BULLETIN DE LA S. M. F.

EMMANUEL ROYER

Facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $J_0(N)$ de grande dimension et de grand rang

Bulletin de la S. M. F., tome 128, nº 2 (2000), p. 219-248

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_2_219_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 219–248.

FACTEURS $\mathbb{Q}$-SIMPLES DE $J_0(N)$ DE GRANDE DIMENSION ET DE GRAND RANG

PAR EMMANUEL ROYER (*)

RÉSUMÉ. — Par améliorations de méthodes dues à J.-P. Serre, nous donnons des bornes inférieures de la plus grande dimension des facteurs simples de $J_0(N)$ soumis à des conditions de rang (ces conditions étant : rang nul ou rang égal à la dimension).

ABSTRACT. — $\mathbb{Q}$-SIMPLE FACTORS OF $J_0(N)$ WITH GREAT DIMENSION AND GREAT RANK. By improvements of J.-P. Serre's methods, we prove lower bounds of the largest dimension of simple abelian subvarieties of $J_0(N)$, with or without conditions on the algebraic rank (these conditions are: either rank$X = 0$ or rank$X = \dim X$).

1. Résultats

Pour $N \geq 1$, soit $J_0^{\text{new}}(N)$ la partie nouvelle de la jacobienne de la surface de Riemann compacte $X_0(N)$, quotient par le sous-groupe de Hecke $\Gamma_0(N)$ du demi-plan de Poincaré complété. Comme conséquence d'un théorème d'équirépartition des valeurs propres d'opérateurs de Hecke, J.-P. Serre a montré que la plus grande des dimensions de facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $J_0^{\text{new}}(N)$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$ (*cf.* [19, th. 7]). Dans un premier temps nous rendons effectif le théorème d'équirépartition précédent grâce à un calcul de discrépance. Nous déduisons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit p un nombre premier. Il existe une constante C_p ne dépendant que de p, strictement positive, et un entier N_p ne dépendant que de p*

(*) Texte reçu le 24 février 1999, révisé le 2 août 1999, accepté le 16 septembre 1999.
E. ROYER, Université de Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay CEDEX (France).
Email Emmanuel.Royer@math.u-psud.fr.

Classification mathématique par matières : 11F11, 11F25, 11F30, 11F66, 11F72, 11F80, 11G10, 11G18, 11G35, 11G40, 11M41, 11R04, 11R21.

Mots clés : formes modulaires, opérateurs de Hecke, séries L, formule de trace, jacobienne, rang, dimension.

tels que pour tout entier $N > N_p$, non divisible par p, il existe un facteur $\mathbb{Q}$-simple, X de la jacobienne $J_0^{\text{new}}(N)$ dont la dimension vérifie la minoration suivante :

$$\dim X \geq C_p\sqrt{\ln\ln N}.$$

Nous savons, grâce à G. Shimura, interpréter la dimension des facteurs $\mathbb{Q}$-simples de J_0^{new} en termes de degré des corps de rationalité de formes primitives relativement à N de poids 2 sur $\Gamma_0(N)$, dont l'ensemble est noté $S(2,N)^+$. En particulier la plus grande des dimensions des facteurs $\mathbb{Q}$-simples est donnée par le plus grand degré de ces corps de rationalité. Si nous fixons un entier premier p ne divisant pas N, le degré du corps de rationalité associé à une forme f primitive relativement à N est minoré par le degré de l'extension sur $\mathbb{Q}$ engendrée par le p-ième coefficient de Fourier de f. Notre stratégie va donc consister à minorer le degré sur $\mathbb{Q}$ des $\lambda_f(p)$. Utilisant des techniques standard d'approximation des fonctions caractéristiques d'intervalles par des séries de Fourier (ici, plus précisément des séries de Tchebychev de seconde espèce) nous estimons la taille minimale que doit avoir un intervalle pour contenir au moins un $\lambda_f(p)/\sqrt{p}$ quand f parcourt $S(2,N)^+$. Pour cela, nous avons besoin d'une formule de trace, c'est-à-dire d'une moyenne des $\lambda_f(p^n)/\sqrt{p^n}$ calculée pour tout entier n avec le poids naturel $1/\operatorname{card} S(2,N)^+$. Pour un tel poids, la formule de trace adéquate est celle d'Eichler-Selberg que nous exprimerons en nous inspirant de A. Brumer. Le terme $\sqrt{\ln\ln N}$ trouvé est bien loin de ce que nous espérons puisque des évaluations numériques dues à A. Brumer laissent espérer une puissance de N. Notamment, si nous savions qu'il y a très peu de valeurs propres multiples des opérateurs de Hecke, le résultat serait bien meilleur.

Par des calculs de discrépance de sous-suites de valeurs propres d'opérateurs de Hecke associées à des formes primitives de poids 2 sur $\Gamma_0(N)$ n'annulant pas leur fonction L au point $\frac{1}{2}$ et en utilisant de récents développements de l'étude de ces fonctions L de formes modulaires, nous renforçons le théorème de Serre en étudiant la dimension de facteurs $\mathbb{Q}$-simples dont le rang (au sens algébrique de Mordell-Weil) est fixé égal à 0.

THÉORÈME 1.2. — *Soit p un nombre premier. Il existe une constante C_p ne dépendant que de p, strictement positive, et un entier N_p ne dépendant que de p tels que pour tout entier $N > N_p$, non divisible par p, il existe un facteur $\mathbb{Q}$-simple, X de la jacobienne $J_0^{\text{new}}(N)$ de rang nul et dont la dimension vérifie la minoration suivante :*

$$\dim X \geq C_p\sqrt{\ln\ln N}.$$

Le théorème 1.1 peut bien-entendu être vu comme conséquence du théorème 1.2. Comme précédemment, les facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $J_0^{\text{new}}(N)$ sont caractérisés par les corps de rationalité des formes f de $S(2,N)^+$. Mais, si nous voulons nous restreindre aux facteurs $\mathbb{Q}$-simples de rang 0, nous devons aussi nous restreindre aux corps de rationalité associés à des formes primitives dont la fonction L est d'ordre 0 au point $\frac{1}{2}$. (Nous utilisons de récents travaux de V.A. Kolyvagin–D.Y. Logachev et B.H. Gross–D.B. Zagier qui prouvent la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer pour les fonctions L d'ordre 0 au point critique). La stratégie de la preuve est donc celle du théorème 1.1, à la nuance près qu'il faut trouver une formule de trace où la sommation ne se fait plus sur toutes les formes de $S(2,N)^+$ mais sur celles dont la fonction L ne s'annule pas en $\frac{1}{2}$. Cette formule est obtenue en insérant un facteur $L\big(f, \frac{1}{2}\big)$ au poids naturel. Nous utilisons la positivité de $L\big(f, \frac{1}{2}\big)$ pour calculer une discrépance à partir de cette formule de trace tordue calculée quant à elle (en nous inspirant des travaux de E. Kowalski et P. Michel [12] et [11]) en exprimant $L\big(f, \frac{1}{2}\big)$ comme série rapidement convergente de manière à nous ramener à une formule de type Eichler-Selberg.

Enfin des calculs de discrépance de même nature faisant intervenir la dérivée des fonctions L de formes modulaires permettent l'étude de facteurs $\mathbb{Q}$-simples dont le rang et la dimension sont égaux. Nous prouvons notamment qu'*inconditionnellement* il existe de tels facteurs dont le rang et la dimension deviennent simultanément arbitrairement grands.

THÉORÈME 1.3. — *Soit p un nombre premier. Il existe une constante C_p ne dépendant que de p, strictement positive, et un entier N_p ne dépendant que de p tels que pour tout entier $N > N_p$, non divisible par p, il existe un facteur $\mathbb{Q}$-simple, X de la jacobienne $J_0^{\mathrm{new}}(N)$ dont la dimension et le rang vérifient :*

$$\operatorname{rang} X = \dim X \geq C_p\sqrt{\ln\ln N}.$$

Ce théorème est de nouveau obtenu en utilisant les travaux récents de V.A. Kolyvagin–D.Y. Logachev et B.H. Gross–D.B. Zagier sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer vraie pour les fonctions L d'ordre 1 au point critique. Il faut trouver une formule de trace où la somme se fait sur les formes de $S(2,N)^+$ dont la fonction L est d'ordre 1 en $\frac{1}{2}$. Il faut donc trouver un système de poids détectant les fonctions L s'annulant à l'ordre 1 en $s=\frac{1}{2}$ (ceci se fait grâce au facteur $\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'(f, \frac{1}{2})$ avec $\epsilon_f(N)$ signe de l'équation fonctionnelle) et assez sophistiqué pour être compatible avec la formule de trace. Ceci se fait grâce à l'insertion du facteur :

$$\Big(1-\frac{\lambda'_f(p)}{p^{1/2}}+\frac{1}{p}\Big)\Big/\Big(2\zeta(2)\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\ln\frac{\sqrt{N}}{2\pi\gamma}d_N^{\mathrm{new}}\Big).$$

REMARQUE. — Les propositions 7.2, 7.3 et 7.4 proposent des versions des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 pour les suites d'entiers éventuellement divisibles par p. Les résultats de ces propositions n'ont essentiellement d'intérêt que dans le cadre des théorèmes.

REMARQUE. — alors que la rédaction de ce travail était terminée, P. Sarnak m'a informé (communication privée) que la question de rendre le théorème de Serre effectif avait été étudiée sous un autre aspect quelques temps auparavant par A. Gamburd, D. Jakobson et P. Sarnak. Ainsi, dans [6] est obtenue une majoration du nombre de formes primitives relativement à N dont les coefficients de Fourier appartiennent à une extension de $\mathbb{Q}$ de degré au plus k (k entier fixé). Enfin, dans un travail non encore publié De Jong a démontré le théorème 1.1 par des méthodes totalement différentes. Il semble cependant que ses méthodes ne s'étendent pas aux théorèmes 1.2 et 1.3.

