

BULLETIN DE LA S. M. F.

PETER HAÏSSINSKY

Chirurgie croisée

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 4 (2000), p. 599-654

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_4_599_0

© Bulletin de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CHIRURGIE CROISÉE

PAR PETER HAÏSSINSKY (*)

RÉSUMÉ. — Cet article est consacré à l'étude du *croisement de polynômes* : il s'agit d'une chirurgie qui combine la dynamique de plusieurs polynômes en un seul. On en donne une définition précise et on étudie ses propriétés géométriques et topologiques. On montre d'abord l'existence de tels polynômes dans de nombreux cas par chirurgie. Pour ces cas, on montre que la construction conduit à un unique polynôme à conjugaison affine près. On étudie ensuite ses propriétés topologiques via un modèle (conjugué au croisement lorsque celui-ci existe). On s'intéresse aussi au problème inverse : comment reconnaît-on qu'un polynôme est un croisement ? Enfin, en utilisant la théorie de Mañé-Sad-Sullivan, on peut montrer, avec quelques hypothèses supplémentaires, que le croisement dépend continûment des polynômes croisés. Ces résultats sont appliqués à la famille cubique. En appendice, une version faible d'applications à allure polynomiale est étudiée.

ABSTRACT. — INTERTWINING SURGERY. — This paper deals with *intertwining* (see [Bi]): this is a surgery which combines the dynamics of different complex polynomials into a single one of larger degree. We give a precise definition of it and study its geometric and topological properties. We first prove its existence in many cases by surgery. For these cases, it is proved that the definition yields a unique map up to conformal conjugacy. We then study its topological properties through a topological model (conjugate to its conformal counterpart if it exists). Afterwards, we provide a partial answer to when a polynomial can be reduced to the intertwining of polynomials. We are also capable, using Mañé-Sad-Sullivan theory, to show that intertwining depends continuously from the former polynomials, with some extra assumptions. As an application, we study the degree three connectedness locus, and especially the family having a fixed critical point. In the appendix we study a loose definition of polynomial-like mappings which involves non-quasiconformal maps.

Introduction

Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique centré de degré $d \geq 2$. On note

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C}; P^n(z) \not\rightarrow \infty\}$$

son *ensemble de Julia rempli* qui est compact plein et totalement invariant. Dans la suite, les ensembles de Julia seront toujours considérés connexes lorsque

(*) Texte reçu le 15 octobre 1998, révisé le 18 janvier 2000, accepté le 23 mars 2000.

P. HAÏSSINSKY, Université de Berne, Mathematisches Institut, Sidlerstrasse, 5 CH-3012 Berne (Suisse). Email : phaissin@math-stat.unibe.ch

Mots clés : dynamique conforme, chirurgie, applications quasiconformes et μ -conformes.

Classification mathématique par matières : 37 Fxx.

le contraire ne sera pas explicitement écrit. Pour des références sur l'itération des polynômes et des fractions rationnelles, on peut se reporter à [CG], [DH1] et [Mi]. On suppose en particulier connues les notions de *coordonnées de Böttcher*, *rayons externes* et *d'équipotentiels*.

Si α est un point fixe répulsif ou parabolique de P , on définit son *nombre de rotation combinatoire* comme suit. D'après le théorème d'aboutissement des rayons externes de A. Douady (voir [Mi], [Pe]), α est le point d'aboutissement d'un nombre fini de rayons. Le polynôme agit par permutation sur ces rayons. Soient t_i , avec $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, les arguments d'un cycle de ces rayons classés dans l'ordre cyclique; P respecte cet ordre et agit comme une rotation sur les indices : le *nombre de rotation combinatoire* p/q est le nombre de rotation de cette action.

Soient deux polynômes P et Q de degrés d_P et $d_Q \geq 2$ respectivement, ayant chacun un point fixe α_P et α_Q ; on se propose de fabriquer par chirurgie un polynôme

$$R = P \times Q$$

de degré $d = d_P + d_Q - 1$, tel que son ensemble de Julia soit un *croisement* de ceux de P et Q .

EXEMPLE.

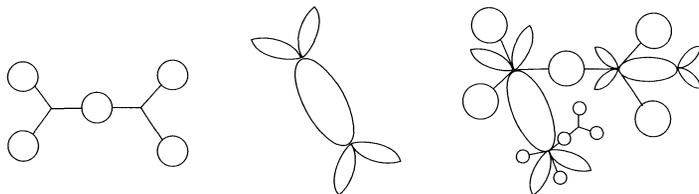


Figure 1. Les ensembles $K(P)$, $K(Q)$ et $K(P \times Q)$.

DÉFINITION. — Un polynôme P ayant un ensemble de Julia connexe *figure de manière rigide* dans une fraction rationnelle f (voir appendice A) s'il existe une application $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un voisinage de $K(P)$, continue et injective, telle que :

- φ et son inverse préservent les ensembles de mesure nulle;
- $\varphi \in W^{1,p}(U)$ pour $p > 1$;
- $\bar{\partial}\varphi = 0$ pp. sur $K(P)$;
- $\varphi \circ P = f \circ \varphi$ sur $K(P)$.

REMARQUE. — Habituellement, on demande à ce que φ soit quasiconforme ce qui n'est pas le cas ici. Lorsque ce sera vrai, on parlera de *figuration quasiconforme*. D'autre part, la notion de figuration simple apparaît dans [Do1].

DÉFINITION. — Un polynôme (R, α) réalise le *croisement* de (P, α_P) et (Q, α_Q) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(C₁) $\left\{ \begin{array}{l} \text{les polynômes } P \text{ et } Q \text{ figurent de manière rigide dans } R \text{ par} \\ \varphi_P \text{ et } \varphi_Q \text{ respectivement ;} \end{array} \right.$

(C₂) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_P(K(P)) \cap \varphi_Q(K(Q)) = \{\alpha\}, \\ \varphi_P(\alpha_P) = \varphi_Q(\alpha_Q) = \alpha, \\ \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q)) \text{ est homéomorphe à} \\ \qquad \qquad \qquad K(P) \cup K(Q)/\alpha_P \sim \alpha_Q; \end{array} \right.$

(C₃) les degrés sont reliés par la formule $d_R = d_P + d_Q - 1$.

Le premier résultat est un théorème d'existence :

THÉORÈME 1.

(i) *Si α_P et α_Q sont répulsifs et ont même nombre de rotation, alors il existe un polynôme (R, α) qui réalise le croisement de P et Q , et les figurations sont quasiconformes.*

(ii) *Si α_Q est répulsif sans appartenir à l'ensemble ω -limite d'un point critique de Q , si α_P est parabolique et qu'ils ont même nombre de rotation, alors leur croisement est réalisable.*

(iii) *Le croisement de polynômes géométriquement finis est toujours réalisable en des points fixes ayant même nombre de rotation.*

Un polynôme est *géométriquement fini* si son ensemble postcritique est fini sur son ensemble de Julia.

La preuve de ce théorème utilise de façon essentielle la méthode des secteurs initiée par B. Branner et A. Douady dans [BD], tout en remarquant que l'on dispose de plus de souplesse en travaillant sur des applications à allure polynomiale (voir [DH2]).

Le croisement est bien compris lorsqu'il se situe en un point répulsif; lorsqu'il est parabolique, les outils sont moins développés, bien que la plupart des résultats obtenus dans le cas répulsif restent sans doute valables. Pour établir les points (ii) et (iii), on utilise le théorème de chirurgie parabolique (théorème 3.2 et [Ha2]).

À partir de la définition des croisements, on montre que les points fixes α , α_P et α_Q ont tous même nombre de rotation p/q et qu'on peut associer un *invariant combinatoire* κ au croisement R . Cet invariant caractérise R dans de nombreux cas :

THÉORÈME 2. — *On suppose l'une des trois conditions du théorème 1 satisfaite. Le croisement de deux polynômes est unique, à combinatoire fixée et à conjugaison affine près.*

La difficulté du cas général provient de la faible régularité des figurations. On verra au chapitre II une condition suffisante sur la figuration pour avoir l'unicité du croisement.

Étant donné que les théorèmes 1 et 2 ne s'appliquent pas à tous les croisements, on généralise la notion de croisement en construisant un modèle topologique du croisement de deux polynômes complexes. Cette construction est calquée sur celle d'un ensemble de Julia d'un polynôme sous-hyperbolique à partir de son arbre de Hubbard (voir [DH1]).

Les hypothèses faites sur P et Q en introduction de la définition d'un croisement sont maintenues dans la suite.

DÉFINITION. — Un revêtement ramifié $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est un *polynôme topologique* si $f^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$.

DÉFINITION. — Soient $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ un polynôme topologique de degré $d \geq 3$, et α un point fixe de f ; on dit que (f, α) réalise un *croisement topologique* de (P, α_P) et (Q, α_Q) si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (CT₁) $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe deux applications continues } \varphi_P : U_P \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } \varphi_Q : \\ U_Q \rightarrow \mathbb{C}, \text{ injectives sur } K(P) \text{ et } K(Q) \text{ respectivement et qui} \\ \text{conjuguent } P \text{ à } f \text{ sur } K(P) \text{ et } Q \text{ sur } K(Q) \text{ respectivement;} \end{array} \right.$
- (CT₂) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_P(K(P)) \cap \varphi_Q(K(Q)) = \{\alpha\} \text{ et le noyau } N_f = \varphi_P(K(P)) \cup \\ \varphi_Q(K(Q)) \text{ est homéomorphe à } K(P) \cup K(Q) / \alpha_P \sim \alpha_Q; \end{array} \right.$
- (CT₃) les degrés sont reliés par la formule $d_f = d_P + d_Q - 1$;
- (CT₄) $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble } K(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(N_f)} \text{ est un compact plein de} \\ \mathbb{C} \text{ et } \overline{\mathbb{C}} \setminus K(f) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}; f^n(z) \rightarrow \infty\}; \end{array} \right.$
- (CT₅) $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une suite } (\eta_n)_{n \geq 0} \text{ de nombres positifs tendant vers} \\ \text{zéro telle que } \text{diam } L \leq \eta_n \text{ pour toute composante } L \text{ de} \\ K(f) \setminus f^{-n}(N_f). \end{array} \right.$

REMARQUE. — En cas de confusion, on parlera de *croisement holomorphe* pour le distinguer du croisement topologique.

On établit alors le :

THÉORÈME 3.

(i) *Le croisement topologique de deux polynômes complexes est toujours réalisable dès qu'il est effectué en des points fixes de même nombre de rotation.*

(ii) *Si (R, α) (resp. (f, α)) est un croisement holomorphe (resp. topologique) de deux polynômes (P, α_P) et (Q, α_Q) , alors R et f sont topologiquement conjugués.*

(iii) *Le croisement topologique de deux polynômes complexes est unique à combinatoire fixée et à conjugaison topologique près sur $K(f)$.*

Un corollaire des deux premiers points sera :

COROLLAIRE 4. — *Soit $R = P_1 \times P_2$. Alors $K(R)$ est localement connexe si et seulement si $K(P_1)$ et $K(P_2)$ le sont.*

Inversement, soit R un polynôme de degré $d \geq 3$ dont l'ensemble de Julia est connexe et qui possède un point fixe avec plusieurs cycles de rayons qui aboutissent à α . On cherche à reconnaître si R réalise le croisement de polynômes complexes. On fabrique une suite emboîtée de partitions de $K(R)$, dont le but est d'isoler différentes dynamiques de R . Ces partitions jouent le même rôle que les puzzles de Branner-Hubbard-Yoccoz (voir [BH], [Hu]). Ceci nous permet de repérer les croisements :

THÉORÈME 5.

(i) *Si R réalise un croisement, alors il existe plusieurs cycles de rayons aboutissant à α et tous les points critiques se trouvent dans un domaine du plan défini algorithmiquement (voir la prop. 14.1 pour un énoncé précis).*

(ii) *Si α est répulsif, la condition (i) est nécessaire et suffisante.*

On considère une famille analytique $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de polynômes ayant un point fixe répulsif de nombre de rotation fixé. Supposons que Λ soit de dimension complexe 1. On effectue leur croisement avec un polynôme fixe Q et on étudie la dépendance des croisements obtenus par rapport aux paramètres, dans l'espace $\text{Pol}_d(\mathbb{C})/\text{Aut}(\mathbb{C})$ des polynômes de degré fixé à automorphisme du plan près.

THÉORÈME 6. — *L'opération de croisement est continue si, pour chaque polynôme P_λ , ses déformations quasiconformes se trouvent dans Λ , et si les croisements se font sur des points répulsifs.*

REMARQUE. — Les phénomènes d'implosions paraboliques qui ont été étudiés par P. Lavaurs dans sa thèse excluent, en général, une dépendance continue lorsque le croisement se fait en un point parabolique et qu'on a plusieurs paramètres. En particulier, A. Epstein et M. Yampolsky [EY] montrent, en exploitant ces discontinuités et en utilisant les croisements, que le lieu de connexité des polynômes cubiques réels n'est pas localement connexe.

La théorie des applications quasiconformes est utilisée dans une fraction importante de cet article. Nous renvoyons le lecteur au livre [Ah] pour leurs définitions et propriétés.

Cet article est organisé en cinq chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à la démonstration du théorème 1, et quelques propriétés des croisements sont établies.
- Dans le chapitre II, on démontre que les croisements sont essentiellement uniques (théorème 2).
- Dans le chapitre III, on définit le croisement topologique de deux polynômes et on montre le théorème 3. On en déduit le corollaire 4.
- Le chapitre IV est consacré au problème inverse : quand est-ce qu'un polynôme est un croisement ? Et montre le théorème 5.
- Le dernier chapitre traite de la dépendance des croisements par rapport à des paramètres et établit le théorème 6.
- En appendice sont donnés des résultats liés à la figuration rigide et aux extensions quasiconformes d'applications conformes. On rappelle aussi la définition de l'espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle (voir [McS]).

NOTES. — Cet article est tiré de ma thèse de doctorat [Hal]. Ce travail a été effectué à l'UMPA, École nationale supérieure de Lyon. Les croisements répulsifs dans le cas quadratique ont été étudiés indépendamment par A. Epstein et M. Yampolsky dans [EY].

REMERCIEMENTS. — J'aimerais remercier A. Douady pour m'avoir présenté le sujet, ainsi que Tan L., P. Roesch pour leurs encouragements et les discussions fructueuses que j'ai eues avec elles. Mes sincères remerciements vont aussi à M. Flexor qui a lu et relu avec beaucoup de patience mes manuscrits successifs afin de rendre lisible ce travail. C. Petersen et M. Shishikura ont rapporté ma thèse de doctorat : je leur suis très reconnaissant pour toutes les remarques et commentaires qui ont amélioré cette exposition. Enfin, *last, but not least*, je remercie le rapporteur pour ses commentaires et ses conseils.

I. Croisement de polynômes par chirurgie

Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

- Dans la section 1, on passe en revue les outils utiles à notre chirurgie.
- La section suivante traite le cas des croisements en des points répulsifs, ce qui démontre la partie (i) du théorème 1.
- La partie (ii) du théorème 1 est démontré dans la section 3.
- La section 4 est consacrée au point (iii).

• Enfin, on établit quelques propriétés immédiates des croisements en fonction des polynômes croisés. On cite aussi des généralisations immédiates de cette construction.

1. Outils.

Dans ce paragraphe, nous développons les outils dynamiques dont nous aurons besoin pour effectuer notre construction.

1.1. Applications à allure polynomiale.

Ces objets rendent compte de dynamiques locales semblables à celles de polynômes globalement définis, au voisinage de leur ensemble de Julia rempli. La chirurgie que nous voulons effectuer, bien que concernant des polynômes, est plus naturelle dans le contexte des applications à allure polynomiale.

Dans [DH2], les auteurs introduisent la notion d'*application à allure polynomiale* : il s'agit d'un triplet (U', U, f) tel que $U' \subset\subset U$ soient des ouverts simplement connexes et $f : U' \rightarrow U$ soit holomorphe, propre, de degré $d \geq 2$. On note

$$K(f) = \bigcap f^{-n}(U')$$

son *ensemble de Julia rempli*. Le résultat fondamental sur ces objets est le suivant :

THÉORÈME 1.1 (de redressement, voir [DH2]). — *Toute application à allure polynomiale f est hybridement équivalente à un polynôme P de même degré, i.e. il existe une application quasiconforme φ — un redressement — telle que $P \circ \varphi = \varphi \circ f$ au voisinage de leurs ensembles de Julia et telle que $\bar{\partial}\varphi = 0$ pp. sur $K(f)$. Si $K(f)$ est connexe, alors P est unique à conjugaison affine près.*

Dans la suite, on associera à chaque application à allure polynomiale un système de *rayons* et d'*équipotentiels* dans U via un redressement fixé une fois pour toute.

1.2. Secteurs invariants et modules d'ouverture.

Ces secteurs jouent un rôle primordial pour le type de chirurgie qui nous concerne (cf. [BD], [BF], [EY]).

Secteurs invariants pour un germe répulsif. — Soit h une fonction holomorphe au voisinage de zéro, qui vérifie

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \lambda \quad \text{avec} \quad |\lambda| > 1.$$

Dans un voisinage de 0 ouvert simplement connexe Δ , il existe une coordonnée linéarisante, i.e. un isomorphisme

$$\xi : \Delta \longrightarrow \xi(\Delta) \subset \mathbb{C}$$

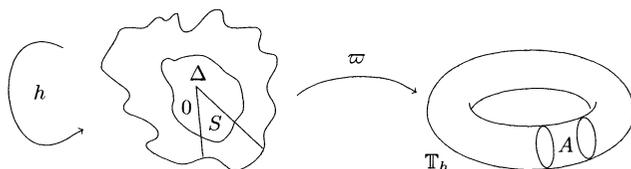


Figure 2. Tore associé à un germe répulsif

tel que $\xi \circ h(z) = \lambda \cdot \xi(z)$, pour $z \in h^{-1}(\Delta) \cap \Delta$. On note

$$\mathbb{T}_h = (\Delta \setminus \{0\}) / (h)$$

le tore associé isomorphe au tore $\mathbb{C} / (\mathbb{Z} \log \lambda \oplus 2i\pi\mathbb{Z})$. On définit la projection canonique

$$\varpi : \Delta \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{T}_h.$$

Tout anneau $A \subset \mathbb{T}_h$ tel que $S := \varpi^{-1}(A)$ est connexe définit un secteur h -invariant (Fig. 2). Le module de A est aussi appelé *le module d'ouverture* de S .

