BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTOPHE MOUROUGANE

Théorèmes d'annulation générique pour les fibrés vectoriels semi-négatifs

Bulletin de la S. M. F., tome 127, n° 1 (1999), p. 115-133

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_1_115_0>

Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 115–133.

THÉORÈMES D'ANNULATION GÉNÉRIQUE POUR LES FIBRÉS VECTORIELS SEMI-NÉGATIFS

PAR CHRISTOPHE MOUROUGANE (*)

RÉSUMÉ. — Green et Lazarsfeld ont démontré des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels pour la cohomologie des fibrés vectoriels plats sur les variétés kählériennes compactes. Nous généralisons ces résultats aux cas des fibrés vectoriels semi-négatifs. Les outils principaux sont fournis par une étude des formes harmoniques à valeurs dans un fibré vectoriel semi-négatif.

ABSTRACT. — GENERIC VANISHING THEOREMS FOR SEMI-NEGATIVE VECTOR BUNDLES. — We generalize Green and Lazarsfeld theorems about generic vanishing for cohomology groups of flat vector bundles to the case of semi-negative vector bundles, over compact Kaehler manifolds. We also describe the structure of exceptional sets. Main tools are provided by a study of harmonic forms with values in a semi-negative vector bundle.

1. Introduction

Dans tout ce texte, (X,ω) désignera une variété kählérienne compacte connexe lisse de dimension n, et $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Nous noterons $\mathrm{Pic}^0(X)$ le tore complexe qui paramètre les classes d'isomorphie de fibrés en droites topologiquement triviaux sur X (*i.e.* de première classe de Chern nulle). Pour tout élément y de $\mathrm{Pic}^0(X)$, la notation λ_y désignera un représentant de y. Pour $(p,q,m) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^\star$, nous étudions les lieux exceptionnels de cohomologie de Dolbeault des déformations de F par produit tensoriel par les fibrés en droites topologiquement

(*) Texte reçu le 16 juin 1998, accepté le 19 octobre 1998.
Ch. MOUROUGANE, Institut de Mathématiques de Jussieu, boîte 247, 75252 Paris CEDEX 05.
Classification AMS : 32L20, 14C30, 32C17.

Mots clés : variétés kählériennes compactes lisses, fibrés vectoriels holomorphes, notions de positivité, théorèmes d'annulation, lieux exceptionnels de cohomologie, méthodes transcendantes.

triviaux :

$$S_m^{p,q}(X,F) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(X)\ ;\ h^{p,q}(X, F \otimes \lambda_y) \geq m\}.$$

S'il n'y a pas de risque de confusion, nous omettrons X dans la notation $S_m^{p,q}(X,F)$. Si p est nul, nous l'omettrons; de même, si m vaut 1, nous l'omettrons. Plus généralement, pour tout morphisme $a : X \to A$ de X dans un tore complexe, nous étudions

$$S_m^{p,q}(X,F,a) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(A)\ ;\ h^{p,q}(X, F \otimes a^\star\lambda_y) \geq m\}.$$

Par utilisation des techniques de déformation de groupes de cohomologie, Green et Lazarsfeld ont obtenu des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie pour les fibrés topologiquement triviaux [GL87], [GL87′], [GL91]. Cette restriction est due à l'utilisation de la théorie de Hodge comme argument ultime.

Au paragraphe 2, nous étudions des notions de semi-négativité pour obtenir des outils analytiques analogues à ceux fournis par la théorie de Hodge. Nous étudions en particulier, suivant les résultats de Kollár [Ko86], les morphismes de produit tensoriel par une section agissant sur la cohomologie des fibrés semi-négatifs.

Nous étendons au paragraphe 3 les théorèmes d'annulation générique aux fibrés semi-négatifs.

Nous obtenons au paragraphe 4, sous des hypothèses de semi-négativité analytiques ou algébriques sur F, la structure linéaire des lieux exceptionnels. En découlent des propriétés de périodicité de la fonction $k \mapsto h^q(X, F \otimes \mu^k)$ où F est un fibré vectoriel semi-négatif et μ un fibré en droites numériquement plat [CS93].

Au paragraphe 5, nous étendons les résultats précédents au cas de la cohomologie des déformations d'un fibré en droites numériquement effectif et abondant sur une variété projective.

Nous montrons au paragraphe 6 comment obtenir des résultats pour les fibrés vectoriels.

Le résultat principal est :

THÉORÈME. — *Soient (X,ω) une variété kählérienne compacte lisse et $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe qui vérifie l'une des hypothèses de négativité suivantes :*

- *F est un fibré vectoriel hermitien de dual semi-positif au sens de Nakano;*
- *F est un fibré en droites de dual numériquement effectif et abondant sur X supposée projective;*

• *F s'écrit $S^k E \otimes \det E$, où E est un fibré vectoriel de dual numériquement effectif et abondant sur X supposée projective.*

Alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q(F)$ est un ensemble analytique, réunion finie de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension respectivement strictement supérieure à* $\dim \alpha(X) - 1 - q$, $\dim \alpha(X) - 1 - q$ *ou* $\dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(E) - q$ *respectivement.*

Ici $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est le morphisme d'Albanese de X et $\dim \alpha(X)$ la dimension de son image.

H. Dunio a obtenu sur les variétés projectives, des théorèmes d'annulation générique pour les fibrés en droites de dual semi-ample ou abondant en les déduisant par construction de revêtements cycliques, de théorèmes sur les fibrés en droites topologiquement triviaux (voir [EV92]).

Je tiens à remercier I. Biswas, Th. Bouche, J.-P. Demailly, et Ph. Eyssidieux pour d'utiles indications.

2. Notions de semi-négativité

2.1. Définitions et propriétés.

Soient la variété (X, ω) et le fibré vectoriel $F \to X$ comme dans l'introduction. On munit F d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les métriques ω et h permettent de définir sur l'espace des formes différentielles à valeurs dans F un produit scalaire global noté $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$. On note :

• $D := D' + D''$ la connexion de Chern sur le fibré holomorphe hermitien (F, h) ;

• $\delta := \delta' + \delta''$ l'adjoint de D pour le produit scalaire $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$;

• Λ l'adjoint de la multiplication extérieure par ω notée L agissant sur les formes différentielles à valeurs dans F ;

• Δ (resp. Δ', Δ'') le Laplacien associé à l'opérateur D (resp. D', D'') ;

• $\mathcal{H}^{p,q}(X, F, \omega, h)$ l'espace des (p, q)-formes Δ''-harmoniques à valeurs dans le fibré hermitien (F, h) ;

• $\mathcal{H}^{0,1}(X, \omega)$ l'espace des $(0, 1)$-formes harmoniques.

