existe une unique

---

(\*) Texte reçu le 4 novembre 1998, accepté le 16 décembre 1998.

V. COLIN, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 5669 du CNRS, École Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364, Lyon CEDEX 07. Email : vcolin@umpa.ens-lyon.fr.

Classification AMS : 53C15.

Mots clés : structure de contact, structure tendue, chirurgie, tore incompressible.

classe d'isotopie de structures vrillées de signe donné dans chaque classe d'homotopie de champ de plans.

À l'opposé, les structures tendues possèdent des propriétés de rigidité géométrique qui leurs donnent des caractéristiques communes avec les feuilletages sans composante de Reeb (voir [ElTh]). On ne connaît à ce jour qu'une seule obstruction topologique à l'existence de structures de contact tendues sur une variété  $V$  : la classe d'Euler d'une structure tendue ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs dans  $H^2(V, \mathbb{Z})$ , même si dans une classe d'homotopie peuvent coexister une infinité de structures de contact tendues deux à deux non isomorphes (voir [Gi3], [Gi4] et [Ka]).

La question qui motive cet article est celle de la construction de structures tendues sur une variété de dimension 3 donnée.

Un élément de réponse important a été apporté par Y. Eliashberg et W. Thurston [ElTh] qui ont montré que toute variété fermée, orientée, irréductible et de deuxième groupe d'homologie non nul porte une structure de contact tendue. En usant de moyens différents, R. Gompf a lui aussi construit des structures de contact tendues sur une large classe de variétés — notamment sur « presque » tout fibré de Seifert — (voir [Go]). Dans un précédent article (voir [Co1] et aussi [ML1]), on a par ailleurs démontré que toute variété obtenue par chirurgie d'indice 1 sur une variété de contact tendue est naturellement munie d'une structure de contact tendue. En particulier, la somme connexe de deux variétés de dimension 3 qui portent des structures tendues porte elle-même une structure tendue.

Ici, on s'intéresse au comportement des structures tendues vis-à-vis d'opérations de chirurgie le long de disques et de tores. Le résultat principal dit que si on recolle deux variétés de contact tendues de dimension 3 le long de deux tores incompressibles contenus dans leurs bords, la variété résultante est tendue pourvu que les structures d'origine soient universellement tendues et que les tores soient quasi pré-lagrangiens (voir définitions ci-après). On construit par ailleurs un exemple qui montre que sans cette dernière hypothèse, la variété obtenue peut être vrillée. Sous des hypothèses contraignantes, on obtient aussi un théorème de recollement pour les surfaces à bord d'un type général. Comme dans le cas des chirurgies d'indice un, ces constructions sont indépendantes de tout remplissage symplectique.

À l'aide de ce théorème de chirurgie torique, on donne une condition suffisante pour qu'une structure de contact définie sur un fibré en cercles soit universellement tendue. Si la base n'est pas une sphère, E. Giroux [Gi4] a démontré tout récemment que ce critère rend compte de manière exhaustive de la situation. On obtient de plus au passage un moyen de dire, à la seule vue de son feuilletage caractéristique, si le germe

de structure de contact canoniquement défini au voisinage d'une surface convexe est ou non tendu.

On conclut l'exposé en combinant les résultats de D. Gabai [Ga], Y. Eliashberg et W. Thurston [ElTh] à ces techniques de chirurgie pour construire une structure de contact tendue sur «presque» toute variété graphée ainsi que sur une nouvelle classe de sphères d'homologie toroïdales.

Je remercie vivement Emmanuel Giroux dont les nombreuses remarques ont irrigué cet article; ce travail lui doit beaucoup. Je remercie également Michel Boileau à qui je dois la construction des structures tendues sur les variétés graphées.

## 2. Rappels et notations

Pour une présentation plus approfondie des outils de la géométrie de contact, on pourra se référer à [Gi2].

Une structure de contact sur une variété  $V$  de dimension 3 est la donnée d'un champ de plans  $\xi$  de classe  $C^\infty$  complètement non intégrable. Si ce champ de plans est défini localement comme le noyau d'une 1-forme  $\alpha$ , la non-intégrabilité de  $\xi$  se traduit par le fait que la 3-forme  $\alpha \wedge d\alpha$  ne s'annule pas. Par commodité, on ne considérera ici que des structures transversalement orientées et donc définies par des 1-formes globales. Dans tous les cas, la forme volume  $\alpha \wedge d\alpha$  définit une orientation de la variété  $V$  qui ne dépend pas du choix de  $\alpha$ . Si la variété  $V$  est orientée *a priori*, la structure  $\xi$  possède un signe.

### EXEMPLES 2.1.

- Sur  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ ,  $\alpha = dz + x dy$ .
- Sur  $\mathbb{T}^2 \times I = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, 2\pi] = \{(x, y, \theta)\}$ ,  $\lambda_n = \cos n\theta dx - \sin n\theta dy$ .
- Sur  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, \theta)\}$ ,  $\lambda_n = \cos n\theta dx - \sin n\theta dy$ .

Suivant la définition donnée par Y. Eliashberg (cf. [El1], [El2]), on dit qu'une variété de contact  $(V, \xi)$  est *tendue* si aucun disque plongé dans  $V$  n'est tangent à  $\xi$  en chaque point de son bord (un tel disque est dit *vriillé*). Dans le cas particulier où  $V$  est à bord,  $\xi$  sera dite *tendue* si elle est la restriction d'une structure tendue  $\xi'$  définie sur un élargissement  $V'$  de  $V$ . Par ailleurs,  $(V, \xi)$  sera dite *universellement tendue* si  $\xi$  induit une structure tendue sur le revêtement universel de  $V$  (de l'élargissement  $V'$  lorsque  $V$  est à bord). Comme la préimage de tout disque vrillé dans un revêtement de  $V$  contient un disque vrillé, toute variété de contact universellement tendue est tendue.

REMARQUE 2.2. — On ne connaît pas d'exemple de variété de contact à bord qui ne contient pas de disque vrillé et dont tout élargissement est vrillé.

### 2.1. Courbes dans une variété de contact.

Dans une variété de contact  $(V, \xi)$  de dimension 3, une courbe plongée, orientée et transverse à  $\xi$  est dite positive (resp. négative) si son orientation coïncide avec la coorientation de  $\xi$  (resp. avec la coorientation inverse). Toute courbe plongée dans  $V$  peut être isotopée, par une isotopie  $C^0$ -petite, aussi bien à une courbe *legendrienne* (i.e. tangente en tout point au plan de contact) qu'à une courbe transverse à  $\xi$ , positive ou négative.

Si la structure  $\xi$  est tendue, les courbes legendriennes et transverses sont soumises à des contraintes importantes. Soit  $S$  une surface compacte orientée de bord  $\gamma$  et de caractéristique  $\chi(S)$ . Si  $\gamma$  est legendrien, on note (voir [Gi2])  $\gamma_\epsilon$  la courbe obtenue en poussant légèrement  $\gamma$  suivant un vecteur normal à  $\xi$  et  $\text{tb}(\gamma)$  son invariant de Thurston-Bennequin qui est le nombre d'enlacement de  $\gamma$  avec  $\gamma_\epsilon$ .

Si  $\gamma$  est transverse positif, on définit l'autoenlacement  $\ell(\gamma)$  de  $\gamma$  comme l'enlacement entre  $\gamma$  et une courbe obtenue en poussant légèrement  $\gamma$  par une section non singulière de  $\xi|_S$ .

Dans le cas où  $\xi$  est tendue, ces invariants vérifient les inégalités de Bennequin (cf. [Be] et [El3]) :

$$\text{tb}(\gamma) \leq -\chi(S), \quad \ell(\gamma) \leq -\chi(S).$$

En particulier, s'il existe un disque dont le bord a pour autoenlacement  $+1$ , la structure est vrillée.

On remarque de plus que la définition de l'invariant de Thurston-Bennequin se prolonge au cas où  $\gamma$  est le bord legendrien, lisse par morceaux, d'une surface  $S$  plongée dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . Comme une telle courbe peut être lissée via une famille de courbes legendriennes (voir par exemple la preuve du lemme 3.8.3 dans [Co2]), si  $\xi$  est tendue, cet entier vérifie à nouveau l'inégalité de Bennequin.

### 2.2. Surfaces dans une variété de contact.

Les résultats contenus dans cette section sont principalement l'oeuvre de E. Giroux (voir par exemple [Gi1, Gi2]).

On introduit tout d'abord la notion de feuilletage caractéristique qui joue un rôle central en géométrie de contact. Une surface  $S$  compacte et plongée dans une variété de contact  $(V, \xi)$  est génériquement transverse à  $\xi$  en dehors d'un nombre fini de points  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On supposera toujours

que la structure  $\xi$  est munie d'une coorientation au voisinage de  $S$  et que  $S$  est orientée. Sur  $S \setminus (\bigcup_{1 \leq i \leq n} x_i)$ , l'intersection  $\xi \cap TS$  est alors un champ de droites orientées qui engendre sur tout  $S$  un feuilletage, appelé *feuilletage caractéristique* de  $S$  et noté  $\xi S$ . Les singularités de ce feuilletage sont les points  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  où  $\xi(x_i) = T_{x_i} S$ . Génériquement, leur indice vaut  $\pm 1$ . Un point singulier est dit *elliptique* si son indice vaut 1 et *hyperbolique* si son indice vaut  $-1$ ; il est positif si les coorientations de  $\xi$  et de  $S$  coïncident et négatif sinon.

Le feuilletage caractéristique d'une surface  $S$  contient toute l'information concernant  $\xi$  au voisinage de  $S$  : deux germes de structures de contact de même signe qui induisent le même feuilletage caractéristique sur  $S$  sont conjugués par un germe de difféomorphisme induisant l'identité sur  $S$ .