Secteurs associés à un polynôme. — On suppose maintenant que h est un polynôme de degré d d'ensemble de Julia rempli $K(h)$ connexe et que α est un point k -répulsif pour h . On note $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_\nu < 1$, un cycle de rayons externes qui aboutissent à α .

Soient

$$\varphi : \mathbb{C} \setminus K(h) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

la coordonnée de Böttcher de $K(h)$, et

$$\psi = \log \circ \varphi : \mathbb{C} \setminus K(h) \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

L'application ψ conjugue h à $z \mapsto dz$. Pour $a > 0$, on pose

$$\tilde{S}_a(\theta) = \{(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times 2\pi\mathbb{R}; |t - \theta| < as\} \quad \text{et} \quad S_a(\theta) = \psi^{-1}(\tilde{S}_a(\theta)).$$

On dit que $S_a(\theta)$ est le secteur centré en $\mathcal{R}(\theta)$ aboutissant à $\gamma(\theta) \in \partial K(h)$.

REMARQUE. — Si α est parabolique, on obtient aussi un secteur invariant dont le quotient se trouve dans un cylindre répulsif isomorphe à \mathbb{C}/\mathbb{Z} . De plus, en vue de la chirurgie et du lemme 1.3 ci-dessous, il est préférable de travailler avec la coordonnée de Böttcher plutôt qu'avec la coordonnée linéarisante.

LEMME 1.2. — *Pour tout $a > 0$, les secteurs $S_a(t_i)$ définissent des secteurs $f^{k\nu}$ -invariants de même module.*

Démonstration. — Comme $k\nu t_i = t_i \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$, on en déduit

$$\tilde{S}_a(t_i) = \tilde{S}_a(k\nu t_i) \pmod{2i\pi\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad h^{k\nu}(S_a(t_i)) = S_a(t_i).$$

De plus, les modules sont identiques puisque les anneaux quotients se correspondent par des applications conformes. \square

Si $\alpha' \in h^{-n}(\{\alpha\})$, on définit des secteurs invariants au voisinage de α' de la manière suivante : le polynôme h^n agit localement comme $z \mapsto \alpha + (z - \alpha')^\delta$, où $\delta \geq 1$ est un entier. On peut donc relever le germe de point fixe $h^{k\nu}$ défini au voisinage de α au voisinage de α' en une application

$$\tilde{h} = h^{-n} \circ h^{k\nu} \circ h^n.$$

Le point α' est un point fixe de \tilde{h} de même nature que α . Par suite, on peut définir des secteurs \tilde{h} -invariants. En particulier, si S est un secteur invariant, alors une composante de $h^{-n}(S)$ issu de α' est un secteur \tilde{h} -invariant de même module d'ouverture.

Soit $s_0 > 0$; on considère les secteurs $S_a(t_i)$ tronqués à l'équipotentielle s_0 . Par abus de notation, on ne changera par leur nom.

LEMME 1.3 (secteurs disjoints). — *Pour tout $s_0 > 0$ (resp. $a > 0$), si $a > 0$ est assez petit (resp. si $s_0 > 0$ est assez petit) alors tous les secteurs invariants tronqués $S_a(t_i)$, ainsi que leurs préimages sont disjoints deux à deux.*

Une démonstration de ce lemme se trouve dans [BF, prop. 4.1].

Secteurs associés à une application à allure polynomiale. — Si h est une application à allure polynomiale alors il existe une équivalence hybride φ entre h et un polynôme P . On définit alors des secteurs en ramenant par φ ceux de P . En particulier, si les secteurs de P sont donnés par le lemme 1.3, alors ceux de h seront disjoints deux à deux. Quitte à les réduire, on pourra supposer qu'ils sont à bord lisse.

Dans la suite, les secteurs considérés seront construits de cette manière.

2. Chirurgie croisée : cas répulsif.

L'exposition qui suit est un peu abrupte; pour plus de détails, on peut se reporter à [EY, §§ 4–5], où cette construction est effectuée dans le cas quadratique.

On se donne $(U'_f \xrightarrow{f} U_f)$ et $(U'_g \xrightarrow{g} U_g)$ deux applications à allure polynomiale de degrés $d_f \geq 2$ et $d_g \geq 2$ respectivement, ayant leurs ensembles de Julia connexes. On suppose que f (resp. g) possède un point fixe répulsif α_f (resp. α_g) de nombre de rotation p/q . On considère un cycle de rayons $\mathcal{R}_f(t_i)$ (resp. $\mathcal{R}_g(t'_i)$), avec $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, classés dans l'ordre cyclique et qui aboutissent à α_f (resp. α_g). On lui associe un système de secteurs $S_f(t_i)$ (resp. $S_g(t'_i)$) donné par le lemme 1.3.

Nous allons procéder au croisement de f et g en $\alpha_f \sim \alpha_g$. Les étapes sont les suivantes :

- on construit une nouvelle surface de Riemann V à partir de U_f et U_g , le *croisement des disques* U_f et U_g ;
- on définit une nouvelle application holomorphe $F : V'' \rightarrow V$ qui n'est pas à allure polynomiale où $V'' \subset V$;
- on établit une condition suffisante pour la prolonger en une application quasi-régulière de type polynomiale ;
- on montre comment satisfaire cette condition ;
- à l'aide du théorème d'intégration des structures presque-complexes de Morrey-Bojarski-Ahlfors-Bers, cette application est quasiconformément conjuguée à une vraie application à allure polynomiale ;
- la construction s'achève par le théorème 1.1.

Croisement de disques. — On éclate les rayons $\mathcal{R}_f(t_i)$ (resp. $\mathcal{R}_g(t'_i)$) en deux rayons $\mathcal{R}_f^\pm(t_i)$ (resp. $\mathcal{R}_g^\pm(t'_i)$) en utilisant des racines carrés.

L'application $z \mapsto z(\log d_g)/(\log d_f)$ conjugue la translation $z \mapsto z + q \log d_f$ à $z \mapsto z + q \log d_g$. On définit ainsi une application

$$\gamma_1^+ : \mathcal{R}_f^+(t_1) \longrightarrow \mathcal{R}_g^-(t'_1)$$

(resp. $\gamma_1^- : \mathcal{R}_f^-(t_2) \rightarrow \mathcal{R}_g^+(t'_1)$) qui conjugue f^q à g^q , car $f^q : \mathcal{R}_f(t_i) \rightarrow \mathcal{R}_f(t_i)$ (resp. $g^q : \mathcal{R}_g(t'_i) \rightarrow \mathcal{R}_g(t'_i)$) multiplie les potentiels par d_f^q (resp. d_g^q). En la composant par f et g , on définit aussi des applications

$$\gamma_i^+ : \mathcal{R}_f^+(t_i) \longrightarrow \mathcal{R}_g^-(t'_i)$$

(resp. $\gamma_i^- : \mathcal{R}_f^-(t_{i+1}) \rightarrow \mathcal{R}_g^+(t'_i)^+$).

On considère l'espace topologique V obtenu à partir de

$$U_f - \left(\bigcup_i \mathcal{R}_f(t_i)\right) \quad \text{et} \quad U_g - \left(\bigcup_i \mathcal{R}_g(t'_i)\right)$$

en les recollant à l'aide des γ_i^\pm , qui définit le *croisement* de U_f et U_g . Comme les recollements s'effectuent le long de quasi-arcs par des applications quasisymétriques, on obtient ainsi une structure de surface de Riemann sur V induite par celles de U_f et U_g . On note $V' \subset V$ l'ouvert obtenu en recollant U'_f à U'_g .

Croisement partiel de f et g . — On note S'_f (resp. S'_g) la réunion des composantes de $f^{-1}(\bigcup_i S_f(t_i))$ (resp. $g^{-1}(\bigcup_i S_g(t'_i))$) disjointes de $\bigcup_i S_f(t_i)$ (resp. $\bigcup_i S_g(t'_i)$).

Soit $F : V'' = V' - (S'_f \cup S'_g) \rightarrow V$ défini de la façon suivante :

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U'_f \setminus S'_f, \\ g(z) & \text{si } z \in U'_g \setminus S'_g. \end{cases}$$

Cette application est bien définie et même holomorphe sur son ensemble de définition. Les points α_f et α_g sont identifiés dans V en un point α ; celui-ci est un point fixe répulsif de F de nombre de rotation p/q .

Prolongement à V' (première partie). — Soit S' une composante de S'_f issue d'un point α' . L'image de $\partial S'$ par F est bien définie et borde un secteur S F -invariant issu du point répulsif α et contenant une composante connexe de $K_g - \{\alpha_g\}$. On le coupe en trois secteurs invariants S_-, S_+ et Ξ tels que Ξ contienne K_g (Fig. 3).

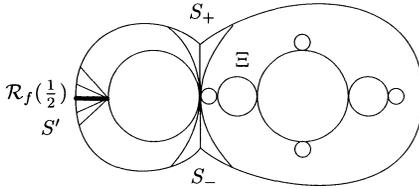


Figure 3. Extension sur des secteurs

La proposition suivante est la clef de voûte de cette construction (voir [BD]) :

PROPOSITION 2.1. — Si $\text{mod}(S') > \text{mod}(\Xi)$ alors il existe

$$F_1 : V'_1 = (V'' \cup S') \rightarrow V$$

quasirégulière telle que $F_1|_{V''} = F$ et F_1 est holomorphe sur $F_1^{-1}(\Xi) \cap S'$.

Démonstration. — Soit $\tilde{\xi} : S' \rightarrow \tilde{\xi}(S')$ la coordonnée log-Böttcher de \tilde{f} au voisinage de α' conjugant \tilde{f} à $z \mapsto qd_f \cdot z$. Cette application induit un isomorphisme entre $S'/(\tilde{f})$ et un cylindre droit A de module égal à $\text{mod } S'$. On note B le sous-anneau droit de A de module $\text{mod}(\Xi)$ centré sur l'équateur de A , qui induit deux sous-anneaux B_- et B_+ tels que $A = B_- \cup B \cup B_+$ (Fig. 4). Soient

$$\bar{\psi} : B \xrightarrow{\sim} \Xi/(F^q)$$

un isomorphisme conforme, et

$$\bar{\psi}_\pm : B_\pm \xrightarrow{\sim} S_\pm/(F^q)$$

des applications quasiconformes telles que $\bar{\psi}_\pm|_{\partial B} = \bar{\psi}|_{\partial B}$ et $\bar{\psi}_\pm = F^q$ sur les composantes du bord de A .

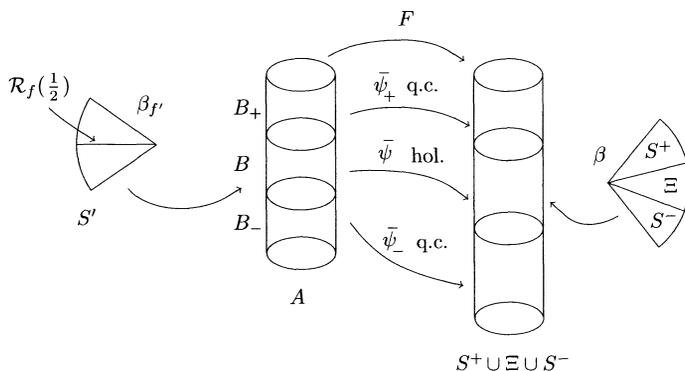


Figure 4. Définition de f

L'existence de ces fonctions résultent des sous-lemmes de [BD] de leur lemme 5 (voir appendice B). Soit $\psi : S' \rightarrow S$ un relèvement de $\bar{\psi}$ tel que

$$F^{-qn}\psi(\tilde{f}^n(z)) = \psi(z)$$

pour z et $\tilde{f}^n(z)$ dans S' . L'application ψ est en particulier holomorphe sur $F_1^{-1}(\Xi) \cap S'$.

Soit $F_1 : V'_1 \rightarrow V$ définie par

$$F_1|_{S'} = \psi, \quad F_1|_{V''} = F.$$

L'application F_1 est quasirégulière, holomorphe sur $V'' \cup (F_1^{-1}(\Xi) \cap S')$. \square

Réalisation de la condition suffisante. — L'idée originale de cette construction comparée à celles de [BD] et [BF] est de travailler avec des applications à allure polynomiale pour satisfaire cette condition simultanément sur tous les secteurs préimages. On utilise les deux résultats suivants.

PROPOSITION 2.2. — Soient $(U' \xrightarrow{f} U)$ une application à allure polynomiale d'ensemble de Julia connexe, α un point fixe de nombre de rotation p/q , S un secteur invariant issu de α donné par le lemme 1.3, et $m > 0$; il existe $(\hat{U}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{U})$ hybridement équivalente à f telle que $\text{mod } S > m$.

Démonstration. — Soit P un polynôme dans la classe hybride de f muni du secteur S . On représente S par une bande horizontale via la coordonnée log-Böttcher, et donc $A = S/P^q$ par un anneau droit. Soit B un anneau abstrait de module $\text{mod } A + m$. On considère $\phi : A \rightarrow B$, un homéomorphisme quasi-conforme extrémal. Sa forme de Beltrami $\mu = \bar{\partial}\phi/\partial\phi$ se relève dans S en une forme $P|_S$ -invariante $\tilde{\mu}$.

On la prolonge à U ainsi :

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} (P^n)^*\tilde{\mu} & \text{sur } P^{-n}(S), \\ 0 \cdot d\bar{z}/dz & \text{sur } U \setminus P^{-n}(S). \end{cases}$$

Cette forme est bien définie et satisfait $\|\tilde{\mu}\|_\infty = \|\mu\|_\infty$ car S est donné par le lemme 1.3. De plus, on a $P^*\tilde{\mu} = \tilde{\mu}$ par construction. Par le théorème de Riemann mesurable, P (et donc f) est hybridement équivalente à une application à allure polynomiale ($\widehat{U}' \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{U}$) telle que le module d'ouverture de l'image de S soit plus grand que m . \square

Lorsque l'on reste dans une même classe hybride, les modules d'ouverture liés aux ensembles de Julia remplis ne changent pas car la conjuguante a un $\bar{\delta}$ nul presque partout :

LEMME 2.3. — Soient ($U' \xrightarrow{f} U$) et ($V' \xrightarrow{g} V$) deux applications à allure polynomiale hybridement équivalentes par une application K -qc $\varphi : U \rightarrow V$. On suppose que leurs ensembles de Julia sont connexes et on considère un secteur invariant issu d'un point k -répulsif α_f contenant une composante connexe L de $K(P) \setminus \{\alpha_f\}$. Notons :

- $m_f = \inf \text{mod } S$, où l'infimum est pris sur les secteurs invariants contenant L ;
- $m_g = \inf \text{mod } T$, où l'infimum est pris sur les secteurs invariants contenant $\varphi(L)$.

Alors $m_f = m_g$.

Démonstration. — On se place dans le tore quotient de α_f et on se fixe $\varepsilon > 0$. Soit A un anneau non dégénéré contenant le projeté \mathcal{L} de L telle que $\text{mod } \varphi(A) \leq m_g + \varepsilon$. Tout d'abord, $m_f = 0$ si et seulement si $m_g = 0$ car

$$\text{mod } \varphi(A) \leq K \cdot \text{mod } A$$

(voir [Ah, th. 3, chap. 2, D]). On suppose maintenant $m_f > 0$. On note Γ la famille de courbes joignant les bords de A . Soit $\rho(z)|dz|$ la métrique extrémale d'aire 1. Si A est assez petit, alors $\text{Aire}(A \setminus \mathcal{L}, \rho) \leq \varepsilon$. On associe à $\varphi(A)$ la métrique

$$\rho' = \frac{\rho}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|} \circ \varphi^{-1},$$

où les indices indiquent les dérivées partielles. Pour presque toute courbe $\gamma \in \Gamma$,

$$\int_{\varphi(\gamma)} \rho'(z)|dz| = \int_\gamma \frac{\|\nabla\varphi(z)\|}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|} \rho(z)|dz| \geq \int_\gamma \rho(z)|dz|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\varphi A} \rho'^2(z) \, dx \, dy &= \text{Aire}(\mathcal{L}, \rho) + \int_{A \setminus \mathcal{L}} \rho^2(z) \, \text{Jac} \, \varphi(z) \, dx \, dy \\ &\leq \text{Aire}(\mathcal{L}, \rho) + K \cdot \text{Aire}(A \setminus \mathcal{L}, \rho). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\text{Aire}(\varphi A, \rho') \leq \text{Aire}(A, \rho) + (K - 1)\varepsilon \quad \text{et} \quad \text{mod} \, \varphi(A) \geq \frac{\text{mod} \, A}{1 + (K - 1)\varepsilon}.$$

Il s'ensuit que

$$m_g + \varepsilon \geq \frac{m_f}{1 + (K - 1)\varepsilon} \quad \text{et} \quad m_g \geq m_f.$$

Par symétrie, on obtient l'égalité. \square

Prolongement à V' (deuxième partie). — On considère les tores quotients

$$\mathbb{T}_f = (\Delta_f \setminus \{\alpha_f\})/(f^q) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_g = (\Delta_g \setminus \{\alpha_g\})/(g^q)$$

de α_f et α_g respectivement, où Δ_f et Δ_g sont des voisinages linéarisables. On note

$$\pi_f : \Delta_f \setminus \{\alpha_f\} \longrightarrow \mathbb{T}_f \quad \text{et} \quad \pi_g : \Delta_g \setminus \{\alpha_g\} \longrightarrow \mathbb{T}_g$$

les projections. On considère

$$m_f = \inf(\text{mod} \, A),$$

où $A \subset \mathbb{T}_f$ parcourt les anneaux contenant une composante de $\pi_f(K_f)$. Ce nombre est indépendant de la composante choisie, car les anneaux sont permutés par l'action holomorphe de f . On définit de même m_g .