Dans ce contexte, on dispose :

• des identités de Hodge :

$$[\delta'', L] = iD', \quad [\delta', L] = -iD'', \quad \textit{i.e.} \quad [\delta, L] = i(D' - D''),$$
$$[D'', \Lambda] = i\delta', \quad [D', \Lambda] = -i\delta'' ;$$

- de la relation
$$\Delta = \Delta' + \Delta'',$$
entre Laplaciens (conséquence de $[D',\delta'']=0$ et de $[D'',\delta']=0$) ;
- de la relation de commutation
$$[\Delta, L] = 0$$
(conséquence par l'identité de Jacobi de l'identité $[D,[\delta,L]]=0$) ;
- de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :
$$\Delta'' = \Delta' + \big[ic_h(F), \Lambda\big].$$

L'opérateur $[ic_h(F),\Lambda]$ agit ponctuellement de la manière suivante. En notant

- x un point de la variété X,
- $(\mathrm{d}z_\ell)$ une base ω_x-orthonormée de $T^\star_x X$,
- (e_λ) une base h_x-orthonormée de F_x,
- $\omega_x = i\sum_\ell \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell$,
- $ic_h(F)_x = i \sum\limits_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k e^\star_\lambda \otimes e_\mu$,
- $u = \sum\limits_{\substack{\lambda,|I|=p\\ |J|=q}} u^\lambda_{IJ}\,\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J \otimes e_\lambda \in \overset{p,q}{\wedge} T^\star_x X \otimes F_x$,

et en convenant que les tenseurs $u^\lambda_{I,J}$ sont alternés en les multi-indices I et J, on a :

$$\begin{aligned}\big\langle [ic_h(F),\Lambda]u,u\big\rangle &= \sum_{\substack{|I'|=p-1\\ |J|=q}} \sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu}\, u^\lambda_{kI',J}\, \overline{u^\mu_{jI',J}} \\ &\quad + \sum_{\substack{|I|=p\\ |J'|=q-1}} \sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu}\, u^\lambda_{I,jJ'}\, \overline{u^\mu_{I,kJ'}} \\ &\quad - \sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} \sum_{j\lambda\mu} c_{jj\lambda\mu}\, u^\lambda_{I,J}\, \overline{u^\mu_{I,J}}.\end{aligned}$$

DÉFINITION 2.1. — On dira que le fibré vectoriel F est (p,q)-*semi-positif* s'il peut être muni d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que l'opérateur $[ic_h(F), \Lambda]$ soit semi-positif sur $\overset{p,q}{\wedge} T^\star X \otimes F$. On dira alors que (F, h) est *(p, q)-semi-positif.*

Puisqu'il s'agit d'une propriété de courbure, cette notion est conservée par produit tensoriel par un fibré en droites plat.

Par exemple, un fibré en droites hermitien à courbure semi-négative (en particulier, un fibré en droites de dual semi-ample) est $(0, q)$- et $(p, 0)$-semi-positif pour tout p et tout q. On dit qu'un fibré vectoriel est semi-ample si une de ses puissances symétriques est globalement engendrée.

Un fibré vectoriel hermitien semi-positif au sens de Nakano est (n, q)-semi-positif pour tout q. Un fibré vectoriel hermitien de dual semi-négatif au sens de Nakano est (p, n)-semi-positif pour tout p.

La semi-positivité d'un fibré vectoriel hermitien au sens de Nakano (utile pour les théorèmes d'annulation de cohomologie) implique la semi-positivité au sens de Griffiths (géométrique). La «réciproque» établie dans [DS80] montre en particulier que si E est un fibré vectoriel hermitien semi-positif au sens de Griffiths (par exemple un fibré vectoriel globalement engendré), alors $E \otimes \det E$ est semi-positif au sens de Nakano.

2.2. Dualité de Serre.

LEMME 2.2. — *Sur une variété de dimension n, un fibré est (p, q)-semi-positif si et seulement si son dual est $(n - p, n - q)$-semi-positif.*

Démonstration. — Si

$$\sharp : \overset{p,q}{\wedge} T^\star X \otimes F \longrightarrow \overset{n-p,n-q}{\wedge} T^\star X \otimes F^\star$$

désigne l'opérateur de Hodge tel que, pour u et v dans $\overset{p,q}{\wedge} T^\star X \otimes F$,

$$u \wedge \sharp v = \langle u, v\rangle \, \mathrm{d}V_\omega$$

et si $F^\star$ est muni de la métrique $h^\star$ duale d'une métrique h sur F, on a :

$$\big\langle [ic_{h^\star}(F^\star), \Lambda]\sharp u, \sharp u\big\rangle = \big\langle [ic_h(F), \Lambda]u, u\big\rangle. \quad \square$$

Par conséquent, un fibré vectoriel hermitien de dual semi-positif au sens de Nakano est $(0, q)$-semi-positif pour tout q. Un fibré vectoriel hermitien semi-négatif au sens de Nakano est $(p, 0)$-semi-positif pour tout p. En particulier, un fibré vectoriel de dual globalement engendré est $(p, 0)$-semi-positif pour tout p.

2.3. Propriétés.

Un intérêt principal de la notion (p, q)-semi-positivité est le lemme suivant, conséquence simple de la semi-positivité des Laplaciens, de la relation entre Laplaciens et de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :

LEMME 2.3. — *Une (p,q)-forme à valeurs dans un fibré vectoriel (p,q)-semi-positif est Δ''-harmonique si et seulement si elle est Δ-harmonique.*

Pour une (p,q)-forme ξ, Δ''-harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien (p,q)-semi-positif, on a :

$$D'\xi = \delta'\xi = D''\xi = \delta''\xi = 0 \quad \text{et} \quad \big[ic_h(F),\Lambda\big]\xi = 0.$$

La première conséquence utile est :

PROPOSITION 2.4. — *Soient F (resp.F') un fibré vectoriel muni d'une métrique hermitienne h (resp. h') à courbure $(0,q)$-semi-positive (resp. $(0,q')$-semi-positive). Si a est une $(0,q)$-forme Δ''-harmonique à valeurs dans (F,h) et b une $(0,q')$- forme Δ''-harmonique à valeurs dans (F',h'), alors $a\wedge b$ est Δ''-harmonique.*

Démonstration. — On a déjà

$$D''(a\wedge b) = (D''a)\wedge b + (-1)^q a\wedge D''b = 0.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} i\delta''(a\wedge b) &= [\Lambda, D'](a\wedge b) \\ &= \Lambda D'(a\wedge b) && \text{car } a\wedge b \text{ est de type } (0,q+q') \\ &= 0 && \text{d'après le lemme 2.3.} \quad \square \end{aligned}$$

Cette propriété permet d'exprimer le théorème de représentation des classes de cohomologie par des formes harmoniques en termes de formalité au sens de [DGMS].