REMERCIEMENTS. — Je tiens à remercier très chaleureusement mes professeurs, MM. E. Fouvry et P. Michel de leurs conseils et encouragements. Je remercie aussi M. J.-P. Serre pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et le rapporteur pour une simplification de la preuve de la proposition 5.1.

Table des matières

1. Résultats 219
2. Cadre de l'étude 222
3. Lemmes techniques 226
4. Formules de trace 229
5. Comptage des valeurs propres de Hecke 238
6. Comptage d'entiers algébriques 241
7. Preuves des théorèmes 243
Conclusion 247
Bibliographie 247

2. Cadre de l'étude

Nous noterons $S(2,N)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 sur le sous-groupe de Hecke $\Gamma_0(N)$. L'espace des formes nouvelles relativement à N sera noté $S^{\mathrm{new}}(2,N)$. Une base de cet ensemble est l'ensemble $S(2,N)^+$ des formes primitives relativement à N. L'ensemble $S(2,N)^+$ est donc fini de cardinal la dimension de $S(2,N)^{\mathrm{new}}$ notée d_N^{new}. La dimension de l'espace $S(2,N)$ sera quant-à-elle notée d_N. Nous savons (d'après [19, § 5.1]) que :

$$N^{1-\epsilon} \ll_\epsilon d_N^{\mathrm{new}} \ll N. \tag{1}$$

Une forme f de $S(2,N)^+$ est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke $T(n)$ et donc de tous les opérateurs de Hecke normalisés $T'(n)$ définis de la manière suivante :

$$T'(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} T(n).$$

Nous noterons $T'(n)^{\text{new}}$ l'opérateur $T'(n)$ restreint à $S(2,N)^{\text{new}}$. La valeur propre associée à une forme primitive relativement à N vecteur propre de $T'(n)$ est notée $\lambda'_f(n)$. Nous savons alors que le développement de Fourier de f à l'infini — qui existe puisque f est modulaire — est donné par :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda'_f(n)\sqrt{n}\,\mathrm{e}(nz).$$

Nous savons que $\lambda'_f(1) = 1$ et que les coefficients $\lambda'_f(n)$ vérifient la relation de multiplicativité de Hecke suivante :

$$\lambda'_f(m)\,\lambda'_f(n) = \sum_{d|(m,n)} \epsilon_N(d)\lambda'_f\Big(\frac{mn}{d^2}\Big). \tag{2}$$

Dans cette relation, la fonction $\epsilon_N(d)$ est nulle sauf si d est premier à N auquel cas $\epsilon_N(d) = 1$. Les $\lambda'_f(n)$ sont des réels et grâce à la majoration de Deligne, ils sont bornés :

$$-d(n) \leq \lambda'_f(n) \leq d(n)$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs strictement positifs de n. En particulier, nous avons l'encadrement suivant, valable pour tout nombre premier p :

$$-2 \leq \lambda'_f(p) \leq 2. \tag{3}$$

Les coefficients $\lambda_f(n)$ définis par

$$\lambda_f(n) = \lambda'_f(n)\sqrt{n}$$

sont des entiers algébriques et engendrent une extension finie de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{E}_f = \mathbb{Q}\big[(\lambda_f(n))_{n\geq 1}\big].$$

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur les formes paraboliques par action sur les coefficients et il laisse l'espace des formes primitives relativement à N globalement invariant. Si la transformée de $f \in S(2,N)^+$ par $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est définie par :

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma\big(\lambda'_f(n)\sqrt{n}\,\big)\,\mathrm{e}(nz)$$

alors f^σ appartient à $S(2,N)^+$ (*cf.* [4, corollary 12.4.5]). À une forme f de $S(2,N)^+$, nous associons une série L définie pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ par :

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda'_f(n) n^{-s}.$$

Elle admet un développement en produit eulérien donné par :

$$L(f,s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\lambda'_f(p)p^{-s}+\epsilon_N(p)p^{-2s}\right)^{-1}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Nous pouvons prolonger L en une fonction entière en considérant la fonction Λ définie par :

$$\Lambda(f,s)=\left(\frac{N}{4\pi^2}\right)^{s/2}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)L(f,s).$$

Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Lambda(f,s)=\epsilon_f(N)\Lambda(f,1-s). \tag{4}$$

Dans cette équation, $\epsilon_f(N)$ vaut ± 1 et est l'opposé de la valeur propre de l'opérateur d'Atkin-Lehner W_N associée à f. Cette notation est sans confusion avec $\epsilon_N(d)$. Les faits précédents sont, par exemple, exposés dans [10]. Les fonctions L de formes modulaires ont fait l'objet de nombreux travaux récents. En particulier, B.H. Gross et D.B. Zagier [8, cor. 1.3] prouvent le résultat suivant :

LEMME 2.1. — *Pour toute forme $f\in S(2,N)^+$ nous avons :*

- $L(f,\frac{1}{2})\neq 0$ *si et seulement si* $L(f^\sigma,\frac{1}{2})\neq 0$ *pour tout* $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$;
- $\mathrm{ord}_{s=1/2}\,L(f,s)=1$ *si et seulement si* $\mathrm{ord}_{s=1/2}\,L(f^\sigma,s)=1$ *pour tout* σ *dans* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Les travaux de J.L. Waldspurger (*cf.* [15] ou [7]) prouvent le fait remarquable suivant :

$$L(f,\tfrac{1}{2})\geq 0. \tag{5}$$

Ces mêmes travaux joints à ceux de B.H. Gross et D.B. Zagier (*cf.* [15] ou [9]) prouvent que si $L(f,1/2)=0$ alors :

$$L'(f,\tfrac{1}{2})\geq 0. \tag{6}$$

Enfin, grâce à l'équation fonctionnelle (4) nous savons que si $\epsilon_f(N)\neq 1$ alors $\Lambda(f,1/2)=0$. Nous avons donc l'égalité suivante pour toute $f\in S(2,N)^+$:

$$\left(1-\epsilon_f(N)\right)L(f,\tfrac{1}{2})=0. \tag{7}$$

Nous relions maintenant les formes primitives relativement à N à la jacobienne $J_0^{\mathrm{new}}(N)$ (ceci est exposé dans [18]). Si $X_0(N)$ est le quotient par $\Gamma_0(N)$ du demi-plan de Poincaré complété

$$X_0(N)={}_{\Gamma_0(N)}\backslash\mathcal{H}\cup\mathbb{Q}\cup\{\infty\},$$

nous notons $J_0(N)$ sa jacobienne sur $\mathbb{Q}$; c'est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$. Nous savons qu'elle est isogène à un produit de facteurs $\mathbb{Q}$-simples $A_{\bar{f}}$ où $\bar{f}$ est l'orbite sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de la forme parabolique f :

$$J_0(N) \cong \prod_{\bar{f}, f \in B} A_{\bar{f}}$$

où B est une base de l'espace des formes paraboliques de poids 2 et de niveau N. Nous nous intéressons à la partie nouvelle de $J_0(N)$ définie par :

$$J_0^{\mathrm{new}}(N) \cong \prod_{\bar{f}, f \in S(2,N)^+} A_{\bar{f}}.$$

Si f est primitive relativement à N, la dimension de $A_{\bar{f}}$ est égale au degré du corps $\mathbb{E}_f$ sur $\mathbb{Q}$ et au cardinal de l'orbite de f sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. À $A_{\bar{f}}$ nous associons le rang algébrique. Nous avons l'égalité :

$$A_{\bar{f}} = A_{\bar{f}}^{\mathrm{tors}} \oplus \mathbb{Z}^{\mathrm{rang}\, A_{\bar{f}}}$$

c'est le théorème de Mordell-Weil. Nous pouvons — au moins sous la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer — calculer ce rang à l'aide d'une série L associée à $A_{\bar{f}}$. Cette série est définie de la manière suivante :

$$L(A_{\bar{f}}, s) = \prod_{g \in \bar{f}} L(g, s).$$

L'ordre de cette série en $\frac{1}{2}$ est donné par la relation évidente :

$$\mathrm{ord}_{s=1/2} L(A_{\bar{f}}, s) = \sum_{g \in \bar{f}} \mathrm{ord}_{s=1/2} L(g, s).$$

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer implique que :

$$\mathrm{ord}_{s=1/2} L(A_{\bar{f}}, s) = \mathrm{rang}\, A_{\bar{f}}. \tag{8}$$

Mais grâce aux travaux de V.A. Kolyvagin–D.Y. Logachev et ceux de B.H. Gross–D.B. Zagier, nous savons que (8) est vraie *inconditionnellement* lorsque l'ordre de $L(f, s)$ en $\frac{1}{2}$ vaut 0 ou 1. Nous avons donc le résultat suivant :

Lemme 2.2 (V.A. Kolyvagin–D.Y. Logachev, B.H. Gross–D.B. Zagier). *Soit* $f \in S(2,N)^+$:

1) *si* $\mathrm{ord}_{s=1/2} L(f, s) = 0$ *alors* $\mathrm{rang}\, A_{\bar{f}} = 0$;
2) *si* $\mathrm{ord}_{s=1/2} L(f, s) = 1$ *alors* $\mathrm{rang}\, A_{\bar{f}} = \sharp\bar{f} = \dim A_{\bar{f}}$.

Grâce à ce lemme, la preuve de nos théorèmes se ramène à une preuve de nature analytique.