Si  $\gamma$  est une courbe transverse positivement à  $\xi$  et borde dans  $V$  une surface orientée  $S$ , l'autoenlacement  $\ell(\gamma)$  de  $\gamma$  se lit sur  $\xi S$  : on note  $e_{\pm}$ , resp.  $h_{\pm}$ , le nombre de singularités elliptiques, resp. hyperbolique, positives et négatives de  $\xi S$  et on a :

$$\ell(\gamma) = e_+ - h_+ + h_- - e_-.$$

Par ailleurs, une surface est dite *convexe* si elle est transverse à un champ de vecteurs dont le flot préserve la structure de contact.

Soient  $F$  un feuilletage sur une surface  $S$  et  $\Gamma$  une sous-variété de dimension 1 de  $S$ . À la suite de E. Giroux, on dit que  $\Gamma$  *décompose*  $F$  s'il existe une forme volume  $\omega$  sur  $S$  et un champ de vecteurs  $Y$  engendrant  $F$  tels que :

- le champ  $Y$  soit transverse à  $\Gamma$  ;
- sur chaque composante de  $S \setminus \Gamma$ , la 2-forme  $L_Y \omega$  ne s'annule pas et soit de signe constant ;
- si  $S_i$  est une composante de  $S \setminus \Gamma$  sur laquelle  $L_Y \omega > 0$  (resp.  $L_Y \omega < 0$ ), le champ  $Y$  sorte de  $S_i$  (resp. rentre dans  $S_i$ ) le long de  $\partial S_i$  ;
- $\Gamma$  soit orientée comme le bord des composantes où  $L_Y \omega > 0$ .

Voici un résultat fondamental de E. Giroux [Gi1] qui affirme que la propriété de convexité peut être lue sur le feuilletage caractéristique de  $S$ . Dans le même temps, ce théorème donne une description des types de feuilletages caractéristiques que l'on peut voir apparaître au voisinage d'une surface convexe.

**THÉORÈME 2.3** (E. Giroux, [Gi1]). — *On se donne une variété de contact  $(V, \xi)$  de dimension 3, une surface fermée  $S$  et un plongement  $\phi : S \rightarrow V$ . Alors  $\phi(S)$  est convexe si et seulement s'il existe une sous-variété  $\Gamma$  de  $S$  qui décompose  $\phi^*(\xi\phi(S))$ .*

Dans ce cas, si  $F$  est un feuilletage de  $S$  décomposé par  $\Gamma$ , pour tout voisinage  $U$  de  $\phi(S)$  dans  $V$ , il existe une isotopie  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\phi$  ( $\phi_0 = \phi$ ) dont l'image est contenue dans  $U$  et telle que  $\phi_1^*(\xi\phi_1(S)) = F$ .

Les deux corollaires classiques suivants seront utiles ultérieurement.

LEMME 2.4 (voir [Gi1, lemme d'élimination II.3.3]). — Soit  $\phi : D^2 \rightarrow (V, \xi)$  un plongement du disque dans une variété de contact tendue tel que  $\partial\phi(D^2)$  soit transverse à  $\xi$  et d'autoenlacement  $-1$ . Alors il existe une isotopie  $C^0$ -petite de  $\phi$  fixant un voisinage de  $\partial D^2$ , telle que le feuilletage caractéristique du nouveau disque  $D'$  ne contienne plus qu'une singularité elliptique et que le feuilletage près de cette singularité soit radial.

LEMME 2.5 (voir [Gi1, prop. II.3.1.b et rem. 2.7], [Gi2]). — Soient  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow (V, \xi)$  un plongement du tore dans une variété de contact tendue et  $U$  un voisinage de  $\phi(\mathbb{T}^2)$ . Alors il existe un plongement  $\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow U$  isotope à  $\phi$ , tel que  $\psi(\mathbb{T}^2)$  soit convexe et que  $\xi\psi(\mathbb{T}^2)$  ne contienne ni singularité ni composante de Reeb.

Pour terminer ce rappel des travaux de E. Giroux, on donne un critère qui permet de décider facilement si un feuilletage donné admet un découpage. Plus précisément, on dit qu'un feuilletage est presque de type Morse-Smale si les quatre conditions ci-dessous sont vérifiées :

- toutes les singularités sont isolées et de type elliptique ou hyperbolique,
- les orbites périodiques sont non dégénérées (leur application de premier retour n'est pas tangente à l'identité),
- les ensembles limites de chaque feuille sont soit une singularité, soit une orbite périodique, soit un ensemble de liaisons entre singularités,
- aucune séparatrice instable d'une singularité hyperbolique négative ne joint une singularité positive.

E. Giroux a démontré (voir [Gi1]) que tout feuilletage presque de type Morse-Smale est décomposable. Comme la condition pour le feuilletage caractéristique d'une surface d'être presque de type Morse-Smale est générique, il obtient que la propriété de convexité est générique.

On fixe par ailleurs la notation suivante : si  $S$  est une surface orientée plongée dans une variété  $V$ , on note

$$V \wr S$$

la variété à bord obtenue en découpant  $V$  le long de  $S$ . On a alors une application naturelle  $\pi : V \wr S \rightarrow V$  qui est un difféomorphisme sur  $V \setminus S$  et

qui induit le revêtement d'orientation sur  $S$ . Comme  $\xi S$  détermine  $\xi$  près de  $S$ , toute structure de contact  $\xi$  sur  $V \wr S$  qui induit le même feuilletage caractéristique sur chacune des deux composantes de  $\pi^{-1}(S)$  est isotope, relativement à  $\partial(V \wr S)$ , à une structure  $\xi'$  qui est la préimage par  $\pi$  d'une structure de contact définie sur  $V$ .

**2.3. Chirurgies d'indice 1.**

Le point d'appui de cet article est un résultat publié dans [Co1] qui affirme que toute variété obtenue par chirurgie d'indice 1 sur une variété de contact tendue est naturellement une variété de contact tendue. Cette affirmation contient en particulier le théorème :

THÉORÈME 2.6 (voir [Co1]). — *Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact tendue et  $f$  un plongement de la sphère  $\mathbb{S}^2$  dans  $V$  d'image convexe. Si  $(V \setminus f(\mathbb{S}^2), \xi)$  est tendue, alors  $(V, \xi)$  est tendue.*

Ce résultat repose sur une étude des isotopies de sphères et sur un théorème de Y. Eliashberg :

THÉORÈME 2.7 (voir [El2]). — *Sur une boule compacte  $B_1$ , deux structures de contact tendues qui tracent le même feuilletage caractéristique sur le bord et qui coïncident sur une boule intérieure  $B_0$  sont isotopes relativement à  $\partial B_1 \cup B_0$ .*

**3. Chirurgie le long d'un disque dans une variété de contact tendue**

On prolonge dans cette section le théorème 2.6 au cas des chirurgies effectuées le long d'un disque. Il s'agit de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3 à bord et  $D$  un disque plongé dans  $V$  intersectant  $\partial V$  transversalement suivant  $\partial D = \gamma$ . Si  $\gamma$  est une courbe transverse  $\xi$  sur la variété à coins  $V \wr D$  est tendue, alors  $\xi$  est tendue sur  $V$ .*

REMARQUE 3.2. — L'hypothèse portant sur la valeur de l'autoenlacement de  $\gamma$  est primordiale comme le montre la remarque 4.7.

On munit  $\mathbb{R}^3$  de ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et de sa structure de contact tendue  $\zeta$  d'équation

$$dz + r^2 d\theta = 0.$$

Pour toute fonction lisse  $\alpha : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , on note  $A_\alpha$  l'anneau plongé dans  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$A_\alpha = \{(\alpha(\theta, z), \theta, z); (\theta, z) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]\}.$$



LEMME 3.3. — On se donne une fonction lisse  $f : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  et un difféomorphisme  $\phi$  de  $S_0$  sur  $S_1$  ( $S_i = \{(f(\theta, i), \theta, i); \theta \in \mathbb{S}^1\} \subset \mathbb{R}^3$ ) qui renverse les orientations induites par une orientation de  $A_f$ . Il existe alors une fonction  $g : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $g \leq f$ , telle que  $A_g = A_f$  au voisinage de  $S_0 \cup S_1$  et que les courbes du feuilletage caractéristique de  $A_g$  joignent tout  $x \in S_0$  à  $\phi(x) \in S_1$ .

*Démonstration.* — L'anneau  $A_f$  est transverse au champ de vecteurs radial horizontal  $r\partial/\partial r$  et donc  $\zeta$  est transverse à  $A_f$ . En outre,  $f > 0$  et donc  $\zeta \cap TA_f$  est transverse au champ de plans d'équation  $z = C^{\text{te}}$ , ce qui implique que toutes les feuilles de  $\zeta A_f$  joignent  $S_0$  à  $S_1$ . On peut ainsi définir une structure produit sur  $A_f$  qui identifie une fois pour toutes  $A_f$ , coorienté par  $\partial/\partial r$ , et  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] = \{(\theta', t')\}$ , et où les fibres  $\{\theta'\} \times [0, 1]$  correspondent aux feuilles de  $\zeta A_f$  et les cercles  $S_{t'} = \mathbb{S}^1 \times \{t'\}$  aux cercles  $A_f \cap \{z = t'\}$ .