COROLLAIRE 2.5. — *Soit (F,h) un fibré vectoriel hermitien à courbure $(0,q)$-semi-positive pour tout q. Alors l'algèbre différentielle*

$$\Big(\bigoplus_{q\in\mathbb{N}}\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{\infty\,0,q}(X,F^{\otimes k}), D''\Big)$$

est quasi isomorphe à l'algèbre différentielle

$$\Big(\bigoplus_{q\in\mathbb{N}}\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^{0,q}(X,F^{\otimes k},\omega,h^{\otimes k}), 0\Big).$$

Elle est donc q-formelle pour tout q.

D'autres conséquences peuvent être obtenues simplement. Pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leq n$, on considère le morphisme de Lefschetz

$$H^{p,q}(X,F) \xrightarrow{L^{n-p-q}} H^{n-q,n-p}(X,F).$$

Si F est le fibré en droites trivial sur X, la théorie de Hodge montre que ces morphismes sont des isomorphismes.

Dans le cas où F est semi-négatif, reste le :

THÉORÈME 2.6. — *Si $p+q \leq n$ et F est (p,q)-semi-positif, alors le morphisme de Lefschetz L^{n-p-q} est injectif.*

La démonstration consiste à montrer, en utilisant comme précédemment les identités de Hodge, que si a est une (p,q)-forme Δ''-harmonique à valeurs dans F, alors La reste Δ''-harmonique.

2.4. Produit tensoriel par une section.

Pour décrire des relations d'inclusion entre lieux exceptionnels de cohomologie, on généralise le théorème d'injectivité de Kollár [Ko86, th. 2.2].

THÉORÈME 2.7. — *Soit F un fibré en droites holomorphe. Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et s une section globale non nulle de la puissance F^k de F. Si F est (n,q)-semi-positif, alors les morphismes induits en cohomologie par le produit tensoriel par s*

$$\cdot \otimes s : H^q(K_X \otimes F^\ell \otimes \lambda) \longrightarrow H^q(K_X \otimes F^{\ell+k} \otimes \lambda)$$

sont injectifs pour tout $\ell \in \mathbb{N}^\star$, et tout fibré en droites λ plat sur X.

Il en découlera le :

COROLLAIRE 2.8. — *Soit $F \to X$ et s comme dans le théorème précédent. Alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}^\star$, les lieux exceptionnels de cohomologie vérifient l'inclusion $S^{n,q}_m(F^\ell) \subset S^{n,q}_m(F^{\ell+k})$.*

Démonstration. — Elle peut se faire en suivant [En93]. On utilise ici une démarche légèrement différente. Soit h une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur F à courbure (n,q)-semi-positive et h_λ une métrique à courbure nulle sur λ.

Soit $\xi \in \mathcal{H}^{n,q}(X, F^\ell \otimes \lambda, \omega, h^\ell \otimes h_\lambda)$.

On montre d'abord que $\xi \otimes s$ est dans $\mathcal{H}^{n,q}(X, F^{\ell+k} \otimes \lambda, \omega, h^{\ell+k} \otimes h_\lambda)$. Il est clair que $D''(\xi \otimes s) = 0$. Par les identités de Hodge, on trouve :

$$\begin{aligned}\delta''(\xi \otimes s) &= i[D',\Lambda](\xi \otimes s) = iD'(\Lambda(\xi \otimes s)) = iD'\big((\Lambda\xi) \otimes s\big)\\ &= i\big([D',\Lambda]\xi\big) \otimes s + (-1)^{\deg \xi}\, i\Lambda\xi \wedge D's\\ &= \delta''\xi \otimes s + (-1)^{\deg \xi}\, i\Lambda\xi \wedge D's = (-1)^{\deg \xi}\, i\Lambda\xi \wedge D's.\end{aligned}$$

Maintenant, on a $D''(\Lambda\xi) = [D'',\Lambda]\xi = i\delta'\xi = 0$ par le lemme 2.3 et $D''D's = D^2 s = c(F^k)\wedge s$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Delta''(\xi\otimes s) &= D''\delta''(\xi\otimes s) = i\Lambda\xi\wedge D''D's\\ &= i\Lambda\xi\wedge c(F^k)\wedge s = \big[ic(F^k),\Lambda\big]\xi\otimes s\end{aligned}$$

car ξ est de bidegré (n,q). Par l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano, ξ est en tout point de X dans le noyau de $[ic(F^l\otimes\lambda),\Lambda]$ et donc dans celui de $[ic(F^k),\Lambda]$. Ainsi $\xi\otimes s$ est Δ''-harmonique.

Si de plus $\xi\otimes s$ est D''-exacte, elle est nulle et par conséquent ξ est nulle. $\square$

3. Annulation générique pour les fibrés semi-négatifs

Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer le :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $q\in\mathbb{N}$. Si F est $(0,q)$-semi-positif, alors pour tout $m\in\mathbb{N}^\star$, le sous-ensemble $S^q_m(F)$ est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure ou égale à* $\dim\alpha(X)-q$.

On note $\chi(F)$ la caractéristique d'Euler du faisceau cohérent associé à F.

COROLLAIRE 3.2. — *Si X est génériquement fini sur un tore et F est $(0,q)$-semi-positif pour tous les $q<\dim X$, alors*

$$(-1)^n\chi(F) = \chi(K_X\otimes F^\star)$$

est positif ou nul.