3. Lemmes techniques

3.1. Notations.

- Nous utiliserons la notation de Vinogradov : l'écriture

$$f(x) \ll_{a,b,c,\dots} g(x)$$

signifie qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel x_0 tous deux dépendant des paramètres $a, b, c, \dots$ tels que pour tout $x > x_0$, nous avons

$$\left|f(x)\right| \le Cg(x).$$

- La fonction caractéristique des carrés premiers à un entier N est notée $\chi_N^{\square}$.
- La fonction nombre de diviseurs sera notée d et la fonction de Möbius μ.
- Nous utiliserons la majoration $d(N) \ll_\epsilon N^\epsilon$ (*cf.* [20]).
- La notation $a \parallel b$ signifie $a \mid b$ et $(a, b/a) = 1$.
- Nos calculs d'équirépartition se feront par rapport à la mesure de probabilité μ_p, étudiée dans [19], définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ par :

$$\mu_p = \frac{p+1}{\pi} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}{(p^{1/2}+p^{-1/2})^2 - x^2} \,\mathrm{d}x.$$

- La limite de μ_p lorsque p tend vers $+\infty$ est la mesure de Sato-Tate μ_{ST} définie par :

$$\mu_{ST} = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

- Les polynômes orthogonaux de μ_{ST} sont les polynômes de Tchebychev de seconde espèce (*cf.* [16], [19, § 2]) :

$$X_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{avec} \quad x = 2\cos\varphi \quad \text{et} \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Nous savons que ces polynômes sont bornés sur $[-2, 2]$ de la façon suivante :

$$\max_{v \in [-2,2]} |X_n|(v) \ll n+1,$$

et que leur valeur contre la mesure μ_p est donnée par :

$$\int_{-2}^{2} X_n \mu_p = \chi_1^{\square}(p^{n/2}) p^{-n/2}. \tag{9}$$

Enfin, et c'est la raison fondamentale de l'apparition des polynômes X_n, nous avons (*cf.* [19, lemme 1]), pour tout premier p ne divisant pas N et tout entier n positif ou nul la relation suivante :

$$X_n\big(T'(p)^{\mathrm{new}}\big) = T'(p^n)^{\mathrm{new}}.$$

3.2. Évaluations de $L(f, \frac{1}{2})$ et $((1-\epsilon_f((N))L'(f, \frac{1}{2})$.

Nous exprimons $L\big(f, \frac{1}{2}\big)$ et $\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'\big(f, \frac{1}{2}\big)$ comme suites rapidement convergentes. Cette technique est classique (voir par exemple [12, § 4.1] et [11, § 2.3]).

Lemme 3.1. — *Soit V et W les fonctions intégrales définies par :*

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} V(y) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s+1)y^{-s}\,\frac{\mathrm{d}s}{s}, \\[2ex] W(y) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s+1)y^{-s}\,\frac{\mathrm{d}s}{s^2}. \end{cases}$$

Pour tout réel A strictement positif, ces fonctions vérifient :

$$\text{(11)} \qquad \big|V(y)\big| \ll_A y^{-A}, \quad \big|W(y)\big| \ll_A y^{-A}.$$

Pour toute $f \in S(2,N)^+$, nous avons les expressions suivantes :

$$L\big(f, \tfrac{1}{2}\big) = \big(1+\epsilon_f(N)\big)\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\lambda_f'(\ell)}{\ell^{1/2}}\,V\Big(\frac{2\pi\ell}{\sqrt{N}}\Big),$$

$$\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'\big(f, \tfrac{1}{2}\big) = 2\big(1-\epsilon_f(N)\big)\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\lambda_f'(\ell)}{\ell^{1/2}}\,W\Big(\frac{2\pi\ell}{\sqrt{N}}\Big).$$

3.3. Évaluation d'une somme de diviseurs.

Nous calculons $g(p^n, s)$ et sa dérivée pour :

$$g(m,s) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^{-1-s} \sum_{d\mid(\ell,m)} d\chi_N^{\square}\Big(\frac{\ell m}{d^2}\Big).$$

Nous effectuons aussi des calculs nécessaires par la suite impliquant ces fonctions. Les résultats sont résumés dans les deux lemmes suivants.

LEMME 3.2. — *Pour tout nombre premier p, tout entier positif ou nul n et tout complexe s tel que* $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$, *nous avons :*

$$g(p^{2n},s) = \Big(1 + \Big(1+\frac{1}{p}\Big)\frac{1-p^{-2ns}}{1-p^{-2s}}p^{-2s}\Big)\zeta(2+2s),$$

$$g(p^{2n+1},s) = \Big(1+\frac{1}{p}\Big)\frac{1-p^{-2(n+1)s}}{1-p^{-2s}}p^{-s}\zeta(2+2s).$$

En particulier :

$$g(p^n,0) = \zeta(2)\begin{cases} \dfrac{n}{2}\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)+1 & \textit{si } n \textit{ est pair};\\ \dfrac{n+1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big) & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Enfin :

$$g'(p^n,0) = 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}g(p^n,0) + e(p,n)$$

où $e(p,n)$ est définie par :

$$e(p,n) = -\zeta(2)\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\ln p\begin{cases} \dfrac{n}{2}\Big(\dfrac{n}{2}+1\Big) & \textit{si } n \textit{ est pair};\\ \Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)^2 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

LEMME 3.3. — *La fonction $g(p^n,s)$ possède les propriétés suivantes :*

1) *pour* $\operatorname{Re} s \in \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$\Big|\frac{g(p^n,s)}{\zeta(2+2s)}\Big| \ll_\epsilon \begin{cases} 1 & \textit{si } \operatorname{Re} s > \epsilon\,;\\ p^{n/2} & \textit{sinon};\end{cases}$$

2) *pour $n > 0$:*

$$\Big(1+\frac{1}{p}\Big)g(p^n,0)p^{-n/2} - \frac{1}{p^{1/2}}g(p^{n-1},0)p^{-(n-1)/2} - \frac{1}{p^{1/2}}g(p^{n+1},0)p^{-(n+1)/2} = \Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\zeta(2)\mu_p(X_n);$$

3) *pour $n > 0$:*

$$\Big(1+\frac{1}{p}\Big)g'(p^n,0)p^{-n/2} - \frac{1}{p^{1/2}}g'(p^{n-1},0)p^{-(n-1)/2} - \frac{1}{p^{1/2}}g'(p^{n+1},0)p^{-(n+1)/2} = 2\zeta'(2)\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\mu_p(X_n) + \zeta(2)\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\ln(p)k(p,n)p^{-n/2}$$

avec :

$$k(p,n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2p} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ est pair}; \\ -\dfrac{n+1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{p}\Big) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve du lemme 3.3.—Les points 2) et 3) se font par simple calcul à partir du lemme 3.2 et de la relation (9). Nous démontrons 1). Nous avons la majoration suivante :

$$\left|\frac{1 - p^{-2(n+1)s}}{1 - p^{-2s}}\right| \le \sum_{k=0}^{n} p^{-2k \operatorname{Re} s}. \tag{12}$$

Ainsi, lorsque $\operatorname{Re} s > \epsilon$, nous déduisons de (12) :

$$\left|\frac{g(p^{2n+1}, s)}{\zeta(2+2s)}\right| \le 2\frac{1 - p^{-2(n+1)\epsilon}}{1 - p^{-2\epsilon}} \le \frac{2}{1 - 2^{-2\epsilon}}.$$

Lorsque $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2} + \epsilon$, nous déduisons de même :

$$\left|\frac{g(p^{2n+1}, s)}{\zeta(2+2s)}\right| \le 2\frac{p^{(1-2\epsilon)(n+1)} - 1}{p^{1-2\epsilon} - 1} p^{1/2-\epsilon} \ll_\epsilon p^{(1-2\epsilon)n+1/2-\epsilon} \ll_\epsilon p^{(2n+1)/2}$$

car $p^{1-2\epsilon} - 1 > \frac{1}{4}p^{1-2\epsilon}$ pour ϵ assez petit.

Le principe de calcul est le même pour $2n$. □

4. Formules de trace

4.1. Formule de trace tordue par $\epsilon_f(N)$.

Nous démontrons une formule de trace tordue par la valeur propre de l'opérateur d'Atkin-Lehner $\epsilon_f(N)$.

PROPOSITION 4.1. — *Pour tout entier strictement positif N et tout entier strictement positif m, nous avons la majoration suivante* :

$$\Big|\sum_{f \in S(2,N)^+} \epsilon_f(N)\lambda'_f(m)\Big| \ll_\epsilon (m^{1/2} + N^{1/2})(mN)^\epsilon.$$

La constante impliquée par le symbole de Vinogradov ne dépend que de ϵ.

Démonstration. — Un résultat similaire est prouvé par A. Brumer ([1, prop. 2.8]) dans le cas où m et N sont premiers entre eux.