Si on note  $h : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  la projection sur la première coordonnée dans la structure produit précédente, l'application

$$\psi = h \circ \phi \circ (h|_{S_0})^{-1}$$

est un difféomorphisme de  $\mathbb{S}^1$  qui préserve l'orientation. Ainsi  $\psi$  est isotope à l'identité (par une isotopie  $(\psi_t)_{t \in [0, 1]}$ ) et, pour tout entier relatif  $n$ , les feuilles définies comme

$$\{(\exp(2i\pi n t') \cdot \psi_{t'}(\theta'), t'); t' \in [0, 1]\}_{\theta' \in \mathbb{S}^1}$$

forment un feuilletage  $F_n$  de  $A_f$  et joignent tout  $x \in S_0$  à  $\phi(x) \in S_1$ . On remarque alors que si  $n$  est choisi assez négatif, le feuilletage  $F_n$  est transverse au feuilletage caractéristique de  $A_f$  tout en restant transverse aux cercles  $\mathbb{S}^1 \times \{t'\}$ . On fixe un tel entier  $n$  et on modifie un peu  $F_n$  afin que le nouveau feuilletage  $F'_n$  soit transverse à  $\zeta A_f$  en tout point, sauf sur un petit voisinage de  $\partial A_f$  où  $F'_n$  et  $\zeta A_f$  coïncident. On exige de plus que les feuilles de  $F'_n$  joignent tout  $x \in S_0$  à  $\phi(x) \in S_1$ .

On note à présent  $p$  la projection de  $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3 = \{(r, \theta, z)\}$  sur  $A_f$  qui envoie  $(r, \theta, z)$  sur  $(f(\theta, z), \theta, z)$ .

On définit alors  $g$  en posant

$$g(\theta, z) = \sqrt{|\tan(A(z, \theta))|},$$

où  $A(z, \theta) \in [0, \pi]$  est un relevé continu de la valeur de l'angle orienté (calculé avec la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ ) entre la feuille de  $F'_n$  et le cercle  $\mathbb{S}_z$  au point de coordonnées  $(f(\theta, z), \theta, z) \in A_f$ . En d'autres termes,  $A_g$  est défini comme la réunion des relevés legendriens par  $p$  des feuilles de  $F'_n$ .

Par construction,  $g \leq f$  et  $g = f$  au voisinage de  $\partial A_g = \partial A_f$  où  $F'_n$  et  $\zeta A_f$  coïncident. De plus, le feuilletage caractéristique de  $A_g$  est envoyé par  $p$  sur  $F'_n$  et donc ses feuilles vont de  $x \in S_0$  à  $\phi(x) \in S_1$ . Ainsi, la fonction  $g$  remplit les conditions voulues.  $\square$

LEMME 3.4. — Soient  $(B_0, \xi_0)$  et  $(B_1, \xi_1)$  deux boules tendues telles que  $\xi_0 \partial B_0$  et  $\xi_1 \partial B_1$  ne comportent que deux singularités elliptiques à feuilletage radial. On se donne deux disques  $D_0 \subset \partial B_0$  et  $D_1 \subset \partial B_1$  dont les bords sont transverses respectivement à  $\xi_0$  et  $\xi_1$  et un difféomorphisme  $\pi : D_0 \rightarrow D_1$  qui conjugue les feuilletages non orientés  $\xi_0 D_0$  et  $\xi_1 D_1$ . Alors il existe une boule  $B_2 \subset B_1$  et un difféomorphisme  $\pi' : \partial B_0 \rightarrow \partial B_2$  tels que  $D_1 \subset \partial B_2$ ,  $\pi'$  conjugue les feuilletages non orientés  $\xi_0 \partial B_0$  et  $\xi_1 \partial B_2$  et  $\pi'|_{D_0} = \pi$ .

Démonstration. — Soit  $D$  un disque plongé dans  $B_1$  qui rencontre  $\partial B_1$  hors de  $D_1$  transversalement selon  $\partial D$  et tel que  $\partial D$  soit transverse à  $\xi_1$ . L'autoenlacement de  $\partial D$  vaut alors  $-1$  (car  $\partial D$  borde dans  $\partial B_1$  un disque dont le feuilletage ne contient qu'une singularité elliptique) et le lemme 2.4 permet de supposer en plus que le feuilletage caractéristique de  $D$  est conjugué à celui de

$$D' = \left\{ r \leq 1; z = \frac{1}{2} \right\} \subset (\mathbb{R}^3, \zeta).$$

Un tube fermé  $U$  autour de  $D$  est alors conjugué à un tube  $U'$  autour de  $D'$  par un contactomorphisme. Si  $U$  est choisi suffisamment petit, il rencontre  $\partial B_1$  dans un tube fermé  $V \subset \partial B_1 \setminus D_1$  autour de  $\partial D$  et  $\partial V$  est transverse à  $\xi_1 \partial B_1$ . Il existe alors une fonction  $f : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  et un contactomorphisme

$$\beta : (U, \xi_1) \longrightarrow (\{(r, \theta, z); z \in [0, 1], r \leq f(\theta, z)\} \subset \mathbb{R}^3, \ker(dz + r^2 d\theta)),$$

tels que  $\beta(V) = A_f$ .

On prolonge dans un premier temps  $\pi$  en un difféomorphisme  $\psi$ , qui envoie un petit voisinage  $D'_0$  de  $D_0$  dans  $\partial B_0$  (de bord transverse à  $\xi_0 \partial B_0$ ) sur la composante  $D'_1$  de  $\partial B_1 \setminus \text{Int}(V)$  contenant  $D_1$  et qui conjugue  $\xi_0 D'_0$  et  $\xi_1 D'_1$ . Dans un deuxième temps, on se donne un difféomorphisme  $\psi'$  qui envoie un petit disque  $\Delta \subset \partial B_0$ , dont le bord est transverse à  $\xi$  et ne rencontre pas  $D'_0$ , sur la deuxième composante de  $\partial B_1 \setminus \text{Int}(V)$ . On impose à  $\psi'$  d'agir sur l'orientation de la même manière que  $\psi$  et de conjuguer les feuilletages caractéristiques de  $\Delta$  et  $\psi'(\Delta)$ .

On note  $V_-$  et  $V_+$  les composantes de  $\partial V$  ( $V_- = \partial D'_1$ ) munies de l'orientation induite par celle de  $V$  et  $\eta : V_- \rightarrow V_+$  le difféomorphisme défini par  $\eta(x) = \psi'(y)$ , où  $y$  est le point de  $\partial \Delta$  situé sur la même feuille que  $\psi^{-1}(x)$ . Par construction,  $\eta$  renverse l'orientation.

On applique alors le lemme 3.3 à  $\beta \circ \eta \circ \beta^{-1}$  et  $\beta(V) = A_f$  : il existe une fonction  $g : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $g \leq f$ , telle que  $A_g = A_f$  au voisinage de  $\partial A_f$  et telle que les courbes du feuilletage caractéristique de  $A_g$  aient pour extrémités dans  $\partial A_g$ ,

$$\{(x, \beta \circ \eta \circ \beta^{-1}(x)) \in (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \times (\mathbb{S}^1 \times \{1\})\}.$$

Comme  $g \leq f$ , les anneaux  $A_f$  et  $A_g$  sont isotopes dans  $\beta(U)$  par une isotopie d'image  $(A^t)_{t \in [0, 1]}$  qui laisse invariant un voisinage de  $\partial A_g = \partial A_f$ . La famille de sphères

$$S^t = (\partial B_1 \setminus V) \cup \beta^{-1}(A^t)$$

définit une isotopie dans  $B_1$  entre  $\partial B_1$  et  $S = (\partial B_1 \setminus V) \cup \beta^{-1}(A_g)$ .

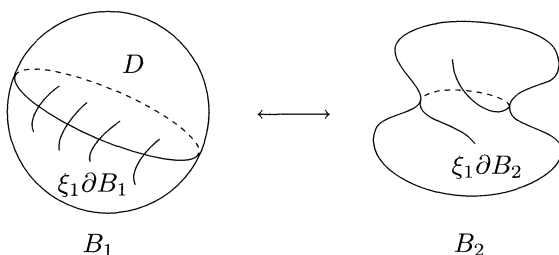


Figure 1. Construction de  $B_2$

La sphère  $S$  borde dans  $B_1$  une boule  $B_2$  (figure 1) et le feuilletage caractéristique de  $S$  permet de prolonger  $\psi \cup \psi'$  en un difféomorphisme  $\pi' : \partial B_0 \rightarrow \partial B_2$  qui conjugue les feuilletages caractéristiques (par construction, deux points de  $\partial D'_0$  et  $\partial \Delta$  situés sur la même feuille de  $\xi_0 \partial B_0$  sont envoyés par  $\psi$  et  $\psi'$  sur deux points appartenant à la même feuille de  $\xi_1 \partial B_2$ ).  $\square$

On montre à présent le théorème 3.1 :

*Démonstration.* — La structure  $\xi$  se prolonge en une structure tendue (notée à nouveau  $\xi$ ) sur un élargissement  $V'$  de  $V \setminus D$ . Pour toute déformation suffisamment  $C^0$ -petite de  $D$  en  $D'$  dans  $V$ , la variété  $V'$  est aussi un élargissement de  $V \setminus D'$ . Par ailleurs, le lemme 2.4 fournit l'existence d'une déformation arbitrairement  $C^0$ -petite de  $D$  en un disque  $D'$  qui permet de ne garder sur  $\xi D'$  qu'une singularité elliptique dont le feuilletage est radial. Si cette déformation est suffisamment petite, la structure induite par  $\xi$  sur  $V \setminus D'$  est donc tendue. On peut ainsi supposer que l'on est dans le cas particulier où  $\xi D$  ne contient qu'une singularité elliptique et où cette singularité a un feuilletage radial.

On note à nouveau  $V'$  un élargissement de  $V \wr D$  sur lequel  $\xi$  se prolonge en une structure de contact tendue et  $D_1$  et  $D_2$  les deux composantes connexes de  $\pi^{-1}(D)$ .

Soient deux plongements  $g_1, g_2 : D^3 \rightarrow V'$  tels que :

- $g_1(D^3) \cap (V \wr D) = D_1$  et  $g_2(D^3) \cap (V \wr D) = D_2$ ;
- les bords des images de  $D^3$  soient convexes et leurs feuilletages ne contiennent que deux singularités elliptiques radiales (pour obtenir cette deuxième condition, on applique le lemme 2.4 au disque  $\partial g_i(D^3) \setminus D_i$ ).