D'après la proposition 2.2 et le lemme 2.3, on peut supposer que

$$\text{mod} \, S_g > m_f \quad \text{et} \quad \text{mod} \, S_f > m_g.$$

Par suite, on définit une extension quasi-régulière $F : V' \rightarrow V$ par la proposition 2.1.

Réalisation du croisement. — Nous allons modifier la structure complexe sur V pour rendre F holomorphe. À partir de la structure complexe standard σ_0 , on définit la structure presque-complexe σ de la façon suivante :

$$\sigma := \begin{cases} \sigma_0 & \text{sur } V' \setminus \bigcup F^{-n}(S'_f \cup S'_g), \\ (F^{n+1})^* \sigma_0 & \text{sur } F^{-n}(S'_f \cup S'_g). \end{cases}$$

Cette structure presque-complexe est bien définie car les secteurs préimages des S_{\pm} sont deux à deux disjoints par le lemme 1.3, et donc, σ est à ellipticité bornée. Par conséquent, σ définit une structure complexe (théorème de Riemann mesurable) pour laquelle F est holomorphe ($F^* \sigma = \sigma$ pp.). On note $\widehat{F} : W' \rightarrow W$ l'application holomorphe ainsi obtenue. Comme $V' \subset \subset F(V')$ par construction, $\widehat{F} : W' \rightarrow \widehat{F}(W')$ est une application à allure polynomiale hybridement équivalente à un polynôme R (théorème de redressement 1.1).

Vérification. — Montrons que (R, α) réalise un croisement de (f, α_f) et (g, α_g) . Nous laissons le soin au lecteur de vérifier les points (C₂) et (C₃). Nous gardons les mêmes notations pour R que pour F car ils sont quasiconformément conjugués.

Comme α_f et α sont tous deux répulsifs, l'application univalente

$$\text{Id} : U_f - \left(\bigcup_i S_f(t_i) \right) \longrightarrow V$$

se prolonge quasiconformément à un voisinage linéarisable de α_f par les propositions B.3 et B.4. Ceci montre que f figure de manière rigide dans R . On procède de même avec g .

3. Croisement répulsif/parabolique.

Soient P et Q deux polynômes de degré supérieur à 2, d'ensembles de Julia connexes, et tels que P (resp. Q) ait un point fixe α_P parabolique (resp. α_Q répulsif) de même nombre de rotation p/q , alors :

THÉORÈME 3.1. — *Si α_Q n'est pas dans l'ensemble ω -limite d'un point critique de Q alors leur croisement est réalisable par chirurgie.*

Préliminaires. — Soit $\nu = kq$ le nombre de pétales attractifs attachés à α_P . On considère tout d'abord un polynôme $P_1(z) = \lambda e^{2i\pi(p/q)} z + z^2$, où $\lambda > 1$, et qui admet un q -cycle attractif. Notons $(R_1, 0)$ un croisement de $(P_1, 0)$ avec lui-même k fois. On construit maintenant un croisement de $(R_1, 0)$ et (Q, α_Q) afin d'obtenir un polynôme (R_2, α_2) . On applique le théorème suivant de chirurgie parabolique à R_2 :

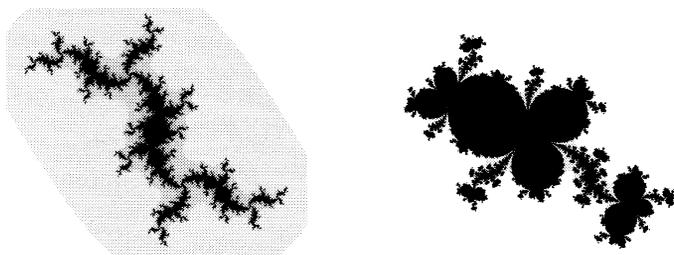


Figure 5. Exemple de croisement répulsif/parabolique

THÉORÈME 3.2 (cf. [Ha2]). — Soit f un polynôme ayant un point attractif α de période k et un point répulsif β de période plus petite sur le bord du bassin immédiat de α . On suppose que β est accessible de ce bassin, et n'est dans aucun ensemble ω -limite d'un point critique de f . Alors il existe un polynôme g de même degré et un μ -homéomorphisme $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ au sens de G. David tels que :

(i) $\varphi(K(f)) = K(g)$, $\varphi(\beta)$ est parabolique pour g et le bassin d'attraction devient le bassin parabolique de $\varphi(\beta)$;

(ii) à l'extérieur du bassin d'attraction, on a $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ et $\bar{\partial}\varphi = 0$ pp. En particulier, la restriction $\varphi : J(f) \rightarrow J(g)$ est une conjugaison.

Pour la définition et les propriétés des μ -homéomorphismes on peut consulter l'article original [Da]. Nous utiliserons qu'un μ -homéomorphisme appartient aux espaces $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{C})$, où $p < 2$, et que, composé avec un homéomorphisme quasi-conforme conduit à un autre μ -homéomorphisme.

On obtient ainsi un polynôme $(\widehat{R}, \widehat{\alpha})$ tel que le point α_2 soit devenu un point parabolique $\widehat{\alpha}$ avec ν pétales attractifs, et tel que Q figure de manière rigide dans \widehat{R} par une application $\widehat{\varphi}$, avec $\widehat{\varphi}(\alpha_Q) = \widehat{\alpha}$. On note $\widehat{K} = \widehat{\varphi}(K(Q))$ et on définit un voisinage \widehat{U} de \widehat{K} en rajoutant un petit voisinage de $\widehat{\alpha}$ au domaine bordé par une équipotentielle et par les rayons qui aboutissent à $\widehat{\alpha}$ adjacents à \widehat{K} . Soit \widehat{U}' la composante de $\widehat{R}^{-1}(\widehat{U})$ qui contient \widehat{K} . On note \widehat{Q} la restriction de \widehat{R} à \widehat{U}' .

On définit des nouveaux secteurs invariants \widehat{S} disjoints de \widehat{K} bordés par deux rayons adjacents à \widehat{K} qui aboutissent à $\widehat{\alpha}$. On remarque que ces secteurs et leurs préimages (par \widehat{Q}^n) sont disjoints deux à deux.

Soit \mathcal{P} un pétale répulsif de $\widehat{\alpha}$. Notons \widehat{m} l'infimum des modules des anneaux $A \subset \mathcal{P}/\widehat{Q}^q$ qui contient une composante de la projection de \widehat{K} .

Croisement de disques. — On considère $(U' \xrightarrow{f} U)$ une application à allure polynomiale dans la classe de P avec des secteurs invariants $S_f(t_i)$ issus de α_f donnés par le lemme 1.3 de module plus grand que \widehat{m} (prop. 2.2). On croise U

et \widehat{U} différemment : en définissant un changement de carte au voisinage de α_f et $\widehat{\alpha}$, sur le domaine qui deviendra leur intersection dans V .

LEMME 3.3. — *Il existe un homéomorphisme quasiconforme $\chi : \Delta \rightarrow \widehat{\Delta}$, où Δ (resp. $\widehat{\Delta}$) est un voisinage de α_f (resp. $\widehat{\alpha}$) tel que $\chi \circ f = \widehat{Q} \circ \chi$, χ est conforme sur les pétales répulsifs et $\chi(S_f)$ contient $\widehat{K} \cap \widehat{\Delta}$.*

La démonstration de ce lemme consiste à utiliser les coordonnées de Fatou répulsives et de les prolonger au complémentaire par une extension du type de la proposition 2.5.2 de [Sh].

Quitte à rétrécir $U \setminus K(f)$, on peut prolonger χ quasiconformément à U de manière à ce que $\chi(U - \Delta) \cap \widehat{U} = \emptyset$. Soit μ la forme de χ^{-1} que l'on prolonge par $0 \cdot d\bar{z}/dz$. On note $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une solution de l'équation de Beltrami associée, et on définit

$$V = \phi(\widehat{U} \cup \chi(U)) \quad \text{et} \quad V' = \phi(\widehat{U}' \cup \chi(U')).$$

Croisement partiel de f et \widehat{Q} . — On note S' (resp. \widehat{S}') la réunion des composantes de $f^{-1}(\bigcup_i S_f(t_i))$ (resp. $\widehat{Q}^{-1}(\bigcup_i \widehat{S}(t'_i))$) disjointes de $\bigcup_i S_f(t_i)$ (resp. $\bigcup_i \widehat{S}(t'_i)$).

Soit $F : V'' = V' \setminus (S' \cup \widehat{S}') \rightarrow V$ définie de la façon suivante :

$$F(z) = \begin{cases} (\phi \circ \chi) \circ f \circ (\phi \circ \chi)^{-1}(z) & \text{si } z \in U' \setminus S', \\ \phi \circ \widehat{Q} \circ \phi^{-1}(z) & \text{si } z \in \widehat{U}' \setminus \widehat{S}'. \end{cases}$$

Cette application est bien définie et même holomorphe sur son ensemble de définition. Les points α_f et $\widehat{\alpha}$ sont identifiés dans V en un point α ; celui-ci est un point fixe parabolique de F de nombre de rotation p/q .

Extension à S' . — On considère une composante connexe T' de S' . L'image de $\partial T'$ est bien définie par F et borde un secteur T qui contient une composante connexe de $\widehat{K} - \{\widehat{\alpha}\}$. Grâce à l'inégalité sur les modules, on peut construire une extension F_1 quasi-régulière de F à T' de manière à ce que F_1 soit conforme au-dessus d'un voisinage de \widehat{K} . En effet, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 2.1 en remplaçant les coordonnées log-Böttcher par des coordonnées de Fatou définies sur des pétales répulsifs (les propositions B.3 et B.4 s'appliquent sur un voisinage des points paraboliques en passant dans ces coordonnées).

On procède de même avec les autres composantes.

Extension à \widehat{S}' . — On considère une composante \widehat{T}' de \widehat{S}' . L'image de $\partial \widehat{T}'$ est bien définie par F et borde un secteur \widehat{T} qui contient une composante connexe

de $K(f) - \{\hat{\alpha}\}$. Soit $\Sigma \subset \widehat{T}$ (resp. $\Sigma' \subset \widehat{T}'$) un sous-secteur invariant tel que $\Sigma \setminus \widehat{T}$ soit constitué de deux composantes disjointes de $K(f)$.

Fixons les notations. Au voisinage de $\hat{\alpha}$, on a

$$\widehat{Q}^q(z) = z + c(z - \hat{\alpha})^{\nu+1} + \dots ;$$

si $\hat{\alpha}'$ est une préimage de $\hat{\alpha}$ et si le degré local de \widehat{Q} est $\delta \geq 1$ au voisinage de ce point, alors on obtient par conjugaison un germe

$$\widetilde{Q}(z) = z + c'(z - \hat{\alpha}')^{\nu'+1} + \dots$$

au voisinage de $\hat{\alpha}'$, où $\nu' = \delta\nu$. En conjugant par ϕ , on obtient que \widehat{T} et Σ (resp. \widehat{T}' et Σ') sont des secteurs d'angle $1/\nu$ tour (resp. $1/\nu'$ tour).

On considère $G : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ une application conforme telle que

$$G(z) = \alpha + a(z - \alpha')^\delta + \dots$$

au voisinage de $\alpha' = \phi(\hat{\alpha}')$. Ce paragraphe se termine par les deux lemmes suivants :

LEMME 3.4. — *Si « a » est bien choisi, alors il existe une extension quasi-régulière de G et F au voisinage de α' à \widehat{T}' .*

LEMME 3.5. — *Il existe « a » qui satisfait le lemme 3.4.*

Il est possible que cette extension demande de changer V' . On peut toujours le faire dans un voisinage de α' de manière à ce que \bar{V}' soit encore compact dans V .

À une rotation près, on peut s'arranger pour que les coefficients qui nous intéressent soient réels.

Démonstration du lemme 3.4. — Soient $h_{\hat{\alpha}}, h_{\hat{\alpha}'}, h_{\alpha}$ et $h_{\alpha'}$ les coordonnées de Fatou répulsives de $\widehat{Q}^q, \widetilde{Q}, F$ et $\phi \circ \widetilde{Q} \circ \phi^{-1} = \widetilde{F}$ respectivement. On a les relations suivantes :

$$h_{\hat{\alpha}'} = h_{\hat{\alpha}} \circ \widehat{Q}, \quad h_{\alpha} = h_{\hat{\alpha}} \circ \phi$$

car ϕ est conforme sur les pétales répulsifs d'après le lemme 3.3; enfin,

$$h_{\alpha'} = h_{\hat{\alpha}'} \circ \phi.$$

Par suite, on a $h_{\alpha} \circ F \circ h_{\alpha'}^{-1} = \text{Id}$. Pour G , on obtient une application du type

$$z \mapsto (c/a^\nu)z(1 + o(1)).$$

D'après le lemme B.5, on a une extension si $(c/a^\nu) = 1$. \square

Démonstration du lemme 3.5. — Soit Γ l'ensemble des automorphismes du disque qui s'écrit $z \mapsto (z - b)/(1 - bz)$ avec $b \in (-1, 1)$. On considère une application conforme $h : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma'$ telle que $h(1) = \alpha'$. Au voisinage de 1,

$$h(1 + z) = \alpha' + z^{1/\nu'} + \dots$$

On considère les applications de la forme $G_\gamma = G \circ (h \circ \gamma \circ h^{-1})$, où $\gamma \in \Gamma$. Par le calcul, on montre que $a \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow (-1)$ et $a \rightarrow \infty$ quand $b \rightarrow 1$. Par suite, on peut satisfaire la condition du lemme 3.4. \square

Réalisation du croisement. — Une fois l'extension obtenue, on change la structure complexe comme dans le cas répulsif. On obtient une application à allure polynomiale $\widehat{F} : W' \rightarrow \widehat{F}(W')$, hybridement équivalente à un polynôme R .

Vérification. — Par construction, on a la figuration rigide de Q et de P . Le reste n'offre pas de difficulté.

4. Croisement géométriquement fini.

On suppose maintenant que P et Q sont deux polynômes géométriquement finis de degré d_P et $d_Q \geq 2$. D'après le théorème principal de [Ha3], il existe des polynômes sous-hyperboliques \widehat{P} et \widehat{Q} et des homéomorphismes $\chi_P : J(P) \rightarrow J(\widehat{P})$ et $\chi_Q : J(Q) \rightarrow J(\widehat{Q})$ qui factorisent les lacets de Carathéodory :

$$\gamma_{\widehat{P}} = \chi_P \circ \gamma_P \quad \text{et} \quad \gamma_{\widehat{Q}} = \chi_Q \circ \gamma_Q.$$

On effectue le croisement répulsif de \widehat{P} et \widehat{Q} et on obtient un polynôme \widehat{R} sous-hyperbolique. Il reste à rajouter les points paraboliques et à vérifier que le résultat obtenu est bien le croisement de P et Q .

On applique donc le théorème 3.2 à \widehat{R} pour obtenir un polynôme R . Quitte à faire des chirurgies à l'intérieur des composantes de Fatou (prop. 6.8 de [Mc]), on peut supposer qu'il existe des homéomorphismes $\psi_P : K(P) \rightarrow K(R)$ et $\psi_Q : K(Q) \rightarrow K(R)$, conforme à l'intérieur qui conjuguent P à R et Q à R .

Pour montrer que ces applications se prolongent en figuration rigide, on peut procéder comme suit. Nous traitons le cas de P . On suppose α_Q parabolique. On considère l'homéomorphisme $\chi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ défini par le lemme A.4. Comme $K(P)$ est localement connexe, l'application φ définie par

$$\varphi(z) = \begin{cases} \psi_P(z) & \text{si } z \in K(P), \\ R \circ \chi \circ B_P(z) & \text{si } z \notin K(P), \end{cases}$$

où $R : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \psi_P(K(P))$ et $B_P : \mathbb{C} \setminus K(P) \rightarrow \mathbb{D}$ sont conformes, est un homéomorphisme.

Il reste à montrer qu'il est dans un espace fonctionnel $W^{1,p}$. Pour cela, on utilise l'astuce suivante.

- On définit une application φ_0 , qui coïncide avec φ sur des voisinages des points attractifs, sur des pétales attractifs, sur les secteurs sur lesquels φ n'est pas une conjugaison et sur un anneau bordé par deux équipotentielles $\eta > 0$ et $d \cdot \eta$. On prolonge quasiconformément (par un difféomorphisme) cette application au domaine bordé par l'équipotentielle $d \cdot \eta$. Le seul problème se trouve au voisinage de α_P : une étude locale (voir appendice B) montre que cela est possible. Cette application est bien dans un $W^{1,p}$, $p > 1$, d'après le lemme A.5.

- On définit une suite (φ_n) telle que $\varphi_n \circ P = \varphi_{n-1} \circ R$. Cette suite converge uniformément vers φ par construction.

- De plus, (φ_n) est faiblement compacte dans $W^{1,p}$ par le lemme A.5.

On en déduit que φ est bien une figuration rigide de P dans R (l'ensemble de Julia des ces polynômes sont de mesures nulles d'après [DH1]).

5. Propriétés et généralisations.

Le but de cette section est d'établir les premières propriétés des croisements et de procéder aux généralisations naturelles de cette opération.

PROPRIÉTÉS. — Soit (R, α) le croisement de deux polynômes (P, α_P) et (Q, α_Q) de degré d_P et $d_Q \geq 2$ respectivement et ayant leur ensemble de Julia connexe. On note

$$N_R = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$$

le noyau de R .

PROPOSITION 5.1. — *Le compact $K(R)$ est connexe.*

Démonstration. — D'après un théorème de Fatou et Julia, $K(R)$ est connexe si et seulement si tous ses points critiques sont dans $K(R)$. Les ensembles de Julia de P et Q sont tous les deux connexes, donc contiennent $d_P - 1$ et $d_Q - 1$ points critiques comptés avec multiplicité. Par la figuration, tous ces points critiques sont aussi critiques pour R , et sont dans $K(R)$. Or, d'après la condition (C_3) de la définition d'un croisement, R admet exactement $d_P + d_Q - 2$ points critiques comptés avec multiplicité : tous les points critiques de R sont dans $K(R)$, et $K(R)$ est connexe. \square

PROPOSITION 5.2 (nature des points fixes).

