

BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTOPHE BREUIL

Une remarque sur les représentations locales p -adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert

Bulletin de la S. M. F., tome 127, n° 3 (1999), p. 459-472

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_3_459_0

© Bulletin de la S. M. F., 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**UNE REMARQUE SUR LES
REPRÉSENTATIONS LOCALES
 p -ADIQUES ET LES CONGRUENCES ENTRE
FORMES MODULAIRES DE HILBERT**

PAR CHRISTOPHE BREUIL (*)

RÉSUMÉ. — On donne une nouvelle preuve du fait que les représentations galoisiennes p -adiques associées par Taylor (dans le cas général) aux formes modulaires de Hilbert sont cristallines en p pour p suffisamment grand. Cette preuve, basée sur les résultats de Taylor (cf. [Ta1]), n'utilise que des techniques de congruences.

ABSTRACT. — A REMARK ON LOCAL p -ADIC GALOIS REPRESENTATIONS AND CONGRUENCES BETWEEN HILBERT MODULAR FORMS. — We give a new proof of the fact that the p -adic Galois representations associated by Taylor (in the general case) to Hilbert modular forms are crystalline at p for p big enough. This proof, based on Taylor's results (see [Ta1]), only uses congruences techniques.

Sommaire

1. Introduction
 2. Deux propositions sur les représentations cristallines et semi-stables
 3. Application aux congruences entre formes modulaires de Hilbert
- Bibliographie

1. Introduction

Soient F un corps de nombres totalement réel et f une forme modulaire de Hilbert de poids tous ≥ 2 qui correspond à une représentation automorphe π de $GL_2(\mathbb{A}_F)$. Lorsque $[F : \mathbb{Q}]$ est impair, ou lorsque $[F : \mathbb{Q}]$ est

(*) Texte reçu le 2 décembre 1998, accepté le 10 mars 1999.

C. BREUIL, Mathématiques, Bât. 425, U.R.A. 752 du C.N.R.S., Université Paris-Sud, 91405 Orsay CEDEX (France). Email : breuil@math.u-psud.fr

Classification AMS : 11F33, 11F41, 11F85.

Mots clés : forme modulaire de Hilbert, représentation galoisienne, représentation cristalline.

pair mais qu'il existe une place finie ν de F telle que π_ν est spéciale ou supercuspidale, la construction de représentations galoisiennes associées à f à partir de la cohomologie étale p -adique des courbes de Shimura sur F est classique et bien connu (voir [Ca1]). Dans les cas restants, il y a deux façons de s'y prendre pour obtenir les représentations manquantes. Soit on trouve des «congruences» modulo p^n pour tout n avec des formes du type précédent, et on construit les représentations par passage à la limite projective à partir des représentations déjà connues : c'est la méthode suivie par Taylor dans [Ta1]. Soit on arrive à construire un motif associé à la forme f , et les représentations se déduisent des réalisations p -adiques du motif : c'est la méthode suivie par Blasius-Rogawski dans [BR] lorsque l'un des poids de f est > 2 . La construction de [BR] montre en outre, par les théorèmes de comparaison en théorie de Hodge p -adique, que dans ce cas les représentations locales obtenues (en « $\ell = p$ ») sont potentiellement semi-stables, donc Hodge-Tate, et même cristallines pour $p \gg 0$. Dans [Ta2], Taylor montre que lorsque tous les poids sont 2, ces représentations locales sont encore cristallines pour $p \gg 0$.

Le but de cette note est de retrouver ces résultats de cristallinité uniquement à partir des congruences de [Ta1] et de quelques manipulations simples sur les algèbres de Hecke et les pseudo-représentations de degré 2. Plus précisément, nous obtenons :

THÉORÈME 1. — *Soit f une forme modulaire de Hilbert propre, de niveau \mathfrak{N} (un idéal entier de F), de poids tous ≥ 2 et de même parité et soit w le plus grand des poids. Soient \mathcal{O} l'anneau des entiers d'un corps de nombres suffisamment grand, \mathfrak{p} une place de \mathcal{O} au-dessus d'un nombre premier p , \mathfrak{q} une place de F au-dessus de p , $G_{\mathfrak{q}}$ un groupe de décomposition de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ en \mathfrak{q} et $\rho_f : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ la représentation construite dans [Ta1] à partir de f .*

1) *Si $p > 2$ et \mathfrak{q} ne divise pas \mathfrak{N} , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}} \bmod \mathfrak{p}^n$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline (cf. [Fo1]) à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w - 1$.*

2) *Si $p > w$, \mathfrak{q} non ramifié dans F et ne divise pas \mathfrak{N} , alors $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w - 1$.*