Le difféomorphisme de recollement  $\pi$  envoie  $D_1$  sur  $D_2$ . Par application du lemme 3.4, on peut faire l'hypothèse supplémentaire que  $\pi$  se prolonge en un difféomorphisme  $\pi' : \partial g_1(D^3) \rightarrow \partial g_2(D^3)$  qui conjugue les feuilletages caractéristiques.

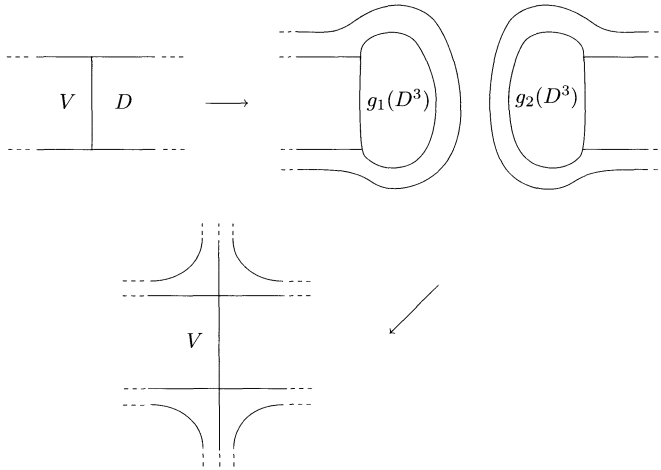


Figure 2. Où l'on reconstruit  $V$

Pour recoller la sphère  $\partial g_1(D^3) \subset V' \setminus \text{Int}(g_1(D^3) \cup g_2(D^3))$  à la sphère  $\partial g_2(D^3) \subset V' \setminus \text{Int}(g_1(D^3) \cup g_2(D^3))$  à l'aide du difféomorphisme  $\pi'$  (figure 2), il faut encore préciser de quelle manière le recollement se comporte transversalement.

Pour cela, on se donne dans un premier temps un plongement  $\phi : D^2 \times [-1, 1] \rightarrow V$  tel que :

- $\phi(D^2 \times \{0\}) = D$ ;
- $\phi(\partial D^2 \times [-1, 1]) \subset \partial V$ ;
- pour tout  $x \in \partial D^2$ ,  $\phi(\{x\} \times [-1, 1])$  soit tangent à  $\xi$ .

Soit alors un disque  $\tilde{D}$  inclus dans  $\partial g_1(D^3)$  qui contient une singularité elliptique, qui ne rencontre pas  $D_1$  et dont le bord est transverse à  $\xi$ . On sait recoller  $\tilde{D}$  à  $\pi'(\tilde{D})$  par  $\pi'$  de manière compatible avec la structure de contact. À l'aide de ce recollement on définit un voisinage tubulaire de  $\tilde{D} \cup \pi'(\tilde{D})$  dans  $V' \setminus \text{Int}(g_1(D^3) \cup g_2(D^3))$ , ou encore un plongement

$$\phi' : (D^2 \times [-1, 0]) \cup (D^2 \times [0, 1]) \rightarrow V' \setminus \text{Int}(g_1(D^3) \cup g_2(D^3))$$

qui envoie une copie de  $D^2 \times \{0\}$  sur  $\tilde{D}$  et l'autre sur  $\pi'(\tilde{D})$  et tel que pour tout  $x \in \partial D^2$ ,  $\phi'(\{x\} \times [-1, 0]) \cup (\{x\} \times [0, 1])$  soit tangent à  $\xi$ . Par définition, le recollement entre  $\tilde{D}$  et  $\pi'(\tilde{D})$  donné par  $\pi'$  et cette structure transverse est compatible avec  $\xi$ .

Comme de plus la structure  $\xi$  est transverse à  $\partial g_1(D^3) \setminus (D_1 \cup \tilde{D})$ , il existe un champ de droites  $X$  défini au voisinage de

$$\partial g_1(D^3) \setminus (D_1 \cup \tilde{D}) \cup \partial g_2(D^3) \setminus (D_2 \cup \pi'(\tilde{D}))$$

dans  $V' \setminus \text{Int}(g_1(D^3) \cup g_2(D^3))$ , tangent à  $\xi$  et coïncidant avec la direction verticale fournie par  $\phi$  et  $\phi'$  au voisinage de

$$\partial((\partial g_1(D^3) \setminus (D_1 \cup \tilde{D})) \cup \partial(\partial g_2(D^3) \setminus (D_2 \cup \pi'(\tilde{D}))).$$

Le champ de droites vertical obtenu au voisinage de  $\partial g_1(D^3) \cup \partial g_2(D^3)$  permet de recoller la sphère  $\partial g_1(D^3)$  à la sphère  $\partial g_2(D^3)$  de manière compatible avec  $\xi$ .

On construit ainsi, d'après le théorème 2.6, une variété de contact tendue qui contient  $(V, \xi)$  comme sous-variété de contact et cette dernière est donc tendue.  $\square$

#### 4. Chirurgie le long d'un tore incompressible

Un plongement  $\phi$  d'une surface  $S$  dans une variété  $V$  ainsi que son image sont dits *incompressibles* si aucune des deux propriétés suivantes n'est vérifiée :

- $S$  est une sphère dont l'image par  $\phi$  borde une boule dans  $V$  ;
- il existe une courbe fermée simple non contractile dans  $S$  dont l'image par  $\phi$  borde un disque dans  $V \setminus \phi(S)$ .

Dans le cas où la surface  $S$  est orientable et diffère de la sphère, le plongement  $\phi$  est incompressible si et seulement si le morphisme de groupes  $\phi_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(V)$  est injectif (voir [Ja]).

On s'intéresse ici aux types de structures de contact obtenus en recollant entre elles deux variétés de contact tendues selon deux composantes de leurs bords qui sont des tores incompressibles.

REMARQUE 4.1. — Sans la condition d'incompressibilité, on peut construire de nombreux exemples de recollements qui aboutissent à des structures vrillées (voir par exemple [Gi3]).

Un tore  $T$  plongé dans une variété de contact  $(V, \xi)$  sera dit *quasi pré-lagrangien* s'il existe un voisinage  $U$  de  $T$  tel que, si  $p : \tilde{U} \rightarrow U$  est le revêtement universel de  $U$ , il existe un plongement propre de

$$(\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, 2\pi], \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy))$$

dans  $\tilde{U}$  envoyant  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  sur  $p^{-1}(T)$ . Cette notion de tore quasi pré-lagrangien est légèrement plus générale que la notion de tore lagrangien utilisée habituellement. On remarque en particulier que si  $\xi T$  est un feuilletage linéaire de  $T$ , alors le tore  $T$  est quasi pré-lagrangien.

**4.1. Cas où les structures sont universellement tendues et le tore quasi pré-lagrangien.**

Le but de ce paragraphe est de prouver qu'une opération de chirurgie le long d'un tore quasi pré-lagrangien est compatible avec le caractère universellement tendu des structures de contact :

THÉORÈME 4.2. — *Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3 et  $\mathbb{T}$  un tore quasi pré-lagrangien, plongé dans  $V$  de manière incompressible. Si la structure induite par  $\xi$  sur  $V \setminus \mathbb{T}$  est universellement tendue, alors  $(V, \xi)$  est universellement tendue et en particulier  $(V, \xi)$  est une variété de contact tendue.*

La démonstration du théorème 4.2 s'appuie sur le théorème 3.1.

On considère sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi] = \mathbb{R}^2 \times I = \{(x, y, \theta)\}$  la structure  $\xi$  d'équation

$$\alpha = \cos \theta dx - \sin \theta dy = 0.$$

REMARQUE 4.3. — La structure définie sur  $\mathbb{R}^2 \times I$  par la 1-forme

$$\alpha_s = \cos(s\theta) dx - \sin(s\theta) dy$$

est isomorphe à la structure standard définie par  $dz + p dq$  sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi s]$  via le changement de variable :

$$q = s\theta, \quad p = \sin(s\theta)x + \cos(s\theta)y, \quad z = \cos(s\theta)x - \sin(s\theta)y.$$

Or pour deux valeurs  $s_1, s_2 > 0$  de  $s$ , si  $f$  est un difféomorphisme croissant de  $[0, s_1]$  dans  $[0, s_2]$  dont la dérivée en 0 et en  $s_1$  vaut 1, le changement de variable

$$z' = z, \quad p' = f'(q)^{-1}p, \quad q' = f(q)$$

donne un contactomorphisme entre les deux structures précédentes. Ainsi, pour deux valeurs de  $s$ , les deux structures  $\alpha_s$  associées sont conjuguées par un difféomorphisme induisant l'identité près de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .

On en déduit le lemme suivant :

LEMME 4.4. — *Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact dont une des composantes de bord a un voisinage contactomorphe à*

$$(\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, 2\pi], \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy))$$

(la composante de bord  $P$  considérée étant l'image de  $\mathbb{R}^2 \times \{2\pi\}$ ). Si la structure induite par  $\xi$  sur  $V \setminus \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  est tendue,  $\xi$  est tendue sur  $V$ .

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer la remarque précédente : les structures induites par  $\xi$  sur  $\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, 2\pi]$  et  $\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, -\pi]$  sont contactomorphes par un difféomorphisme induisant l'identité près de  $\mathbb{R}^2 \times \{-2\pi\}$ .  $\square$

Pour démontrer le théorème 4.2, on a cependant besoin d'un énoncé plus général :

LEMME 4.5. — *Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact et  $\phi$  un plongement de contact propre de*

$$W = (\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, 2\pi], \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy))$$

dans  $(V, \xi)$ . Si on note  $P_0 = \phi(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$  et on suppose que la structure induite par  $\xi$  sur  $V \setminus P_0$  est tendue, alors la structure  $\xi$  est tendue sur  $V$ .

