Bulletin de la S. M. F.

Noël Lohoué

Sami Mustapha

Sur les transformées de Riesz sur les espaces homogènes des groupes de Lie semi-simples

Bulletin de la S. M. F., tome 128, nº 4 (2000), p. 485-495

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_4_485_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 485–495.

SUR LES TRANSFORMÉES DE RIESZ SUR LES ESPACES HOMOGÈNES DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

PAR NOËL LOHOUÉ ET SAMI MUSTAPHA (*)

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe de Lie réel, semi-simple, non compact, de centre fini et soit H un sous-groupe de G possédant les mêmes propriétés. Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ un sous-Laplacien invariant à gauche sur G. On étudie dans cet article la bornitude des transformées de Riesz associées au sous-Laplacien Δ sur l'espace homogène $H\backslash G$.

ABSTRACT. — ON THE RIESZ TRANSFORMS ON THE HOMOGENEOUS SPACES OF SEMI-SIMPLE LIE GROUPS. — Let G be a semisimple noncompact Lie group with finite center and let $H \subset G$ be a closed subgroup with the same properties. Let $\Delta = -\sum X_j^2$ be a left invariant sub-Laplacian on G. In this paper we investigate the boundness of the Riesz transforms associated to the sub-Laplacian Δ on the homogenous space $H\backslash G$.

1. Introduction

Dans $\mathbb{R}^n$ les transformées de Riesz

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta^{-1/2}, \quad 1 \le j \le n,$$

sont bornées sur les espaces L^p pour tout $1 < p < \infty$ et de type faible 1-1. Ce fait est une conséquence de la théorie des intégrales singulières. Ceci est aussi le cas dans les contextes où l'on a une croissance polynomiale du volume (ex. variétés à courbure positive, groupes de Lie à croissance polynomiale, *etc.*). Il est alors

(*) Texe recu le 20 juillet 1998, revisé le 15 janvier 1999, accepté le 20 janvier 1999.
N. LOHOUÉ, Mathématiques, Bât. 425, Université Paris XI, 91405, Orsay CEDEX. Email : Lohoue@anh.u-psud.fr.
S. MUSTAPHA, Institut de Mathématiques, Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75252, Paris CEDEX. Email : sam@math.jussieu.fr.
Classification mathématique par matières : 22E30, 22E46, 43E85.
Mots clés : groupes de Lie semi-simples, espaces homgènes, transformées de Riesz, sous-Laplaciens.

possible, grâce à la notion d'espaces de type homogène [4], d'utiliser la théorie des intégrales singulières pour obtenir des estimations L^p (*cf.* [1], [16]).

Dans les contextes où le volume est à croissance exponentielle, on est dépourvu de cet outil. Un moyen de contourner cette difficulté est d'utiliser les propriétés spectrales du Laplacien (par exemple l'existence d'un trou spectral) pour contrôler la géométrie à l'infini du groupe ou de la variété (*cf.* [9], [10]). Cette idée a été mise en évidence et utilisée par le premier auteur pour établir la bornitude des transformées de Riesz sur les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée (*cf.* [9]). Le premier auteur a aussi obtenu dans [12] des estimations pour les transformées de Riesz pour les variétés riemanniennes dont le tenseur de courbure est borné ainsi que ses dérivées premières et secondes qui permettent de déduire la bornitude de ces transformées dans des espaces d'Orlicz appropriés. Plus récemment des résultats du même type ont été obtenus pour les groupes de Lie à croissance exponentielle du volume (*cf.* [14]).

On se propose dans cet article d'étudier la bornitude des transformées de Riesz sur les espaces homogènes des groupes de Lie semi-simples. Dans ce cas on est confronté à une difficulté supplémentaire liée au comportement du volume des boules de petit rayon. Pour bien comprendre cette difficulté il convient de rappeler quelques situations classiques.

a) Soit M une variété riemannienne complète et à géométrie bornée. Si $0 < r < \rho(M)$, où $\rho(M)$ est le rayon d'injectivité de M, alors il existe une constante $c(r)$ telle que $c(r)^{-1} \leq V_m(r) \leq c(r)$ où $V_m(r)$ est le volume de la boule riemannienne de centre $m \in M$ et de rayon $r > 0$.

b) Si $M = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ le volume de la boule géodésique de centre m et de rayon 1 tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Cette assertion peut se prouver directement ou en utilisant la formule des traces de Selberg.

c) Maintenant si G est un groupe de Lie semi-simple non compact de centre fini et si $G = KAN$ est une décomposition d'Iwasawa de G et si on note M le centralisateur de A dans K et $H = MN$ alors on peut voir que pour toute métrique invariante à droite sur G projetée sur l'espace des horocycles G/H le volume de la boule de rayon 1 tend vers 0 dans certaines directions.