Bien sûr, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque ρ_f n'est pas accessible par la cohomologie des courbes de Shimura sur F (sinon, tout est connu). La condition « $p > 2$ » en 1) provient de la théorie des pseudo-représentations de degré 2 sur un anneau de valuation discrète (voir [Wi2]). Les conditions « \mathfrak{q} non ramifié» et « $p > w$ » en 2) proviennent de restrictions inhérentes aux outils p -adiques (standards) utilisés développés dans

le paragraphe 2. Ces trois conditions sont bien sûr normalement superflues. La preuve occupe le paragraphe 3. Son principe est le suivant : pour démontrer 1), on se débrouille pour construire pour tout n , à partir des pseudo-représentations de [Ta1] sur les algèbres de Hecke (qui sont des pseudo-représentations « classiques » à la Wiles), un \mathbb{Z}_p -réseau stable par Galois dans une représentation cristalline ainsi qu'une surjection de ce réseau vers $\rho_f|_{G_n}$ modulo \mathfrak{p}^n ; pour en déduire 2), on passe à la limite projective sur 1), ce qui oblige, faute de mieux, aux restrictions énoncées. La méthode est explicite et particulière aux pseudo-représentations telles qu'introduites initialement par Wiles, *i.e.* avec GL_2 et un corps totalement réel. Elle ne s'étend probablement pas aux pseudo-représentations de degré supérieur définies par Taylor [Ta3].

Cette (modeste) note est concomitante à l'apprentissage modulaire de l'auteur. Dans la version initiale, la référence [Ta2] (qui traite du poids 2) n'était pas connue de l'auteur. Elle lui a été signalée après coup par J. Tilouine. Qu'il en soit remercié, ainsi que L. Clozel, A. Genestier et P. Gille pour d'utiles discussions.

2. Deux propositions sur les représentations cristallines et semi-stables

Dans ce paragraphe, k désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 le corps des fractions de W . On fixe une clôture algébrique \bar{K}_0 de K_0 et on note

$$G_{K_0} = \text{Gal}(\bar{K}_0/K_0).$$

2.1. — On renvoie à [Fo1] pour les définitions et propriétés des représentations cristallines et semi-stables de G_{K_0} . On rappelle que les représentations cristallines sont semi-stables et que les représentations semi-stables sont Hodge-Tate. De plus, à chaque représentation semi-stable V de G_{K_0} , à poids de Hodge-Tate entre 0 et r avec $r \in \mathbb{N}$, Fontaine associe un (ϕ, N) -module filtré

$$D(V) = \text{Hom}_{G_{K_0}}(V, B_{\text{st}}^+)$$

qui est un K_0 -espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ muni d'une collection de sous- K_0 -espaces vectoriels $(\text{Fil}^i D(V))_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\begin{aligned} \text{Fil}^i D(V) &= D(V) && \text{si } i \leq 0, \\ \text{Fil}^{i+1} D(V) &\subset \text{Fil}^i D(V) && \text{si } 0 \leq i \leq r, \\ \text{Fil}^i D(V) &= 0 && \text{si } i \geq r + 1, \end{aligned}$$

d'une application semi-linéaire injective $\phi : D(V) \rightarrow D(V)$ et d'une application linéaire $N : D(V) \rightarrow D(V)$ telle que

$$N\phi = p\phi N.$$

On a $N = 0$ si et seulement si la représentation est cristalline et $D(V)$ s'identifie alors à $\text{Hom}_{G_{K_0}}(V, B_{\text{cris}}^+)$.

DÉFINITION 2. — Soit V une représentation cristalline de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre 0 et r ($r \in \mathbb{N}$). On appelle réseau fortement divisible de $D(V)$ tout W -réseau M de $D(V)$ stable par ϕ tel que

$$\phi(\text{Fil}^i D(V) \cap M) \subset p^i M \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}$$

et

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (\phi/p^i)(\text{Fil}^i D(V) \cap M) = M.$$

Lorsque V est cristalline, on peut montrer que $D(V)$ contient toujours un tel réseau (cf. [La, 3.2]). Ces réseaux sont utiles essentiellement lorsque $r \leq p - 2$. La proposition suivante est bien connue des spécialistes.

PROPOSITION 3. — Soient V une représentation cristalline de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre 0 et $p - 2$ et $D(V)$ son ϕ -module filtré. Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les \mathbb{Z}_p -réseaux stables par G_{K_0} de V et les W -réseaux fortement divisibles de $D(V)$.