(i) *Le point α est un point fixe de R , répulsif si et seulement si α_P et α_Q le sont; sinon α est parabolique.*

(ii) *Les points α_P et α_Q ont même nombre de rotation que α .*

(iii) *Le point α a autant d'accès de l'infini que α_P et α_Q réunis.*

Démonstration. — La figuration implique immédiatement que α est un point fixe de R .

Soient p_P/q_P le nombre de rotation de α_P et Δ_P un petit voisinage de α_P . On note L l'intersection d'une composante connexe de $K(P) \setminus \{\alpha_P\}$ avec Δ_P , qui est connexe (si Δ est bien choisi). Ce compact est un « accès » à α_P q_P -périodique qui admet pour nombre de rotation p_P/q_P . Par suite, l'image par la figuration de L est aussi q_P -périodique, et comme la figuration préserve l'orientation, on obtient un nombre de rotation pour α égal à p_P/q_P . Ceci prouve (ii).

Si α_P est parabolique, alors il existe une composante q_P -périodique Ω de $\overset{\circ}{K}(P)$ adjacente à α_P telle que $\widehat{\Omega}/(P^{q_P})$ soit conforme à \mathbb{C}/\mathbb{Z} avec un nombre fini de points marqués, où $\widehat{\Omega} = \Omega \setminus \{\text{grande orbite des points critiques}\}$. Comme la figuration est univalente sur $\overset{\circ}{K}(P)$, $\varphi_P(\widehat{\Omega})/(R^{q_P})$ est aussi du même type conforme, donc α est aussi parabolique.

D'autre part, si α_P et α_Q sont tous les deux répulsifs, la limite sur le nombre de points critiques de R implique que α ne peut être parabolique. Par suite, comme α admet un nombre de rotation, il est répulsif. Ceci prouve (i).

La condition (C_2) du croisement et ce qui précède impliquent que α a au moins autant d'accès que α_P et α_Q réunis. Supposons que α ait plus d'accès. Il existerait alors une composante connexe L de $K(R) \setminus \{\alpha\}$ disjointe de $\varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$. Soit $\zeta \in L$ une préimage de α . Le lemme 5.3 ci-après conduit à une contradiction. On obtient (iii). \square

LEMME 5.3. — *Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une préimage de α qui n'est pas dans le noyau de R , il existe un nombre fini de préimages du noyau $(N_0)_{0 \leq i \leq n}$ telles que $\zeta \in N_n$ et que $\bigcup_{0 \leq i \leq n} N_i$ soit connexe.*

Démonstration. — On pose $K_0 = N_R = \varphi_P(K(P)) \cup \varphi_Q(K(Q))$, et pour $n \geq 1$, $K_n = R^{-n}(K_0)$. On montre par récurrence sur n que K_n est connexe et contient $R^{-(n+1)}(\{\alpha\})$. Ceci établit le lemme. \square

LEMME 5.4. — *Les classes externes des figurations sont bien définies :*

- si α_Q (resp. α_P) est répulsif alors la classe de P (resp. Q) est fortement dilatante;
- si α_Q (resp. α_P) est parabolique alors la classe de P (resp. Q) est parabolique.

En particulier, si α est répulsif, alors il existe $U'_P \subset\subset U_P$ (resp. $U'_Q \subset\subset U_Q$), voisinages de $\phi_P(K(P))$ (resp. $\phi_Q(K(Q))$) tels que $(U'_P \xrightarrow{R} U_P) \sim_{\text{hyb}} P$ (resp. $(U'_Q \xrightarrow{R} U_Q) \sim_{\text{hyb}} Q$).

Pour la définition de la classe externe, se reporter à l'appendice A.

Démonstration. — Traitons le cas de P . On note $\widehat{K} = \varphi_P(K(P))$. Par définition du croisement, les points critiques de R proviennent tous de P ou (exclusif) de Q . De plus, le point d'intersection des compacts figurants est α qui n'est pas critique. Par suite, l'une des composantes connexes de $R^{-1}(\widehat{K})$ est \widehat{K} (car $R : \widehat{K} \rightarrow \widehat{K}$ est un revêtement ramifié de degré d_P).

Il existe donc un voisinage V_P de \widehat{K} tel que $R(V_P \setminus \widehat{K}) \cap \widehat{K} = \emptyset$. La classe externe de P est donc bien définie, et tous ses points paraboliques éventuels proviennent de R , donc de Q . Si la classe externe ne contient pas de point parabolique — α_Q est répulsif — alors on a affaire à une application à allure polynomiale (cf. [DH2]) et on a donc une figuration quasiconforme. \square

Invariant combinatoire κ . — D'après la proposition 5.2, on peut associer à tout croisement une donnée combinatoire symbolisée dans la suite par κ .

On suppose toujours que (R, α) est un croisement de (P, α_P) et (Q, α_Q) d'ensemble de Julia connexe et on note p/q leur nombre de rotation. On considère l'ensemble $(L_i^P)_{1 \leq i \leq \nu_P}$ (resp. $(L_i^Q)_{1 \leq i \leq \nu_Q}$, $(L_i^R)_{1 \leq i \leq \nu_R}$) des composantes connexes de $K(P) \setminus \{\alpha_P\}$ (resp. $K(Q) \setminus \{\alpha_Q\}$, $K(R) \setminus \{\alpha\}$) numérotées dans l'ordre cyclique, qui sont en nombre fini et forment localement des cycles de même période. On définit une application

$$\kappa : \{L_i^P \text{ et } L_j^Q, 1 \leq i \leq \nu_P, 1 \leq j \leq \nu_Q\} \longrightarrow \{L_k^R, 1 \leq k \leq \nu_R\}$$

par

$$\kappa(L_i^P) = L_k^R \text{ si } \varphi_P(L_i^P) \subset L_k^R \text{ et } \kappa(L_j^Q) = L_k^R \text{ si } \varphi_Q(L_j^Q) \subset L_k^R.$$

D'après la proposition 5.2, $\nu_R = \nu_P + \nu_Q$ et κ est une bijection qui ne dépend pas des diverses numérotations possibles.

L'application κ représente un *invariant combinatoire* de R vu comme croisement de P et Q . On verra dans le paragraphe suivant qu'il caractérise R .

EXEMPLE. — On considère (Fig. 6) les polynômes quadratiques représentant le «lapin maigre» et le «lapin gras».

La figure 7 représente trois polynômes dans des classes topologiques différentes qui réalisent chacun un croisement de ces deux polynômes.

PROPOSITION 5.5. — *Soit R le croisement de deux polynômes P et Q . On note N_R le noyau de R . Alors $X = K(R) \setminus (\bigcup R^{-n}(N_R))$ est de mesure nulle.*

Démonstration. — Il est clair que $X \subset J(R)$. Montrons qu'aucun point de X n'est un point de densité de X .

Soit $z \in X$ et notons $z_n = R^n(z)$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite n_k tel que $d(z_{n_k}, N_R) > \varepsilon_0$. En effet, soit ψ l'uniformisante de $\mathbb{C} \setminus N_R$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

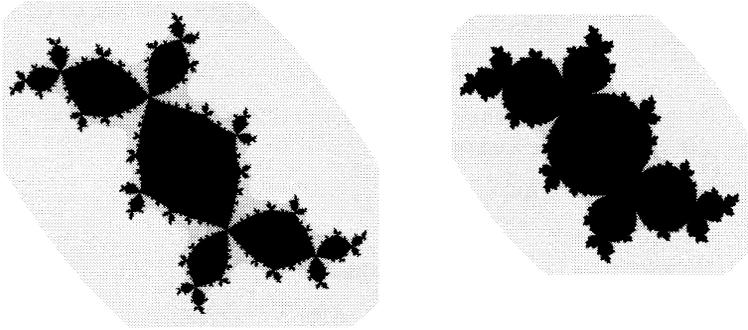


Figure 6. Lapin « usuel » et lapin « gras »

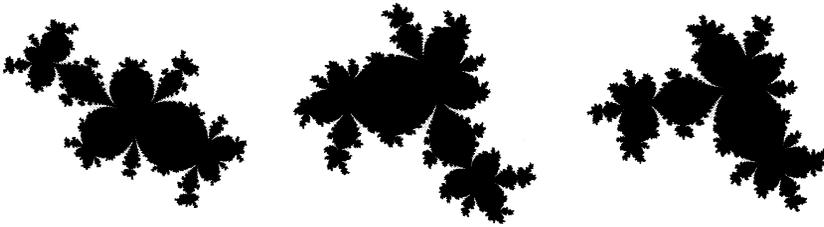


Figure 7. Trois types de croisements pour les lapins !

Le polynôme R est conjugué à une application h , sauf sur des secteurs issus des préimages de α . Par réflexion de Schwarz, on obtient une application holomorphe au voisinage de S^1 privé d'un nombre fini de points. Il est clair que si l'orbite de $\psi(z)$ ne rentre pas dans les secteurs dans lesquels h n'est pas défini, alors le point s'échappe. Sinon, l'itéré de z se trouve dans un domaine dilatant pour la dynamique de R : domaine linéarisable de α si celui-ci est répulsif ou pétale répulsif s'il est parabolique.

Pour chaque $k \geq 0$, il existe $r_k > 0$ tel que la famille de courbes homotopes au cercle de centre z_{n_k} et de rayon r_k dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\text{Post}(R) \cup D(z_{n_k}, r_k))$ ait une longueur extrémale $m > 0$, où m est une constante à déterminer. Ces rayons sont uniformément minorés par un $\rho > 0$ car les z_{n_k} sont loin des orbites critiques. Par suite, d'après le théorème de Koebe, il existe $c_m > 1$ tel que pour tout $k \geq 0$, on ait

$$\frac{\text{Aire}(X \cap R^{-n_k}(D(z_{n_k}, r_k)))}{\text{diam}^2 R^{-n_k}(D(z_{n_k}, r_k))} \leq c_m \frac{\text{Aire } X \cap D(z_{n_k}, r_k)}{\pi r_k^2},$$

car X est totalement invariant. On a $c_m \rightarrow 1$ quand $m \rightarrow 0$.

Comme les disques sont disjoints de l'ensemble postcritique et de domaines de rotation, on a

$$\text{diam } R^{-n_k}(D(z_{n_k}, r_k)) \longrightarrow 0.$$

De plus, les rayons r_k étant minorés et comme $X \subset J(R)$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, quitte à extraire une sous-suite,

$$\frac{\text{Aire}(X \cap D(z_{n_k}, r_k))}{\pi \cdot r_k^2} \leq 1 - \varepsilon_1.$$

Sinon, $J(R)$ aurait de l'intérieur. Par conséquent,

$$\liminf \frac{\text{Aire } X \cap D(z, r)}{\pi \cdot r^2} \leq c_m \liminf \frac{\text{Aire } X \cap D(z_{n_k}, r_k)}{\pi \cdot r_k^2} \leq c_m(1 - \varepsilon_1).$$

Si m est assez petit, alors on montre que z n'est pas un point de densité de X . \square

Déformation quasiconforme de croisements. — Dans l'appendice A, on a rappelé les principales propriétés des espaces de Teichmüller de fractions rationnelles. Ici, on montre :

PROPOSITION 5.6. — *Soit R le croisement de deux polynômes P et Q de degré ≥ 2 . Alors*

$$\text{Teich}(R) \simeq \text{Teich}(P) \times \text{Teich}(Q).$$

Démonstration. — Comme P et Q figurent dans R , on sait immédiatement que les différents espaces s'injectent dans $\text{Teich}(R)$. Pour montrer la surjectivité, il suffit de remarquer que tous les modules sont liés aux points critiques, et comme ceux-ci sont dans le noyau N_R , ils proviennent nécessairement de P ou (exclusif) de Q . De plus, il ne peut y avoir création de champ de droites invariants d'après la proposition 5.5. \square

Généralisations.

- Cas non connexe. — Il existe dans le sillage de M de p/q des points pour lesquels q rayons aboutissent à α et ses préimages avec même nombre de rotation p/q . Si par exemple le point critique appartient à un des secteurs invariants, alors la même construction de F produit un polynôme de degré trois dont l'un des points s'échappe à l'infini et l'autre reste dans un domaine borné (il faut être soigneux que le point critique continue à s'échapper après la chirurgie). On retrouve alors le fait que les composantes connexes de $K(R)$ sont soit des points, soit quasiconformes à un ensemble de Julia de degré 2 (voir [BH]). Ce résultat reste valable quel que soit le degré du polynôme.

- Cas α_g périodique. — Le résultat ressemble un peu à la modulation : on suppose α_f fixe et α_g périodique de même nombre de rotation p/q . On coupe les rayons qui aboutissent à ces points, ainsi qu'au cycle de α_g , et on insère des copies de $K(f)$ dans $K(g)$ en respectant la dynamique locale de g sur le cycle

de α_g . Puis, on définit localement la dynamique du croisement comme étant g sur $K(g)$, f de la copie en α_g sur celle en $g(\alpha_g)$, et l'identité sur le reste. Par les méthodes de chirurgie, on obtient un polynôme R vérifiant les propriétés voulues.

• Cas de plusieurs polynômes. — On peut croiser plusieurs polynômes P_1, P_2, \dots, P_m ayant chacun un point fixe répulsif α_i de même nombre de rotation p/q , un par un ou tous à la fois, en utilisant la même méthode. Le point important est de respecter l'ordre cycle au voisinage du point répulsif où s'effectue le croisement. Il en résulte un polynôme de degré $\sum (d_i - 1) + 1$ muni d'un point fixe de nombre de rotation p/q .

II. Rigidité des croisements à combinatoire fixée

L'objet de cette partie est de justifier la définition des croisements en montrant que, quand il existe, le croisement de deux polynômes est essentiellement unique. À cette fin, on introduit la définition suivante.

DÉFINITION. — Étant donnés deux croisements $(R_1, \alpha_1, \kappa_1)$ et $(R_2, \alpha_2, \kappa_2)$ de (P, α_P) et (Q, α_Q) , on dit que $\kappa_1 \sim \kappa_2$, si $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ agit comme une permutation circulaire dans $\mathbb{Z}/(\nu_P + \nu_Q)\mathbb{Z}$.

D'après la proposition 5.4 et le théorème A.3, on se donne des figurations paraboliques, canoniques au sens de l'appendice A, φ_1 et φ_2 de P (resp. ψ_1 et ψ_2 de Q) dans R_1 et R_2 . On suppose que ce sont des homéomorphismes du plan conformes à l'infini et tangents à l'identité à l'infini. Un énoncé plus précis du théorème 2 est le suivant.

THÉORÈME 2. — Soient $(R_1, \alpha_1, \kappa_1)$ et $(R_2, \alpha_2, \kappa_2)$ deux croisements de (P, α_P) et (Q, α_Q) . On suppose l'une des deux conditions suivantes :

(a) les figurations canoniques sont réalisées par des homéomorphismes quasi-conformes ou μ -conformes ;

(b) le croisement est géométriquement fini.

Si $\kappa_1 \sim \kappa_2$, alors R_1 et R_2 sont conformément conjugués.

La partie (a) du théorème découle du :

THÉORÈME 7. — On suppose que $\kappa_1 \sim \kappa_2$ et que les quatre figurations (notées φ dans la suite) satisfont l'hypothèse suivante :

(HP) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (\varphi_n) \text{ est une suite d'homéomorphismes quasiconformes tangents} \\ \text{à l'identité à l'infini telle que } \mu_{\varphi_n} \text{ tend presque partout vers } \mu_\varphi \\ \text{alors } \varphi_n \text{ tend vers } \varphi \text{ uniformément.} \end{array} \right.$

Alors R_1 et R_2 sont conjugués par une application affine.

REMARQUE. — L'hypothèse (HP) est satisfaite pour les homéomorphismes quasiconformes et μ -conformes. Cependant, étant donnée une figuration rigide quelconque, les hypothèses générales ne permettent pas de le conclure.

L'idée de la démonstration est la suivante : on commence par trouver des conjugaisons quasiconformes locales au voisinage des petites copies de P et Q . Elles induisent alors une équivalence combinatoire quasiconforme entre R_1 et R_2 . Celle-ci est enfin promue en conjugaison affine.

6. Promotion de conjugaisons locales en conjugaison globale.

Dans ce paragraphe, nous montrons comment obtenir une conjugaison affine à partir de conjugaisons locales.

PROPOSITION 6.1. — *On suppose qu'il existe un homéomorphisme quasiconforme $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ (resp. $\psi : V_1 \rightarrow V_2$) qui conjugue R_1 à R_2 sur les petites copies de $K(P)$ (resp. $K(Q)$). Alors R_1 et R_2 sont conjugués par une application affine.*

Pour ne pas différencier le cas α_1 répulsif du cas parabolique, nous noterons \mathcal{Q}_1 (resp. \mathcal{Q}_2) l'espace quotient associé au point α_1 (resp. α_2) : il s'agit d'un tore dans le premier cas, et de la réunion disjointe de cylindres \mathbb{C}/\mathbb{Z} dans le second, associée aux pétales répulsifs. La démonstration consiste en plusieurs étapes.

Recollement des conjugaisons. — Nos conjugaisons descendent en des homéomorphismes quasiconformes $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ respectivement entre \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 . La trace des copies des ensembles de Julia de P et Q sont inclus — dans \mathcal{Q}_1 — dans des réunions d'anneaux disjoints $A_{P,1}$ et $A_{Q,1}$. On note

$$\bar{\varphi}(A_{P,1}) = A_{P,2}, \quad \bar{\psi}(A_{Q,1}) = A_{Q,2}.$$

Quitte à les restreindre, on peut supposer que $A_{P,2}$ est disjoint de $A_{Q,2}$, $A_{Q,2}$ est disjoint de $A_{P,2}$, et qu'ils sont à bord *quasisymétrique* (i.e. des quasicercles). L'équivalence combinatoire de κ_1 et κ_2 se traduit par :

- $\bar{\varphi}(A_{Q,1})$ est homotope à $A_{Q,2}$ relativement à $A_{P,1}$ et $A_{P,2}$, et
- $\bar{\psi}(A_{P,1})$ est homotope à $A_{P,2}$ relativement à $A_{Q,1}$ et $A_{Q,2}$, composante par composante.