*Démonstration.* — On identifie  $\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, 2\pi]$  et son image par  $\phi$  et on note, pour tout réel  $r$  positif,  $D_r$  le disque plongé dans  $P_0$  et défini par

$$D_r = \{x^2 + y^2 \leq r; \theta = 0\}.$$

Soit  $D$  un disque de bord legendrien  $\gamma$  plongé dans  $V$ . Si  $r$  est assez grand,  $D \cap W \subset D_r \times [-2\pi, 2\pi]$ . Pour un tel réel  $r$  fixé, on note  $f$  la feuille de  $\xi P_0$  qui passe par le point de coordonnées  $(0, 0)$ . Cette feuille intersecte  $D_r$  et on note  $f'$  un segment contenu dans  $f \setminus D_r$ .

On peut alors modifier  $P_0$  en un plan  $P_1$ , par une isotopie  $C^0$ -petite fixant  $f$  et dont le support ne rencontre pas  $D_r \times [-2\pi, 2\pi]$ , pour faire apparaître le long de  $f'$  sur  $\xi P_1$  deux singularités de même signe en position d'élimination (voir [El2]). On choisit ce signe de telle sorte qu'en venant de  $D_r$  en suivant  $f$ , on rencontre d'abord la singularité elliptique  $e$ .

Si  $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$  est choisi suffisamment petit,  $D_\epsilon \subset D_r$  et toute feuille passant par  $D_\epsilon$  contient  $e$  dans son ensemble limite.

Sur  $W$ , la structure de contact est invariante par les difféomorphismes

$$\phi_\lambda : (x, y, \theta) \longmapsto (\lambda x, \lambda y, \theta).$$

En prenant l'image de  $P_1$  par  $\phi_{r/\epsilon}$ , on obtient un plan  $P$  contenant  $D_r = \phi_{r/\epsilon}(D_\epsilon)$ , tel que toutes les courbes de  $\xi P$  passant par  $D_r$  aboutissent à (ou partent de) la singularité elliptique du feuilletage de  $P$ . De plus,  $P \cap D_r \times [-2\pi, 2\pi] = D_r$  et donc  $P \cap D \subset D_r$ .

On peut alors trouver un disque  $\Delta$  plongé dans  $P$ , contenant  $D_r$ , de bord transverse au feuilletage caractéristique de  $P$  et contenant la singularité elliptique  $\phi_{r/\epsilon}(e)$ . De plus,  $\Delta$  contient toutes les composantes d'intersection de  $D$  et  $P$ . Par application du lemme 4.4, on sait que la structure obtenue en recollant à  $V \wr P_0$  le long de chaque préimage de  $P_0$  par  $\phi|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}}$ , respectivement,

$$(\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi], \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy))$$

et

$$(\mathbb{R}^2 \times [-2\pi, 0], \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy))$$

est tendue. On construit ainsi un élargissement de  $V \wr P$  et cette dernière est donc tendue. On se donne alors un petit voisinage tubulaire  $U$  de  $P \setminus \Delta$  et on considère un lissage  $M$  de la variété à coins  $V \setminus U$ . On a alors  $\partial \Delta \subset \partial M$  et la structure induite par  $\xi$  sur  $M \wr \Delta$  est tendue ( $M \wr \Delta \subset V \wr P$ ). D'après le théorème 3.1, la structure induite par  $\xi$  sur  $M$  est tendue et en particulier  $D$  n'est pas tangent à  $\xi$  en tous les points de son bord.  $\square$

Le théorème annoncé découle immédiatement du lemme 4.5.

*Démonstration.* — Il s'agit de démontrer que la structure induite par  $\xi$  sur le revêtement universel  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  est tendue. On sait par hypothèses que la structure induite sur  $\tilde{V} \setminus p^{-1}(\mathbb{T})$  est tendue. Or,  $\tilde{V}$  est construite à partir de cette dernière par des recollements suivant les composantes de la préimage de  $\mathbb{T}$  qui sont des plans proprement plongés dans  $\tilde{V}$ . De plus, comme tout disque plongé dans  $\tilde{V}$  ne rencontre qu'un nombre fini de copies de ces revêtements, il suffit de montrer que la structure induite sur un nombre fini de recollements de  $\tilde{V} \setminus p^{-1}(\mathbb{T})$  est tendue.

Comme le tore  $\mathbb{T}$  est quasi pré-lagrangien, à chaque recollement on est dans les hypothèses du lemme 4.5, ce qui permet de conclure la démonstration.  $\square$



#### 4.2. Exemple d'un recollement vrillé.

On décrit un exemple de recollement de structures de contact universellement tendues, dû à E. Giroux, qui montre que si le tore  $\mathbb{T}$  n'est pas quasi pré-lagrangien, la variété obtenue peut être vrillée.

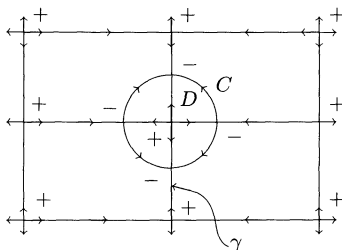


Figure 3. Le feuilletage  $F$

Le feuilletage  $F$  du tore  $\mathbb{T}^2$  décrit sur la figure 3 est presque de type Morse-Smale. Il existe donc une structure de contact  $\xi$  sur  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  qui est  $\mathbb{R}$ -invariante et qui induit  $F$  comme feuilletage caractéristique sur  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ .

La structure  $\xi$  induit, par passage au quotient sous l'action d'une translation verticale, une structure de contact  $\eta$  sur le tore  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$  qui est  $\mathbb{S}^1$ -invariante. Comme  $F$  comporte un cycle  $C$  de liaisons entre singularités de même signe qui borde dans  $\mathbb{T}^2$  un disque  $D$ , la structure  $\eta$  est vrillée. En effet, une isotopie de  $D$  fixant  $\partial D$  suffit pour faire coïncider le plan tangent du nouveau disque  $D'$  et  $\eta$  le long de  $\partial D$ .

Soit alors  $\gamma$  une courbe fermée simple, plongée dans  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ , non contractile et divisant  $D$  en deux (sur la figure 3, la courbe  $\gamma$  coïncide avec la courbe legendrienne verticale qui rencontre  $D$ ). On note  $\mathbb{T}$  le tore incompressible  $\gamma \times \mathbb{S}^1$ .

Reste à vérifier que la structure induite par  $\eta$  sur  $\mathbb{T}^3 \setminus \mathbb{T}$  est universellement tendue. Pour cela, on remarque que le revêtement universel de  $(\mathbb{T}^3 \setminus \mathbb{T}, \eta)$  est identique au revêtement universel de  $((\mathbb{T}^2 \setminus \gamma) \times \mathbb{R}, \xi)$ .

En outre, il existe un feuilletage  $F'$  de  $\mathbb{T}^2$  presque de type Morse-Smale, dans lequel se plonge  $(\mathbb{T}^2 \setminus \gamma, F)$  par un plongement incompressible  $\phi$  (figure 4).

Le feuilletage  $F'$  est induit par une structure de contact  $\mathbb{R}$ -invariante  $\xi'$  sur  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  qui est universellement tendue : le feuilletage  $F'$  est décomposé par une sous-variété  $\Gamma$  qui comporte quatre composantes non contractiles dans  $\mathbb{T}^2$  et on applique (bien qu'une démonstration directe soit possible) le corollaire 5.2. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que  $(\phi(\mathbb{T}^2 \setminus \gamma) \times \mathbb{R}, \xi')$  est contactomorphe à  $((\mathbb{T}^2 \setminus \gamma) \times \mathbb{R}, \xi)$  et que son revêtement universel est inclus dans celui de  $(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \xi')$  qui est tendu.

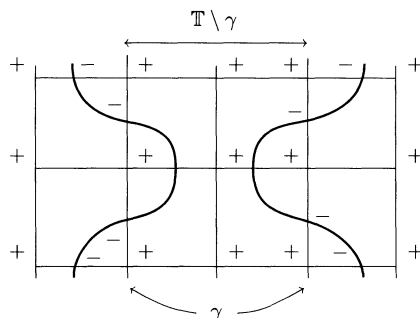


Figure 4. Le feuilletage  $F'$

### 4.3. Encore un exemple.

Voici un deuxième exemple de recollement vrillé. Cette fois, la structure de départ n'est pas universellement tendue, et les tores de recollement ne sont pas quasi pré-lagrangiens. Cette exposition permet de dégager l'existence de structures tendues non universellement tendues (voir aussi [ML2] et [Go] pour d'autres exemples).

La première étape consiste à donner la construction d'une structure de contact tendue sur le tore plein, revêtue par une structure vrillée.

PROPOSITION 4.6. — *Il existe sur le tore plein une structure de contact tendue induisant sur tous ses revêtements connexes stricts des structures vrillées.*

*Démonstration.* — On se place dans  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure tendue d'équation

$$\alpha = \cos 2\pi\theta dx - \sin 2\pi\theta dy = 0$$

et on note  $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite de cylindres définie par :

$$C_n = \{0 \leq \theta \leq 1; (x - \cos 2\pi n\theta)^2 + (y + \sin 2\pi n\theta)^2 = 1\} \\ \cup \{\theta \in [-1, 0] \cup [1, 2]; (x - 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Le segment  $\gamma = \{x = 0, y = 0, -1 \leq \theta \leq 2\}$  est legendrien et est inclus dans chaque anneau  $C_n$ . Sur chacun des demi-espaces  $\theta \leq 0$  et  $\theta \geq 1$ , les cylindres  $C_n$  sont identiques. On rend  $\partial C_0$  legendrien de la manière suivante.