Démonstration du théorème 3.1. — L'analyticité de $S^q_m(F)$ provient de l'existence locale sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ d'un complexe de faisceaux localement libres qui calcule la cohomologie des déformations de F (*cf.* [GL87, § 1]). Soit y_0 un point de $S^q_m(F)$ où $h^q(F\otimes\lambda_{y_0})$ est exactement égal à m. Cette condition assure que la structure déterminantale de $S^q_m(F)$ est réduite en y_0. On munit F d'une métrique h à courbure $(0,q)$-semi-positive et λ_{y_0} d'une métrique h_{y_0} à courbure nulle. On prend a dans $\mathcal{H}^{0,q}(X,F\otimes\lambda_{y_0},\omega,h\otimes h_{y_0})$. On définit

$$\mathcal{W} := \big\{\Phi\in\mathcal{H}^{0,1}(X,\omega)\ ;\ [\Phi]\cup[a] = 0 \text{ dans } H^{q+1}(X,F\otimes\lambda_{y_0})\big\}.$$

Comme (F,h), le fibré hermitien $(F\otimes\lambda_{y_0},h\otimes h_{y_0})$ est $(0,q)$-semi-positif. En fait, puisqu'une forme Δ''-harmonique et D''-exacte est nulle, la proposition 2.4 montre que

$$\forall\,\Phi\in\mathcal{W},\quad \Phi\wedge a = 0.$$

Par un lemme simple d'algèbre linéaire, pour tout $x \in X$ où $a(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\dim\{\Phi(x) \in \overline{T_x^\star X}\ ;\ \Phi \in \mathcal{W}\} &\leq \dim\{v \in \overline{T_x^\star X}\ ;\ v \wedge a(x) = 0\}\\ &\leq \deg a = q.\end{aligned}$$

On note e l'application d'évaluation des $(0,1)$-formes harmoniques sur X. La transposée de la différentielle du morphisme d'Albanese α est l'application d'évaluation des 1-formes holomorphes sur X. Par conjugaison, on obtient donc

$$\operatorname{rang}\alpha(x) = h^{0,1}(X) - \dim\ker e(x),$$
$$\dim\{\Phi(x) \in \overline{T_x^\star X}\ ;\ \Phi \in \mathcal{W}\} \geq \dim \mathcal{W} - \dim\ker e(x).$$

Par conséquent, puisque le rang de α est, en un point générique de X, égal à $\dim \alpha(X)$,

$$\operatorname{codim}(\mathcal{W}, \mathcal{H}^{0,1}(X,\omega)) = h^{0,1}(X) - \dim \mathcal{W} \geq \dim\alpha(X) - q.$$

Le théorème du complexe dérivé (*cf.* [GL87, th. 1.6]) affirme que, dans l'espace tangent à $\mathrm{Pic}^0(X)$ en y_0, le cône tangent $TC_{y_0}S_m^q(F)$ en y_0 au lieu exceptionnel $S_m^q(F)$ est inclus dans le lieu exceptionnel $S_m^q(D^\bullet(F,y_0))$ du complexe dérivé de F en y_0. Ce complexe est le complexe de faisceaux sur $T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)$ localement libres et triviaux

$$\begin{aligned}D^\bullet(F,y_0) : T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \times H^\bullet(X, F\otimes\lambda_{y_0})&\\ \longrightarrow T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \times H^{\bullet+1}(X, F\otimes\lambda_{y_0}),&\end{aligned}$$

la différentielle étant donnée en un point $[\Phi] \in T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \simeq H^1(X,\mathcal{O})$ par le cup produit par la classe de cohomologie $[\Phi]$. En particulier, puisque $h^q(F\otimes\lambda_{y_0})$ est égal à m, les représentants harmoniques des classes qui sont dans le lieu $S_m^q(D^\bullet(F,y_0))$ sont dans $\mathcal{W}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_{y_0}(S_m^q(F), \mathrm{Pic}^0(X)) &= \operatorname{codim}(TC_{y_0}S_m^q(F), T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X))\\ &\geq \operatorname{codim}(S_m^q(D^\bullet(F,y_0)), T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X))\\ &\geq \operatorname{codim}(\mathcal{W}, \mathcal{H}^{0,1}(X,\omega))\\ &\geq \dim\alpha(X) - q. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque. — La propriété universelle du morphisme d'Albanese permet d'interpréter la transposée de la différentielle d'un morphisme $a : X \to A$ de X dans un tore complexe A comme l'évaluation des 1-formes holomorphes sur X provenant par a des 1-formes holomorphes sur A. Une démonstration analogue à celle du théorème 3.1 conduit alors au :

THÉORÈME 3.3. — *Soient $a : X \to A$ un morphisme de X dans un tore complexe A et $q \in \mathbb{N}$. Si F est $(0,q)$-semi-positif, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $S^q_m(X,F,a)$ est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{Pic}^0(A)$ *de codimension supérieure ou égale à* $\dim a(X) - q$.

En guise d'application, on obtient le :

COROLLAIRE 3.4. — *Soit Y un sous-ensemble analytique de codimension r de X défini par une section s du fibré vectoriel F de rang r. Si X est génériquement finie sur un tore et tous les $\overset{i}{\wedge} F$ sont de dual $(0,q)$-semi-positif pour tous les $q < \dim X$, alors $\chi(\mathcal{O}_Y)$ est du signe de $(-1)^{\dim Y}$.*

Démonstration. — L'hypothèse sur la codimension de Y assure que s est localement donnée par des familles régulières de fonctions holomorphes. Le complexe de Koszul associé à s :

$$0 \to \overset{r}{\wedge} F^\star \xrightarrow{s\rfloor} \cdots \longrightarrow \overset{2}{\wedge} F^\star \xrightarrow{s\rfloor} F^\star \xrightarrow{s\rfloor} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y \to 0$$

donne donc une suite exacte longue. Ici, $\mathcal{I}_Y$ désigne l'idéal de Y et $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$ est l'image directe du faisceau de structure de Y par l'inclusion dans X. On déduit du théorème 3.1 que pour λ générique dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ et $q < \dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(F)$, on a l'annulation $H^q(Y,\lambda) = 0$. En particulier, puisque la variété X est génériquement finie sur un tore, et que la caractéristique d'Euler est un invariant numérique, il vient que $(-1)^{\dim Y}\chi(\mathcal{O}_Y) \geq 0$. □

Ce corollaire s'applique en particulier pour les fibrés vectoriels de la forme $F = E \otimes \det E$ avec E semi-positif au sens de Griffiths. En effet, tous les $\overset{i}{\wedge} F = \overset{i}{\wedge} E \otimes \det \overset{i}{\wedge} E$ sont alors semi-positifs au sens de Nakano.