Preuve. — Si M est un objet de la catégorie de Fontaine-Laffaille $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$ (voir [FL, 3.2]), on pose :

$$V_{\text{cris}}^*(M) = \text{Hom}_{\text{comp}}(M, A_{\text{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

où A_{cris} est l'anneau introduit par Fontaine et l'indice « comp » signifie qu'on prend les applications \mathbb{Z}_p -linéaires et compatibles aux diverses structures (voir [FL, 3] ou [Br1, 3.2.1]). À chaque W -réseau fortement divisible M de $D(V)$, on peut alors associer un \mathbb{Z}_p -réseau $V_{\text{cris}}^*(M)$ de V stable par G_{K_0} en posant :

$$\begin{aligned} V_{\text{cris}}^*(M) &= \varprojlim V_{\text{cris}}^*(M/p^n M) \\ &= \text{Hom}_{\text{comp}}(M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A_{\text{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ &= \text{Hom}_{\text{comp}}(M, A_{\text{cris}}) \end{aligned}$$

et la suite exacte

$$0 \rightarrow M/p^n M \rightarrow M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^n} M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

permet d'identifier $V_{\text{cris}}^*(M)/p^n V_{\text{cris}}^*(M)$ à $V_{\text{cris}}^*(M/p^n M)$. Par un passage à la limite projective, on déduit donc de [FL, 6.1] la pleine fidélité du foncteur $M \mapsto V_{\text{cris}}^*(M)$ pour les W -réseaux fortement divisibles. Il faut montrer l'essentielle surjectivité. Soient T un \mathbb{Z}_p -réseau de V stable par G_{K_0} et M un W -réseau fortement divisible quelconque de $D(V)$ (cf. [La, 3.2]). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p^{n_0} T \subset V_{\text{cris}}^*(M) \subset (1/p^{n_0})T.$$

Pour $n \geq n_0$, on a

$$p^{n_0} T / p^n T \subset V_{\text{cris}}^*(M) / p^n T$$

et $V_{\text{cris}}^*(M) / p^n T$ est un quotient de

$$V_{\text{cris}}^*(M) / p^{n+n_0} V_{\text{cris}}^*(M) \simeq V_{\text{cris}}^*(M / p^{n+n_0} M)$$

où $M / p^{n+n_0} M$ est dans $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$. Comme $V_{\text{cris}}^*(\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2})$ est une catégorie de représentations de p -torsion stable par sous-objet et quotient (on le déduit de [FL, 6.13. (a)]), $p^{n_0} T / p^n T$ est de la forme $V_{\text{cris}}^*(M_n)$ pour un M_n dans $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$. Par [FL, 3.4], M_n est un W_n -module libre de rang $\text{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ pour tout n et, par la pleine fidélité de V_{cris}^* (voir [FL, 6.1]), $M_n \simeq M_{n+1} / p^n M_{n+1}$. Donc

$$\varinjlim M_n \simeq M_\infty \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p,$$

où les flèches de transition sont la multiplication par p et où M_∞ s'identifie à un W -réseau fortement divisible de $D(V)$. À la limite, on a $p^{n_0} T \simeq V_{\text{cris}}^*(M_\infty)$. \square

2.2. — Bien que nous n'en ayons pas besoin pour l'application aux formes modulaires, indiquons comment la proposition ci-dessus se généralise lorsque V est semi-stable à poids de Hodge-Tate entre 0 et $p - 2$. Rappelons qu'alors N est non nul en général sur $D(V)$. La notion de réseau fortement divisible est un peu plus délicate à définir. Soient S le complété p -adique de $W[u^i/i!]_{i \in \mathbb{N}}$ (anneau des polynômes à puissances divisées en u), $\phi : S \rightarrow S$ l'unique application semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur W) et continue telle que

$$\phi\left(\frac{u^i}{i!}\right) = \frac{u^{ip}}{i!}$$

et $N : S \rightarrow S$ l'unique application W -linéaire continue telle que

$$N\left(\frac{u^i}{i!}\right) = -\frac{i u^i}{i!}.$$

Posons

$$S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$$

auquel on étend N et ϕ . À partir du (ϕ, N) -module filtré $D(V)$ associé à V , on définit

$$\mathcal{D}(V) = S_{K_0} \otimes_{K_0} D(V)$$

qu'on munit d'un Frobenius injectif $\phi = \langle \phi \otimes \phi \rangle$ et d'une application K_0 -linéaire $N = \langle N \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N \rangle$. Soit

$$f_p : \mathcal{D}(V) \longrightarrow D(V)$$

l'application K_0 -linéaire qui envoie $s(u) \otimes x$ sur $s(p)x$; on munit enfin $\mathcal{D}(V)$ d'une collection de sous- S_{K_0} -modules $\text{Fil}^i \mathcal{D}(V)$ définis par récurrence de la façon suivante :

$$\text{Fil}^0 \mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V),$$

$$\text{Fil}^{i+1} \mathcal{D}(V) = \{x \in \mathcal{D}(V) \text{ tel que } N(x) \in \text{Fil}^i \mathcal{D}(V), \\ f_p(x) \in \text{Fil}^{i+1} D(V)\}.$$

DÉFINITION 4. — Soit V une représentation semi-stable de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre 0 et $p-2$. On appelle module fortement divisible de $\mathcal{D}(V)$ tout sous- S -module libre de type fini \mathcal{M} de $\mathcal{D}(V)$ stable par ϕ et N tel que

$$K_0 \otimes_W \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}(V), \\ \phi(\text{Fil}^i \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{M}) \subset p^i \mathcal{M} \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, p-2\}, \\ \sum_{0 \leq i \leq p-2} (\phi/p^i)(\text{Fil}^i \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{M}) \quad \text{engendre } \mathcal{M} \text{ sur } S.$$

Là encore, on peut montrer que $\mathcal{D}(V)$ contient toujours un tel sous-module (voir [Br2, 1.3]).