Le point fondamental de ce travail est d'observer que que si G est un groupe de Lie réel connexe semi-simple non compact avec un centre fini et H un sous-groupe de G vérifiant les mêmes hypothèses, les phénomènes obrservés en b) et c) ne peuvent pas se produire sur l'espace homogène $H\backslash G$ dès que les boules proviennent d'un système de Hörmander sur le groupe G.

Remarquons que dans le cas où le système de Hörmander engendre l'algèbre de Lie comme espace vectoriel la métrique sous-riemannienne induite sur G est riemannienne, ainsi que celle projetée sur $H\backslash G$. En d'autres termes, dans ce cas, bien que nous n'obtenons pas une estimation du rayon d'injectivité de la variété $H\backslash G$ nous en avons au moins un substitut.

Pour obtenir l'estimation du volume recherchée nous utilisons le théorème de Kunze-Stein. Si l'on examine bien le contre-exemple signalé en c), on comprend que cette estimation est fondamentalement liée au fait que le sous-groupe H est semi-simple et par conséquent il est naturel que le phénomène de Kunze-Stein y joue un rôle.

Une fois que nous disposons de cette estimation du volume nous montrons que les tranformées de Riesz sur l'espace homogène $H\backslash G$ induites par la donnée d'un système de Hörmander sur le groupe G sont bornées dans des espaces L^p, $p > 1$ et vérifient des estimées faibles de type Orlicz dans le cas où $p = 1$.

2. Notations et énoncé des résultats

Soit G un groupe de Lie semi-simple non compact connexe de centre fini et soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé de G qu'on suppose aussi semi-simple connexe non compact de centre fini. On considère l'espace homogène $M = H\backslash G$ des classes à droite de G selon H. On note $\pi : G \to H\backslash G$ la projection canonique de G sur M et si $g \in G$, on convient de noter $\dot{g} = \pi(g)$. On note $\mathrm{d}m(\dot{g})$ la mesure invariante sur M (*cf.* [3]) et on suppose cette mesure normalisée de sorte que

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{H\backslash G}\Big(\int_H f(hg)\,\mathrm{d}h\Big)\,\mathrm{d}m(\dot{g}), \tag{1}$$

pour toute fonction f continue à support compact sur G, $\mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}h$ désignant respectivement des mesures de Haar sur G et sur H.

Soit $\mathcal{X} = \{X_j, j = 1,\dots,k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander (*cf.* [17]) et soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé à ce système. On notera $|\,.\,|_{\mathcal{X}}$ la distance de contrôle sur G associée au système $\mathcal{X}$ et $d(.,.)$ la distance induite par $\mathcal{X}$ sur M (*i.e.* la distance définie par $d(x,y) = \inf\{|x^{-1}hy|_{\mathcal{X}}\,; h \in H\}$). Soit $B(x,1)$ la boule de M centrée sur x et de rayon 1. Le théorème suivant décrit le comportement du volume des boules $B(x,1)$, $x \in M$ (relativement à la mesure $\mathrm{d}m$).

THÉORÈME 1. — *Les notations étant comme plus haut, on a*

$$\inf_{x\in M} \mathrm{Vol}_M\big(B(x,1)\big) > 0.$$

Pour le second résultat on supposera que

$$\lambda = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{k}\int_M \big|\mathrm{d}\pi(X_j)f\big|^2\,\mathrm{d}m(x),\ \int_M \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}m(x) = 1\Big\} > 0, \tag{2}$$

ce qui revient à supposer que l'opérateur $\mathrm{d}\pi\,(\Delta)$ possède un trou spectral dans $L^2(M, \mathrm{d}m)$. En fait, on peut montrer que ceci est toujours le cas, mais la preuve de ce fait est longue et difficile (*cf.* [13]). Observons que Eymard (*cf.* [7]) a prouvé l'existence d'un tel trou spectral dans le cas de l'espace homogène $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\,\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. On a alors :