LEMME 4.2. — *Soient N, ℓ et m des entiers positifs, ℓ étant premier à N et $m \parallel N$. Nous avons la majoration suivante sur $S^{\mathrm{new}}(2,N)$:*

$$\Big|\operatorname{tr}\big(T(\ell)^{\mathrm{new}} W_m\big) - \frac{1}{12}\chi_N^{\square}(\ell)\beta(m)\gamma\Big(\frac{N}{m}\Big)\Big| \\ \ll (\ell + \ell^{1/2}N^{1/2})d(N)^3 d(\ell)\ln^2(4\ell N).$$

La fonction β est définie par :

$$\beta(m) = \begin{cases} \mu(a) & \text{si } m = a^2\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction γ est définie par :

$$\gamma(m) = m \sum_{d \mid m} \frac{\alpha(d)}{d},$$

où α est la fonction multiplicative définie sur les premiers p par

$$\alpha(p) = \alpha(p^2) = -1, \quad \alpha(p^3) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha(p^r) = 0 \ \text{pour } r \geq 4.$$

Dans ce cas, la somme impliquée dans notre proposition n'est autre que l'opposé de la trace de $W_N T'(m)^{\mathrm{new}}$ car l'opérateur de Atkin-Lehner W_N et l'opérateur de Hecke $T'(m)^{\mathrm{new}}$ commutent et sont simultanément diagonalisables. Notre démarche va donc consister à nous ramener au résultat d'A. Brumer. Nous décomposons m en facteurs divisant N et ne divisant pas N : $m = m_1 m_2$ où m_1 et m_2 sont définis de la manière suivante :

$$m_1 = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid N}} p^{v_p(m)}, \quad m_2 = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \mid N}} p^{v_p(m)}. \tag{13}$$

Nous avons donc en utilisant la formule de multiplicativité de Hecke (2) la décomposition suivante pour $\lambda'_f(m)$:

$$\lambda'_f(m) = \lambda'_f(m_1)\lambda'_f(m_2). \tag{14}$$

Nous étudions $\lambda'_f(m_2)$. Toujours grâce à (2), nous savons que si p divise N alors $\lambda'_f(p^k) = \lambda'_f(p)^k$. Nous avons donc la décomposition suivante pour $\lambda'_f(m_2)$:

$$\lambda'_f(m_2) = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \mid N}} \lambda'_f(p)^{v_p(m)}.$$

Dans ce cas, nous savons calculer $\lambda'_f(m_2)$ puisque la valeur de $\lambda'_f(p)$ est donnée par les formules suivantes (*cf.* [4, § 6.3]) :

$$\lambda'_f(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p^2 \mid N\,; \\ \sqrt{p^{-1}}\,\epsilon_f(p) & \text{si } p \parallel N. \end{cases}$$

Lorsqu'il existe p divisant m et N tel que p^2 divise N nous avons $\lambda'_f(m_2) = 0 = \lambda'_f(m)$ et la proposition est prouvée. Nous supposons désormais l'hypothèse suivante vérifiée :

$$\text{si } p \mid (m, N) \text{ alors } p \parallel N.$$

Sous cette hypothèse nous avons la formule suivante pour $\lambda'_f(m_2)$:

$$\lambda'_f(m_2) = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \parallel N}} \left(p^{-1/2}\epsilon_f(p)\right)^{v_p(m)}. \tag{15}$$

Par juxtaposition de (14) et (15), nous obtenons l'expression suivante de $\lambda'_f(m)$:

$$\lambda'_f(m) = \lambda'_f(m_1)\Big(\prod_{\substack{p \mid m \\ p \parallel N}} \epsilon_f(p)^{v_p(m)}\Big) m_2^{-1/2}. \tag{16}$$

Nous évaluons alors $\epsilon_f(N)$. Nous écrivons $N = N_1 N_2$ comme pour m avec :

$$N_1 = \prod_{\substack{p \mid N \\ p \nmid m}} p^{v_p(N)} \qquad N_2 = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \mid N}} p^{v_p(N)} = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \parallel N}} p.$$

Puisque N_1 et N_2 sont premiers entre eux, les opérateurs W_{N_1} et W_{N_2} commutent et nous avons $W_N = W_{N_1} W_{N_2}$ et la même relation sur les valeurs propres associées au vecteur propre commun f :

$$\epsilon_f(N) = \epsilon_f(N_1)\,\epsilon_f(N_2). \tag{17}$$

Nous calculons alors $\epsilon_f(N_2) = \prod_{\substack{p \parallel N \\ p \mid m}} \epsilon_f(p)$ puis :

$$\begin{aligned} \Big(\prod_{\substack{p \parallel N \\ p \mid m}} \epsilon_f(p)^{v_p(m)}\Big)\epsilon_f(N_2) &= \prod_{\substack{p \parallel N \\ p \mid m}} \epsilon_f(p)^{v_p(m)+1} \\ &= \prod_{\substack{p \parallel N \\ p \mid m \\ v_p(m) \text{ pair}}} \epsilon_f(p) \quad \text{car } \epsilon_f(p) \in \{\pm 1\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Nous sommes donc conduits à décomposer N en $N = N_1 N_2' N_3'$ où N_2' et N_3' sont définis de la manière suivante :

$$N_2' = \prod_{\substack{p \| N \\ p | m \\ v_p(m) \text{ pair}}} p^{v_p(N)}, \quad N_3' = \prod_{\substack{p \| N \\ p | m \\ v_p(m) \text{ impair}}} p^{v_p(N)}.$$

L'expression (18) devient alors :

$$\Big(\prod_{\substack{p \| N \\ p | m}} \epsilon_f(p)^{v_p(m)} \Big) \epsilon_f(N_2) = \epsilon_f(N_2'). \tag{19}$$

La multiplication de (16) et (17) donne au vu de (19) la formule suivante :

$$\epsilon_f(N) \lambda_f'(m) = \epsilon_f(N_1 N_2') \lambda_f'(m_1) m_2^{-1/2}. \tag{20}$$

Dans cette formule, nous avons $(m_1, N_1 N_2') = 1$. Les opérateurs $T'(m_1)^{\text{new}}$ et $W_{N_1 N_2}$ commutent donc et la sommation de (20) sur $S(2,N)^+$ donne :

$$\sum_{f \in S(2,N)^+} \epsilon_f(N) \lambda_f'(m) = m_2^{-1/2} \operatorname{tr} W_{N_1 N_2'} T'(m_1)^{\text{new}}. \tag{21}$$

Puisque $N_1 N_2'$ n'est pas un carré, le résultat de Brumer s'écrit :

$$\operatorname{tr} W_{N_1 N_2'} T'(m_1)^{\text{new}} = \mathrm{O}_\epsilon \big(m_1^{1/2+\epsilon} N^\epsilon + m_1^\epsilon N^{1/2+\epsilon} \big). \tag{22}$$

Nous obtenons le résultat énoncé par juxtaposition de (21) et (22). $\square$

4.2. Formule de trace d'Eichler-Selberg.

La trace de l'opérateur de Hecke $T'(m)^{\text{new}}$ est donnée par la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3. — *Pour tout entier m, tout entier N et tout réel strictement positif ϵ, nous avons la majoration suivante :*

$$\big| \operatorname{tr} T'(m)^{\text{new}} - d_N^{\text{new}} \chi_N^{\square}(m) m^{-1/2} \big| \ll_\epsilon (m^{1/2} + N^{1/2})(mN)^\epsilon.$$

Dans cette majoration, la constante impliquée par la constante de Vinogradov ne dépend que de ϵ.

Démonstration.

- Si $(m, N) = 1$ nous utilisons le résultat de Brumer (lemme 4.2). Nous avons :

$$\beta(1)\gamma(N) = \psi^{\text{new}}(N)$$

où ψ^{new} est multiplicative et définie sur les puissances p^α des entiers premiers p par :

$$\psi^{\text{new}}(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0\,; \\ p-1 & \text{si } \alpha = 1\,; \\ p^2 - p - 1 & \text{si } \alpha = 2\,; \\ p^\alpha - p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2} + p^{\alpha-3} & \text{si } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\left| \operatorname{tr} T'(m)^{\text{new}} - \frac{m^{-1/2}}{12} \chi_N^{\square}(m) \psi^{\text{new}}(N) \right| \ll_\epsilon (m^{1/2} + N^{1/2})(Nm)^\epsilon. \tag{23}$$

En prenant $m = 1$ dans (23), nous obtenons :

$$d_N^{\text{new}} = \frac{1}{12} \psi^{\text{new}}(N) + \mathrm{O}_\epsilon(N^{1/2+\epsilon}). \tag{24}$$

Puis, en reportant (24) dans (23), nous obtenons le résultat.

• Si $(m, N) > 1$, nous décomposons $m = m_1 m_2$ comme en (13). Nous avons alors comme en (16) :

$$\lambda'_f(m) = \lambda'_f(m_1) \epsilon_f(N') m_2^{-1/2}$$

avec

$$N' = \prod_{\substack{p \| N \\ p | m \\ v_p(m) \text{ pair}}} p.$$

Nous avons alors :

$$\operatorname{tr} T'(m)^{\text{new}} = m_2^{-1/2} \operatorname{tr} T'(m_1)^{\text{new}} W_{N'}.$$

Puisque $(m_1, N) = 1$, $N' \| N$ et $\beta(N') = 0$ le lemme 4.2 permet de conclure. $\square$

4.3. Formule de trace tordue par $L(f, \frac{1}{2})$.

La proposition suivante donne une formule de trace tordue par $L(f, \frac{1}{2})$.