On définit un homéomorphisme quasiconforme $\bar{\chi} : \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_2$ de la façon suivante :

$$\bar{\chi} = \begin{cases} \bar{\varphi} & \text{sur } A_{P,1}, \\ \bar{\psi} & \text{sur } A_{Q,1}. \end{cases}$$

Sur le complémentaire, qui est constitué de $\nu_P + \nu_Q$ anneaux disjoints à bord quasisymétrique, on considère une extension quasiconforme de ces applications.

Par la combinatoire, on en déduit que

$$\bar{\chi}(\varphi_1(K(P))) = \varphi_2(K(P)) \quad \text{et} \quad \bar{\chi}(\psi_1(K(Q))) = \psi_2(K(Q)).$$

D'après les propositions B.3 et B.4, cette application se relève en une application quasiconforme d'un voisinage de α_1 sur un voisinage de α_2 qui conjugue R_1 à R_2 . Quitte à diminuer U_1 et V_1 , on peut supposer que toutes les images réciproques des domaines sujets à l'extension sont deux à deux disjointes. En utilisant les branches inverses de R_1 et R_2 , on peut changer les applications φ et ψ par des conjugués de χ afin d'obtenir une application quasiconforme définie sur des voisinages des noyaux de R_1 et R_2 et de $\bar{\partial}$ nul pp. sur N_{R_1} .

Équivalence combinatoire. — On définit :

- $\chi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ comme étant une extension quasiconforme au plan de χ et de $B_2 \circ B_1^{-1}$ restreinte à un voisinage de l'infini, où $B_i : \mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} - K(R_i)$ est la coordonnée de Böttcher de R_i , et

- χ_1 par $R_2^{-1} \circ \chi_0 \circ R_1$, qui coïncide avec χ_0 au voisinage de l'ensemble postcritique de R_1 .

Les applications χ_0 et χ_1 sont isotopes rel. $PostR_1$ par construction et ont même constante de quasiconformité. Ceci marque la fin de la première étape.

Promotion en conjugaison. — On définit la suite $(\chi_n)_{n \geq 0}$ d'homéomorphismes quasiconformes par récurrence de telle sorte que χ_n coïncide avec χ_0 au voisinage des ensembles postcritiques, et telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\chi_{n-1}} & \bar{\mathbb{C}} \\ R_1 \uparrow & & \uparrow R_2 \\ \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\chi_n} & \bar{\mathbb{C}} \end{array}$$

Ces applications ayant une dilatation uniformément majorée admettent une sous-suite convergente vers une application quasiconforme $\chi_\infty : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, qui coïncide avec χ_0 au voisinage des noyaux. Par construction, χ_∞ est conforme sur le bassin de l'infini.

Mais alors, d'après la proposition 5.5, cette conjugaison quasiconforme est de $\bar{\partial}$ nul pp. sur $\bar{\mathbb{C}}$: c'est une conjugaison conforme. Ceci conclut la démonstration de la proposition 6.1.

7. Obtention de conjugaisons partielles.

Pour conclure la démonstration du théorème 7, il suffit de montrer que l'on peut satisfaire les hypothèses de la proposition 6.1. Nous allons traiter le cas de P .

L'application $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ conjugue R_1 à R_2 sur $\varphi_1(U)$, et est quasiconforme presque partout. Par conséquent, on peut définir sa forme de Beltrami μ presque partout et trouver une solution quasiconforme χ de l'équation de Beltrami associée, tangente à l'identité à l'infini.

On note μ_ε des troncatures de μ_{φ_1} , *i.e.*

$$\mu_\varepsilon(z) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1}(z) & \text{si } |\mu_{\varphi_1}(z)| \leq 1 - \varepsilon, \\ (1 - \varepsilon)\mu_{\varphi_1}(z)|\mu_{\varphi_1}(z)|^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ les solutions tangentes à l'identité à l'infini de l'équation de Beltrami. Par hypothèses, $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ tend uniformément vers φ_1 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, on a $\mu_{\chi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon} \rightarrow \mu_{\varphi_2}$ presque partout. Par suite, $\chi \circ \widehat{\varphi}_\varepsilon$ tend uniformément vers φ_2 .

On en déduit que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \chi$ est quasiconforme.

REMARQUE. — De manière générale, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est toujours quasiconforme presque partout. La difficulté est de montrer que cette application l'est globalement. Ce problème est connu comme une conjecture très difficile, du fait que les conjugaisons n'ont pas une bonne régularité.

8. Croisement géométriquement fini.

Nous supposons que les points α_P et α_Q sont tout deux paraboliques. Nous traitons uniquement le cas de P . Les points α_1 et α_2 sont paraboliques avec même nombre de rotation; par suite, il existe une conjugaison quasiconforme $\widehat{\varphi}$ entre R_1 et R_2 au voisinage de ces points. On peut supposer que cette conjugaison locale coïncide sur les ensembles postcritiques avec $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Comme on a affaire avec des polynômes géométriquement finis on peut prolonger quasiconformément $\widehat{\varphi}$ au voisinage de $\varphi_1(K(P))$ de manière à ce qu'elle coïncide sur les ensembles postcritiques avec $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.

On procède de même avec Q .

On recolle ces deux applications comme dans le paragraphe «recollement des conjugaisons», afin d'obtenir une application quasiconforme χ_0 . On procède comme dans la démonstration de la proposition 6.1. A la fin, on obtient une conjugaison quasiconforme χ , conforme à l'extérieur des ensembles de Julia.

On définit une nouvelle application $\widehat{\chi}_0$ en remplaçant sur les copies de $K(P)$ et $K(Q)$ χ par la composition des figurations rigides. Par le lemme de Rickman (voir [Ri]), cette application est quasiconforme. Le même procédé de *pull-back* conduit maintenant à une conjugaison affine.

III. Croisement topologique

Nous relâchons un peu la définition d'un croisement afin de pouvoir définir une bonne classe topologique dans tous les cas.

Le plan de cette partie est le suivant. On rappelle brièvement quelques propriétés des limites projectives d'espaces topologiques qui nous permettront de construire ce modèle. On construit explicitement ce modèle, ce qui démontrera le point (i) du théorème 3. On analyse le revêtement ramifié obtenu en fonction des polynômes P et Q . Ensuite, on vérifie que ce modèle est bien conjugué au croisement holomorphe quand il existe (point (ii)). On montre alors que la définition du croisement topologique est bien définie à homéomorphisme près (point (iii)). Enfin, la construction topologique du croisement permet aussi d'obtenir quelques résultats sur la connexité locale des polynômes impliqués (cor. 4).

9. Limites projectives d'espaces topologiques.

DÉFINITION. — Soit $\{X_n, \pi_n\}_{n \geq 0}$, une suite d'espaces topologiques, munis d'applications $\pi_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, continues surjectives : on définit alors la limite projective de ce système par

$$X_\infty = \varprojlim (X_n, \pi_n) = \left\{ \{x_n\} \in \prod X_n, \forall n, \pi_n(x_n) = x_{n-1} \right\}.$$

On munit X_∞ de la topologie induite par la topologie produit.

PROPOSITION 9.1.

- (i) Si X_n est compact pour tout n , alors X_∞ est compact.
- (ii) Si, pour tout n , X_n est compact connexe, alors X_∞ est compact connexe.
- (iii) Si, pour tout n , X_n est compact connexe et localement connexe et π_n est à fibres connexes, alors X_∞ est compact, connexe et localement connexe.

Démonstration. — (i) X_∞ est inclus dans $\prod X_n$, qui est compact par le théorème de Tychonoff : il suffit de vérifier que X_∞ est fermé, ce qui le cas (continuité des π_n).

(ii) On suppose que les compacts sont connexes. Montrons que la limite projective s'écrit comme intersection décroissante de compacts connexes non vide dans $\prod X_n$. On pose

$$Y_n = \left\{ (x_i) \in \prod X_i \text{ telle que pour } 0 < i \leq n, \pi_i(x_i) = x_{i-1} \right\}.$$

On a $Y_n \approx \prod_{i \geq n} X_i$ qui est compact connexe non vide et $\bigcap Y_n = X_\infty$.

REMARQUE. — Il suffit de supposer les X_n connexes à partir d'un certain rang.

(iii) On suppose de plus que les X_n sont localement connexes et que les projections sont à fibres connexes. On se donne $V = \prod V_i \subset \prod X_i$ un voisinage compact de $x \in X_\infty$. Montrons qu'il existe un voisinage connexe de X_∞ inclus dans V .

Commençons par l'assertion suivante : Soient X, Y deux espaces compacts non vides, $\pi : X \rightarrow Y$ une application continue surjective à fibres connexes, et supposons Y connexe. Alors X est aussi connexe.

En effet, supposons que X s'écrive comme une réunion disjointe de deux compacts X_1 et X_2 . Alors $\pi(X_1) \cap \pi(X_2) = \emptyset$. En effet, pour $y \in Y$,

$$\pi^{-1}(\{y\}) = (\pi^{-1}(\{y\}) \cap X_1) \cup (\pi^{-1}(\{y\}) \cap X_2).$$

Comme les fibres sont connexes, l'un des deux termes doit être vide. Maintenant, on a $Y = (Y \cap \pi(X_1)) \cup (Y \cap \pi(X_2))$, et Y est connexe : l'un des termes est vide, et donc X_1 ou X_2 est vide : X est connexe.

Soit $U_0 \subset V_0$ un voisinage compact connexe de $x_0 \in X_0$. On construit alors par récurrence un voisinage compact connexe $U_n \subset V_n \cap \pi_n^{-1}(U_{n-1})$ de x_n . Enfin, on note $\widehat{U}_n \subset X_\infty$ le compact connexe défini sur chaque composante par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n(U_n), \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n(U_n), \dots, U_n, \pi_{n+1}^{-1}(U_n), \dots$. D'après l'assertion et (ii), \widehat{U}_n est compact connexe, et $\widehat{U}_n \subset \widehat{U}_{n-1}$.

Soit $\widehat{U} = (\prod U_n) \cap X_\infty$; c'est un voisinage compact de $(x_n) \in X_\infty$. De plus, il est contenu dans V et il est connexe car il s'écrit comme une intersection décroissante de compacts connexes : $\widehat{U} = \bigcap \widehat{U}_n$. \square

PROPOSITION 9.2. — Soit $\{S_n\}_{n \geq 0}$, une suite de surfaces de Riemann homéomorphes à S^2 . On suppose que pour tout $n \geq 1$, il existe $\pi_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$ continue surjective, et à fibres contractiles. Alors, $S = \varprojlim (S_n, \pi_n)$ est homéomorphe à S^2 .

Démonstration. — Voir [Mo].

10. Construction de (Σ_∞, F) .

On considère, pour simplifier un peu les notations, deux polynômes quadratiques P_1 et P_2 ayant chacun un point fixe répulsif ou parabolique, de même nombre de rotation p/q (et avec ensembles de Julia connexes).

On va définir le système dynamique par récurrence sur n , en construisant, à chaque rang, (i) une surface Σ_n , (ii) deux applications $\pi_n, F_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$ et (iii) un compact $K_n \subset \Sigma_n$.

Soit un cycle de q rayons externes $\mathcal{R}_i(t_1^i), \dots, \mathcal{R}_i(t_q^i)$ avec $0 < t_1^i < t_2^i < \dots < t_q^i < 1$ qui aboutissent à α_i . On note $Q_j^i(0)$, $i = 1, 2, j = 1, \dots, q$, le quartier ouvert bordé par $\mathcal{R}_i(t_j^i) \cup \mathcal{R}_i(t_{j+1}^i)$, avec $q+1 = 1$, et ne contenant aucun des rayons précités (Fig. 8). Par P_i^{-n} , on définit une suite de pavages $Q^i(n)$ de plus en plus fins de la sphère en quartiers de sommets l'infini et une préimage de α_i , ou l'infini lui-même.

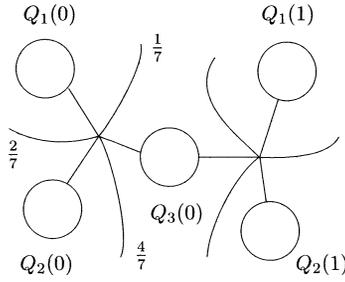


Figure 8. Partition de $\overline{\mathbb{C}}$

On note $\widetilde{Q}_j^i(n)$, $Q_j^i(n)$ dont on a ôté les quartiers de rang plus grand :

$$\widetilde{Q}_j^i(n) = \overline{Q}_j^i(n) \setminus \bigcup_{p>n} Q_j^{i'}(p).$$

- Σ_0 est définie en éclatant les rayons externes des points fixes α_1 et α_2 , et en identifiant les points de même potentiel : on obtient ainsi une surface homéomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.

On définit $F_0 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ par $F_0|_{Q^i(0)} = P_i$. Cette application est bien définie et continue sauf sur les rayons aboutissant à $P_i^{-1}(\alpha) - \{\alpha\}$.

On pose

$$K_0 = K(P_1) \cup K(P_2) \approx (K(P_1) \cup K(P_2)) / (\alpha_1 \sim \alpha_2).$$

- On éclate les rayons qui aboutissent à α'_i (préimage de α_i) dans Σ_0 et on recolte une copie de $Q^{1-i}(0)$ de telle sorte que les voisinages de α et α'_i soient homéomorphes. Si s_0 et s_1 sont les potentiels dans $Q^i(0)$ et $Q^{1-i}(1)$ respectivement, on identifie sur les bords s_0 à $\frac{1}{2}s_1$. On obtient ainsi une surface Σ_1 homéomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.

- Définissons $\pi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ continue surjective par

$$\pi_1|_{\overline{Q}(0)} = \text{id}, \quad \pi_1|_{\overline{Q}(1)}(s_1, \theta) = (s_0, t_1),$$

où t_1 est l'angle qu'on a éclaté pour insérer ce quartier. De plus, $\pi_1|_{\overline{Q}(0)}$ est injective sauf sur les rayons éclatés, donc on peut parler de $\Sigma_0 \subset \Sigma_1$.

- Définissons $F_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ continue surjective par

$$F_1|_{\Sigma_0} = F_0, \quad F_1|_{\overline{Q}(1)} = \text{id} : \overline{Q}_j^i(1) \longrightarrow \overline{Q}_j^i(0).$$

Cette application définit un revêtement ramifié de degré 3.

- On pose

$$K_1 = F_1^{-1}(K_0) \approx K_0 \cup \left(\bigcup K(P_i) \right) / (\alpha'_i \sim \alpha_i).$$

Alors $\pi_1 : K_1 \rightarrow K_0$ est surjective.

- Supposons $(\Sigma_{n-1}, \pi_{n-1}, F_{n-1}, K_{n-1})$ construit pour un $n > 0$ fixé.

$F_{n-1}^{-n}(\{\alpha\})$ est composé de 3^n points dont $2 \cdot 3^{n-1}$ sont nouveaux. Soit α_n l'un d'eux. Il existe un unique i tel que $\alpha_n \in Q^i$. Il y a q rayons qui y aboutissent. On les éclate en deux pour y insérer une copie de $Q^{1-i}(0)$ de telle sorte que les voisinages de $F_{n-1}(\alpha_n)$ et α_n soient homéomorphes. Ces nouveaux quartiers fônt partie de $Q(n) = Q^i(n) \cup Q^{1-i}(n)$. On les recolle de la façon suivante : si on doit coller $Q(n)$ à $Q(n-p)$, $0 < p \leq n$, on paramètre les rayons par leur potentiel; si s_n et s_{n-p} sont des potentiels qui vivent dans $Q(n)$ et $Q(n-p)$ respectivement, alors on identifie sur les bords $s_n/2^n$ à $s_{n-p}/2^{n-p}$.

Cette procédure conduit à une surface Σ_n homéomorphe à \mathbb{S}^2 .

- Définissons $\pi_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$ continue surjective par

$$\pi_n|_{\Sigma_{n-1}} = \text{id}, \quad \pi_n|_{\overline{Q}(n)}(s_n, \theta) = (s_{n-p}, t_n),$$

où t_n est l'angle qui a été éclaté pour insérer ce quartier. De plus, $\pi_n|_{\Sigma_{n-1}}$ est injective sauf sur les rayons éclatés, donc on peut parler de $\Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n$.

- Définissons $F_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$ continue surjective par

$$F_n|_{\Sigma_{n-1}} = F_{n-1}, \quad F_n|_{\overline{Q}(n)} = \text{id} : \overline{Q}_j^i(n) \longrightarrow \overline{Q}_j^i(n-1).$$

Cette application définit un revêtement ramifié de degré 3. De plus, on a la relation suivante : $\pi_{n-1} \circ F_n = F_{n-1} \circ \pi_n$.

- On pose

$$K_n = F_{n-1}^{-1}(K_{n-1}) \approx K_{n-1} \cup \left(\bigcup K(P_i) \right) / (\alpha_n \sim \alpha_i).$$

Alors $\pi_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ est surjective.

- On pose

$$\Sigma_\infty = \varprojlim (\Sigma_n, \pi_n).$$

D'après la proposition 9.2, Σ_∞ est homéomorphe à \mathbb{S}^2 .

On définit $F : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$ par

$$F(\{x_n\}_{n \geq 0}) = \{F_{n+1}(x_{n+1})\}$$

ainsi que

$$K = \varprojlim (K_n, \pi_n) \quad (\subset \Sigma_\infty).$$

L'application F est bien définie car $\pi_{n-1} \circ F_n = F_{n-1} \circ \pi_n$. De même, l'existence de K provient de ce que $\pi_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ est continue surjective.

F est donc un revêtement ramifié de degré 3.