THÉORÈME 2. — *Les notations étant comme ci-dessus, pour tout $1 \leq j \leq k$ la transformée de Riesz*

$$R_j = \mathrm{d}\pi(X_j)\,\mathrm{d}\pi(\Delta)^{-1/2}$$

est bornée de $L^p(M, \mathrm{d}m)$ dans $L^p(M, \mathrm{d}m)$ pour tout $p > 1$ et vérifie, pour $p = 1$, l'estimation faible

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\{x \in M, |R_j f(x)| > \alpha\} \\ &\qquad \leq \frac{C}{\alpha}\Big[1 + \Big(-\log\Big(\frac{c\alpha}{\|f\|_{L^1(M,\mathrm{d}m)}}\Big)\Big)^{+}\Big]^{1/2} \cdot \|f\|_{L^1(M,\mathrm{d}m)}, \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$, $f \in C_0^\infty(M)$, où $C > 0$, $c > 0$ sont deux constantes convenables.

3. Preuve du théorème 1

Soit $\phi_t(\,.\,)$, $t > 0$, le noyau correspondant au semi-groupe $\mathrm{e}^{-t\Delta}$ engendré par le sous-Laplacien Δ (*cf.* [17]). Si on note $p_t(\dot{x}, \dot{y})$, $t > 0$, $\dot{x}, \dot{y} \in M$ le noyau du semi-groupe $T_t = \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{d}\pi(\Delta)}$, $t > 0$, alors par la formule de désintégration (1), on a :

$$p_t(\dot{x}, \dot{y}) = \int_H \phi_t(x^{-1}hy)\,\mathrm{d}h, \quad \dot{x}, \dot{y} \in M, \tag{3}$$

où x, $y \in G$ sont tels que $\dot{x} = \pi(x)$, $\dot{y} = \pi(y)$. En particulier le noyau $p_t(.\,,.)$ est symétrique et on a aussi :

$$p_t(\dot{x}, \dot{y}) = \int_H \phi_t(y^{-1}hx)\,\mathrm{d}h. \tag{4}$$

Nous allons commencer par estimer

$$p_1(x, x) = \int_H \phi_1(xhx^{-1})\,\mathrm{d}h, \quad x \in M.$$

PROPOSITION 1. — *Les notations étant comme plus haut, on a :*

$$\sup_{x \in M} p_1(x, x) < \infty.$$

Observons que les estimations gaussiennes vérifiées par le noyau $\phi_t(\,.\,)$ sur G (*cf.* [17]) entraînent que pour tout $A > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\phi_1(g) \leq C\mathrm{e}^{-A|g|_X}, \quad g \in G.$$

En particulier, si on désigne par φ_0 la fonction sphérique fondamentale sur G (*cf.* [2]) et on choisit A suffisamment grande, on a :

$$\phi_1(g) \leq C\varphi_0^8(g), \quad g \in G.$$

Observons que la fonction φ_0 appartient à tous les espaces $L^p(G)$ pour tout $p > 2$. En particulier $\varphi_0 \in L^4(G)$ et par conséquent $\varphi_0^2 \in L^2(G)$. D'autre part φ_0^2 étant un coefficient de représentation unitaire continue sur G, $\varphi_0^2 \in B(G)$ l'algèbre de Fourier-Stieltjes du groupe G (*cf.* [6]). Considérons

$$A(G) = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} f_j * g_j \,;\ f_j \in L^2(G),\ g_j \in L^2(G),\ j = 1, \dots, k,\ k \geq 1 \Big\} \subset B(G).$$