4. Lieux exceptionnels de cohomologie

On montre ici, sous des hypothèses de semi-négativité pour le fibré F, la structure linéaire des lieux exceptionnels.

THÉORÈME 4.1. — *Soit $a : X \to A$ un morphisme de X dans un tore complexe A. Si F peut être muni d'une métrique à courbure $(0,q-1)$- et $(0,q)$-semi-positive, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$ le lieu exceptionnel $S^q_m(X,F,a)$ est une réunion finie de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(A)$.

Démonstration. — On étudie le cas du morphisme d'Albanese. Soit y_0 un point de $S^q_m(X,F)$ où $h^q(F \otimes \lambda_{y_0}) = m$. Soit $\Phi \in \mathcal{H}^{0,1}(X,\omega)$ telle que $[\Phi]$ soit dans le cône tangent à $S^q_m(F)$ en y_0. On rappelle que la forme

Φ définit une droite de structures complexes $D''_{z\Phi} = D'' + z\Phi \wedge \cdot$ sur le fibré en droites complexes topologiquement trivial. Par le théorème du complexe dérivé, les deux applications

$$H^{q-1}(F \otimes \lambda_{y_0}) \xrightarrow{\cup[\Phi]} H^q(F \otimes \lambda_{y_0}) \xrightarrow{\cup[\Phi]} H^{q+1}(F \otimes \lambda_{y_0})$$

sont nulles.

Pour une métrique h sur F à courbure $(0, q-1)$- et $(0, q)$-semi-positive et une métrique h_{y_0} sur λ_{y_0} à courbure nulle, $(F \otimes \lambda_{y_0}, h \otimes h_{y_0})$ est $(0, q-1)$- et $(0, q)$-semi-positif. Soit $a \in \mathcal{H}^{0,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \omega, h \otimes h_{y_0})$. Par la proposition 2.4, $\Phi \wedge a$ est Δ''-harmonique.

Ainsi, $\Phi \wedge a$ est exacte et harmonique donc nulle. La forme a définit donc une classe de cohomologie de Dolbeault pour toutes les structures complexes $D'' + z\Phi \wedge \cdot$, $(z \in \mathbb{C})$. L'opérateur D'' est ici l'opérateur $D''_{F \otimes \lambda_{y_0}}$.

Maintenant, si a s'écrit $(D'' + z\Phi\wedge)b_z$, il faut montrer que a est nulle. Si b est dans $\mathcal{H}^{0,q-1}(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \omega, h \otimes h_{y_0})$, alors $(D'' + z\Phi\wedge)b = z\Phi \wedge b$ est exacte par le théorème du complexe dérivé et harmonique par $(0, q-1)$-semi-positivité (proposition 2.4), donc nulle. On peut donc supposer b_z orthogonale à $\mathcal{H}^{0,q-1}(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \omega, h \otimes h_{y_0}) + \mathrm{Im}(D'' + z\Phi \wedge \cdot)$.

On choisit une connexion ∇ sur le fibré $\overset{0,q-1}{\wedge} T^\star X \otimes F \otimes \lambda_{y_0}$ et on définit la norme

$$\| \ \|^2_{W^1} := \| \ \|^2 + \|\nabla \cdot \|^2.$$

On note $\iota(\Phi)$ l'adjoint de la multiplication extérieure par Φ.

$$\delta'' D'' b_z = \delta''(a - z\Phi \wedge b_z) = -z\delta''(\Phi \wedge b_z),$$

$$D''\delta'' b_z = -\bar{z} D''(\iota(\Phi) b_z) \quad \text{car } b_z \in \big(\mathrm{Im}(D'' + z\Phi \wedge \cdot)\big)^{\perp} = \ker\big(\delta'' + \bar{z}\iota(\Phi)\big).$$

Il existe donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz une constante C indépendante de z telle que

$$\langle\!\langle \Delta'' b_z, b_z \rangle\!\rangle \leq C|z| \cdot \|b_z\|^2_{W^1}.$$

Par ailleurs, puisque b_z est orthogonale à $\mathcal{H}^{0,q-1}(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \omega, h \otimes h_{y_0})$, il existe une constante ℓ_1 indépendante de z, la première valeur propre strictement positive du Laplacien Δ'' sur la variété compacte X, telle que

$$\langle\!\langle \Delta'' b_z, b_z \rangle\!\rangle \geq \ell_1 \|b_z\|^2_{W^1}.$$

Pour z suffisamment petit, b_z est forcément nulle. Un voisinage de λ_{y_0} dans la droite de direction Φ et donc toute la droite sont dans le lieu exceptionnel $S^q_m(F)$. $\square$

Ces arguments, qui évitent le recours à une suite spectrale de déformation, m'ont été indiqués par Ph. Eyssidieux.

On peut préciser la structure des composantes irréductibles des lieux exceptionnels.

COROLLAIRE 4.2. — *Si F peut être muni d'une métrique à courbure $(0,q-1)$- et $(0,q)$-semi-positive, et si Z est une composante irréductible de $S^q_m(F)$, alors il existe un espace complexe normal N, une application analytique surjective à fibres connexes $f : X \longrightarrow N$ tels que*

(i) *il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Pic}^0(X)$, tel que $Z \subset \lambda_0 + f^\star(\mathrm{Pic}^0(N))$;*

(ii) $\dim N \leq q$;

(iii) *N est génériquement finie sur un tore.*

Démonstration. — Elle suit celle de [GL91, th. 0.1]. On considère l'application

$$u : X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X) \longrightarrow \widehat{Z}$$

obtenue en intégrant les 1-formes holomorphes sur X dont les conjuguées sont tangentes à $Z \subset S^q_m(F)$. Ici $\widehat{Z}$ est le tore dual du tore Z. L'espace N est alors l'espace complexe intermédiaire qui apparaît dans la factorisation de Stein de u. Les parties (i) et (iii) sont des conséquences de la construction de N. Pour (ii), on raisonne comme dans la démonstration du théorème 3.1 en remplaçant le morphisme d'Albanese α_X de X par sa restriction u et donc $h^{0,1}(X)$ par $\dim N$. □

4.1. Périodicité.

Dans ce paragraphe, on retrouve une partie du résultat de périodicité dû à S.D. Cutkosky et V. Srinivas [CS93, th. 8], comme conséquence de la structure linéaire des lieux exceptionnels.