On modifie légèrement  $C_0$  dans  $A = \{\theta \leq 0\} \cup \{\theta \geq 1\}$  par une isotopie laissant fixe  $\gamma$ , afin que pour un certain  $\epsilon > 0$ , les deux segments legendriens  $\{0\} \times [-\epsilon, \epsilon] \times \{-1, 2\}$  soient inclus dans le bord du nouveau cylindre  $\tilde{C}_0$ . Dans une variété de contact, toute courbe plongée peut

être isotopée en une courbe legendrienne par une isotopie  $C^0$ -petite, relativement aux points où elle est déjà de contact. Si  $\epsilon'$  est suffisamment petit, l'image d'une isotopie  $\epsilon'$ -petite de  $\partial\tilde{C}_0$  induisant l'identité sur  $\{0\} \times [-\epsilon, \epsilon] \times \{-1, 2\}$  et rendant  $\partial\tilde{C}_0$  legendrien ne rencontre pas  $\gamma$  hors de  $\{0\} \times \{0\} \times \{-1, 2\}$  et reste dans  $A$ . Cette isotopie se prolonge donc en une isotopie de  $\tilde{C}_0$  qui fixe  $\gamma$  et  $\tilde{C}_0 \cap (\mathbb{R}^3 \setminus A)$  et qui est l'identité dans le secteur  $0 \leq \theta \leq 1$ .

La même isotopie rend alors  $\partial C_n$  legendrien pour tout entier  $n$ . On note  $C'_n$  la nouvelle suite de cylindres. Par construction, l'invariant de Thurston-Bennequin  $k$  de  $\partial C'_n$  ne dépend pas de  $n$ .

Pour un entier  $n$  donné, on note  $U_n$  l'adhérence d'un petit voisinage tubulaire de  $C'_n$ . La structure induite sur  $U_n$  par  $\ker \alpha$  est tendue. Soit alors  $p : V_n \rightarrow U_n$  un revêtement connexe strict de  $U_n$ . L'adhérence d'une composante connexe de  $p^{-1}(C'_n \setminus \gamma)$  est un carré  $D$  plongé dans  $V_n$  dont le bord est formé de quatre côtés legendriens. Deux sont envoyés par  $p$  bijectivement sur  $\gamma$  et l'intérieur des deux autres est envoyé bijectivement par  $p$  sur  $\partial C'_n \setminus \gamma$ . L'invariant de Thurston-Bennequin de  $\partial D$  vaut par construction  $k - 6 + 2n$  et en particulier, si  $n$  est assez grand, la structure induite sur  $V_n$  est vrillée.  $\square$

Le lemme 2.5 permet d'effectuer une isotopie qui rend  $\partial U_n$  convexe et élimine de son feuilletage caractéristique les singularités et les composantes de Reeb.

REMARQUE 4.7. — La conclusion du théorème 3.1 portant sur les chirurgies le long d'un disque se trouve prise en défaut si l'on ne suppose pas que l'autoenlacement du bord du disque est égal à  $-1$ . En effet, pour un entier  $n$  choisi convenablement, le revêtement double de  $U_n$  est vrillé et obtenu en recollant entre elles selon des disques à bords transverses deux copies d'une même boule.

On poursuit la construction en partant d'un tore plein  $T$  muni de l'une des structures tendues non universellement tendues  $\xi$  construites précédemment. Soit  $\gamma$  une courbe transverse à  $\xi$ , isotope à l'âme de  $T$  et ne rencontrant pas l'anneau  $C'_n$  dont le revêtement donne un disque vrillé. On enlève à  $T$  un petit voisinage tubulaire de  $\gamma$  dont le bord est un tore qui porte un feuilletage caractéristique sans singularité ni composante de Reeb. On obtient ainsi une structure de contact tendue  $\xi$  sur  $W = \mathbb{T}^2 \times [0, 2\pi]$  qui n'est pas universellement tendue. Pour terminer la construction, il reste à démontrer le lemme suivant :

LEMME 4.8. — *On considère la variété  $V = \mathbb{T}^2 \times [0, 1] = \{(x, y, \theta)\}$  et on suppose donné sur chacune de ses composantes de bord  $\mathbb{T}_i = \mathbb{T}^2 \times \{i\}$ ,*

$i \in \{0, 1\}$ , un feuilletage non singulier orienté  $F_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , possédant une transversale fermée simple qui rencontre toutes les feuilles. Il existe alors sur  $V$  une structure de contact universellement tendue  $\xi$  qui induit  $F_i$  comme feuilletage caractéristique sur  $\mathbb{T}_i$ .

*Démonstration.* — Pour obtenir  $\xi$ , on cherche à plonger  $V$  dans

$$(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \eta = \ker(\cos \theta' dx' - \sin \theta' dy'))$$

de manière incompressible, avec pour contrainte d'obtenir  $F_i$  comme feuilletage caractéristique de l'image de  $\mathbb{T}_i$ .

On munit  $\partial V$  de l'orientation canoniquement induite par celle de  $V$ . Les feuilletages orientés  $-F_0$  ( $F_0$  muni de l'orientation opposée) et  $F_1$  sont alors eux aussi coorientés et, comme ils possèdent une transversale fermée qui rencontre toutes les feuilles, il existe deux applications

$$\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

telles que  $-F_0$  et  $F_1$  aient pour équations

$$\cos \alpha_i(x, y) dx - \sin \alpha_i(x, y) dy = 0, \quad i = 0, 1.$$

De plus, quitte à rajouter  $2k\pi$  à  $\alpha_1$ , où  $k$  est un entier suffisamment grand, on peut supposer que  $\alpha_0 < \alpha_1$ .

On note alors

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$$

un plongement tel que, pour  $i = 0, 1$ ,

$$\phi(x, y, i) = (x, y, \alpha_i(x, y))$$

et on munit  $V$  de la structure de contact  $\xi = \phi^*\eta$ . Par définition  $\phi$  conjugue  $\xi\phi(T_i)$  et  $F_i$ . La structure  $\xi$  est universellement tendue car  $\eta$  est revêtue par la structure tendue de  $\mathbb{R}^3$  et  $\phi$  est incompressible.  $\square$

Pour achever la construction, on plonge  $W = \mathbb{T}^2 \times [0, 2\pi]$  dans  $\mathbb{T}^3$  de manière incompressible. L'adhérence du complémentaire de l'image de ce plongement définit une sous-variété de  $\mathbb{T}^3$  difféomorphe à  $V$ . Les feuilletages caractéristiques de  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  et  $\mathbb{T}^2 \times \{2\pi\}$  induisent des feuilletages sur chacune des composantes du bord de  $V$  qui sont sans singularité ni composante de Reeb. En appliquant le lemme précédent, on obtient une structure de contact tendue  $\zeta$  sur  $V$  qui se recolle par construction à  $\xi$  pour former une structure de contact  $\eta$  sur  $\mathbb{T}^3$  (les

feuilletages au bord sont compatibles). Or la structure  $\eta$  induit sur le revêtement universel de  $\mathbb{T}^3$  une structure vrillée car c'est le cas pour  $\xi$ . Cette structure est donc vrillée, car, d'après un théorème démontré indépendamment par E. Giroux [Gi4] et Y. Kanda [Ka], les structures tendues sur  $\mathbb{T}^3$  sont exactement les structures

$$(\mathbb{T}^3, \xi_n = \ker(\cos(n\theta) dx + \sin(n\theta) dy))$$

qui sont toutes revêtues par la structure tendue de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi, dans l'une des deux étapes du recollement, on passe d'une structure tendue à une structure vrillée.

## 5. Construction de variétés de contact tendues

### 5.1. Structures tendues sur les fibrés en cercles au-dessus d'une surface.

On commence par donner une condition suffisante pour qu'une structure de contact définie sur un fibré en cercles soit universellement tendue :

**PROPOSITION 5.1.** — *Soient  $p : V \rightarrow S$  un fibré en cercles sur une surface  $S$  et  $\xi$  une structure de contact sur  $V$  telle que  $\xi$  soit transverse aux fibres de  $V$  sauf sur la préimage par  $p$  d'une collection  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$  de courbes fermées simples, non contractiles et deux à deux disjointes de  $S$ . Si on suppose de plus que  $\xi$  est transverse à chaque tore  $\mathbb{T}_i = p^{-1}(\gamma_i)$ , alors la structure  $\xi$  est universellement tendue.*

*Démonstration.* — Pour montrer que  $\xi$  est universellement tendue, on commence par remarquer que sur chaque composante de  $V \setminus \bigcup \mathbb{T}_i$ , la structure de contact induite par  $\xi$  est universellement tendue car transverse aux fibres de la fibration (voir par exemple la proposition 3.5.6 de [ElTh]). On note alors que les feuilles  $\xi\mathbb{T}_i$  coïncident avec les fibres de  $p$ . On est donc dans les hypothèses du théorème 4.2 qui affirme que lorsqu'on recolle ces composantes entre elles pour reconstituer  $(V, \xi)$ , on reste dans la classe des structures universellement tendues.  $\square$

Un corollaire de ce résultat fournit un moyen de lire sur le feuilletage caractéristique d'une surface convexe si la structure induite au voisinage de cette surface est universellement tendue.

**COROLLAIRE 5.2.** — *Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3 et  $\phi : S \rightarrow V$  un plongement d'une surface  $S$  dans  $V$ , d'image convexe et tel que chaque composante de la sous-variété  $\Gamma$  qui décompose  $\phi^*(\xi\phi(S))$  soit non contractile dans  $S$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $\phi(S)$  dans  $V$  tel que  $\xi|_U$  soit universellement tendue.*

REMARQUE 5.3. — Réciproquement, si on sait que  $\xi$  est tendue au voisinage de  $\phi(S)$ , alors, d'après le théorème 2.3 de E. Giroux, chaque composante de  $\Gamma$  est non contractile.