Soit $(\psi_j) \subset C_0^\infty(G)$ une approximation de l'identité dans $L^1(G)$. On a $\varphi_0^2 * \psi_j \to \varphi_0^2$ dans $B(G)$. Mais comme $\varphi_0^2 \in L^2(G)$, $\varphi_0^2 * \psi_j \in A(G)$ qui est une partie fermée de B(G) (*cf.* [6]), la fonction φ_0^2 appartient donc à $A(G)$. Il existe par conséquent $f_1, \dots, f_k \in L^2(G)$ et $g_1, \dots, g_k \in L^2(G)$ telle que

$$\varphi_0^2 = \sum_{j=1}^{k} f_j *_G g_j,$$

où nous notons le produit de convolution $*_G$ pour bien mettre en évidence le fait qu'il s'agit d'un produit de convolution dans le groupe G. On a donc :

$$\begin{aligned}
\big[\phi_1(xhx^{-1})\big]^{1/4} &\leq C \sum_{j=1}^{k} f_j *_G g_j(xhx^{-1}) \\
&\leq C \sum_{j=1}^{k} \int_G f_j(z) g_j(z^{-1}xhx^{-1})\,\mathrm{d}z \\
&\leq C \sum_{j=1}^{k} \int_G f_j(xz) g_j(z^{-1}hx^{-1})\,\mathrm{d}z \\
&\leq C \sum_{j=1}^{k} L_x\,(f_j) *_G R_{x^{-1}}\,(g_j)\,(h),
\end{aligned}$$

où pour toute fonction f sur G et pour tout $x \in G$ on désigne par $L_x\,(f)$ (resp. $R_x\,(f)$) la translatée à gauche (resp. à droite) de f par x, *i.e.* $L_x\,(f)\,(g) = f(xg)$, $g \in G$ (resp. $R_x\,(f)\,(g) = f(gx)$, $g \in G$).

On a bien sûr, du fait de l'unimodularité de G, pour tout $x \in G$,

$$\|L_x\,(f_j)\|_{L^2(G)} = \|f_j\|_{L^2(G)}, \quad \|R_x\,(g_j)\|_{L^2(G)} = \|g_j\|_{L^2(G)}. \tag{5}$$

Maintenant (*cf.* [11], appendice), pour tout $x \in G$ et pour tout $1 \leq j \leq k$ on peut trouver deux fonctions F_j^x, $G_j^x \in L^2(H)$ telle que

$$L_x\,(f_j) *_G R_{x^{-1}}\,(g_j)\,_{|H} = F_j^x *_H G_j^x$$

et telle que

$$\|F_j^x\|_{L^2(H)}.\|G_j^x\|_{L^2(H)} \leq \|L_x\,(f_j)\,\|_{L^2(G)}.\|R_{x^{-1}}\,(g_j)\,\|_{L^2(G)}.$$

En particulier (du fait de (5)), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|F_j^x\|_{L^2(H)} \cdot \|G_j^x\|_{L^2(H)} \leq C, \quad x \in G, j = 1, \dots, k. \tag{6}$$

De l'estimation

$$p_1(x,x) = \int_H \phi_1(xhx^{-1})\,\mathrm{d}h \leq C \sum_{k=1}^{n} \int_H \left|F_j^x *_H G_j^x\right|^4(h)\,\mathrm{d}h,$$

on déduit, en utilisant le phénomème de Kunze-Stein dans H (*cf.* [5], [7]) qui entraîne que

$$\|F_j^x *_H G_j^x\|_{L^4(H)} \leq C\|F_j^x\|_{L^2(H)} \cdot \|G_j^x\|_{L^2(H)}\|,$$

et l'estimation (6), qu'il existe $C > 0$ telle que

$$p_1(x,x) \leq C, \quad x \in M.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 1.

Le théorème 1 est un corollaire immédiat de cette proposition. En effet, il suffit d'observer que (*cf.* [18])

$$p_1(x,x) \geq \frac{c}{\mathrm{Vol}_M\,(B(x,1))}, \quad x \in M$$

pour déduire l'estimation inférieure du théorème 1.

4. Preuve du théorème 2

En utilisant le théorème spectral, on peut exprimer la puissance négative $[\mathrm{d}\pi\,(\Delta)]^{-1/2}$ comme transformée de Laplace du semi-groupe $T_t = \exp\left(-t\mathrm{d}\pi(\Delta)\right)$,

$$\left[\mathrm{d}\pi\,(\Delta)\right]^{-1/2} = c\int_0^\infty t^{-1/2}\exp\left(-t\mathrm{d}\pi(\Delta)\right)\mathrm{d}t = c\int_0^\infty t^{-1/2}T_t\,\mathrm{d}t$$