PROPOSITION 5. — Soient V une représentation semi-stable de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre 0 et $p-2$, $D(V)$ son (ϕ, N) -module filtré et $\mathcal{D}(V)$ le S_{K_0} -module associé à $D(V)$. Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les \mathbb{Z}_p -réseaux stables par G_{K_0} de V et les S -modules fortement divisibles de $\mathcal{D}(V)$.

Preuve. — À partir de [Br1, 2.4.2.1] et [Br1, 3.1.3.1], la preuve est formellement la même que la précédente en remplaçant A_{cris} par \widehat{A}_{st} (voir [Br1, 3.1.1]). \square

2.3. — On a alors la :

PROPOSITION 6. — Soient $r \in \{0, \dots, p - 2\}$, V une représentation p -adique de G_{K_0} et T un \mathbb{Z}_p -réseau de V stable par G_{K_0} tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T/p^n T$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline (resp. semi-stable) de G_{K_0} à poids de Hodge-Tate entre 0 et r . Alors V est cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate entre 0 et r .

Preuve. — On fait la preuve dans le cas cristallin, celle dans le cas semi-stable étant la même. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$T/p^n T \simeq T_1(n)/T_2(n)$$

où $T_2(n) \subset T_1(n)$ sont des \mathbb{Z}_p -réseaux d'une représentation cristalline $V(n)$ à poids de Hodge-Tate entre 0 et r . Par la proposition 3, $T_1(n)/p^n T_1(n) \in V_{\text{cris}}^*(\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,r})$; donc

$$T/p^n T \simeq T_1(n)/(p^n T_1(n) + T_2(n))$$

est aussi de la forme $V_{\text{cris}}^*(M_n)$ avec $M_n \in \underline{MF}_{\text{tor}}^{f,r}$. Comme dans la preuve de la proposition 3, M_n est un W_n -module libre de rang $\text{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ pour tout n et $M_n \simeq M_{n+1}/p^n M_{n+1}$. On en déduit de même

$$T \simeq V_{\text{cris}}^*(M)$$

pour un W -module fortement divisible M tel que $\text{Fil}^0 M = M$ et $\text{Fil}^{r+1} M = 0$. Par [FL, 8.4], $V = T \otimes \mathbb{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et r . \square

Il est raisonnable de proposer la conjecture suivante :

CONJECTURE 7 (voir [Fo2]). — Soient $r \in \mathbb{N}$, K une extension finie totalement ramifiée de K_0 dans \overline{K}_0 et V une représentation p -adique de $G_K = \text{Gal}(\overline{K}_0/K)$. Supposons que V contienne un \mathbb{Z}_p -réseau T stable par G_K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T/p^n T$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline (resp. semi-stable) de G_K à poids de Hodge-Tate entre 0 et r . Alors V est cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate entre 0 et r .

REMARQUE 8. — La borne sur les poids de Hodge-Tate est nécessaire. En effet, soient $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ et $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Alors $(\chi^{(p-1)})^a$ est un caractère de G_K qui n'est pas de Hodge-Tate mais qui, modulo p^n et pour tout n , est un quotient d'une représentation cristalline.

REMARQUE 9. — Les énoncés ℓ -adiques analogues à (7) (i.e. cristalline \leftrightarrow non ramifié et semi-stable \leftrightarrow l'inertie agit de façon unipotente) sont triviaux.

REMARQUE 10. — On vérifie facilement que si les conditions en (7) sont vraies pour un réseau T , elles le sont pour tous.

La suite n'utilise que les cas cristallins.

3. Application aux congruences entre formes modulaires de Hilbert

Dans ce paragraphe, on suppose donc que [BR] n'a pas été écrit et on adopte essentiellement les conventions et notations de [Ta1], à quelques allègements près.

3.1. — Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d et d'anneau d'entiers \mathcal{O}_F , I l'ensemble des plongements $\tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ et $k = (k_\tau)_{\tau \in I}$ des entiers ≥ 2 et de même parité. Soit \mathfrak{N} un idéal de \mathcal{O}_F . On fixe une forme modulaire parabolique de Hilbert f , de poids k , niveau \mathfrak{N} (lorsque $F = \mathbb{Q}$ et $\mathfrak{N} = N\mathbb{Z}$, l'espace de ces formes est isomorphe à l'espace des formes paraboliques classiques sur $\Gamma_1(N)$). On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke $T_{\mathfrak{q}}$, $S_{\mathfrak{a}}$ où \mathfrak{q} et \mathfrak{a} sont des places finies de F et \mathfrak{a} premier à \mathfrak{N} (voir [Ta1, 1] pour des définitions précises). On note $\Theta(T_{\mathfrak{q}})$, $\Theta(S_{\mathfrak{a}})$ les valeurs propres correspondantes; par [Sh, prop.2.8], elles engendrent une extension finie K_f de \mathbb{Q} dont on note \mathcal{O}_f l'anneau d'entiers. Par [Hi, 4], on a $\Theta(T_{\mathfrak{q}}), \Theta(S_{\mathfrak{a}}) \in \mathcal{O}_f$. Dans la suite, on peut supposer f nouvelle (voir [Wi1, 1.3]).