On dit qu'un fibré en droites holomorphe est *numériquement plat* si sa première classe de Chern est de torsion.

COROLLAIRE 4.3. — *Si F peut être muni d'une métrique à courbure $(0,q-1)$- et $(0,q)$-semi-positive, alors, pour tout fibré en droites μ numériquement plat, la fonction $k \mapsto h^q(F \otimes \mu^k)$ est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. — Si μ est de torsion, le résultat est acquis. On suppose maintenant que μ est topologiquement trivial, mais pas de torsion. On remarque d'abord que la fonction $\lambda \mapsto h^q(X, F \otimes \lambda)$ semi-continue supérieurement sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ compacte est majorée. On considère

$$m_\mu(F) := \max\{m \,;\ \text{il existe une infinité de } k \in \mathbb{N} \text{ tels que } h^q(F \otimes \mu^k) = m\}.$$

L'ensemble analytique $S^q_{m_\mu(F)}(F)$ est une réunion finie de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$. L'une de ses composantes irréductibles contient deux points de $\{\mu^k\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ et par conséquent tout l'ensemble de points alignés $\{\mu^k\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $h^q(F \otimes \mu^k) \geq m_\mu(F)$. Les valeurs strictement plus grandes que $m_\mu(F)$ sont en nombre fini et ne peuvent être atteintes qu'un nombre fini de fois. À partir d'un certain rang k_0, les dimensions sont donc $h^q(F \otimes \mu^k) = m_\mu(F)$.

Si μ est numériquement plat, avec $rc_1(\mu) = 0$, le fibré μ s'écrit $\tau \otimes \lambda$ avec τ de torsion et λ topologiquement trivial (il suffit de prendre une racine r-ième du fibré topologiquement trivial μ^r). On obtient alors, pour k assez grand, $h^q(F \otimes \mu^k) = m_\lambda(F \otimes \tau^k)$ qui ne dépend que de k modulo r. $\square$

5. Fibrés en droites de dual nef et abondant

Dans cette partie, on se propose d'étendre au cas des fibrés en droites de dual nef et abondant sur les variétés projectives, les théorèmes d'annulation et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie précédemment démontrés pour les fibrés en droites de dual semi-ample.

5.1. Définitions et propriétés.

Soit $F \to X$ un fibré en droites sur une variété (X, ω) kählérienne compacte lisse. Sa dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(F)$ est la dimension maximale des images des applications rationnelles canoniquement associées aux puissances de F avec par convention $\kappa(F) = -\infty$ si aucune des ces puissances n'a de sections holomorphes non nulles. Si X est projective, le fibré F est dit *numériquement effectif* (nef en abrégé) si son degré sur toute courbe est positif ou nul. Dans le cas général, F est dit nef si pour tout $\varepsilon > 0$, il peut être muni d'une métrique hermitienne à courbure supérieure à $-\varepsilon\omega$. Sa dimension numérique $\nu(F)$ est alors le plus grand des entiers k tels que la classe de cohomologie $c_1(F)^k \in H^{2k}(X, \mathbb{R})$ soit non nulle.

Les premières propriétés des ces invariants birationnels sont résumées dans la :

Proposition 5.1 (voir par exemple [EV92], [Mo97]). — *Soit F un fibré en droites nef sur la variété X de dimension n. On a :*

(i) $\kappa(F) \leq \nu(F)$;

(ii) *si F est semi-ample, alors* $\kappa(F) = \nu(F)$;

(iii) *si* $\kappa(F) = n - 1$ *ou* n, *ou si* $\nu(F) = n$ *alors* $\kappa(F) = \nu(F)$.

Définition 5.2.

- Un fibré en droites nef est dit *abondant* (*good* en anglais) si sa dimension de Kodaira-Iitaka coïncide avec sa dimension numérique.
- La *dimension de Kodaira-Iitaka topologique* $\kappa'(F)$ d'un fibré en

droites F est définie par

$$\kappa'(F) := \max_{\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)} \kappa(F \otimes \lambda).$$

• Un fibré en droites nef est dit *topologiquement abondant* si sa dimension de Kodaira-Iitaka topologique coïncide avec sa dimension numérique. Cela revient à dire que le fibré devient abondant après tensorisation par un fibré topologiquement trivial.

REMARQUE. — La condition d'abondance provient de la théorie de Mori (*cf.* [Ka85]).

EXEMPLE. — Un fibré topologiquement trivial mais pas de torsion est nef; aucune de ses puissances n'a de sections : il n'est donc pas abondant. Il est par contre topologiquement abondant.

5.3. Théorème d'annulation, lieux exceptionnels.

Dans ce paragraphe, on démontre le :

THÉORÈME 5.3. — *Si X est une variété projective lisse et F un fibré en droites nef et topologiquement abondant, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $S^q_m(F^{-1})$ est un ensemble analytique réunion finie de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$ de codimension supérieure ou égale à $\dim \alpha(X) - q$.*

REMARQUE. — Le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg (*cf.* [Ka82], [Vi82]) montre que pour un fibré en droites nef sur une variété projective, $S^q(F^{-1})$ est vide en degrés q strictement inférieurs à la dimension numérique $\nu(F)$.

REMARQUE. — Le résultat de périodicité du corollaire 4.3 peut aussi être obtenu pour les fibrés en droites nef et topologiquement abondants sur les variétés projectives puisque dans ce cas aussi les lieux exceptionnels sont linéaires.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où F est abondant. On cherche à se ramener au cas où F est globalement engendré en dehors d'un diviseur, puis à réduire les multiplicités de ce diviseur.

On applique d'abord le lemme suivant qui précise le comportement des lieux bases des puissances de F :

LEMME 5.4 (*cf.* [Ka85, prop. 2.1] et aussi [EV92, lemme 5.11]). — *Si X est une variété projective lisse et F un fibré en droites nef et abondant, alors il existe une variété Y projective lisse, une modification $\tau : Y \to X$, un diviseur effectif D sur Y et un entier k_0 tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, le fibré en droites $\tau^\star F^{kk_0} \otimes \mathcal{O}(-D)$ soit semi-ample.*

Puisque l'image inverse d'un fibré semi-ample par une application quelconque est semi-ample, on peut supposer, quitte à prendre une nouvelle modification, que D est à croisements normaux (*i.e.* à composantes lisses et transverses aux points d'intersection).