où $c = \Gamma(\frac{1}{2})^{-1}$. On peut alors écrire

$$R_j = \mathrm{d}\pi\,(X_j)\left[\mathrm{d}\pi\,(\Delta)\right]^{-1/2} = c\int_0^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{d}\pi\,(X_j)\,T_t\,\mathrm{d}t = R_0 + R_\infty,$$

avec

$$R_0 = c\int_0^1 t^{-1/2}\,\mathrm{d}\pi\,(X_j)\,T_t\,\mathrm{d}t, \quad R_\infty = c\int_1^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{d}\pi\,(X_j)\,T_t\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons commencer par analyser la partie à l'infini de R_j. À l'opérateur R_∞ correspond le noyau

$$r_\infty(x,y) = c\int_1^\infty t^{-1/2}\left[\mathrm{d}\pi\,(X_j)\right]_x p_t(x,y)\,\mathrm{d}t, \quad x,y\in M.$$

Par le principe de de Harnack parabolique local dans G (cf. [17]) il existe une constante $C>0$ telle que

$$\left|(X_j)_x\,\phi_t(y^{-1}hx)\right| \le C\phi_{t+1}(y^{-1}hx), \quad t\ge 1,\ x,y\in G,\ h\in H.$$

D'où l'on déduit, en intégrant sur H

$$\int_H\left|(X_j)_x\,\phi_t(y^{-1}hx)\right|\mathrm{d}h \le C\int_H \phi_{t+1}(y^{-1}hx)\,\mathrm{d}h, \quad t\ge 1,\ x,y\in G,\ h\in H,$$

et par conséquent (d'après (3))

$$\left|\left[d\pi\,(X_j)\right]_x p_t(x,y)\right| \le Cp_{t+1}(x,y), \quad t\ge 1,\ x,y\in M.$$

On a ainsi

$$\left|r_\infty(x,y)\right| \le C_1\int_1^\infty t^{-1/2}p_{t+1}(x,y)\,\mathrm{d}t \le C_2\int_1^\infty t^{-1/2}p_t(x,y)\,\mathrm{d}t, \quad x,y\in M,$$

et donc

$$|R_\infty(f)|(x) \le C_3 \int_1^\infty t^{-1/2} T_t(|f|)(x)\,\mathrm{d}t, \quad x \in M,\ f \in C_0^\infty(M). \tag{7}$$

Par ailleurs on a

$$\int_M p_t(x,y)\,\mathrm{d}m(y) = 1, \quad x \in M,$$

ce qui entraîne que le semi-groupe $(T_t)_{t\ge 0}$ est contractant sur tous les espaces $L^p(M,\mathrm{d}m)$, $1 \le p \le \infty$. En exploitant (2), *i.e.* l'existence d'un trou spectral, qui donne une estimation en $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ de $\|T_t\|_{L^2(M,\mathrm{d}m)\to L^2(M,\mathrm{d}m)}$ pour $t > 0$, et en interpolant, on déduit que

$$\|T_t\|_{L^p(M,\mathrm{d}m)\to L^p(M,\mathrm{d}m)} \le C_4 \exp\Big(-\frac{2\lambda}{p} t\Big), \quad p > 1,\ t > 0. \tag{8}$$

La bornitude de R_∞ de $L^p(M,\mathrm{d}m)$ dans $L^p(M,\mathrm{d}m)$, pour tout $p > 1$, est une conséquence immédiate de (7) et (8).

Pour pouvoir exploiter l'hypohèse (2) au niveau $p = 1$ nous allons nous appuyer sur la proposition 1. D'une manière plus précise, en utilisant la symétrie du noyau $p_t(.,.)$ et la propriété de semi-groupe on peut écrire, pour tout $t > 1$,

$$\begin{aligned}
\sup_{x,y\in M}\big[p_t(x,y)\big] &= \|T_t\|_{L^1(M,\mathrm{d}m)\to L^\infty(M,\mathrm{d}m)} \\
&\le \|T_{1/2}\|_{1\to 2}^2 \cdot \|T_{t-1}\|_{2\to 2} \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda(t-1)} \sup_{x\in M}\Big[\int_M p_{1/2}^2(x,y)dm(y)\Big] \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda(t-1)} \sup_{x\in M}\big[p_1(x,x)\big] \\
&\le C\mathrm{e}^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

en vertu de la proposition 1.