Le théorème suivant, démontré dans [Ta1, th. 2], fournit les représentations mentionnées dans l'énoncé du théorème 1 :

THÉORÈME 11 (Shimura, Deligne, Wiles, Taylor, ...). — *Pour toute place finie \mathfrak{p} de \mathcal{O}_f au-dessus d'un nombre premier p , il existe une représentation continue absolument irréductible :*

$$\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \longrightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

non ramifiée en dehors de $\mathfrak{N}\mathfrak{p}$ et telle que, si \mathfrak{q} est une place de F qui ne divise pas $\mathfrak{N}\mathfrak{p}$:

$$(*) \quad \begin{cases} \text{tr } \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \Theta(T_{\mathfrak{q}}), \\ \det \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \Theta(S_{\mathfrak{q}}) \# (\mathcal{O}_F/\mathfrak{q}), \end{cases}$$

où $\text{Frob}_{\mathfrak{q}}$ est un Frobenius arithmétique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{q}})$.

L'irréductibilité absolue découle de [Wi1, 2.1 (a)] (dans *loc. cit.*, tous les k_τ sont 2 mais le cas général est identique). Pour faire le lien avec le cas $F = \mathbb{Q}$, remarquons que le déterminant peut s'écrire

$$\det(\rho) = \epsilon \cdot \chi^{w-1}$$

où ϵ est un caractère d'ordre fini de $G_F = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$, χ le caractère cyclotomique p -adique usuel et $w = \text{Max}\{k_\tau\}_{\tau \in I}$ ($w = \mu + 2$ avec les notations de [Ta1]).

3.2. — Si l est une place finie de F ne divisant pas \mathfrak{N} , on note $S_k(\mathfrak{N}, l)$ l'espace engendré par les formes paraboliques propres de poids k , niveau \mathfrak{N} et caractère central ϵ (cf. ci-dessus) de conducteur premier à l , et $\mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l)$ la \mathbb{Z} -algèbre de $\text{End}_{\mathbb{C}}(S_k(\mathfrak{N}, l))$ engendrée par les $T_{\mathfrak{q}}$ pour $\mathfrak{q} \neq l$ et les $S_{\mathfrak{a}}$ pour \mathfrak{a} premier à \mathfrak{N} . On a une décomposition

$$S_k(\mathfrak{N}, l) = S_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}} \oplus S_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{old}}$$

(formes *nouvelle* et *ancienne* en l , cf. [Mi] et [Ta1]) et on note $\mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}}$ (resp. $\mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{old}}$) l'image de $\mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l)$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(S_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}})$ (resp. dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(S_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{old}})$).

THÉORÈME 12 (voir [Ta1]). — *Supposons $d = [F : \mathbb{Q}]$ pair. Soit \mathfrak{p} une place finie de \mathcal{O}_f au-dessus d'un nombre premier p . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de places finies l_n de F (premières à $\mathfrak{N}\mathfrak{p}$) telles qu'on ait un diagramme commutatif d'algèbres de Hecke :*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l_n)^{\text{new}} & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l_n) & & \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l_n)^{\text{old}} & \end{array}$$

où $\mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l_n)^{\text{old}} \rightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n$ est induit par la forme propre f fixée de niveau \mathfrak{N} .

3.3. — On fixe maintenant un nombre premier p quelconque. Pour toute place finie l de F ne divisant pas \mathfrak{N} , on note

- $\mathbb{T}'_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}}$ la sous-algèbre de $\mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}}$ engendrée par les $T_{\mathfrak{q}}$ et $S_{\mathfrak{a}}$ pour \mathfrak{q} et \mathfrak{a} premiers à \mathfrak{N} ,
- $\mathbb{T}_l = \mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ et
- $\mathbb{T}'_l = \mathbb{T}'_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$.

Pour \mathfrak{q} premier à \mathfrak{N} , $T_{\mathfrak{q}}$ est un opérateur normal sur les espaces de formes de niveau \mathfrak{N} (voir [Mi, (1.6)]), donc diagonalisable sur \mathbb{C} et $\mathbb{T}'_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}}$ s'injecte dans un produit fini de corps de nombres. Donc \mathbb{T}'_l se plonge dans un produit d'extensions finies de \mathbb{Q}_p dont on note $\tilde{\mathbb{T}}'_l$ le produit des anneaux d'entiers correspondants. On a $\mathbb{T}'_l \subset \tilde{\mathbb{T}}'_l$.