PROPOSITION 10.1. — *L'application $F : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$ est un croisement topologique en α des P_i en α_i .*

Démonstration. — Les conditions (CT₁), (CT₂) et (CT₃) sont automatiquement satisfaites par construction. La condition (CT₅) peut être vérifiée comme suit. On considère sur Σ_0 la métrique induite par la métrique sphérique sur chaque partie. Si on dispose d'une métrique sur Σ_{n-1} , alors on la reporte sur Σ_n là où Σ_{n-1} est bien définie, et sur chaque portion rajoutée, on considère la métrique sphérique divisée par 2^n . Le dernier point résulte de la proposition 11.1. \square

On peut étendre cette définition à des polynômes de degrés différents en lissant les discontinuités apparues au voisinage des rayons de α du fait de la différence de degré : on se ramène ainsi à une application

$$F : \Sigma_0 \setminus \{\text{rayons aboutissant en } F^{-1}(\alpha)\} \longrightarrow \Sigma_0.$$

11. Propriétés.

PROPOSITION 11.1. — *On note $K(F) = \{x \in \Sigma_\infty ; F^p(x) \not\rightarrow \infty\}$. Alors $K(F) = K$.*

Démonstration. — On a $F(K) \subset K$ par définition, donc $K \subset K(F)$. Réciproquement, soit $x = \{x_n\} \in \Sigma_\infty \setminus K$, i.e. $s_0(x_0) > 0$. Ou bien $x_1 \in \Sigma_0$, alors $s_1(x_1) = s_0(x_0)$ et donc $s_0(F_1(x_1)) = 2s_0(x_0)$; ou bien $x_1 \notin \Sigma_0$ et alors $s_1(x_1) = 2s_0(x_0)$ et donc $s_0(F_1(x_1)) = s_1(x_1) = 2s_0(x_0)$. Par suite, $F^p(x) \rightarrow \infty$. \square

PROPOSITION 11.2. — *Le compact $K(F)$ est localement connexe si et seulement si $K(P_1)$ et $K(P_2)$ le sont.*

Démonstration. — On suppose que $K(P_1)$ et $K(P_2)$ sont localement connexes. En ce cas, K_0 est aussi localement connexe, et on peut montrer que pour tout $n > 0$, K_n est localement connexe. $K(F)$ étant la limite projective des K_n qui sont compacts connexes et localement connexes, il s'ensuit qu'il est aussi localement connexe.

Réciproquement, montrons que si $K(F)$ est localement connexe, alors $K(P_1)$ et $K(P_2)$ le sont aussi. Traitons le cas de $K(P_1)$, l'autre cas se déduisant de la même façon. On définit $\iota : K(P_1) \rightarrow K(F)$ par $\iota(x) = (x)_{n \geq 0}$. Cette application est un homéomorphisme sur $\iota(K(P_1)) = L$. Il suffit de montrer que L est localement connexe. On considère aussi $\varpi : K(F) \rightarrow L$ définie par $\varpi((x_n)) = \iota(x_0)$ si $x_0 \in K(P_1)$ et sinon $\varpi((x_n)) = \iota(\alpha_1)$. Cette application est continue surjective et à fibres contractiles.

Soit $x = (x_n) \in L$. On considère un système de voisinages connexes (U^k) de x dans $K(F)$.

ASSERTION. — *Pour tout k , on a $\varpi(U^k) = U^k \cap L$.*

Admettons un instant cette assertion : on en déduit alors que $(U^k \cap L)$ est un système de voisinage de x dans L d'une part (topologie induite), et que chaque $U^k \cap L$ est connexe d'autre part (image d'un connexe par une application continue). Par suite, L est localement connexe, et $K(P_1)$ aussi.

Il est clair que $U^k \cap L \subset \varpi(U^k)$, car la restriction de ϖ à L est l'identité. Inversement, soit $y \in U^k \setminus L$; alors $\varpi(y) = \iota(\alpha')$, où $\alpha' \in P_1^{-n}(\alpha_1)$. Or ce point est un point de coupure de $K(F)$, i.e. $K(F) \setminus \{\iota(\alpha')\}$ n'est pas connexe. Par suite, si $\iota(\alpha') \notin U^k$ alors U^k ne peut être connexe et donc on aboutit à une contradiction. Par conséquent $\varpi(U^k) \subset U^k \cap L$, ce qui montre l'assertion. \square

Invariant combinatoire. — Comme dans le cas des croisements holomorphes, on peut associer à un croisement topologique une application κ qui conserve l'ordre dans lequel les composantes de $K(P_1) \setminus \{\alpha_1\}$ et $K(P_2) \setminus \{\alpha_2\}$ au voisinage de α sont alternées.

12. Classe topologique des croisements.

Commençons par vérifier que si R est un croisement holomorphe, alors il est aussi un croisement topologique : les conditions (CT_1) , (CT_2) et (CT_3) proviennent de (C_1) , (C_2) et (C_3) ; la condition (CT_4) est toujours vraie pour un polynôme; enfin, (CT_5) provient de la proposition suivante.

PROPOSITION 12.1. — *Soient f une fraction rationnelle et K un compact disjoint de la fermeture de l'ensemble postcritique de f . Si f^n envoie K_n sur K par un homéomorphisme pour $n \geq 1$, alors soit (a) $\text{diam } K_n \rightarrow 0$, soit (b) K est contenu dans un domaine de rotation périodique de f .*

On se donne deux revêtements ramifiés sur la sphère de Riemann (f, α_f, κ_f) et (g, α_g, κ_g) qui vérifient la définition du croisement topologique de (P, α_P) et (Q, α_Q) . Le théorème 3 (iii) s'énonce ainsi :

PROPOSITION 12.2. — *Si $\kappa_f \sim \kappa_g$, alors il existe $\varphi : K_f \rightarrow K_g$, homéomorphisme qui conjugue f et g .*

Au lieu de montrer cette proposition, on établira la suivante. On verra que la démonstration ne fait intervenir que les conditions (CT₁)–(CT₅), ce qui démontrera du coup la proposition 12.2.

PROPOSITION 12.3. — Soit $R = P_1 \bowtie P_2$, on note

$$K_0 = \phi_1(K(P_1)) \cup \phi_2(K(P_2)), \quad K_n = R^{-n}(K_0).$$

Alors, pour tout $n > 0$, il existe $\pi_n : K(R) \rightarrow K_{n-1}$ continue surjective et à fibres connexes tel que $K(R)$ soit homéomorphe à $\varprojlim (K_n, \pi_n)$.

Cette proposition et la proposition 11.2 montrent le corollaire 4. On commence par un lemme :

LEMME 12.4. — Sous les hypothèses de la proposition 12.3, $(K_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de compacts connexes de $K(R)$.

La preuve de 12.4 est contenue dans celle du lemme 5.3.

Démonstration de (12.3). — On définit $\pi_n : K(R) \rightarrow K_{n-1}$ comme suit. Si $z \in K_{n-1}$ alors on pose $\pi_n(z) = z$. Sinon, notons $L_n(z)$ la composante de $K(R) \setminus K_{n-1}$ qui contient z . Le bord de $L_n(z)$ dans $K(R)$ est un point $\alpha' \in (\bigcup_k R^{-k}(\{\alpha\})) \cap K_{n-1}$; on définit $\pi_n(z) = \alpha'$.

La fonction π_n vérifie les propriétés requises et on pose $K = \varprojlim (K_n, \pi_n)$.

On définit

$$\varpi : K(R) \longrightarrow K, \quad x \longmapsto \{\pi_n(x)\}.$$

• L'application ϖ est continue. Ceci découle du lemme suivant :

LEMME 12.5. — Les applications $\pi_n : K(R) \rightarrow K_{n-1}$ sont continues.

Démonstration. — Pour $n \geq 1$, posons $L_n = \overline{K(R) \setminus K_{n-1}}$ et appelons $L_n(z)$ la composante connexe de L_n contenant z . π_n est localement constante sur L_n . Considérons une suite $\{z_p\}$ de $K(R)$ convergeant vers z . Supposons que $\pi_n(z_p)$ ne converge pas vers $\pi_n(z)$. Alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut se ramener à l'un des trois cas suivants : soit la suite est incluse dans une composante connexe de L_n , soit elle est dans K_{n-1} , soit chaque élément est dans une composante connexe différente de L_n . On va aboutir à une contradiction en montrant que, dans ces trois cas, la suite converge vers $\pi_n(z)$.

Dans le premier cas, on a $z \in L_n(z_p)$ car $L_n(z_p)$ est compact, et comme l'application y est constante, on a la continuité. Dans le second cas, $z \in K_{n-1}$ et

$$\pi_n(z_p) = z_p \longrightarrow z = \pi_n(z).$$

Enfin, dans le dernier cas, on montre que $\text{diam}(L_n(z_p)) \rightarrow 0$ car ils se déduisent tous d'un nombre fini de compacts par isomorphisme, et ils ne sont pas contenus dans un domaine de rotation (voir proposition 12.1). Par suite, $|z_p - \pi_n(z_p)| \rightarrow 0$, et on est ramené au cas précédent. \square

- Pour montrer l'injectivité, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 12.6. — *Pour tout $z \in K(R)$, $\pi_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$.*

L'injectivité est alors immédiate car la suite ne converge qu'en un seul point.

- Pour la surjectivité, on considère $i_n : K_n \rightarrow K$ telle que

$$y_p = y, \quad n < p, \quad y_p = \pi_p^n(y).$$

On a $\pi_n \circ i_n = \text{id}_{K_n}$ et $\cup i_n(K_n)$ est dense dans K . En effet, si $x = \{x_n\}$, $i_n(x_n)$ tend vers x . Par suite, $\varpi(K(R)) \supset \cup i_n(K_n)$ qui est dense et $\varpi(K(R))$ est fermé, d'où la surjectivité.

On a donc montré la proposition modulo le lemme 12.6. □

Démonstration de (12.6). — Si $z \in \cup K_n$, alors la suite est constante à partir d'un certain rang. Supposons maintenant que z soit dans l'adhérence. On note $L_n(z)$ la composante connexe de z dans $K(R) \setminus K_{n-1}$ avec le point $\{\pi_n(z)\}$, ce qui le rend compact. La suite $\{L_n(z)\}$ est une suite décroissante de compacts connexes, donc $\cap L_n(z)$ est un compact connexe. Par la condition (CT₅), le diamètre de L_n tend vers zéro, donc $\cap L_n(z) = \{z\}$. □

REMARQUE. — Cette démonstration montre aussi que $K(R)$ est toujours localement connexe en tout point de X_R (cf. prop. 5.5).

IV. Critère de dévissage

Dans cette partie, nous allons chercher à suivre un chemin inverse de celui suivi dans les chapitres précédents : on se donne un polynôme R (avec $K(R)$ connexe) et on étudie l'existence d'autres polynômes dont il serait le croisement. Il est nécessaire de supposer que R est de degré $d \geq 3$, et qu'il admet un point fixe α de nombre de rotation p/q avec $m \geq 2$ cycles de rayons. Il s'agit alors de trouver des polynômes figurant dans R de façon distincte et d'examiner si leur croisement définit R . En fait, on montrera que ce critère constitue une condition nécessaire pour être un croisement, et qu'il constitue aussi une condition suffisante dans le cas où le point de croisement est répulsif.

13. Partitions associées à un polynôme.

Étant donné un polynôme R , on lui associe une suite de partitions de $\overline{\mathbb{C}}$ de la façon suivante : les m q rayons aboutissant à α forment un graphe Γ_0 . On note

$$\Gamma_n = R^{-n}(\Gamma_0).$$

On écrit

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_0 = \bigcup_{1 \leq i \leq m} Q_0^i(0)$$

de manière que, si Δ est un voisinage de α , alors $R(Q_0^i(0) \cap \Delta) \subset Q_0^i(0)$ pour chaque i .

À chaque $n \geq 1$, on associe une partition de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_n$ où les éléments sont $Q_n^i(k)$, $0 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq m$, et qui ont les propriétés suivantes :

- $R(Q_n^i(k)) = Q_{n-1}^i(k-1)$ si $k \geq 1$;
- $R(Q_n^i(0)) = Q_{n-1}^i(0)$;
- $\overline{Q_n^i(0)}$ est connexe, contient α dans son bord, et $\overline{Q_n^i(0)} \cap \overline{Q_n^i(k)} = \emptyset$ si $k \neq 0$.

REMARQUE. — Cette partition est fondée sur les mêmes idées que les *puzzles* de Branner-Hubbard-Yoccoz (voir [BH], [Hu]).

14. Condition nécessaire.

PROPOSITION 14.1. — *Soit R un polynôme de degré $d_R \geq 3$. Si R réalise un croisement, alors tous les points critiques se trouvent dans*

$$\widehat{Q} = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{1 \leq i \leq m} \overline{Q_n^i(0)}.$$

Démonstration. — Si R est un croisement alors $\widehat{Q} \cap K(R) = N_R$, le noyau de R qui contient tous les points critiques. \square

15. Obtention de figurants.

Dans cette section, on supposera que α est répulsif, car la seule manière efficace d'exhiber des figurations de polynômes est d'utiliser les applications à allure polynomiale.

On se fixe un i et on tronque les ouverts $Q_n^i(0)$ par des équipotentielles η/d^n afin d'obtenir des ouverts bornés D_n^i , où $\eta > 0$ est petit. On considère la restriction $R : D_1^i \rightarrow D_0^i$, holomorphe propre. Le degré de cette application est supérieur à 2, car sinon, tous les points de $Q_1^i(0)$ seraient attirés par l'infini, ce qui est impossible.

Pour rendre cette restriction à allure polynomiale, il faut changer un peu la définition des domaines de R . En suivant la démonstration du théorème de modulation (voir [Ha4]), on remplace les bouts de rayons par des branches quadratiques en coordonnée log-Böttcher du type $\{(s, t) \in [0, \eta] \times \mathbb{T}, s^2 = t\}$, pour que ces domaines ne contiennent plus que α dans leur bord commun. Soient A'_i et A_i ces domaines (tels que $R : A'_i \rightarrow A_i$, $A'_i \subset A_i$ et $\partial A_i \cap \partial A'_i = \{\alpha\}$).

Ceci étant, comme α est répulsif, on considère un petit disque linéarisable Δ au voisinage de α et on note Δ' l'image réciproque de Δ contenant α . On a $\Delta' \subset \subset \Delta$ et si on note $U_i = A_i \cup \Delta$, U'_i la composante de $R^{-1}(U_i)$ contenant A'_i , alors $f_i = (U'_i \xrightarrow{R} U_i)$ est une application à allure polynomiale hybridement équivalente à un polynôme P_i .

Si $K(f_i)$ n'est pas connexe, alors il existe un point critique dans D_1^i qui s'échappe de cet ensemble. Or, $\widehat{D}^i = \bigcap_n D_n^i$ est invariant positivement, donc ce point critique n'est pas dans \widehat{Q}^i et R ne peut pas être un croisement. Si $K(f_i)$ est connexe, alors $\widehat{Q}^i = K(f_i)$.

REMARQUE. — Si α est parabolique, \widehat{Q}^i est le candidat pour être l'ensemble de Julia d'un polynôme figurant dans R .

16. Figurants/figuré.

Dans ce paragraphe, on se donne des polynômes P_1, \dots, P_m figurant dans R et satisfaisant (C_2) et ayant leurs ensembles de Julia connexes (cf. ci-dessus). On cherche maintenant à savoir sous quelle(s) condition(s) R est le croisement de ces polynômes. Il ne reste donc que la condition sur les degrés à vérifier :

$$\sum (\deg P_i - 1) = \deg R - 1.$$

PROPOSITION 16.1. — *Si tous les points critiques sont dans \widehat{Q} , alors (R, α) réalise un croisement.*

Démonstration. — Si tous les points critiques sont dans \widehat{Q} , alors tous les ensembles de Julia $K(f_i)$ sont connexes et $\widehat{Q} = \bigcup K(f_i)$, donc (C_3) est vraie. \square

Relation d'ordre sur la grande orbite de α . — On définit une relation d'ordre partiel. Le point α est le plus grand. Soient α_1, α_2 deux préimages de α ; on dit que $\alpha_1 < \alpha_2$ s'il existe deux rayons aboutissant à α_2 et séparant α_1 de α .

COROLLAIRE 16.2.

(i) *Soient R un polynôme de degré $d_R \geq 3$ muni de sa partition en α et $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$ des polynômes figurant en α . Si la relation d'ordre sur les préimages de α ne classe que des points de rang différent, alors R est un croisement.*

(ii) *Soit R un polynôme de degré $d_R \geq 2$, $R^{\circ n}$ n'est jamais un croisement.*

Démonstration. — (i) Si R n'est pas un croisement alors il existe un point critique $\omega \notin \widehat{Q}$. On distingue deux cas.

• Le point ω est dans une composante connexe Q d'un $Q_n^i(k)$, pour $k > 0$. Il y a dans ∂Q un unique point maximal α' , et $\alpha' \neq \alpha$. Comme $\omega \in Q$ et

$R : Q \rightarrow R(Q)$ est propre, son degré est au moins 2. Par suite, $R^{-1}(R(\alpha')) \cap \partial \widehat{Q}$ contient des points classés de même rang.

- Le point ω est une préimage de α ; on considère la fermeture de la réunion des composantes connexes de Q_n pour n assez grand qui contiennent ω dans son bord. Comme ci-dessus, on exhibe deux points de même rang qui sont classés.

(ii) Le point α est de nombre de rotation p/q avec m cycles de rayons qui y aboutissent. On note $V_0, V_1, \dots, V_{mq-1}$ les composantes de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma^{-1}(\alpha))$, classés dans l'ordre cyclique. Par suite, au voisinage de α , on a $R(V_i) = V_{i+mp}$ dans $\mathbb{Z}/(mq\mathbb{Z})$. On note

$$\mathcal{C}(i) = \{i + pm\ell \bmod mq; 0 \leq \ell < q\}$$

les «cycles». Posons

$$A_n = R^{-n}(\{\alpha\}) \setminus R^{-(n+1)}(\{\alpha\}).$$

Pour chaque i il existe au moins un point de A_1 dans $\mathcal{C}(i)$. Supposons que l'un d'eux (α') soit dans V_0 . Alors il existe un point critique ω dans V_0 , et qui est compris dans le domaine bordé par des rayons qui aboutissent à α et à α' .