Proposition 4.4. — *Pour tout entier strictement positif N, tout nombre premier p ne divisant pas le niveau N et tout entier positif ou nul n nous avons* :

$$\sum_{f \in S(2,N)^+} L(f, \tfrac{1}{2}) \lambda'_f(p^n) = \zeta(2) d_N^{\text{new}} f(p^n, 0) p^{-n/2} + \mathrm{O}_\epsilon(p^{n/2+\epsilon} d_N^{\text{new}} N^{-1/4+\epsilon}).$$

La fonction $f(p^n,0)$ *est donnée par :*

$$f(p^n,0)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)+1 & \textit{si } n \textit{ est pair};\\[2mm] \dfrac{n+1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big) & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — Grâce à (10) et (11) nous avons :

$$\begin{aligned}&\sum_{f\in S(2,N)^+} L(f,\tfrac12)\lambda'_f(p^n)\\ &\quad=\sum_{\ell\le N^{1/2+\epsilon}} V(2\pi\ell N^{-1/2})\ell^{-1/2}\sum_{f\in S(2,N)^+}\big(1+\epsilon_f(N)\big)\lambda'_f(\ell)\lambda'_f(p^n)+\mathrm{O}_\epsilon(nN^{-1}),\end{aligned}$$

puis grâce aux propositions 4.3 et 4.1 et réintégration des $\ell>N^{1/2+\epsilon}$ qui interviennent de façon négligeable, cette quantité devient :

$$d_N^{\mathrm{new}}p^{-n/2}\sum_{\ell=0}^{\infty}V(2\pi\ell N^{-1/2})\ell^{-1}\sum_{d\mid(\ell,p^n)} d\chi_N^{\square}\Big(\frac{\ell p^n}{d^2}\Big)+\mathrm{O}_\epsilon(p^{n/2+\epsilon}N^{-1}).$$

Enfin le résultat s'obtient par déformation de contour sur V vers la ligne $\operatorname{Re}s=-\frac12+\epsilon$ et utilisation du point 1 du lemme 3.3. □

4.4. Formule de trace tordue par $(1-\epsilon_f(N))L'(f,\frac12)$.

La proposition suivante donne une formule de trace tordue par :

$$(1-\epsilon_f(N))L'(f,\tfrac12).$$

PROPOSITION 4.5. — *Pour tout entier strictement positif* N, *tout nombre premier* p *ne divisant pas le niveau* N *et tout entier positif ou nul* n *nous avons :*

$$\begin{aligned}&\sum_{f\in S(2,N)^+}\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'(f,\tfrac12)\lambda'_f(p^n)\\ &\quad=2\Big(\ln\frac{\sqrt N}{2\pi\gamma}f(p^n,0)+\widehat f(p^n,0)\Big)\zeta(2)d_N^{\mathrm{new}}p^{-n/2}+\mathrm{O}_\epsilon(p^{n/2}d_N^{\mathrm{new}}N^{-1/4+\epsilon}).\end{aligned}$$

Le nombre γ *est la constante d'Euler,* $\gamma=-\Gamma'(1)$. *La fonction* $f(p^n,0)$ *est donnée par :*

$$f(p^n,0)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)+1 & \textit{si } n \textit{ est pair};\\[2mm] \dfrac{n+1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big) & \textit{sinon.}\end{cases}$$

La fonction $\widehat{f}(p^n,0)$ *est donnée par :*

$$\widehat{f}(p^n,0) = f(p^n,0)\begin{cases} \dfrac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)\dfrac{\dfrac{n}{2}\Big(\dfrac{n}{2}+1\Big)\ln p}{1+\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)\dfrac{n}{2}} & \textit{si } n \textit{ est pair;}\\[2ex] \dfrac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \dfrac{(n+1)}{2}\ln p & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — La méthode est la même que celle utilisée pour prouver la proposition 4.4. □

4.5. Choix d'un poids pour la formule de trace d'Eichler-Selberg.

Dans toute la suite, nous appelerons poids sur $S(2,N)^+$ une application qui à un élément $f \in S(2,N)^+$ associe un réel positif. En divisant le résultat de la proposition 4.3 par le cardinal d_N^{new} de $S(2,N)^+$, en utilisant (1) et la propriété fondamentale (9) reliant μ_p et X_n nous obtenons la proposition suivante :

PROPOSITION 4.6. — *Pour tout nombre premier p ne divisant pas le niveau N, tout entier positif ou nul n, tout réel ϵ strictement positif, nous avons :*

$$\frac{1}{d_N^{\text{new}}}\sum_{f\in S(2,N)^+}\lambda_f'(p^n) = \mu_p(X_n) + \mathrm{O}_\epsilon\big((p^{n/2}N^{-1}+N^{-1/2})(p^nN)^\epsilon\big).$$

4.6. Choix de poids pour $(L, \frac{1}{2})$.

À partir de la formule de trace tordue par $L\big(f,\frac{1}{2}\big)$ (proposition 4.4) nous voulons calculer une discrépance. Il nous faut donc trouver un bon poids, c'est-à-dire une fonction à valeurs positives Ω_N^p telle que :

$$\sum_{f\in S(2,N)^+}\Omega_N^p(f)\lambda_f'(p^n) = \mu_p(X_n) + \text{reste}.$$

Pour ne pas perdre l'information contenue par la proposition 4.4, ce poids doit s'annuler pour une forme f telle que $L\big(f,\frac{1}{2}\big) = 0$. Plus précisément, nous prouvons la proposition suivante :

PROPOSITION 4.7. — *Pour tout entier strictement positif N et tout nombre premier p ne divisant pas N, soit Ω_N^p la fonction définie sur $S(2,N)^+$ par la formule suivante*

$$\Omega_N^p(f) = \frac{L^p\big(f,\frac{1}{2}\big)}{\sum\limits_{g\in S(2,N)^+} L^p\big(g,\frac{1}{2}\big)}$$

avec :

$$L^p(f,\tfrac{1}{2}) = \Big(1 - \frac{\lambda'_f(p)}{p^{1/2}} + \frac{1}{p}\Big) L(f,\tfrac{1}{2}).$$

C'est un poids, c'est-à-dire que pour toute forme f de $S(2,N)^+$ nous avons :

$$\Omega_N^p(f) \geq 0.$$

De plus pour tout entier positif ou nul n, la formule de trace suivante est vraie :

$$\sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)\lambda'_f(p^n) = \mu_p(X_n) + \mathrm{O}_\epsilon(p^{n/2}N^{-1/4+\epsilon})$$

Démonstration. — La positivité est conséquence de la positivité de $L(f,\tfrac{1}{2})$ vue en (5) et de la positivité du p-ème facteur eulérien obtenue grâce à la majoration de Deligne (3). Nous prouvons désormais la formule de trace. Si $n=0$, nous avons grâce à la proposition 4.4 :

$$\sum_{f\in S(2,N)^+} L^p(f,\tfrac{1}{2}) = \zeta(2)\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)d_N^{\mathrm{new}} + \mathrm{O}_\epsilon(p^{1/2}d_N^{\mathrm{new}}N^{-1/4+\epsilon}). \tag{25}$$

Si $n \geq 1$, la relation de multiplicativité de Hecke (2) et la proposition 4.4 donnent

$$\sum_{f\in S(2,N)^+} L^p(f,\tfrac{1}{2})\lambda'_f(p^n) = \zeta(2)\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)d_N^{\mathrm{new}}\mu_p(X_n) + \mathrm{O}_\epsilon(p^{n/2}d_N^{\mathrm{new}}N^{-1/4+\epsilon}).$$

Le report de (25) dans cette égalité permet de conclure. □

Remarque. — Le dénominateur qui apparaît dans la définition du poids est non nul au moins pour N assez grand. En toute rigueur, pour de petites valeurs de N il faut remplacer le poids choisi par le premier terme du membre de droite de (25). Les résultats restent les mêmes.

4.7. Choix d'un poids pour $(1-\epsilon_f(N))L'(f,\tfrac{1}{2})$.

De même que nous avons prouvé la proposition 4.7 nous prouvons la proposition suivante qui propose un choix de poids pour $\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'(f,\tfrac{1}{2})$.

Proposition 4.8. — *Pour tout entier strictement positif N, tout nombre premier p ne divisant pas le niveau N, soit le poids $\Omega_N^p(f)'$ sur $S(2,N)^+$ défini par la formule suivante :*

$$\Omega_N^p(f)' = \frac{\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'^p(f,\tfrac{1}{2})}{\sum_{g\in S(2,N)^+}\big(1-\epsilon_g(N)\big)L'^p(g,\tfrac{1}{2})}$$

avec :

$$L'^p(f,\tfrac12)=\Big(1-\frac{\lambda'_f(p)}{p^{1/2}}+\frac1p\Big)L'(f,\tfrac12).$$

Pour tout entier positif ou nul n, la formule de trace suivante est vraie :

$$\sum_{f\in S(2,N)^+}\Omega^p_N(f)'\lambda'_f(p^n)=\mu_p(X_n)+\mathrm{O}_\epsilon\Big(\frac{(n+1)^2p^{-n/2+\epsilon}}{\ln N}+p^{n/2}N^{-1/4+\epsilon}\Big).$$

Démonstration. — La positivité est conséquence, outre de la positivité du p-ème facteur eulérien, de (6) et de (7). Nous prouvons la formule de trace.

- Si $n=0$ nous avons grâce à la proposition 4.5 :

$$\sum_{f\in S(2,N)^+}\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'^p(f,\tfrac12)$$
$$=2\Big(1-\frac1{p^2}\Big)\zeta(2)\ln\frac{\sqrt N}{2\pi\gamma}d_N^{\mathrm{new}}\Big(1+\mathrm{O}\Big(\frac{\ln p}{p}+p^{n/2}N^{-1/4+\epsilon}\Big)\Big).$$

- Si $n\geq 1$ nous calculons :

$$\sum_{f\in S(2,N)^+}\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'^p(f,\tfrac12)\lambda'_f(p^n)$$
$$=2\zeta(2)d_N^{\mathrm{new}}\ln\frac{\sqrt N}{2\pi\gamma}E(p,n)+2\zeta(2)d_N^{\mathrm{new}}\widehat E(p,n)+\mathrm{O}_\epsilon(p^{n/2}d_N^{\mathrm{new}}N^{-1/4+\epsilon}).$$

Dans cette égalité, $E(p,n)$ et $\widehat E(p,n)$ sont définies par les formules :

$$E(p,n)=\big(f(p^n,0)-f(p^{n-1},0)\big)p^{-n/2}+\big(f(p^n,0)-f(p^{n+1},0)\big)p^{-n/2-1},$$
$$\widehat E(p,n)=\big(\widehat f(p^n,0)-\widehat f(p^{n-1},0)\big)p^{-n/2}+\big(\widehat f(p^n,0)-\widehat f(p^{n+1},0)\big)p^{-n/2-1}.$$