LEMME 13. — *Soit l une place finie de F première à \mathfrak{N} ; alors il existe une représentation continue :*

$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \longrightarrow \text{GL}_2(\tilde{\mathbb{T}}'_l)$$

non ramifiée en dehors de $\mathfrak{N}p$, telle que, si \mathfrak{q} ne divise pas $\mathfrak{N}p$:

$$\begin{cases} \text{tr } \rho_l(\text{Frob}_q) = T_q, \\ \det \rho_l(\text{Frob}_q) = S_q \# (\mathcal{O}_F/\mathfrak{q}), \end{cases}$$

et telle que, si \mathfrak{q} ne divise pas $\mathfrak{N}l$ mais divise p , $\rho_l|_{G_q}$ est un \mathbb{Z}_p -réseau dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w-1$, où $G_q \simeq \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_q)$ est un sous-groupe de décomposition en \mathfrak{q} .

Preuve. — On a $\mathbb{T}'_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}} \subset \prod_g K'_g$ où le produit est pris sur une base de formes propres g (pour $\mathbb{T}'_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}}$) de $S_k(\mathfrak{N}, l)^{\text{new}}$ dont les valeurs propres engendrent un corps de nombres K'_g . Ces formes sont «classiques», *i.e.* on sait leur associer des représentations galoisiennes continues à valeurs dans $\text{GL}_2(K'_{g,p})$ (*cf.* [Ti, II.4] et [Ca1, th. A]) satisfaisant les conditions du type (*) en dehors de $\mathfrak{N}p$ pour tous les complétés $K'_{g,p}$ (le fait qu'elles soient réalisables sur $K'_{g,p}$ provient de leur irréductibilité, des conditions (*) et du théorème de Cebotarev). En prenant des réseaux stables par $G_F = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$, on en déduit une représentation $\rho_l : G_F \rightarrow \text{GL}_2(\widetilde{\mathbb{T}}'_l)$ non ramifiée en dehors de $\mathfrak{N}p$ avec $\text{tr } \rho_l(\text{Frob}_q) = T_q$ et $\det \rho_l(\text{Frob}_q) = S_q \# (\mathcal{O}_F/\mathfrak{q})$ si \mathfrak{q} est premier à $\mathfrak{N}p$. Les constituants de ρ_l se réalisent dans le dual de la cohomologie étale p -adique (avec coefficients) de courbes de Shimura sur \mathcal{O}_F lisses en dehors de \mathfrak{N} (voir [Ca1, 1 et 2.2]). Soit en utilisant les théorèmes de comparaison p -adiques avec coefficients de Faltings [Fa, 5.6], soit en utilisant les résultats récents de T. Saito sur les représentations de Weil-Deligne associées à $\rho_l|_{G_q} \otimes \mathbb{Q}_p$, on a alors que pour \mathfrak{q}/p et premier à \mathfrak{N} , $\rho_l|_{G_q} \otimes \mathbb{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls, donc entre 0 et $w-1$ vu le poids du déterminant en (3.1). \square

3.4. — Pour d pair et $p > 2$, on construit la représentation ρ du théorème 11 comme suit. Notons

$$\lambda_{f, l_n} : \mathbb{T}_k(\mathfrak{N}, l_n)^{\text{new}} \longrightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n$$

le morphisme d'anneaux en (12) où l_n est une des places de (12) première à $\mathfrak{N}p$. Comme $p > 2$ par hypothèse, on utilise la notion de pseudo-représentation telle que définie par Wiles dans [Wi2, 2.2.3]. Quitte à faire un changement de base sur chaque composante de $\widetilde{\mathbb{T}}'_{l_n}$, on peut donc supposer $\rho_{l_n}(c) = \text{diag}(1, -1)$ où c est une conjugaison complexe et ρ_{l_n} la représentation construite en (13). Soit

$$r_{l_n} = (a_{l_n}, d_{l_n}, x_{l_n})$$

la pseudo-représentation alors associée à $\rho_{\mathfrak{l}_n}$. Comme $\mathbb{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ est fermé dans $\widetilde{\mathbb{T}}'_{\mathfrak{l}_n}$ (pour la topologie p -adique des \mathbb{Z}_p -modules libres de type fini sous-jacents), le théorème de Čebotarev implique que $r_{\mathfrak{l}_n}$ est à valeurs dans $\mathbb{T}'_{\mathfrak{l}_n}$. Soit

$$r_n = \lambda_{f, \mathfrak{l}_n} \circ r_{\mathfrak{l}_n} = (a_n, d_n, x_n).$$