*Démonstration.* — Comme  $\phi(S)$  est convexe, il existe un plongement  $\Phi : S \times \mathbb{R} \rightarrow V$  tel que  $\Phi(S \times \{0\}) = \phi(S)$  et que la structure  $\Phi^*\xi$  soit  $\mathbb{R}$ -invariante. Par construction (cf. [Gi1]), la sous-variété  $\Gamma \subset S \times \{0\}$  est isotope, par une isotopie dont l'image est transverse à  $\Phi^*(\xi\phi(S))$ , à la sous-variété  $\Gamma'$  de  $S \times \{0\}$  définie comme le lieu des points où  $\xi$  est verticale. On déduit alors directement de la proposition 5.1 que  $\Phi^*\xi$  est universellement tendue.  $\square$

L'intérêt de la proposition 5.1 est qu'elle donne un critère systématique. En effet, R. Lutz a démontré dans [Lu] que pour tout système non vide de courbes fermées simples non contractiles et deux à deux disjointes qui découpe  $S$  ( $\neq S^2$ ) et pour tout fibré en cercles  $V$  sur  $S$ , il existe une structure de contact sur  $V$  qui vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 pour ce système de courbes. De plus, réciproquement, E. Giroux [Gi4] a récemment démontré que toute structure de contact universellement tendue portée par un fibré en cercles sur une surface différente de  $S^2$  est de ce type.

## 5.2. Variétés graphées.

Une variété *graphée* est une variété  $V$  de dimension 3 qui contient une collection finie  $\Upsilon$  de tores deux à deux disjointes qui découpent  $V$  en fibrés de Seifert. On suppose que la collection  $\Upsilon$  est minimale, c'est-à-dire que si  $\mathbb{T} \in \Upsilon$ , au moins une composante de  $V \setminus (\Upsilon \setminus \mathbb{T})$  n'est pas un fibré de Seifert. Si aucune composante de  $V \setminus \Upsilon$  n'est un tore solide, chaque tore  $\mathbb{T} \in \Upsilon$  est incompressible d'après le lemme de Dehn.

THÉORÈME 5.4. — *Toute variété graphée et orientée  $V$ , scindée en fibrés de Seifert par une collection de tores incompressibles et différente d'un fibré de Seifert sur la sphère, porte une structure de contact tendue positive.*

Ce résultat est complété par un théorème de Gompf :

THÉORÈME 5.5 (voir [Go]). — *Tout fibré de Seifert orientable au-dessus de la sphère porte une structure de contact tendue (pas forcément positive).*

Finalement, toute variété graphée orientable, scindée en fibrés de Seifert par une famille de tores incompressibles (éventuellement vide), porte une structure de contact tendue.

L'argument principal pour démontrer le théorème 5.4 est un résultat récent de Y. Eliashberg et W. Thurston qui relie les structures de contact tendues et les feuilletages tendus (un feuilletage est dit *tendu* s'il diffère du feuilletage en sphères de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et s'il possède une transversale fermée qui rencontre toutes ses feuilles).

**THÉORÈME 5.6** (voir [ElTh, cor. 3.2.8]). — *Soient  $V$  une variété de dimension 3 compacte et  $F$  un feuilletage tendu de  $V$  transverse à  $\partial V$ . Pour tout réel  $\epsilon > 0$ , il existe une structure de contact  $\xi$  qui est  $\epsilon$ - $C^0$ -proche de  $F$ . De plus, si  $\epsilon$  est choisit suffisamment petit, la structure  $\xi$  est universellement tendue.*

On montre à présent le théorème 5.4.

*Démonstration.* — Sous l'hypothèse que  $V$  n'est pas un fibré de Seifert au-dessus de la sphère, il existe une collection de tores incompressibles que l'on peut toujours supposer non vide et qui découpe  $V$  en une famille de fibrés de Seifert  $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Or, un fibré de Seifert à bord non vide  $W$  contient une surface incompressible orientable  $S$  qui a une intersection homologique non nulle avec une fibre régulière. En particulier, le groupe fondamental de  $S$  (vu comme sous-groupe de  $\pi_1(W)$ ) ne contient pas le sous-groupe de  $\pi_1(W)$  engendré par une fibre non singulière.

Si  $S$  ne sépare pas  $W$ , alors  $W$  est une fibration sur le cercle d'après le résultat VI.26 de [Ja]. Si  $S$  sépare  $W$ , alors  $S$  sépare  $W$  en deux fibrations tordues sur l'intervalle d'après le résultat VI.28 de [Ja]. En particulier, dans tous les cas, les fibres de ces fibrations forment un feuilletage tendu qui trace un feuilletage en cercles sur le bord de  $W$ . On applique ce résultat à chaque composante  $V_i$ .  $\square$

On démontre de plus le résultat suivant, qui est un corollaire du théorème 5.6 de Y. Eliashberg et W. Thurston :

**COROLLAIRE 5.7.** — *Soient  $V$  une variété compacte de dimension trois telle que chaque composante de  $\partial V$  soit un tore  $\mathbb{T}^2$  et  $F$  un feuilletage tendu sur  $V$ , transverse à  $\partial V$  et qui trace sur  $\partial V$  un feuilletage en cercles. Alors il existe une structure de contact universellement tendue  $\xi$  sur  $V$ , telle que  $\xi \partial V$  soit un feuilletage en cercles.*

*Démonstration.* — On recolte à chaque composante de  $\partial V$  un tore solide  $\mathbb{T} = D^2 \times \mathbb{S}^1$  de telle sorte que chaque cercle méridien  $\partial D^2 \times \{.\}$  se recolte sur une feuille de  $F \cap \partial V$ . Dans la nouvelle variété  $V'$ , le feuilletage  $F'$  obtenu à partir de  $F$  en prolongeant chaque feuille de  $F$  rencontrant  $\partial V$  par le facteur  $D^2 \times \{.\}$  correspondant est tendu.

Pour chaque composante  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , de  $\partial V$ , il existe ainsi un plongement  $\phi_i : D^2 \times \mathbb{S}^1 = \{(r, \theta, z) ; r \leq 2\} \rightarrow V'$  tel que :

- $\phi_i(\{r = 1\}) = T_i$  ;
- $\phi_i(\{z = c\}) \subset F'$  ;
- $\phi_i(\{r = 0\}) = 0 \times \mathbb{S}^1$  ;
- les images des  $\phi_i$  soient deux à deux disjointes.

On fixe une métrique  $g$  sur  $V'$  telle que  $\phi_i^*g$  soit la métrique euclidienne de  $D^2 \times \mathbb{S}^1$ . D'après le théorème 5.6 de Y. Eliashberg et W. Thurston, il existe  $\epsilon > 0$  tel que toute structure de contact  $\epsilon$ - $C^0$ -proche de  $F$  sur  $V$  soit universellement tendue. De plus, on peut approcher le feuilletage  $F'$  de  $V'$  de manière arbitrairement  $\epsilon'$ - $C^0$ -proche par une structure de contact.

Pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$ , on note  $\mathbb{T}_i^\alpha$  le tore plein  $\phi_i(\{r \leq \alpha\})$ . Il existe de plus un difféomorphisme lisse  $F_\alpha : [\alpha, 2] \rightarrow [1, 2]$ , tel que  $F_\alpha|_{[3/2, 2]}$  soit l'identité et que  $|F'_\alpha| \geq \frac{1}{4}$ .

Dès lors, si  $\epsilon'$  est choisi assez petit et inférieur à  $\frac{1}{4}\epsilon$ , toute structure de contact  $\eta$  définie sur  $V'$  et  $\frac{1}{4}\epsilon$ - $C^0$ -proche de  $F'$  est transverse à  $\phi_i(\{\cdot\} \times \mathbb{S}^1)$ .

D'après le lemme de Darboux, il existe un réel  $\alpha \in ]0, 1]$  pour lequel il existe un tore  $\mathbb{T}^i \subset D^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \{r < \alpha\}$  isotope au tore  $\{r = \alpha\}$  dans  $D^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \{r < \alpha\}$  et dont l'image par  $\phi_i$  porte un feuilletage caractéristique en cercles.

Le difféomorphisme  $\Phi^\alpha : V' \setminus (\bigcup \text{Int}(\mathbb{T}_i^\alpha)) \rightarrow V$ , qui vaut l'identité en dehors de l'image de  $\Pi\phi_i$  et défini par

$$\Phi^\alpha(\phi_i(r, \theta, z)) = \phi_i(F_\alpha(r), \theta, z)$$

à l'intérieur, préserve  $F'$ . Il envoie  $\eta$  sur une structure  $\xi'$  qui est  $\epsilon$ - $C^0$ -proche de  $F$  et qui est donc universellement tendue. La composante  $V'$  de  $V \setminus (\bigcup \Phi^\alpha(\mathbb{T}^i))$  qui ne rencontre pas  $\partial V$  est difféomorphe à  $V$  par un difféomorphisme  $\psi$ . De plus  $\xi'|_{V'}$  est universellement tendue. On munit finalement  $V$  de la structure  $\psi_*\xi'|_{V'}$ .  $\square$

Pour poursuivre la démonstration du théorème 5.4, on applique le corollaire 5.7 qui munit chaque composante  $V_i$  d'une structure de contact universellement tendue. À l'aide du théorème de recollement 4.2, combiné avec le lemme d'ajustement 4.8 qui permet de rendre ces structures compatibles, on recolle les composantes  $V_i$  entre elles pour obtenir une structure de contact universellement tendue sur  $V$ .  $\square$

### 5.3. Sphères d'homologie toroïdales.

Voici un procédé de construction de sphères d'homologie toroïdales (voir [Jac] et [He]).