Fixons maintenant $0 \le f \in C_0^\infty(M)$ et $\alpha > 0$ et estimons $\operatorname{mes}\{|R_\infty f| > \alpha\}$ (pour la mesure $\mathrm{d}m$). Écrivons

$$\int_1^\infty t^{-1/2} T_t f(x)\,\mathrm{d}t = \int_1^T t^{-1/2} T_t f(x)\,\mathrm{d}t + \int_T^\infty t^{-1/2} T_t f(x)\,\mathrm{d}t,$$

(le paramètre $T > 0$ sera choisi ultérieurement). On a alors (pour une constante $C > 0$ convenable) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\{|R_\infty f| > \alpha\} \le \operatorname{mes}&\Big\{C\int_1^T t^{-1/2} T_t f\,\mathrm{d}t > \tfrac12\alpha\Big\} \\
&+ \operatorname{mes}\Big\{C\int_T^\infty t^{-1/2} T_t f\,\mathrm{d}t > \tfrac12\alpha\Big\}.
\end{aligned}$$

Par l'estimation de $\|T_t\|_{L^1(M,\mathrm{d}m)\to L^\infty(M,\mathrm{d}m)}$ obtenue ci-dessus, il existe une constante C' telle que

$$\int_T^\infty t^{-1/2}T_tf(x)\,\mathrm{d}t \le C'\exp\big(-\tfrac{1}{2}\lambda T\big)\|f\|_1.$$

Supposons que α est tel que $CC'\|f\|_1 < \frac{1}{4}\alpha$. Alors, pour tout $T\ge 1$,

$$\operatorname{mes}\Big\{C\int_T^\infty t^{-1/2}T_tf\,\mathrm{d}t > \tfrac{1}{2}\alpha\Big\} = 0$$

et en choisissant $T=1$, on déduit que

$$\operatorname{mes}\big\{|R_\infty f| > \alpha\big\} = 0.$$

On va donc supposer que

$$\alpha \le 4CC'\|f\|_1.$$

On choisit alors T de sorte que

$$CC'\exp\Big(-\frac{1}{2}\lambda T\Big)\|f\|_1 = \frac{1}{4}\alpha$$

i.e.

$$T = -a\log\Big(\frac{\alpha}{b\|f\|_1}\Big)$$

où $a = 2/\lambda$ et $b = 4CC'$, ce qui entraîne que

$$\operatorname{mes}\Big\{C\int_T^\infty t^{-1/2}T_tf\,\mathrm{d}t > \frac{1}{2}\alpha\Big\} = 0$$

et donc

$$\operatorname{mes}\big\{|R_\infty f| > \alpha\big\} \le \operatorname{mes}\Big\{C\int_1^T t^{-1/2}T_tf\,\mathrm{d}t > \frac{1}{2}\alpha\Big\}.$$

Comme le semi-groupe $(T_t)_{t\ge 0}$ est contractant sur $L^1(M,\mathrm{d}m)$, on a

$$\Big\|\int_1^T t^{-1/2}T_tf\,\mathrm{d}t\Big\|_1 \le 2T^{1/2}\|f\|_1.$$

D'où

$$\operatorname{mes}\big\{|R_\infty f| > \alpha\big\} \le \frac{4C}{\alpha}T^{1/2}\|f\|_1 \le 4C\Big[-a\log\Big(\frac{\alpha}{b\|f\|_1}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

dès que $b\|f\|_1 \geq \alpha$. On a par conséquent

$$\operatorname{mes}\{|R_\infty f| > \alpha\} \leq C\Big[-\log\Big(\frac{c\alpha}{\|f\|_1}\Big)^+\Big]^{\frac{1}{2}} \frac{\|f\|_1}{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

où $C > 0$, $c > 0$ sont deux constantes convenables.