Soient $n \geq 2$ et $k' = \text{pgcd}(q, n)$. On note $q'k' = q$ et $n'k' = n$. Par suite, α est de nombre de rotation pn'/q' avec $k'm$ cycles de rayon pour R^n . On note les cycles

$$\mathcal{C}'(i) = \{i + pmk'\ell' \bmod mq; 0 \leq \ell' < q'\}.$$

On peut trouver deux points

$$\omega' \in R^{-(n-1)}(\{\omega\}) \cap \mathcal{C}(1), \quad \omega'' \in R^{-(n-1)}(\{\omega\}) \cap \mathcal{C}(0)$$

et construire deux suites $(\alpha'_j) \in \prod_{1 \leq j \leq n-1} A_j$ et $(\alpha''_j) \in \prod_{1 \leq j \leq n-1} A_j$ telles que $\omega' < \alpha'_n < \alpha'_{n-1} < \dots < \alpha'_1$ et $\omega'' < \alpha''_n < \alpha''_{n-1} < \dots < \alpha''_1$. On a

$$(R^n)'(\omega') = (R^n)'(\omega'') = 0,$$

et ou bien $R^n(\omega') \notin \mathcal{C}(1)$, ou bien $R^n(\omega'') \notin \mathcal{C}(0)$. Par suite, au moins l'un des deux n'est pas dans $Q_n(0)$. Donc R^n ne peut être un croisement. \square

REMARQUE. — La condition (i) est suffisante, mais non nécessaire : soit $P_0(z) = z \cdot \exp i\pi/2 + z^2$; on note $P = P_0^2 : P^{-1}(\{\alpha\}) - \{\alpha\}$ contient des points classés. Si donc on croise P avec un autre polynôme alors on a un croisement avec des points de même rang classés.

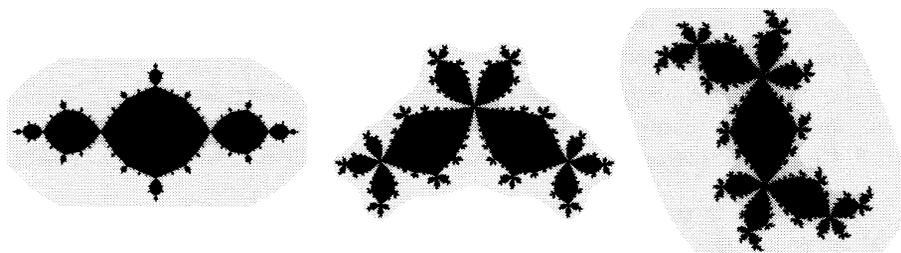


Figure 9. Auto-croisement de la basilique et du lapin à trois oreilles

EXEMPLE. — Soit c super-attractif de période 4 et de nombre de rotation $\frac{1}{4}$. On considère $R = P_c^2$, polynôme de degré 4 (Fig. 9). La chirurgie montre que P_{-1} figure deux fois dans R . Cependant, si R était le croisement de -1 par lui-même, il serait de degré 3, et non 4. On remarque que l'un des points critiques n'est pas dans $\tilde{Q}(0)$. En définitive, si R réalisait un croisement, il s'agirait de $P_{-1} \times P_{-1}$, ce qui n'est pas le cas.

Partie V. Dépendance par rapport aux paramètres

17. Sur les familles de croisements.

On considère $\tilde{\Lambda}$ et \tilde{M} deux surfaces de Riemann simplement connexes, $(P_\lambda)_{\lambda \in \tilde{\Lambda}}$ et $(Q_\mu)_{\mu \in \tilde{M}}$ deux familles analytiques de polynômes de degré fixé, définis à $\text{Aut}(\mathbb{C})$ près.

Si un point répulsif appartient à un ensemble de Julia non connexe, on dira qu'il a pour nombre de rotation p/q s'il a un cycle de q rayons qui aboutit en ce point et si l'application de premier retour au voisinage de ce point fait permuter les rayons par une rotation combinatoire d'angle p/q . Par suite, si P_{λ_0} (resp. Q_{μ_0}) a un point fixe répulsif de nombre de rotation p/q alors c'est le cas pour un voisinage de λ_0 (resp. μ_0).

On se fixe p/q et on suppose qu'il existe deux tels paramètres λ_0 et μ_0 . On note Λ (resp. M) la composante connexe de

$$\left\{ \lambda \in \tilde{\Lambda}; \exists \alpha_\lambda \text{ fixe répulsif pour } P_\lambda \text{ et de nombre de rotation } p/q \right\}$$

(resp. $\left\{ \mu \in \tilde{M}; \exists \alpha_\mu \text{ fixe répulsif pour } Q_\mu \text{ et de nombre de rotation } p/q \right\}$),

qui contient λ_0 (resp. μ_0). On définit aussi

$$\mathcal{C}_\Lambda = \{ \lambda \in \Lambda; K(P_\lambda) \text{ soit connexe} \}, \quad \mathcal{C}_M = \{ \mu \in M; K(Q_\mu) \text{ soit connexe} \}.$$

On suppose que ces derniers sont relativement compacts dans leur espace ambiant respectif.

On se fixe une combinatoire κ et on définit $R_{\lambda,\mu}$ le croisement de P_λ et Q_μ selon κ , où $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_\Lambda \times \mathcal{C}_M$. Ces polynômes $R_{\lambda,\mu}$ vivent dans un espace de polynômes de degré fixé et à $\text{Aut}(\mathbb{C})$ près.

Le résultat le plus général qu'on puisse obtenir est sans doute le suivant :

PROPOSITION 17.1.

(i) Si $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$ sont dans des composantes stables de \mathcal{C}_Λ et \mathcal{C}_M respectivement, alors le croisement est holomorphe au voisinage de $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$.

(ii) Sinon, tout point d'accumulation R de $R_{\lambda,\mu}$ quand $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda_\infty, \mu_\infty)$ est le croisement de polynômes P et Q quasiconformément conjugués à P_{λ_∞} et Q_{μ_∞} respectivement.

Démonstration. — (i). On note X et Y les composantes stables de P_{λ_∞} et Q_{μ_∞} respectivement. On considère tout d'abord X' (resp. Y') l'ouvert dense de polynômes ayant mêmes relations critiques au sens de [MSS]. Chaque composante de X' (resp. Y') est paramétrée par une variété holomorphe. Comme chaque espace est de dimension 1, et comme les $X \setminus X'$ (resp. $Y \setminus Y'$) représentent une singularité effaçable pour les applications conformes, on obtient des paramétrages sur X et Y holomorphes. En ce qui concerne l'espace des croisements, on peut décomposer l'espace des déformations de $R_{\lambda_\infty, \mu_\infty}$ en produit provenant de P_{λ_∞} et Q_{μ_∞} (cf. proposition 5.6) : on obtient ainsi des paramétrages holomorphes avec des bases communes, ce qui permet d'obtenir, par composition, la dépendance holomorphe.

(ii). Cette preuve suit la méthode employée par B. Branner et N. Fagella pour démontrer la continuité de chirurgies dans [BF].

D'après la construction des croisements, les dilatations des applications quasiconformes dépendent essentiellement de la nature des points fixes α_λ et α_μ . En effet, soit $V \times W \subset \Lambda \times M$ un voisinage compact de $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$. Le «Log» des multiplicateurs des points α_λ et α_μ est borné, donc le module d'ouverture des quotients des ensembles de Julia aussi. Par suite, dans la construction du croisement on peut choisir une unique classe externe pour tous les couples $(\lambda, \mu) \in V \times W$. Il résulte de ce choix que les extensions obtenues par la proposition 2.1 peuvent être choisies de telle sorte que les dilatations soient uniformément majorées.

Soit (λ_n, μ_n) une suite de $\mathcal{C}_\Lambda \times \mathcal{C}_M$ convergeant vers $(\lambda_\infty, \mu_\infty)$. Soit R un point d'accumulation de R_n . Pour tout n , il existe donc des figurations rigides K -quasiconformes

$$\begin{aligned} \varphi_n : \text{vois}(K(P_n)) &\longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_n \circ P_n &= R_n \circ \varphi_n, \\ \psi_n : \text{vois}(K(Q_n)) &\longrightarrow \mathbb{C}, & \psi_n \circ Q_n &= R_n \circ \psi_n. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer les résultats de compacité des applications quasi-conformes de dilatations uniformément majorées, en normalisant les polynômes (*e.g.* moniques centrés). En passant à la limite dans les semi-conjugaisons, on montre que R est le croisement de deux polynômes P et Q quasiconformément conjugués à P_{λ_∞} et Q_{μ_∞} . En effet, si les limites ne sont pas hybrides, on peut appliquer le théorème 1.1 afin d'obtenir les polynômes P et Q . Ceux-ci sont donc quasiconformément conjugués à P_{λ_∞} et Q_{μ_∞} , et figurent de manière rigide dans R par définition (C_1). On obtient (C_2) par continuité. Enfin, les degrés sont constants, d'où (C_3). \square

REMARQUE. — Pour s'assurer de la continuité, il faut vérifier que la conjugaison peut être promue en application conforme, ce qui est rarement vrai, voir par exemple le chap. III de [DH2].

PROPOSITION 17.2 (conditions suffisantes pour la continuité).

(a) *En plus des hypothèses faites dans l'introduction de ce paragraphe précédant la proposition 17.1, on suppose que pour chaque famille de polynômes P_λ et Q_μ , les espaces de modules associés sont contenus dans Λ et M respectivement. Alors les croisements varient continûment.*

(b) *On suppose qu'il existe une application holomorphe $\mu(\lambda)$ et une famille analytique de polynômes $(R_\nu)_{\nu \in N}$ telles que les croisements $R_{\lambda, \mu(\lambda)}$ soient contenus dans N ; si N est de dimension complexe 1 alors $\lambda \mapsto R_{\lambda, \mu(\lambda)}$ est continue.*

(c) *Si Q est fixé, et $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ vérifie (a), alors le croisement est continu.*

Démonstration. — (a) D'après la proposition 17.1, il suffit de vérifier la continuité pour des polynômes instables. En effet, si l'un des polynômes est stable, *e.g.* P_{λ_∞} , on peut définir une composante holomorphe (de dimension 1), et il suffit de montrer que la seconde application à allure polynomiale de R est hybride équivalente à Q_{μ_∞} . Ceci découle du fait que Q_∞ est instable, donc unique dans \mathcal{C}_M , et quasiconformément conjugué à une restriction de R . Si les deux sont instables, l'argument ci-dessus permet aussi de conclure.

(b) De même, pour les composantes stables de R_ν , on peut définir une application holomorphe (*cf* proposition 17.1). Pour les autres polynômes, il suffit de remarquer que si $R_{\lambda_\infty, \mu_\infty}$ est instable dans N , alors toute conjugaison quasi-conforme avec un polynôme limite dans N implique que ces polynômes sont affinement conjugués.

(c) Il suffit de vérifier que Q est toujours dans la dynamique du croisement, ce qui est le cas puisque la conjugaison est hybride et que la base, *i.e.* $K(Q)$, ne change pas. \square

18. Application au degré 3.

Soit $P_c : z \mapsto z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, la famille quadratique. On considère le croisement de P_0 avec P_c , $c \in M$.

Pour fixer les notations, on considère les polynômes de degré 3 ayant un point fixe superattractif. On a affaire à la famille

$$Q_a : z \mapsto z^3 - 3a^2z + 2a^3 + a.$$

On note

$$C_0(3) = \{a \in \mathbb{C}; K(Q_a) \text{ connexe}\}.$$

Il s'agit de la famille étudiée par D. Faught [Fa] dans sa thèse.

PROPOSITION 18.1. — *L'ensemble M s'injecte deux fois dans $C_0(3)$ par croisements.*

Démonstration. — On note φ_0 l'application induite par les croisements. Il est clair que φ_0 est injective, car deux valeurs différentes de c conduisent à des polynômes différents.

Si on cherche pour quelle(s) valeur(s) de a , Q_a admet deux points fixes superattractifs, on obtient exactement deux valeurs opposées : $\pm i$. En effet, on peut remarquer que Q_a et Q_{-a} sont conjugués par $z \mapsto -z$. Par conséquent, en fixant un point base, on peut obtenir deux fonctions φ_0 .

En appliquant la proposition 17.2, on en déduit que φ_0 est continue sur $M \setminus \{\frac{1}{4}\}$. Comme P_0 et $P_{1/4}$ sont géométriquement finis le théorème 1 (iii) montre l'existence de leur croisement.

Pour montrer la continuité en $\frac{1}{4}$, on considère tout d'abord la cardioïde centrale $W \subset M$. Comme W est paramétrée par le multiplicateur, on en déduit que si $c \in W \rightarrow \frac{1}{4}$ alors toute limite extraite des croisements est un polynôme cubique avec un point fixe super-attractif et un autre parabolique. Comme cet ensemble de polynômes est unique à conjugaison affine près et discret dans la famille (Q_a) , on a unicité de la limite et celle-ci est bien le croisement de P_0 et $P_{1/4}$. Par l'inégalité sur les membres de M de J.-C. Yoccoz (voir [Hu]), on en déduit la continuité en $\frac{1}{4}$ quelque soit la suite $c_n \in M \rightarrow \frac{1}{4}$.

Par suite, φ_0 est continue et bijective sur M , donc un homéomorphisme. \square

En fait, la proposition 17.2 permet de montrer que tant que l'on considère des croisements en des points répulsifs, on a une dépendance continue par rapport aux paramètres, et φ_0 se prolonge en une injection continue φ de $M \setminus \{\frac{1}{4}\} \times M \setminus \{\frac{1}{4}\}$ dans l'ensemble des polynômes cubiques à ensemble de Julia connexe.

On note φ_c la restriction de φ , i.e. des croisements de P_c par $M \setminus \{\frac{1}{4}\}$; si c est géométriquement fini alors φ_c se prolonge à M .

On peut aussi étudier $\varphi_{1/4}$, définie sur les polynômes géométriquement finis; cette application est à valeur dans la famille $z \mapsto z + bz^2 + z^3$. Bien que l'on puisse «voir» qu'il y a bien deux copies de M sur le plan des paramètres qui doivent correspondre aux croisements en β , il est difficile de définir un homéomorphisme, parce que la trace du second polynôme dans le croisement n'est pas à allure polynomiale : la manière de reconnaître les croisements ne semble pas impliquer la continuité par rapport aux paramètres.

REMARQUE. — On peut aussi montrer que pour tout membre $M_{p/q}$ de M ,

$$M_{p/q} \setminus \{\text{racine}\} \times M_{p/q} \setminus \{\text{racine}\}$$

s'injecte par croisements au-dessus du point fixe répulsif de nombre de rotation p/q (voir aussi [EY]).

Appendice A. Figuration

DÉFINITION. — Soient P un polynôme avec $K(P)$ connexe et f une fraction rationnelle, de degré d_P et $d_f \geq 2$ respectivement. On dit que P *figure de manière rigide* dans f s'il existe un voisinage U de $K(P)$ et $\phi : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, continue et injective, tels que $\phi \circ P = f \circ \phi$ sur $K(P)$ et tels que :

- (a) ϕ et ϕ^{-1} préservent les ensembles de mesure nulle;
- (b) $\phi \in W^{1,p}(U)$ pour un $p > 1$;
- (c) $\bar{\partial}\phi = 0$ pp. sur $K(P)$.

Une application est dans l'espace $W^{1,p}$ si elle est dans l'espace L^2 et admet une dérivée au sens des distributions dans l'espace L^p .

De manière générale, on a :

PROPOSITION A.1. — *Si la figuration est rigide, alors $\phi(\overset{\circ}{K}(P)) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus J(f)$. De plus, l'image d'un point superattractif, attractif, parabolique ou de Siegel est un point superattractif, attractif de même multiplicateur, parabolique ou de Siegel respectivement.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Figuration rigide et déformation. — Le but est de montrer que la figuration rigide est une notion permettant d'avoir une «bonne» théorie de la déformation. On commence par rappeler quelques notions sur l'espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle (voir [McS]), puis on montre que la figuration rigide se conduit bien dans ce cadre.

Espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle. — Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. En suivant [McS], on définit les espaces suivants :

- Espace des déformations de f :

$$\text{Def}(f) = \left\{ \mu \in L^\infty(\overline{\mathbb{C}}) ; \|\mu\|_\infty < 1, f^* \left(\mu \frac{d\bar{z}}{dz} \right) = \mu \frac{d\bar{z}}{dz} \right\};$$

- $QC(f) = \{ \varphi : \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{qc} \overline{\mathbb{C}} ; \varphi \circ f = f \circ \varphi \}$;
- $QC_0(f) = \{ \varphi \in QC(f) ; \varphi \text{ isotope à l'identité dans } QC(f) \}$;

• Espace de Teichmüller de f : $QC_0(f)$ est un sous-groupe normal de $\text{Def}(f)$ qui agit comme suit. Soient $\omega \in QC_0(f)$ et $\mu \in \text{Def}(f)$; on pose $\omega \cdot \mu = \omega^* \mu$. On définit alors

$$\text{Teich}(f) = \text{Def}(f)/QC_0(f).$$

Cet espace est une variété complexe, contractile, de dimension finie. Il se décompose en produit de sous-espaces liés aux différents cycles de composantes de Fatou de f et d'éventuel(s) champ(s) de droites f -invariant(s) sur son ensemble de Julia $J(f)$.

- Groupe modulaire de f : $\text{Mod}(f) = QC(f)/QC_0(f)$. Il agit proprement discontinuement sur $\text{Teich}(f)$.

- Espace des modules de f : $R(f) = \text{Teich}(f)/\text{Mod}(f)$. C'est un orbifold qui s'injecte dans l'espace des fractions rationnelles de degré d , à automorphismes près.

La décomposition de $\text{Teich}(f)$ se fait comme suit. Pour toute composante de Fatou Ω de f , on note $\widehat{\Omega}$ l'ouvert Ω privé des grandes orbites des points critiques et des points périodiques.