On rappelle qu'un nœud dans  $\mathbb{S}^3$  est la donnée d'un plongement  $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dont l'image détermine une courbe  $\gamma$ . Un nœud est dit trivial s'il est le bord d'un disque plongé. Dans le cas où le nœud n'est pas trivial, le bord de  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  (où  $K$  désigne un voisinage tubulaire de  $\gamma$ ) est un tore incompressible. En outre, le bord d'une telle variété admet une décomposition canonique (à orientation près) en un méridien et une longitude caractérisée par le fait qu'elle est homologue à 0. On note alors  $V_1$  et  $V_2$  deux variétés définies comme complémentaires de voisinages de nœuds non triviaux dans  $\mathbb{S}^3$ , dont les bords ont chacun une décomposition canonique en un méridien  $m_i$  et une longitude  $l_i$ .

Soit alors un difféomorphisme  $h : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$  tel que  $h(l_2) = m_1$  et  $h(m_2) = l_1$ . Du fait que  $V_1$  et  $V_2$  ont même homologie que le tore plein, il est aisé de vérifier à l'aide du théorème d'excision que la variété  $V = V_1 \cup_h V_2$  est une sphère d'homologie. La variété  $V$  est de plus irréductible et l'image de  $\partial V_1 \simeq \partial V_2$  est un tore incompressible.

**THÉORÈME 5.8.** — *Toute sphère d'homologie toroïdale construite de cette manière porte une structure de contact universellement tendue.*

**REMARQUE 5.9.** — Si  $V$  est une variété construite de la manière précédente et si on suppose que  $V$  est un fibré de Seifert, d'après le travail de Waldhausen [Wa] (voir aussi le théorème VI.34 dans [Ja]), comme le tore de chirurgie  $\mathbb{T}$  sépare  $V$ , soit il découpe  $V$  en deux fibrés tordus en tores sur l'intervalle, soit il est saturé pour une certaine fibration de  $V$ . Dans cette dernière éventualité, chacune des deux composantes  $V_1$  et  $V_2$  hérite d'une structure de fibré de Seifert. Donc, si on suppose que l'une des deux composantes  $V_1$  et  $V_2$  n'est pas un fibré de Seifert (par exemple, si elle est hyperbolique), ou n'est pas un fibré tordu en tores sur l'intervalle,  $V$  n'est pas un fibré de Seifert et on ne se trouve pas en présence de l'un des exemples produits par Gompf dans [Go].

Pour démontrer ce théorème, on utilise un résultat de D. Gabai [Ga] :

**THÉORÈME 5.10 (D. Gabai).** — *Si  $V$  est le complémentaire du voisinage  $U$  d'un nœud non trivial de  $\mathbb{S}^3$ , il existe sur  $V$  un feuilletage tendu qui est transverse à  $\partial V$  et qui trace sur  $\partial V$  un feuilletage en cercles.*

On suit ensuite le même fil que dans la démonstration du théorème 5.4 en munissant  $V_1$  et  $V_2$  de structures de contact universellement tendues à l'aide du corollaire 5.7, puis en recollant les variétés de contact obtenues après un ajustement éventuel des structures.

### 6. Un autre résultat de chirurgie

Une analyse attentive des moyens mis en oeuvre au cours de la section précédente permet d'obtenir le résultat suivant :

**THÉORÈME 6.1.** — *Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact et  $S \subset V$  une sous-variété orientée, incompressible et telle que  $\partial S \subset \partial V$ . On suppose que  $\partial S$  est transverse positivement à  $\xi$ , que  $\xi S$  est presque de type Morse-Smale, que toutes les singularités de  $\xi S$  sont positives et que toutes les orbites périodiques de  $\xi S$  sont répulsives. Si la structure induite par  $\xi$  sur  $V \setminus S$  est universellement tendue, alors  $\xi$  est universellement tendue.*

**REMARQUE 6.2.** — La situation la plus simple dans laquelle ce résultat s'applique est celle où  $S$  est un anneau dont le feuilletage caractéristique ne contient qu'une orbite périodique.

**REMARQUE 6.3.** — Dans le cas où  $S$  est un disque, l'hypothèse qui porte sur le signe des singularités est optimale et il semble par conséquent difficile de l'affaiblir dans ce cadre plus général.

*Démonstration.* — On commence par modifier  $S$  par une isotopie  $C^0$ -petite fixant son bord, afin que toute feuille qui n'est pas la séparatrice d'une singularité hyperbolique positive ait pour ensemble  $\omega_-$ -limite une singularité elliptique (positive).

Pour cela on fait apparaître, sur les orbites périodiques de  $\xi S$  et sur chaque liaison entre deux singularités, à l'aide d'une isotopie  $C^0$ -petite de  $S$ , une singularité elliptique et une singularité hyperbolique positives en position d'élimination.

La nouvelle surface  $S'$  convient. En effet, l'ensemble  $\omega_-$ -limite d'une feuille dans  $\xi S$  est soit une singularité hyperbolique, soit une singularité elliptique positive, soit une orbite périodique, ou soit un ensemble de liaisons entre au moins deux singularités hyperboliques. Dans les deux derniers cas, l'introduction de singularités en position d'élimination fait que l'ensemble limite se transforme soit en l'une des singularités hyperboliques, soit en l'une des singularités elliptiques introduites.

Par ailleurs, il est clair que si la modification précédente est suffisamment petite, la variété  $(V \setminus S', \xi)$  est universellement tendue. Soit  $D$  un disque plongé dans le revêtement universel  $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$  de  $V$ . Le disque  $D$  rencontre un nombre fini de composantes de la préimage de  $S'$ . Soit  $C$  l'une de ces composantes. Le feuilletage caractéristique de  $C$  ne contient que des singularités positives. Le graphe constitué des liaisons entre ces singularités est un arbre  $A^C$  et l'ensemble  $\omega_-$ -limite de  $C \cap D$  est un sous-arbre fini  $A^{C'}$  de  $A^C$  ( $A^C$  ne contient pas de cycle car tout cycle

de singularités — forcément positives — constituerait un disque vrillé). Quitte à prendre l'ensemble limite d'un élargissement de  $C \cap D$ , on peut faire en sorte que les extrémités de  $A^{C'}$  soient des singularités elliptiques. Ainsi, chaque composante connexe  $A_i^{C'}$ ,  $1 \leq i \leq n_C$ , de  $A^{C'}$  possède un voisinage qui est un disque  $D_i^C$  de bord transverse à  $\tilde{\xi}C$ . Les disques  $D_i^C$  sont choisis deux à deux disjoints et, quitte à pousser  $\partial D_i^C$  par le flot de  $\tilde{\xi}C$ , on suppose que  $(C \cap D) \subset (\bigcup D_i^C)$ . Chaque disque  $D_i^C$  ne contient que des singularités positives si bien que  $\ell(\partial D_i^C) = -1$ .

On recolle alors la variété de contact  $\tilde{V} \wr \pi^{-1}(S')$  selon les disques  $D_i^C$ . D'après le théorème 3.1, la variété (ici singulière) obtenue est tendue et contient  $D$ . Le disque  $D$  n'est donc pas vrillé et  $(V, \xi)$  est universellement tendue.  $\square$

On peut espérer en partant de ces résultats de chirurgie ainsi que de hiérarchies adaptées, construire des structures de contact universellement tendues sur nombre de variétés.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Be] BENNEQUIN (D.). — *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque **107-108**, 1983, p. 87–161.
- [Co1] COLIN (V.). — *Chirurgies d'indice un et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **324**, série 1, 1997, p. 659–663.
- [Co2] COLIN (V.). — *Sur la stabilité, l'existence et l'unicité des structures de contact en dimension 3*. — Thèse n° 96 de l'ENS-Lyon, 1998.
- [El1] ELIASHBERG (Y.). — *Classification of over-twisted contact structures on 3-manifolds*, Inv. Math., t. **98**, 1989, p. 623–637.
- [El2] ELIASHBERG (Y.). — *Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier, t. **42**, 1992, p. 165–192.
- [El3] ELIASHBERG (Y.). — *Filling by holomorphic discs and its applications*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., t. **151**, 1991, p. 45–67.
- [ElTh] ELIASHBERG (Y.), THURSTON (W.). — *Confoliations*. — Univ. Lect. Ser., vol. 13, 1998.
- [Ga] GABAI (D.). — *Foliations on the topology of 3-manifolds, III*, J. Diff. Geom., t. **26**, 1987, p. 479–536.

- [Gi1] GIROUX (E.). — *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helvetici, t. **66**, 1991, p. 18–33.
- [Gi2] GIROUX (E.). — *Topologie de contact en dimension 3*, Sém. Bourbaki, t. **760**, 1992–93, p. 1–27.
- [Gi3] GIROUX (E.). — *Une structure de contact, même tendue est plus ou moins tordue*, Ann. Scient. École Norm. Sup., t. **27**, 1995, p. 697–705.
- [Gi4] GIROUX (E.). — *Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages des surfaces*, en préparation.
- [Go] GOMPF (R.). — *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math., à paraître.
- [He] HEMPEL (J.). — *Three manifolds*, Ann. Math. Stu., Princeton Univ. Press., t. **86**, 1973.
- [Ja] JACO (W.). — *Lectures on three manifolds topology*, A.M.S., t. **43**, 1977.
- [Ka] KANDA (Y.). — *The classification of tight contact structures on the 3-torus*, Comm. Anal. Geom., t. **5**, 1997, p. 413–438.
- [Lu] LUTZ (R.). — *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3*, Ann. Inst. Fourier, t. **27**, 1977, p. 1–15.
- [ML1] MAKAR-LIMANOV (S.). — *Morse surgeries of index 0 and 1 on tight manifolds*. — preprint, 1996.
- [ML2] MAKAR-LIMANOV (S.). — *Tight contact structure on solid tori*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **1013-1044**, 1998; CMP 96 :16.
- [Ma] MARTINET (J.). — *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lect. Notes in Math., t. **209**, 1971, p. 142–163.
- [Wa] WALDHAUSEN (F.). — *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math., t. **87**, 1968, p. 56–88.