Une nouvelle utilisation de Čebotarev montre que r_n est indépendante du choix de \mathfrak{l}_n ; donc les $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment un système compatible de pseudo-représentations à valeurs dans $(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $\sigma, \tau \in G_F$, posons

$$a(\sigma) = (a_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}},$$

$$d(\sigma) = (d_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad x(\sigma, \tau) = (x_n(\sigma, \tau))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

et soit

$$m_0 = \text{Min}\{v_\pi(x(\sigma, \tau)); (\sigma, \tau) \in G_F \times G_F\}$$

où π est une uniformisante de $\mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}$ et v_π la valuation π -adique normalisée sur $\mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}$. Si $m_0 = +\infty$, on voit que $\rho(\sigma) = \text{diag}(a(\sigma), d(\sigma))$ est une représentation réductible de G_F qui vérifie les conditions (*), ce qui est impossible. Donc $m_0 \neq +\infty$ et on choisit (σ_0, τ_0) tel que

$$v_\pi(x(\sigma_0, \tau_0)) = m_0.$$

La représentation ρ (pour $p > 2$ et d pair) est alors (cf. [Wi2, p. 565]) donnée par :

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & x(\sigma, \tau_0) \\ x(\sigma_0, \sigma)/x(\sigma_0, \tau_0) & d(\sigma) \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_{f, \mathfrak{p}}).$$

3.5.

THÉOREME 14. — *Avec les notations de (3.1), soit ρ_n la restriction mod \mathfrak{p}^n de ρ et \mathfrak{q} une place finie de F première à \mathfrak{N} et qui divise p . Supposons $p > 2$; alors $\rho_n|_{G_{\mathfrak{q}}}$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w - 1$.*

Preuve. — Si d est impair, ρ se réalise dans le dual de la cohomologie étale d'une courbe de Shimura sur \mathcal{O}_F lisse en dehors de \mathfrak{N} et le résultat est clair. On suppose donc d pair. Soit :

$$\mathbb{T}^{\#}_{\mathfrak{l}_n} = \mathbb{T}'_{\mathfrak{l}_n} \left[\frac{1}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} \right].$$

Il est non nul pour $n > m_0$ et s'injecte encore dans un produit d'extensions finies de \mathbb{Q}_p . On a de plus une vraie représentation :

$$\begin{aligned} \rho_{l_n}^\# : G_F &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{T}_{l_n}^\#), \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{l_n}(\sigma) & x_{l_n}(\sigma, \tau_0) \\ x_{l_n}(\sigma_0, \sigma)/x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0) & d_{l_n}(\sigma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dont les projections sur les composantes de $\tilde{\mathbb{T}}_{l_n}'[1/x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0)] \otimes \mathbb{Q}_p$ sont des constituants de $\rho_{l_n} \otimes \mathbb{Q}_p$ en (13) (utiliser l'irréductibilité). D'après (13), $\rho_{l_n}^\#|_{G_q}$ pour q premier à \mathfrak{N}_{l_n} et q/p s'injecte dans une représentation cristalline. Soient :

- $x_{l_n}(\sigma_0, \tau_1), \dots, x_{l_n}(\sigma_0, \tau_h)$ des générateurs de l'idéal de \mathbb{T}_{l_n}' engendré par les $(x_{l_n}(\sigma_0, \tau))_{\tau \in G_F}$,
- (e_1, e_2) la base canonique de $\rho_{l_n}^\#$,
- T_{l_n} le sous- \mathbb{T}_{l_n}' -module de $\mathbb{T}_{l_n}^\# e_1 \oplus \mathbb{T}_{l_n}^\# e_2$ engendré par e_1 et les $x_{l_n}(\sigma_0, \tau_i)/x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0) e_2$ pour $i \in \{0, \dots, h\}$.

La formule

$$\frac{x_{l_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0)} x_{l_n}(\sigma, \tau_0) = x_{l_n}(\sigma, \tau_i)$$

entraîne que T_{l_n} est un \mathbb{Z}_p -module (libre de type fini) stable par G_F , donc un réseau dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w - 1$ quand on restreint l'action à G_q . En utilisant $x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0)^m t = 0$ dans \mathbb{T}_{l_n}' si et seulement si $x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0) t = 0$ (car \mathbb{T}_{l_n}' se plonge dans un produit de corps), on voit que pour $n > 2m_0$, l'application

$$\mu_{f, l_n} : \mathbb{T}_{l_n}' \xrightarrow{\lambda_{f, l_n}} \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n \longrightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0}$$

induit un morphisme compatible à G_F dans l'espace de ρ_{n-2m_0} :

$$\begin{aligned} T_{l_n} &\longrightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2, \\ te_1 + \sum_{i=0}^h t_i \frac{x_{l_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{l_n}(\sigma_0, \tau_0)} e_2 &\longmapsto \mu_{f, l_n}(t) e_1 \\ &\quad + \sum_{i=0}^h \mu_{f, l_n}(t_i) \left(\frac{x(\sigma_0, \tau_i)}{x(\sigma_0, \tau_0)} \bmod \mathfrak{p}^{n-2m_0} \right) e_2 \end{aligned}$$

où $t, t_i \in \mathbb{T}_{l_n}'$. Soit \mathcal{O}'_f le sous-anneau de \mathcal{O}_f engendré par les $\Theta(T_q)$ et $\Theta(S_a)$ pour q, a premiers à \mathfrak{N} , comme f est nouvelle, on a encore $K_f = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}'_f)$ (cf. [Mi, th. 2] et [Sh, prop. 2.6]). Soient :

- $\theta \in \mathcal{O}_f$ tel que $\theta \mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}'_f$,

- m_1 la valuation p -adique de θ ,
- l'_n une autre place comme en (12) mais différente de l_n ,
- $T_{l'_n}$ un \mathbb{Z}_p -réseau d'une représentation cristalline construit comme précédemment avec l'_n au lieu de l_n muni d'un morphisme compatible à G_F dans l'espace de ρ_{n-2m_0} .