Ces fonctions ont été calculées et, grâce au lemme 3.3, nous avons :

$$E(p,n)=(1-\frac1{p^2})\mu_p(X_n),\tag{28a}$$

$$\widehat E(p,n)\ll n^2p^{-n/2+\epsilon}.\tag{28b}$$

En reportant (28a) et (28b) dans (27) nous obtenons le résultat énoncé grâce à (26). $\square$

REMARQUE. — La remarque qui suit la proposition 4.7 s'applique *mutatis mutandis.*

5. Comptage des valeurs propres de Hecke

Les termes d'erreur impliqués par nos formules de trace (propositions 4.6, 4.7 et 4.8) sont tous majorés par le terme d'erreur suivant :

$$\mathrm{O}_\epsilon\Big(\frac{(n+1)^2 p^{-n/2+\epsilon}}{\ln N} + p^{n/2} N^{-1/4+\epsilon}\Big).$$

PROPOSITION 5.1. — *Soit $\Omega_N^p(f)$ un poids sur $S(2,N)^+$, on suppose avoir la majoration suivante pour tout nombre premier p, tout entier positif ou nul n et tout entier strictement positif N premier à p :*

$$(29)\qquad \Big|\sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)\lambda'_f(p^n) - \mu_p(X_n)\Big| \ll_\epsilon \frac{(n+1)^2 p^{-n/2+\epsilon}}{\ln N} + p^{n/2} N^{-1/4+\epsilon}.$$

Si N est un entier positif, nous notons $p = \widehat{p}(N)$ le plus petit nombre premier ne divisant pas N. Pour tout ϵ réel strictement positif assez petit, il existe $N_0(\epsilon)$ tel que pour tout $N > N_0(\epsilon)$, tout sous-intervalle de $[-2,2]$ de μ_p-longueur $(\ln N)^{-1+\epsilon}p^\epsilon$ contienne au moins une valeur propre $\lambda'_f(p)$ de $T'(p)^{\mathrm{new}}$ associée à un vecteur propre $f \in S(2,N)^+$ vérifiant en outre $\Omega_N^p(f) \neq 0$.

REMARQUE. — Nous voyons immédiatement qu'il y a des suites d'entiers N pour lesquelles ce lemme est sans intérêt : celles pour lesquelles $\widehat{p}(N)$ est toujours grand par rapport à $\ln N$. Par exemple la suite :

$$2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11, \dots$$

où le N-ième terme est le produit des N premiers nombres premiers. Par le théorème des nombres premiers nous savons que $\widehat{p}(N) \sim \ln N$.

Démonstration. — Soit I un intervalle ne contenant aucune valeur propre $\lambda'_f(p)$. On désigne par $F_{\Delta,J}$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact $\overline{I}$ constamment égale à 1 sur J et telle que si I_1 et I_2 sont les deux morceaux complémentaires de J dans I, ils sont tous deux de μ_p-longueur inférieure à Δ. On suppose de plus que $|F_{\Delta,J}^{(k)}(x)| \ll_k \Delta^{-k}$. On a alors :

$$(30)\qquad \mu_p(I) = \mu_p(J) + \mu_p(I_1 \cup I_2) \leq \int_{-2}^{2} F_{\Delta,J}\mu_p + 2\Delta.$$

Or I ne contient aucune valeur propre $\lambda'_f(p)$, donc (30) devient :

$$\mu_p(I) \leq \Big|\sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f) F_{\Delta,J}(\lambda'_f(p)) - \int_{-2}^{2} F_{\Delta,J}\mu_p\Big| + 2\Delta.$$

On obtient alors le résultat annoncé par utilisation du lemme 5.2 et le choix suivant des paramètres :

$$\Delta = (\ln N)^{-1+\epsilon} \quad \text{et} \quad k = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} \right\rfloor + 1. \quad \square$$

LEMME 5.2. — *Soit une suite de réels positifs* $\{\Omega_N^p(f)\}$ *pour* p *le plus petit nombre premier ne divisant pas l'entier* N *et* F *une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans* $]-2,2[$ *vérifiant* $|F^{(k)}(x)| \ll_k \Delta^{-k}$ *pour tout entier positif ou nul* k *et un réel* $\Delta > 0$. *Pour tout entier strictement positif* M, *tout entier* $k \geq 2$ *et tout réel* $\epsilon \in]0,1[$, *nous avons la majoration suivante vraie dès que* (29) *est vérifiée* :

$$\Big| \sum_{f \in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f) F\big(\lambda_f'(p)\big) - \int_{-2}^{2} F\mu_p \Big| \ll_{k,\epsilon} \frac{p^\epsilon}{\ln N} \big(1 + (\ln p)^{k-2} (\ln N)^2 (\Delta \ln N)^{-k}\big) + (\ln p) N^{-1/8+\epsilon} + (\ln p)^{k-2} (\ln N)^2 (\Delta \ln N)^{-k}.$$

La constante impliquée par le symbole de Vinogradov ne dépend que de k *et* ϵ.

Démonstration. — La fonction F admet un développement de Tchebychev $\sum \widehat{F}(n) X_n$ où :

$$\widehat{F}(n) = \int_{-2}^{2} F X_n \mu_{ST}. \tag{31}$$

Nous commençons par remplacer F par la série partielle F_M définie par :

$$F_M = \sum_{n=0}^{M} \widehat{F}(n) X_n.$$

Nous avons alors en utilisant la positivité du poids :

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{f \in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f) F\big(\lambda_f'(p)\big) - \int_{-2}^{2} F\mu_p \Big| &\leq \sum_{f \in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f) \max_{v \in [-2,2]} |F - F_M|(v) + \int_{-2}^{2} \max_{v \in [-2,2]} |F - F_M|(v) \mu_p \\ &\quad + \Big| \sum_{f \in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f) F_M\big(\lambda_f'(p)\big) - \int_{-2}^{2} F_M \mu_p \Big|. \end{aligned}$$

Nous savons que $|\widehat{F}(n)| \ll_k n^{-k}\Delta^{-k}$ d'après (31) et intégration par parties, et que $\max\limits_{v\in[-2,2]} |X_n|(v) \ll n$; nous avons donc la majoration suivante :

$$\max_{v\in[-2,2]} |F - F_M|(v) \ll_k \Delta^{-k}M^{-k+2}. \tag{33}$$

Puis, utilisant $\mu_p([-2,2]) = 1$, (29) pour $n = 0$ et (33), nous transformons (32) en :

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)F\big(\lambda'_f(p)\big) - \int_{-2}^{2} F\mu_p\Big| \\ \ll_k \Delta^{-k}M^{-k+2}\Big(1+\frac{p^\epsilon}{\ln N}\Big) + \Big| \sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)F_M\big(\lambda'_f(p)\big) - \int_{-2}^{2} F_M\mu_p\Big|.\end{aligned}$$

Nous transformons maintenant la valeur absolue de droite. Elle est majorée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)F_M\big(\lambda'_f(p)\big) - \int_{-2}^{2} F_M\mu_p\Big| \\ \le \sum_{n=0}^{M} |\widehat{F}(n)|\cdot\Big| \sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)X_n\big(\lambda'_f(p)\big) - \int_{-2}^{2} X_n\mu_p\Big|.\end{aligned}$$

Mais nous avons :

$$X_n\big(\lambda'_f(p)\big) = \lambda'_f(p^n).$$

Donc, grâce à (29) et à $|\widehat{F}(n)| \ll 1$, nous avons :

$$\Big| \sum_{f\in S(2,N)^+} \Omega_N^p(f)F_M\big(\lambda'_f(p)\big) - \int_{-2}^{2} F_M\mu_p\Big| \ll_\epsilon \frac{p^\epsilon}{\ln N} + p^{M/2}N^{-1/4+\epsilon}. \tag{35}$$

Puis reportant (35) dans (34) et choisissant

$$M = \Big\lfloor \frac{\ln N}{9\ln p}\Big\rfloor,$$

nous obtenons le résultat énoncé dans le lemme. □

REMARQUE. — La positivité de $L(f,\frac{1}{2})$ et $\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'(f,\frac{1}{2})$ permet d'écrire $\sum|\Omega_N^p(f)| = \sum\Omega_N^p(f)$. Sans cela (qui n'est pas connu en poids supérieur à 2), il faut savoir majorer convenablement $\sum\Omega_N^p(f)^2$ ce qui est plus délicat.

La proposition 5.1 est vraie pour les trois poids des propositions 4.6, 4.7 et 4.8. Notamment, avec le poids $1/d_N^{\text{new}}$ nous retrouvons le résultat de J.-P. Serre. Le lemme suivant donne une minoration du nombre de formes primitives relativement à N n'annulant pas le poids et ayant des valeurs propres de Hecke distinctes.

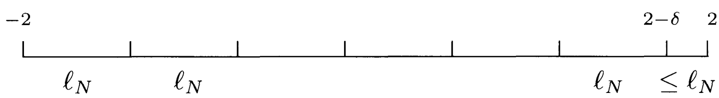
LEMME 5.3. — *Sous les hypothèses de la proposition* 5.1, *nous avons la minoration suivante pour tout* ϵ, *tout* $N > N_0(\epsilon)$ *et* p *le plus petit nombre premier ne divisant pas* N :

$$\sharp\{\lambda'_f(p) \textit{ distinctes }, f \in S(2,N)^+ \mid \Omega_N^p(f) \neq 0\} \geq (\ln N)^{1-\epsilon} p^{-\epsilon}.$$

Démonstration. — D'après la proposition 5.1 tout intervalle de μ_p-longueur

$$\ell_N = (\ln N)^{-1+\epsilon/2} p^{\epsilon/2}$$

contient au moins une valeur propre $\lambda'_f(p)$ avec $\Omega_N^p(f) \neq 0$. Fabriquons une suite d'intervalles ouverts disjoints de μ_p-longueur ℓ_N couvrant l'intervalle $]-2, 2-\delta[$ moins un nombre fini de points (les bords de ces intervalles) avec δ choisi assez petit pour que $0 \leq \mu_p(]2-\delta, 2[) < \ell_N$. Ce choix est résumé sur le schéma suivant où les longueurs sont mesurées par μ_p.