On utilise ensuite le :

LEMME 5.5 (*cf.* [Ka85, lemme 3.1]). — *Soit D un diviseur effectif à croisements normaux sur une variété Y projective lisse. Alors, il existe une variété Z projective lisse, un revêtement galoisien $\pi : Z \to Y$ de groupe G fini et un diviseur D' sur Z tels que $\pi^\star D = k_0 D'$ et tels que le fibré $\mathcal{O}_Z(D')$ soit muni d'une action ρ du groupe G telle que la partie invariante $(\pi_\star \mathcal{O}_Z(D'))^\rho$ du faisceau image directe du faisceau $\mathcal{O}_Z(D')$ soit égale à $\mathcal{O}_Y([D/k_0])$, où $[\ ]$ désigne la partie entière des diviseurs.*

On peut, par choix de k_0, supposer que les multiplicités de D sont strictement inférieures à k_0 pour obtenir $(\pi_\star \mathcal{O}_Z(D'))^\rho = \mathcal{O}_Y$.

Maintenant, les fibrés

$$\big((\pi^\star \tau^\star F) \otimes \mathcal{O}(-D')\big)^{k_0} = \pi^\star\big(\tau^\star F^{k_0} \otimes \mathcal{O}(-D)\big)$$

et par suite, $\widetilde{F} := (\pi^\star \tau^\star F) \otimes \mathcal{O}(-D')$ sont semi-amples. Ce dernier est de plus muni d'une G-action $1 \otimes \rho$, où 1 désigne la G-action triviale sur le fibré $\pi^\star \tau^\star F$, qui provient de Y. Cette action permettra de conclure malgré l'augmentation d'irrégularité entre Y et Z : les images réciproques sur Z des fibrés en droites topologiquement triviaux sur Y peuvent être retrouvés parmi les fibrés en droites topologiquement triviaux sur Z, grâce à l'opération du groupe de Galois G sur une partie du groupe de Picard de Z. Il y a un nombre fini de composantes irréductibles dans l'ensemble des G-fibrés en droites topologiquement triviaux sur Z. Le lemme suivant affirme que la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_Y, 1)$ est composée de fibrés qui proviennent de fibrés en droites sur Y.

LEMME 5.6. — *Soit $\pi : Z \to Y$ un revêtement galoisien de groupe G fini. Soit $L' \to Z$ un fibré en droites sur Z muni d'une action ρ de G telle que (L', ρ) soit dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z. Alors, il existe un fibré en droites $L \to Y$ sur Y tel que (L', ρ) soit isomorphe à $(\pi^\star L, 1)$.*

Démonstration. — Par hypothèse, puisque le groupe des caractères de G est fini, pour tout $g \in G$, $z \in Z$, $\ell'_z \in L'_z$, si $g \cdot z = z$, alors $\rho(g) \cdot \ell'_z = \ell'_z$. Ainsi $L := L'/\rho$ est un fibré en droites holomorphe sur Y. On montre alors que le morphisme

$$r : L' \longrightarrow \pi^\star L, \quad (z, \ell') \longmapsto \big(z, [\ell']^\rho\big)$$

est un isomorphisme entre (L', ρ) et $(\pi^\star L, 1)$. □

Soit (λ_2, ρ_2) un G-fibré en droites topologiquement trivial sur Z dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z. Par le lemme précédent, on peut donc écrire (λ_2, ρ_2) sous la forme $(\pi^\star \lambda_1, 1)$. Puisque le groupe G est fini, le morphisme $\pi^\star : H^2(Y, \mathbb{R}) \to H^2(Z, \mathbb{R})^G$ est injectif. La première classe de Chern du fibré λ_1 est donc de torsion. Quand (λ_2, ρ_2) varie dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z, puisque la partie de torsion de $H^2(Y, \mathbb{Z})$ est discrète, le fibré λ_1 change par un fibré topologiquement trivial. Par conséquent, le fibré λ_1 est, comme $\mathcal{O}_Y$, topologiquement trivial.

Puisque τ est une modification, il existe un fibré en droites λ appartenant à $\mathrm{Pic}^0(X)$ tel que $\lambda_1 = \tau^\star \lambda$. Réciproquement, tout fibré en droites λ topologiquement trivial sur X permet de construire $(\pi^\star \tau^\star \lambda, 1)$, G-fibré en droites topologiquement trivial sur Z, dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_Y, 1)$ des G-fibrés en droites sur Z.

Il s'agit maintenant relier la cohomologie G-équivariante des déformations du fibré en droites semi-ample $\widetilde{F}$ sur Z à celle des déformations de F sur X.

$$\begin{aligned}
\big[H^q(Z, \widetilde{F}^{-1} \otimes \lambda_2)\big]^G &= H^q\big(Y, \pi_\star(\widetilde{F}^{-1} \otimes \lambda_2)^G\big) \\
&= H^q\big(Y, \pi_\star(\pi^\star \tau^\star F^{-1} \otimes \mathcal{O}_Z(D') \otimes \lambda_2)^{1 \otimes \rho \otimes \rho_2}\big) \\
&= H^q\big(Y, \tau^\star F^{-1} \otimes \lambda_1 \otimes \pi_\star(\mathcal{O}(D'))^\rho\big) \\
&= H^q\big(Y, \tau^\star(F^{-1} \otimes \lambda)\big) = H^q(X, F^{-1} \otimes \lambda).
\end{aligned}$$

La première égalité a lieu car on peut prendre la moyenne des images par le groupe fini G d'un représentant d'une classe de cohomologie ; la dernière égalité car τ est une modification entre variétés projectives lisses : les images directes supérieures $\mathcal{R}^j \tau_\star(\mathcal{O}_Y)$ sont nulles pour tout $j > 0$.