L'image du morphisme somme

$$T_{l_n} \oplus T_{l'_n} \longrightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2$$

contient $\mathfrak{p}^{m_1}(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2)$; donc $\rho_{n-2m_0-m_1}|_{G_{\mathfrak{q}}}$ pour \mathfrak{q} premier à $\mathfrak{N}_{l_n l'_n}$ et divisant p est un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w-1$. En faisant varier l_n et l'_n , on en déduit le même résultat pour tout \mathfrak{q} premier à \mathfrak{N} et divisant p et tout $n \gg 0$. \square

COROLLAIRE 15. — Avec les notations de (3.1), soit \mathfrak{q} une place de F telle que \mathfrak{q} ne divise pas \mathfrak{N} mais \mathfrak{q} divise p . Supposons de plus :

- $p > w$,
- \mathfrak{q} non ramifié dans F .

Alors $\rho_{|G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbb{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w-1$.

Preuve. — On applique (6) à (14). \square

Bien sûr, (7) donnerait le résultat pour \mathfrak{q} premier à $2\mathfrak{N}$ seulement.

REMARQUE 16. — Pour les \mathfrak{p} tels que la représentation résiduelle ρ_1 est (absolument) irréductible, la démonstration se simplifie puisque, par [Ca2, th. 2], on a une « vraie » représentation $\rho_{l_n, m} : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2((\mathbb{T}'_{l_n})_{\mathfrak{m}})$ où $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\mathbb{T}'_{l_n} \rightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p})$, qu'il suffit de pousser dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n)$ par λ_{f, l_n} pour avoir ρ_n (voir dans ce cas [Ta2] pour le poids 2).

BIBLIOGRAPHIE

- [BR] BLASIUȘ (D.), ROGAWSKI (J.). — *Motives for Hilbert modular forms*, Inv. Math., t. 114, 1993, p. 55-87.

- [Br1] BREUIL (C.). — *Construction de représentations p -adiques semi-stables*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **31**, 1998, p. 281–327.
- [Br2] BREUIL (C.). — *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles*, Inv. Math., t. **36**, 1999, p. 89–122.
- [Ca1] CARAYOL (H.). — *Sur les représentations l -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **19**, 1986, p. 409–468.
- [Ca2] CARAYOL (H.). — *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, Contemp. Math., t. **165**, 1994, p. 213–237.
- [Fa] FALTINGS (G.). — *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25–79.
- [Fo1] FONTAINE (J.-M.). — *Représentations p -adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France, 1994, p. 113–184.
- [Fo2] FONTAINE (J.-M.). — *Deforming semi-stable Galois representations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, t. **94**, 1997, p. 11138–11141.
- [FL] FONTAINE (J.-M.), LAFFAILLE (G.). — *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **15**, 1982, p. 547–608.
- [Hi] HIDA (H.). — *On the critical values of L -functions of $GL(2)$ and $GL(2) \times GL(2)$* , Duke Math. J., t. **74**, 1994, p. 431–529.
- [La] LAFFAILLE (G.). — *Groupes p -divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France, t. **108**, 1980, p. 187–206.
- [Mi] MIYAKE (T.). — *On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators*, Ann. of Maths, t. **94**, 1971, p. 174–189.
- [Sh] SHIMURA (G.). — *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J., t. **45**, 1978, p. 637–679.
- [Ta1] TAYLOR (R.). — *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Inv. Math., t. **98**, 1989, p. 265–280.
- [Ta2] TAYLOR (R.). — *On Galois representations associated to Hilbert modular forms II*, Conference on Elliptic curves and modular forms (Hong-Kong 1993), 1995, p. 185–191.
- [Ta3] TAYLOR (R.). — *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J., t. **63**, 1991, p. 281–332.
- [Ti] TILOUINE (J.). — *Galois representations congruent to those coming from Shimura varieties*, Proc. Symp. Pure Math., t. **55**, 1994, p. 625–638.
- [Wi1] WILES (A.). — *On p -adic representations for totally real fields*, Ann. of Maths, t. **123**, 407–456.
- [Wi2] WILES (A.). — *On ordinary λ -adic representations associated to modular forms*, Inv. Math., t. **94**, 1988, p. 529–573.