Comme la $\mu(p)$-longueur de $]-2, 2[$ est 1, il y a

$$\frac{1 - \mu_p(\,]2-\delta, 2[\,)}{(\ln N)^{-1+\epsilon/2} \widehat{p}(N)^{\epsilon/2}}$$

tels intervalles. Nous avons vu que chacun d'eux contient au moins un $\lambda'_f(p)$ d'où le résultat. □

6. Comptage d'entiers algébriques

Nous notons $\lambda_f(p) = \sqrt{p}\lambda'_f(p)$. Nous savons que $\lambda_f(p)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}(2\sqrt{p})$ des entiers algébriques de conjugués tous réels et tous de norme inférieure à $2\sqrt{p}$. Nous supposons que tous les $\lambda_f(p)$ sont de degré inférieur ou égal à $d(N,p)$. Ils appartiennent alors au sous-ensemble $\mathcal{E}(2\sqrt{p}, d(N,p))$ des éléments de $\mathcal{E}(2\sqrt{p})$ de degré au plus $d(N,p)$.

L'ensemble $\mathcal{E}(2\sqrt{p}, d(N,p))$ est fini : à chaque orbite sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ d'un élément de $\mathcal{E}(2\sqrt{p}, d(N,p))$ nous pouvons associer un unique polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré inférieur ou égal à $d(N,p)$ et dont toutes les racines sont majorées en norme par $2\sqrt{p}$. Nous notons $\mathcal{P}(2\sqrt{p}, d(N,p))$ l'ensemble de ces polynômes. Chaque orbite contenant au plus $d(N,p)$ éléments, nous avons la majoration suivante :

$$\sharp\,\mathcal{E}\big(2\sqrt{p}, d(N,p)\big) \le d(N,p)\,\sharp\,\mathcal{P}\big(2\sqrt{p}, d(N,p)\big). \tag{36}$$

LEMME 6.1. — *Pour $M \ge 1$ et $d \ge 2$, nous notons $\mathcal{P}(M,d)$ l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré au plus d et dont toutes les racines sont majorées en norme par M. Nous avons alors la majoration suivante du cardinal de $\mathcal{P}(M,d)$:*

$$\sharp\,\mathcal{P}(M,d) \le (6M)^{d^2}.$$

Démonstration. — Si $P = \sum_{i=0}^{d} \rho_i X^{d-i} \in \mathcal{P}(M,d)$ alors en notant $y_1, \dots, y_d$ ses racines, nous avons l'expression suivante de ρ_i :

$$\rho_i = (-1)^i \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le d} y_{j_1} \cdots y_{j_i} \qquad (1 \le i \le d).$$

Chacune des racines étant majorée en norme par M nous avons grâce à l'expression précédente de ρ_i la majoration :

$$|\rho_i| \le \tbinom{d}{i} M^i.$$

Un polynôme unitaire est un choix de d valeurs de ρ_i et il y a $1 + 2\binom{d}{i} M^i$ valeurs possibles de ρ_i. Nous majorons donc le cardinal de $\mathcal{P}(M,d)$ par :

$$\sharp\mathcal{P}(M,d) \le \prod_{i=1}^{d} \big(1 + 2\tbinom{d}{i} M^i\big) \le \prod_{i=1}^{d} 3\tbinom{d}{i} M^i \le (6M)^{d^2}. \quad \square$$

REMARQUE. — Un travail récent de A. Dubickas et S.V. Konyagin (*cf.* [DK98]) permet, en majorant la norme de Mahler des éléments de $\mathcal{P}(M,d)$ par M^d de remplacer, pour $M > 1.33$, le majorant $(6M)^{d^2}$ par $M^{d^2(1+16\ln\ln d/\ln d)}$. Cependant, ceci n'améliore pas les résultats que nous visons.

Nous utilisons ce lemme pour majorer $\sharp\,\mathcal{E}(2\sqrt{p}, d(N,p))$.

LEMME 6.2. — *Pour $M \geq 1$ et $d \geq 2$ nous notons $\mathcal{E}(M,d)$ l'ensemble des entiers algébriques totalement réels dont tous les conjugués sont majorés en norme par M et de degré inférieur à d. Nous avons alors la majoration suivante du cardinal de $\mathcal{E}(M,d)$:*

$$\sharp\,\mathcal{E}(M,d) \leq (8M)^{d^2}.$$

Démonstration. — Grâce à la majoration (36) et au lemme 6.1, nous avons la majoration suivante :

$$\sharp\,\mathcal{E}(M,d) \leq d(6M)^{d^2} \leq (8M)^{d^2}. \quad \square$$

7. Preuves des théorèmes

7.1. Noyau de la preuve.

Nous considérons un poids Ω_N^p sur $S(2,N)^+$ satisfaisant aux conditions de la proposition 5.1 et dont la non-nullité est stable par action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$– c'est-à-dire que $\Omega_N^p(f) \neq 0$ reste vraie si nous remplaçons f par f^σ où σ est n'importe quel élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Nous notons $d(\Omega,N)$ le degré maximum des entiers algébriques $\lambda_f(\widehat{p}(N))$ quand f parcourt le sous-ensemble des formes de $S(2,N)^+$ qui n'annulent pas $\Omega_N^{\widehat{p}(N)}$. Ce nombre est aussi le cardinal de la plus grande orbite sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ des $\lambda_f(\widehat{p}(N))$ quand $\Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f) \neq 0$:

$$\begin{aligned} d(\Omega,N) &= \max_{\substack{f\in S(2,N)^+\\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)\neq 0}} \sharp\left\{\sigma(\lambda_f(\widehat{p}(N))),\ \sigma\in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\right\} \\ &= \max_{\substack{f\in S(2,N)^+\\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)\neq 0}} \deg\big(\lambda_f(\widehat{p}(N))\big). \end{aligned}$$

Nous avons la majoration suivante :

$$\sharp\left\{\lambda'_f(\widehat{p}(N)),\ f\in S(2,N)^+,\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)\neq 0\right\} \leq \sharp\,\mathcal{E}\big(2\sqrt{\widehat{p}(N)}, d(\Omega,N)\big) \tag{37}$$

car $\lambda'_f(\widehat{p}(N)) \mapsto \lambda_f(\widehat{p}(N))$ est bijective. Grâce au lemme 6.2, nous majorons le membre de droite de (37) et récrivons :

$$\sharp\left\{\lambda'_f(\widehat{p}(N)),\ f\in S(2,N)^+,\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)\neq 0\right\} \leq \big(16\sqrt{\widehat{p}(N)}\,\big)^{d(\Omega,N)^2}. \tag{38}$$

Mais nous pouvons minorer le terme de droite de (38) grâce au lemme 5.3. Ce faisant nous transformons (38) en la majoration suivante :

$$(\ln N)^{1-\epsilon}\widehat{p}(N)^{-\epsilon} \leq \big(16\sqrt{\widehat{p}(N)}\,\big)^{d(\Omega,N)^2}. \tag{39}$$

Puis, si $[x]^+ = \max(x,0)$, l'extraction de $d(\Omega, N)$ de (39) en donne la minoration suivante :

$$d(\Omega, N) \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

Si la non-annulation de $\Omega_N^{\widehat{p}(N)}$ est stable par action de Galois, alors en écrivant

$$\max_{f\in S(2,N)^+} \sharp\left\{f^\sigma,\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f^\sigma)\neq 0\right\} \geq \max_{\substack{f\in S(2,N)^+\\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)\neq 0}} \sharp\left\{\sigma(\lambda_f(\widehat{p}(N))), \sigma\in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\right\},$$

nous obtenons la minoration suivante :

$$\max_{f\in S(2,N)^+} \sharp\left\{f^\sigma, \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f^\sigma)\neq 0\right\} \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

Nous résumons ce qui précède dans le lemme suivant :

Lemme 7.1. — *Soit Ω_N un poids sur $S(2,N)^+$ qui satisfait aux conditions de la proposition* 5.1 *pour $p = \widehat{p}(N)$ le plus petit facteur premier ne divisant pas N. Nous supposons de plus que la non-annulation de ce poids est stable par action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Nous notons* :

$$d(\Omega, N) = \max_{\substack{f\in S(2,N)^+\\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)\neq 0}} \sharp\left\{\sigma(\lambda_f(\widehat{p}(N))),\ \sigma\in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\right\}.$$

Pour tout ϵ strictement positif assez petit, il existe alors un entier $N_0(\epsilon)$ tel que si $N \geq N_0(\epsilon)$ la minoration suivante de $d(\Omega, N)$ est vraie :

$$d(\Omega, N) \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

De plus, nous avons la minoration suivante :

$$\max_{f\in S(2,N)^+} \sharp\left\{f^\sigma,\ \Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f^\sigma)\neq 0\right\} \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

7.2. Preuve du théorème 1.1.

Si $\bar{f}$ est l'orbite d'une forme primitive f de $S(2,N)^+$ sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, nous avons vu que la dimension du facteur $\mathbb{Q}$-simple $A_{\bar{f}}$ est le cardinal de $\bar{f}$. Nous considérons le poids défini pour $f \in S(2,N)^+$ par la formule suivante :

$$\Omega_N^p(f) = \frac{1}{d_N^{\text{new}}}\cdot$$

Il ne s'annule pour aucune forme f et vérifie les conditions de la proposition 5.1 grâce à la proposition 4.6. Nous pouvons donc appliquer le lemme 7.1 et en déduire la proposition suivante grâce à la seconde minoration du lemme.