Par ailleurs il est facile de montrer par des arguments standards (*cf.* [9], [12], [15]) que l'opérateur R_0 est borné de $L^p(M, \mathrm{d}m) \to L^p(M, \mathrm{d}m)$, pour tout $p > 1$ et de type faible 1-1. Il suffit pour cela d'écrire par exemple

$$R_0 = R_0 - R_0^\lambda + R_0^\lambda$$

où $R_0^\lambda = c\int_0^1 t^{-1/2}\,\mathrm{d}\pi\,(X_j)\exp\big(-t(\lambda I + \mathrm{d}\pi(\Delta))\big)\,\mathrm{d}t$ et où λ est choisi suffisamment grand pour assurer une décroissance exponentielle à l'infini du noyau de R_0^λ. Le théorème permet de construire un recouvrement uniformément localement fini de M et d'utiliser les résultats de [17] qui permettent de traiter la partie locale de R_0^λ. Enfin

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\pi(X_j)\big((\exp -(t\mathrm{d}\pi(\Delta)) - \exp\,(-t(\mathrm{d}\pi(\Delta) + I))\big)&\\ = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})\,\mathrm{d}\pi(X_j)\exp\big(-t\mathrm{d}\pi(\Delta)\big) &\sim tX_j \exp\big(-t\mathrm{d}\pi(\Delta)\big)\end{aligned}$$

(dans le sens où les noyaux sont équivalents). Or par le théorème V.4.2. de [17], il existe $C > 0$ et $c > 0$ telles que

$$\big|X_j\phi_t(g)\big| \leq Ct^{-1/2}p_{ct}(g), \quad \forall g \in G,\ \forall\, 0 < t < 1,$$

ce qui entraîne, en intégrant sur H

$$\big|\big[d\pi(X_j)\big]_x p_t(x,y)\big| \leq Ct^{-1/2}p_{ct}(x,y), \quad \forall x, y \in M,\ \forall\, 0 < t < 1.$$

D'où l'on déduit que le noyau de $R_0 - R_0^\lambda$ est dans $L^1(M, \mathrm{d}m)$. Ce qui achève la preuve du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXOPOULOS (G.). — *An application of homogenization theory to harmonic analysis : Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups of polynomial growth*, Can. J. Math., t. **44**, 1992, p. 691–727.

[2] ANKER (J.-Ph.). — *La forme exacte de l'estimation fondamentale de Harish-Chandra*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, t. **305**, 1987, p. 371–374.

[3] BOURBAKI (N.). — *Éléments de mathématiques, livre VI, Intégration.* — Hermann, 1963.

[4] COIFMAN (R.R.), WEISS (G.). — *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lectures Notes in Math. 242, Springer-Verlag, 1971.

[5] COWLING (M.). — *The Kunze-Stein phenomenon*, Ann. Math., t. **107**, 1978, p. 209–234.

[6] EYMARD (P.). — *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France, t. **92**, 1964, p. 181–236.

[7] EYMARD (P.). — *Moyennes invariantes et représentations unitaires*, Lecture Notes in Math. 300, Springer-Verlag, 1972.

[8] LOHOUÉ (N.). — *Sur les représentations uniformément bornées et le théorème de convolution de Kunze-Stein*, Osaka J. Math., t. **18**, 1981, p. 465–480.

[9] LOHOUÉ (N.). — *Comparaison des champs de vecteurs et des puissances de Laplacien sur une variété à courbure non positive*, J. Funct. Anal., t. **61**, 1985, p. 164–201.

[10] LOHOUÉ (N.). — *Transformées de Riesz et fonctions de Littelwood Paley sur les groupes non moyennables*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, t. **306**, 1988, p. 327–330.

[11] LOHOUÉ (N.). — *Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution*, Advances in Math., t. **38**, 1980, p. 178–221.

[12] LOHOUÉ (N.). — *Transformées de Riesz et fonctions sommables*, Amer. J. Maths., t. **114**, 4, 1992, p. 327–330.

[13] LOHOUÉ (N.). — *Analyse sur les espaces homogènes des groupes non moyennables*, à paraître.

[14] LOHOUÉ (N.), MUSTAPHA (S.). — *Sur les transformées de Riesz sur les groupes de Lie moyennables et sur certains espaces homogènes*, Can. J. Math., à paraître.

[15] ROBINSON (D.W.). — *Elliptic Operators and Lie Groups.* — Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991.

[16] SALOFF-COSTE (L.). — *Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynomiale*, Ark. Math., t. **28**, 1990, p. 315–331.

[17] VAROPOULOS (N.Th.), SALOFF-COSTE (L.), COULHON (Th.). — *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Tracts in Math., t. **100**, 1993.

[18] VAROPOULOS (N.Th.). — *Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels* (I), The semi-group technique, Bull. Sci. Math., série II, t. **113**, 1989, p. 253- 277.