Le théorème 5.3 est alors une conséquence de la version G-équivariante du théorème analogue pour les fibrés semi-amples (théorème 5.7). $\square$

Soient $r : Y \to X$ un revêtement galoisien de groupe G entre deux variétés projectives lisses et $F \to Y$ un G-fibré vectoriel. On note $\mathrm{Pic}^0(Y, G)^\circ$ la composante irréductible de $(r^\star \mathcal{O}_X, 1)$ des G-fibrés en droites topologiquement triviaux sur Y. On définit

$$S^q_m(F)^G := \big\{ y \in \mathrm{Pic}^0(Y, G)^\circ \, ; \, \dim[H^q(Y, F \otimes \lambda_y)]^G \geq m \big\}.$$

On désigne par $\alpha^G : Y \to \mathrm{Alb}(Y)^G$ le morphisme obtenu en intégrant les 1-formes holomorphes sur Y, invariantes par G. En fait, en identifiant $\mathrm{Alb}(Y)^G$ et $\mathrm{Alb}(X)$, on obtient $\alpha^G = \alpha_X \circ r$.

THÉORÈME 5.7. — *Si de plus F peut être muni d'une métrique à courbure $(0,q-1)$- et $(0,q)$-semi-positive, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $S^q_m(F)^G$ est un ensemble analytique réunion finie de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(Y,G)^\circ$ *de codimension supérieure ou égale à* $\dim \alpha^G(Y) - q$.

REMARQUE. — Le cas des fibrés en droites numériquement effectifs mais non abondants sera beaucoup plus difficile à atteindre, puisque le contrôle des lieux bases n'est pas connu dans le cas général.

6. Fibrés vectoriels

La $(0,q)$-semi-positivité est une hypothèse difficile à obtenir pour un fibré vectoriel. Le but de cette partie est de montrer comment obtenir des théorèmes d'annulation générique pour la cohomologie des fibrés vectoriels sous des hypothèses algébriques simples.

6.1. Par les variétés de drapeaux.

THÉORÈME 6.1. — *Si X est une variété projective lisse et $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe qui s'écrit $S^kE^\star \otimes \det E^\star$, où E est un fibré vectoriel numériquement effectif et abondant, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q(F)$ est un ensemble analytique, réunion finie de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension strictement supérieure* $\dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(E) - q$.

Démonstration. — Soit $E \to X$ un fibré vectoriel nef et abondant de rang r sur X projective. Par définition, le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1) \to \mathbb{P}(E)$ est nef et abondant sur $\mathbb{P}(E)$ projective : on peut donc lui appliquer les résultats précédents. On note $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ la submersion naturelle.

Le morphisme d'Albanese de $\mathbb{P}(E)$ est la composée

$$\alpha_{\mathbb{P}(E)} : \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X)$$

et les fibrés en droites topologiquement triviaux sur $\mathbb{P}(E)$ sont donnés par l'isomorphisme $\pi^\star : \mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}(E))$ qui respecte les structures affines. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ on a $\pi_\star \mathcal{O}_E(k) = S^kE$, pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{R}^j\pi_\star(\mathcal{O}_E(k)) = 0$ et que $K_{\mathbb{P}(E)} = \pi^\star(K_X \otimes \det E) \otimes \mathcal{O}_E(-r)$, la suite spectrale de Leray associée à π donne après dualité de Serre, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et tout $m \in \mathbb{N}^\star$, l'isomorphisme affine

$$\pi^\star : S^q_m(S^kE^\star \otimes \det E^\star) \simeq S^{q+r-1}_m\big(\mathcal{O}_E(-r-k)\big). \quad \square$$

La même démarche sur d'autres variétés de drapeaux, ou sur des produits de copies de $\mathbb{P}(E)$ donne des théorèmes pour d'autres représentations du groupe linéaire.

6.2. Par l'isomorphisme de Le Potier.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)$, sur $\pi : \mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}(E \otimes \lambda) \to X$, les fibrés en droites $\mathcal{O}_{E\otimes\lambda}(1)$ et $\mathcal{O}_E(1) \otimes \pi^\star(\lambda)$ sont isomorphes. L'isomorphisme de Le Potier [LP73] donne donc pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et tout $m \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_m^{p,q}(E) \simeq S_m^{p,q}\big(\mathcal{O}_E(1)\big).$$

BIBLIOGRAPHIE

[CS93] Cutkosky (S.D.), Srinivas (V.). — *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems*, Annals of Math., t. **137**, 1993, p. 531–559.

[DGMS75] Deligne (P.), Griffiths (P.A.), Morgan (J.), Sullivan (D.). — *Real Homotopy Theory of Kähler Manifolds*, Invent. Math., t. **29**, 1975, p. 245–274.

[DS80] Demailly (J.P.), Skoda (H.). — *Relations entre les notions de positivité de P.A. Griffiths et de S. Nakano*, Séminaire P. Lelong et H. Skoda, 1978–79, Lecture Notes in Math., t. **822**, 1980, p. 304–309.

[En93] Enoki (I.). — *Kawamata-Viehweg vanishing for compact Kähler manifolds, Einstein metric and Yang-mills connections*, T. Mabuchi, S. Mukai ed., Marcel Dekker, 1993, p. 59–68.

[EV92] Esnault (H.), Viehweg (E.). — *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, 1992, Band 20, Amer. Math. Soc., t. 4, 1991, p. 87–103.

[GL87] Green (M.), Lazarsfeld (R.). — *Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese, and Beauville*, Invent. Math., t. **90**, 1987, p. 389–407.

[GL87′] Green (M.), Lazarsfeld (R.). — *Deformation theory for cohomology of analytic vector bundles on Kähler manifolds, with applications, Mathematical Aspects of String Theory.* — World Scientific, 1987, p. 416–440.

[GL91] Green (M.), Lazarsfeld (R.). — *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles*, J. Amer. Math. Soc., t. **4**, 1991, p. 87–103.

[Ka82] Kawamata (Y.). — *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem*, Math. Ann., t. **261**, 1982, p. 43–46.

[Ka85] KAWAMATA (Y.). — *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math., t. **79**, 1985, p. 567–588.

[Ko86] KOLLÁR (J.). — *Higher direct images of dualizing sheaves*, I, Annals of Math., t. **123**, 1986, p. 11–42.

[LP73] LE POTIER (J.). — *Théorème d'annulation en cohomologie*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **276**, 1973, p. 535–537.

[Mo97] MOUROUGANE (Ch.). — *Thèse de doctorat*. — Université Grenoble I, janvier 1997.

[Vi82] VIEHWEG (E.). — *Vanishing theorems*, J. reine angew. Math., t. **335**, 1982, p. 1–8.