Proposition 7.2. — *Pour tout réel ϵ strictement positif assez petit, il existe une constante $C_0 > 0$ et un entier N_0 dépendant de ϵ tels que pour tout entier $N > N_0$ il existe un facteur $\mathbb{Q}$-simple X de la jacobienne $J_0^{\text{new}}(N)$ dont la dimension vérifie l'inégalité suivante :*

$$\dim X \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

Dans cette minoration, $\widehat{p}(N)$ est le plus petit facteur premier ne divisant pas N.

Si nous fixons p premier et choisissons une suite d'entiers N non divisibles par p, la proposition précédente implique immédiatement le théorème 1.1.

7.3. Preuve du théorème 1.2.

Nous restreignons notre étude aux facteurs $\mathbb{Q}$-simples $A_{\bar{f}}$ de rang 0. Nous savons que ces facteurs $A_{\bar{f}}$ sont ceux associés à des formes f telles que $L(f, \frac{1}{2}) \neq 0$ — nous rappelons que $L(f, \frac{1}{2}) \neq 0$ si et seulement si $L(f^\sigma, \frac{1}{2}) \neq 0$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Nous considérons le poids défini pour $f \in S(2,N)^+$ par :

$$\Omega_N^p(f) = \frac{L^p(f, \frac{1}{2})}{\sum_{g\in S(2,N)^+} L^p(g, \frac{1}{2})}.$$

La non-annulation de ce poids est stable par action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $S(2,N)^+$. Enfin nous avons $\Omega_N^p(f) = 0$ si et seulement si $L(f, \frac{1}{2}) = 0$ donc $\Omega_N^p(f) \neq 0$ si et seulement si $\operatorname{rang} A_{\bar{f}} = 0$. Grâce à la proposition 4.7 nous savons que le poids $\Omega_N^{\widehat{p}(N)}$ vérifie les conditions de la proposition 5.1 et que nous pouvons lui appliquer le lemme 7.1 pour en déduire la proposition suivante.

Proposition 7.3. — *Pour tout réel ϵ strictement positif assez petit, il existe une constante $C_1 > 0$ et un entier N_1 dépendant de ϵ tels que pour tout entier $N > N_1$ il existe un facteur $\mathbb{Q}$-simple X de la jacobienne $J_0^{\text{new}}(N)$ de rang 0 et dont la dimension vérifie l'inégalité suivante :*

$$\dim X \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

Dans cette minoration, $\widehat{p}(N)$ est le plus petit facteur premier ne divisant pas N.

Si nous fixons p premier et choisissons une suite d'entiers N non divisibles par p, la proposition précédente implique immédiatement le théorème 1.2.

7.4. Preuve du théorème 1.3.

Nous étudions les facteurs $\mathbb{Q}$-simples $A_{\bar f}$ associés à des formes f telles que $L(f,\frac12) = 0$ et $L'(f,\frac12) \neq 0$ — cette condition étant stable par action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $S(2,N)^+$. Nous avons vu que le rang de Mordell-Weil est donné par la formule suivante :

$$\operatorname{rang} A_{\bar f} = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} \operatorname{ord}_{s=1/2} L(f^\sigma, s).$$

Ainsi, lorsque $\operatorname{ord}_{s=1/2} L(f,s) = 1$ nous savons que $\operatorname{ord}_{s=1/2} L(f^\sigma,s) = 1$ et donc nous avons l'équation suivante reliant le rang et la dimension de $A_{\bar f}$:

$$\operatorname{rang} A_{\bar f} = \sharp \bar f = \dim A_{\bar f}.$$

Nous considérons alors le poids défini pour $f \in S(2,N)^+$ par :

$$\Omega_N^p(f)' = \frac{\big(1-\epsilon_f(N)\big)L'^p(f,\frac12)}{\sum\limits_{g\in S(2,N)^+}\big(1-\epsilon_g(N)\big)L'^p(g,\frac12)}.$$

Si $\epsilon_f(N) = 1$ alors $L\big(f,\frac12\big) = 0$ implique $L'(f,\frac12) = 0$ et donc

$$\operatorname{ord}_{s=1/2} L(f,s) > 1.$$

Ainsi nous avons $\Omega_N^p(f)' = 0$ si et seulement si $\operatorname{ord}_{s=1/2} L(f,s) > 1$ ou $\operatorname{ord}_{s=1/2} L(f,s) = 0$ (grâce à (7)). Par contraposée nous obtenons $\Omega_N^p(f)' \neq 0$ si et seulement si $\operatorname{ord}_{s=1/2} L(f,s) = 1$. Nous déduisons alors du lemme 2.1 que la non-annulation de ce poids est stable par action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Grâce à la proposition 4.8, nous savons que le poids $\Omega_N^{\widehat{p}(N)}(f)'$ vérifie les conditions de la proposition 5.1 et que nous pouvons lui appliquer le lemme 7.1 pour en déduire la proposition suivante.

Proposition 7.4. — *Pour tout réel ϵ strictement positif assez petit, il existe une constante $C_2 > 0$ et un entier N_2 dépendant de ϵ tels que pour tout entier $N > N_2$ il existe un facteur $\mathbb{Q}$-simple X de la jacobienne $J_0^{\mathrm{new}}(N)$ de rang et de dimension vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\operatorname{rang} X = \dim X \geq \sqrt{\left[\frac{(1-\epsilon)\ln\ln N}{\ln(16\sqrt{\widehat{p}(N)})} - 2\epsilon\right]^+}.$$

Dans cette minoration, $\widehat{p}(N)$ est le plus petit facteur premier ne divisant pas N.

Si nous fixons p premier et choisissons une suite d'entiers N non divisibles par p, la proposition précédente implique immédiatement le théorème 1.3.

Conclusion

La minoration calculée, en $\sqrt{\ln\ln N}$, est en deçà des résultats attendus au vu de l'expérimentation numérique. Les calculs d'A. Brumer [1] nous laissent prévoir que les facteurs de $J_0^{\rm new}(N)$ sont de taille comparable à la dimension de $J_0^{\rm new}(N)$ — au moins lorsque N est premier. Une des grandes pertes d'information de la méthode que nous avons suivie a lieu lorsque nous majorons le degré du corps de rationnalité en ne considérant qu'un seul des coefficients qui l'engendrent.

La proposition 4.3 est vraie en tout niveau. Lorsqu'on impose au niveau d'être premier, le poids naturel qui apparaît dans la formule de trace 4.5 est le poids harmonique :

$$\omega_f = \frac{1}{4\pi(f,f)}$$

où (,) est le produit scalaire de Petersson. La mesure d'équirépartition n'est alors plus la mesure μ_p mais la mesure μ_{ST} de Sato-Tate. Ces faits seront développés dans ma thèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brumer (A.). — *The Rank of $J_0(N)$*, Astérisque **228**, 1995, p. 41–68.

[2] Conrey (J.), Duke (W.), Farmer (D.W.). — *The distribution of the eigenvalues of Hecke operators*, Acta Arithmetica, t. **78**, 4, 1997, p. 405–409.

[3] Cornell (G.), Silverman (J.H.) (eds). — *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*. — Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1997.

[4] Diamond (F.), Im (J.). — Modular forms and modular curves, in *Fermat Last Theorem*, Canadian Math. Soc., 1995, p. 39–133.

[5] Dubickas (A.), Konyagin (S.V.). — *On the number of polynomials of bounded measure*, Acta Arithmetica, t. **86**, n° 4, 1998, p. 325–342.

[6] Gamburd (A.), Jakobson (D.), Sarnak (P.). — *Spectra of elements in the group ring of* SU(2), J. Europ. Math. Soc., t. **1**, 1999, p. 1–35.

[7] Guo (J.). — *On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for* GL(2), Duke Math. J., t. **83**, 1996, p. 157–190.

[8] Gross (B.H.), Zagier (D.B.). — *Heegner points and derivatives L-series*, Inventiones Math., t. **84**, 1986, p. 225–320.

[9] Iwaniec (H.), Sarnak (P.). — *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros*, Preprint, 1997.
[10] Iwaniec (H.). — *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate Studies in Math., vol. **17**, Amer. Math. Soc., 1997.
[11] Kowalski (E.), Michel (P.). — *A lower bound for the rank of* $J_0(q)$, Prépublication, Université Paris-Sud, t. **97**, n° 69, 1997.
[12] Kowalski (E.), Michel (P.). — *Sur les zéros des fonctions L de formes automorphes*, Prépublication, Université Paris-Sud, t. **97**, n° 54, 1997.
[13] Kowalski (E.), Michel (P.). — *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J., à paraître.
[14] Kohnen (W.). — *Fourier Coefficients of Modular Forms of Half-Integral Weight*, Math. Annalen, t. **271**, n° 2, 1985, p. 237–268.
[15] Kowalski (E.). — *The rank of the jacobians of modular curves : analytic methods*, Thesis, Rutgers University, disponible sur http://www.princeton.edu/~ekowalsk/These/these.html, 1998.
[16] Rivlin (T.J.). — *Chebyshev Polynomials : from Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, 2e éd. — Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 1990.
[17] Rohrlich (D.E.). — *Non vanishing of L-functions for* GL(2), Inventiones Math., t. **97**, 1989, p. 381–403.
[18] Rohrlich (D.E.). — *Modular Curves, Hecke Correspondences, and L-functions*, in Cornell and Silvermann [3], chap. 3, 1997, p. 41—100.
[19] Serre (J.-P.). — *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p*, J. Amer. Math. Soc., t. **10**, n° 1, 1997, p. 75–102.
[20] Tenenbaum (G.). — *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. — Cours spécialisés, vol. **1**, Soc. Math. France, 1995.