Soit Ω une composante de Fatou attractive ou parabolique. L'action de f sur $\widehat{\Omega}$ est discrète (c'est un revêtement) et la composante de $\text{Teich}(f)$ associée à Ω est canoniquement isomorphe à l'espace de Teichmüller de $\widehat{\Omega}/(f)$, qui est une surface de Riemann hyperbolique de type fini, à savoir : un tore avec un nombre fini (non nul) d'épointements (cas attractif) ou un cylindre bi-infini avec un nombre (non nul) d'épointements (cas parabolique).

Soit Ω un domaine super-attractif ou un domaine de rotation (disque de Siegel ou anneau de Herman). L'action de f sur Ω induit un feuilletage. Il induit un espace de Teichmüller isomorphe à celui d'un nombre fini d'anneaux ou de disques (hyperboliques) feuilletés, *i.e.* un polydisque.

Enfin, si $J(f)$ est de mesure positive, il est possible que f admette des champs de droites invariants qui donnent une composante de polydisque de dimension égale au nombre de composantes ergodiques de l'action de f sur $J(f)$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION A.2. — *Soit (P, φ) une figuration rigide dans une fraction rationnelle f avec $J(P)$ connexe. Alors, $\text{Teich}(P)$ s'injecte dans $\text{Teich}(f)$.*

Démonstration. — Toute déformation quasiconforme et polynomiale de P se traduit par une forme de Beltrami sur l'intérieur de $K(P)$ et/ou par un champ de droites invariant sur $J(P)$. On transporte ces objets à f par φ , qui est bien défini car φ est conforme à l'intérieur de $K(P)$, dans $W^{1,p}$ et préserve les ensembles de mesure nulle. Si une application ω est isotope à l'identité dans $QC(P)$, alors ω vaut l'identité sur $J(P)$ et l'application $\varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(K(P))}$ se prolonge quasiconformément à $\overline{\mathbb{C}}$ par l'identité, et est clairement isotope à l'identité. Ceci définit donc une application $\text{Teich}(P) \rightarrow \text{Teich}(f)$. L'injectivité se montre en considérant l'application inverse. \square

Classe externe parabolique. — Si (P, φ) est une figuration rigide dans f et qu'il existe un voisinage V de $\varphi(K(P)) = K$ tel que $f(V \setminus K) \cap K = \emptyset$ alors on considère la représentation conforme $R : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ telle que $R(z)/z$ a une limite réelle et positive à l'infini, et on note $h = R \circ f \circ R^{-1}$ qui est bien défini sur un voisinage extérieur de \mathbb{S}^1 . Par réflexion de Schwarz, h se prolonge dans un voisinage annulaire de \mathbb{S}^1 en un revêtement holomorphe de degré d — la *classe externe* de la figuration. Tous les points périodiques de h sont ou bien répulsifs, ou bien paraboliques. On note $X \subset \mathbb{S}^1$ l'ensemble des points paraboliques. Si $X \neq \emptyset$, on parlera de *classe externe parabolique*.

Figuration parabolique canonique. — On dira que φ est une *figuration parabolique canonique* s'il existe des secteurs invariants Σ issus de $(R \circ \varphi)^{-1}(X)$, tels que, pour tout $z \in (U \setminus \Sigma)$, on ait $\varphi \circ P = f \circ P$, i.e. la conjugaison s'étend à un voisinage de $K(P)$ excepté sur un nombre fini de secteurs invariants. Bien qu'on ne sache pas si $K(P)$ est localement connexe, et donc si R^{-1} se prolonge continûment à \mathbb{S}^1 , R^{-1} se prolonge en tous cas aux points de X car ils sont accessibles via des axes attractifs.

THÉORÈME A.3. — *Si (P, φ) est une figuration rigide parabolique, alors il existe ϕ canonique.*

Le reste de cet appendice est dévoué à sa démonstration. La première étape consiste à trouver une pseudo-conjugaison entre $P_0 : z \mapsto z^d$ et h sur un voisinage de \mathbb{S}^1 . Ensuite, il suffit de montrer que cette application se recolle à φ pour en faire un homéomorphisme. Enfin, il faut vérifier que la nouvelle application est bien dans un espace $W^{1,p}$.

La première étape est donnée par le lemme suivant :

LEMME A.4. — Soient $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application \mathbb{R} -analytique parabolique au sens de ci-dessus de degré $d \geq 2$, et $\chi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homéomorphisme tel que $\chi \circ P_0 = h \circ \chi$. On note X l'ensemble des points paraboliques. Alors il existe une extension $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, \mathcal{C}^1 par morceaux, et des secteurs invariants Σ issus de $\chi^{-1}(X)$ tels que :

- (i) χ est un homéomorphisme;
- (ii) chaque secteur invariant se décompose en une réunion de domaines fondamentaux Q_n pour l'action de P_0 ; la dilatation complexe sur Q_n satisfait $K_\chi \asymp n$;
- (iii) sur $\mathbb{C} \setminus (\bigcup_{n \geq 0} P_0^{-n}(\Sigma))$, χ est quasiconforme;
- (iv) pour tout z assez proche de \mathbb{S}^1 et non dans Σ , on a $\chi \circ P_0(z) = h \circ \chi(z)$.

Ce lemme est une adaptation directe du lemme 2.1 de [Ha2].

Soit $B_P : \mathbb{C} \setminus K(P) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ la coordonnée de Böttcher de P . L'application $R \circ \varphi \circ B_P^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ se prolonge en une application continue $\chi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Les points répulsifs étant accessibles, on en déduit que $\chi \circ P_0 = h \circ \chi$ sur \mathbb{S}^1 . On applique donc le lemme A.4.

On considère l'application ϕ définie ainsi :

$$\phi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{si } z \in K(P), \\ R^{-1} \circ \chi \circ B_P(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons repoussé à la fin de cet appendice le fait que ϕ est bien un homéomorphisme (cf. prop. A.7 et cor. A.9).

La condition sur les ensembles de mesure nulle est vraie puisque l'on change l'application par une autre qui est \mathcal{C}^1 par morceaux. Pour montrer que ϕ est dans $W^{1,p}$ pour un $1 < p < 2$, il suffit de montrer que ϕ est dans $W^{1,p}(U \setminus K(P))$ et d'appliquer la proposition A.6 ci-dessous.

LEMME A.5. — Il existe $\frac{1}{2} < p < 1$ tel que l'application ϕ restreinte à $U \setminus K(P)$ est dans $W^{1,2p}$, et K_ϕ est intégrable.

REMARQUE. — Cette condition d'intégrabilité est très faible, et ne permet — en général — ni de résoudre l'équation de Beltrami associée, ni d'avoir un énoncé d'unicité lorsqu'une solution existe (il existe μ telle que K_μ est intégrable sans solution homéomorphe! Voir [Da]).

Cependant, si la classe externe rajoute un point parabolique en un point qui n'est pas accumulé par une orbite critique de l'ensemble de Julia, alors le lemme 3.2 de [Ha2] montre que la figuration canonique est μ -conforme au sens de G. David.

Démonstration. — Comme χ est un homéomorphisme C^1 par morceaux, il suffit d'estimer $\int |\partial_z \phi|^{2p}$. Notons d'abord que $|\partial_z \phi|^{2p} \asymp (K_\phi \cdot \text{Jac } \phi)^p$; du coup, il suffit d'estimer cette norme là où K n'est pas bornée, *i.e.* sur la réunion de tous les secteurs.

Pour simplifier les calculs, nous allons supposer qu'il n'y a un seul secteur S fixe et invariant : tous les autres sont des préimages de S par des itérés de P . Nous écrivons ce secteur comme la réunion de domaines Q_n où $K_\phi \asymp n$. On commence par estimer la norme sur S :

$$\begin{aligned} \int_S |\partial_z \phi|^{2p} &\asymp \int (K_\phi \cdot \text{Jac } \phi)^p \asymp \sum_n n^p \int_{Q_n} (\text{Jac } \phi)^p \\ &\leq \sum_n n^p (\text{Aire } \phi(Q_n))^p (\text{Aire } Q_n)^{1-p} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder.

Si $\phi(S)$ est issu d'un point parabolique avec ν' pétales, alors

$$\text{Aire } \phi(Q_n) \asymp \frac{1}{n^{1+2/\nu'}}.$$

Si S est issu d'un point répulsif, alors $\text{Aire } Q_n \asymp 1/\lambda^{2n}$, où $\lambda > 1$, et

$$\int_S |\partial_z \phi|^{2p} \asymp \sum_n \frac{1}{n^{2p/\nu'}} \frac{1}{\lambda^{2n(1-p)}} < \infty.$$

Si S est issu d'un point parabolique avec ν pétales, alors il existe un entier $k \geq 2$ tel que $\nu' = k\nu$. De plus, $\text{Aire } Q_n \asymp 1/n^{2(1+1/\nu)}$. En ce cas, l'intégrale est convergente si $2(p(1/\nu' - 1/\nu - 1) + 1 + 1/\nu) > 1$, *i.e.* si $p < (k(\nu/2 + 1))/(k(\nu + 1) - 1)$. Mais,

$$\frac{k(\nu/2 + 1)}{k(\nu + 1) - 1} \geq \frac{\nu/2 + 1}{\nu + 1} > \frac{1}{2}.$$

Donc, un tel p existe toujours.

Il reste à propager cette estimation à ses préimages. Pour tout n , on considère un point $z_n \in Q_n$, et on note $w_n = \phi(z_n)$. Chaque Q_n est contenu dans un ouvert sur lequel les branches inverses de P^m sont uniformément univalentes (indépendamment de m et n), ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Koebe. Soit $m > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} \int_{P^{-m}(S)} (K_\phi \text{ Jac } \phi)^p &= \int_S (K_\phi \text{ Jac } \phi \circ P^{-m})^p |(P^{-m})'|^2 \\ &= \int_S (K_\phi \text{ Jac } \phi)^p |(f^{-m})'|^{2p} \cdot |(P^{-m})'|^{2(1-p)} \\ &\asymp \sum_n |(f^{-m})'(w_n)|^{2p} \cdot |(P^{-m})'(z_n)|^{2(1-p)} \int_{Q_n} (K_\phi \cdot \text{Jac } \phi)^p. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{P^{-m}(S)} (K_\phi \cdot \text{Jac } \phi)^p \\ \asymp \sum_n \int_{Q_n} (K_\phi \cdot \text{Jac } \phi)^p \sum_m |(f^{-m})'(w_n)|^{2p} \cdot |(P^{-m})'(z_n)|^{2(1-p)}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_m |(f^{-m})'(w_n)|^{2p} \cdot |(P^{-m})'(z_n)|^{2(1-p)} \\ \leq \left(\sum_m |(f^{-m})'(w_n)|^2 \right)^p \left(\sum_m |(P^{-m})'(z_n)|^2 \right)^{(1-p)}. \end{aligned}$$

Chaque somme est équivalente à une aire finie à une certaine puissance, que l'on peut majorer par la plus grande : on obtient donc une norme finie.

Quant à l'intégrabilité de K_ϕ , on procède de même :

$$\begin{aligned} \int_S K_\phi &\asymp \sum_n n \text{Aire}(Q_n) \asymp \sum_n n/\lambda^{2n} < \infty \quad \text{si répulsif,} \\ &\asymp \sum 1/n^{1+1/\nu} < \infty \quad \text{si parabolique.} \end{aligned}$$

Et

$$\int_{P^{-m}S} K_\phi = \int_S K_\phi |(P^{-m})'|^2 \asymp \sum_n \text{Aire } P^{-m}(Q_n) \int_{Q_n} K_\phi,$$

d'où

$$\sum_m \int_{P^{-m}S} K_\phi \leq \left(\int_S K_\phi \right) \cdot \sup_n \text{Aire} \bigcup_m P^{-m}(Q_n) < \infty. \quad \square$$

Recollements dans des espaces de Sobolev. — On adapte la démonstration du lemme de Rickman de A. Douady et J.H. Hubbard (lemme 2 de [DH2], partie 1).

LEMME A.6. — Soient φ et ψ deux applications continues définies sur un ouvert borné U . On suppose qu'il existe un compact $K \subset U$ tel que $\varphi|_K = \psi|_K$. Si $\varphi \in W^{1,p}(U)$ et si $\psi \in W^{1,p}(U - K)$, alors $\psi \in W^{1,p}(U)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que les dérivées partielles sont dans cet espace. On note $u = \text{Re}(\psi - \varphi)$, et on considère $\eta_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, C^1$, telle que :

- $\eta_n(x) = x + \text{sgn}(x)/n$ pour $|x| > 2/n$;
- $\eta_n(x) = 0$ si $|x| < 1/(2n)$;
- $|\eta'_n| \leq 1$ sur \mathbb{R} .

On montre sans mal que la suite $u_n = \eta_n \circ u$ est une suite de Cauchy dans $W^{1,p}$ de limite u . Par suite $\operatorname{Re} \psi \in W^{1,p}$ aussi. On procède de même avec la partie imaginaire. On obtient de plus que $D\psi = D\varphi$ pp. sur K . \square

Extension d'application continue. — Ce paragraphe est une adaptation de la démonstration de X. Buff du théorème qui permet d'obtenir d'une application continue, injective sur un compact, une extension de la restriction au compact en homéomorphisme (voir [Bu, partie 2]).

Soient K_1 un compact connexe plein, et $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme du plan. Posons $K_2 = \varphi(K_1)$. On note Ω_1 et Ω_2 les complémentaires de K_1 et K_2 respectivement. Pour $i = 1, 2$, soit $R_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{D}$ la représentation conforme telle que $R_i(\infty) = 0$ et $R_i'(\infty) > 0$.

L'application φ agit sur les bouts premiers en un homéomorphisme $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ (cf. prop. 5.2, [Mc]).

Notre problème est le suivant : soit $\psi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ un homéomorphisme tel que $\psi|_{\mathbb{S}^1} = \varphi_1$; on définit l'application $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\phi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{si } z \in K_1, \\ R_2^{-1} \circ \psi \circ R_1(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

QUESTION. — *Quand ϕ est-elle continue ?*

Pour apporter une réponse, nous devons d'abord introduire quelques notations. Soit K un compact connexe et plein. On note \widehat{K} l'ensemble des couples (z, γ) , où γ est un accès à $z \in K$. On définit la métrique

$$\widehat{d}((z, \gamma), (z', \gamma')) = \inf_C \operatorname{diam} C$$

où C parcourt l'ensemble des courbes du complémentaire de K qui joignent z à z' par les accès γ et γ' . Il existe une injection naturelle $\iota : \widehat{K} \rightarrow \mathbb{S}^1$ via l'uniformisante de Riemann $R : \overline{\mathbb{C}} \setminus K \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $R(\infty) = 0$ et $R'(\infty) > 0$.

Si $E \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{U}_z(E) \subset \widehat{K}$ l'ombre portée par E sur K lorsqu'une source de lumière est en $z \notin K$, i.e. il s'agit de l'aboutissement des rayons géodésiques issus de z qui traversent E . Rappelons aussi que $\omega_z(E, \Omega)$ désigne la mesure harmonique de E dans Ω à partir de z . On définit alors la mesure

$$\widehat{\omega}_z(\widehat{E}) = \omega_{R(z)}(\iota(\widehat{E}), \mathbb{D})$$

sur \widehat{K} . Enfin, si $z \notin K$, on note $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, K)$.

Nous pouvons maintenant passer à la résolution de notre problème. L'application φ agit sur \widehat{K} en une application uniformément continue $\widehat{\varphi} : \widehat{K}_1 \rightarrow \widehat{K}_2$.

Soient $z \notin K_1$ et $\kappa > 1$. Soit $\widehat{B} \subset \widehat{K}_1$ l'ensemble des couples (x, γ) où γ est un rayon géodésique hyperbolique issu de z , contenu dans $B(z, \kappa\delta_1(z))$ et qui aboutit à x . On a $\widehat{\text{diam}} \widehat{B} \leq 2\kappa\delta_1(z)$. Par continuité uniforme de $\widehat{\varphi}$, on en déduit que $\widehat{\text{diam}} \varphi(\widehat{B}) \leq \widehat{h}(\delta_1(z))$, où $\widehat{h}(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0^+$. Par suite, il existe un ensemble connexe E de diamètre euclidien au plus $\widehat{h}(\delta_1(z))$ qui joint les points de $\widehat{\varphi}(\widehat{B})$. Notons

$$\widehat{E} = \mathcal{U}_{\phi(z)}(E) \subset \widehat{K}_2.$$

PROPOSITION A.7. — *On garde les notations précédentes. S'il existe $\delta_0, \omega_0 > 0$ tels que, dès que $\delta_1(z) < \delta_0$ on ait $\widehat{\omega}_{\phi(z)}(\widehat{E}) \geq \omega_0$ alors ϕ est un homéomorphisme.*

On s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME A.8 (cf. [Bu]). — *Soient K un compact connexe plein de \mathbb{C} , E un ensemble connexe borné. Soit $z \notin (K \cup E)$; alors :*

$$\sin^2 \left(\widehat{\omega}_z(\mathcal{U}_z(E)) \frac{\pi}{2} \right) \leq \begin{cases} \frac{\text{Cap } E}{\text{Cap } K} & \text{si } z = \infty, \\ c \text{ diam } E \frac{\delta(z)(\delta(z) + \text{Cap } K)}{(\text{dist}(z, E))^2} & \text{si } z \neq \infty, \end{cases}$$

où $c > 0$ est une constante et Cap désigne la capacité logarithmique.

La première assertion est le théorème 11.6 de [Po], et la seconde s'obtient par inversion en utilisant que $\text{Cap } K \asymp \text{diam } K$, pour K connexe.

Démonstration de la proposition A.7. — Il suffit de vérifier la continuité sur le bord de K_1 . Soient $z_0 \in \partial K_1$ et $r > 0$ petit. On considère un point z à distance au plus r de z_0 . Il existe un point $z_1 \in \partial K_1$ tel que $\delta_1(z) = |z - z_1|$. Alors $|z_1 - z_0| \leq 2r$. Donc $|\phi(z_1) - \phi(z_0)| = |\varphi(z_1) - \varphi(z_0)| \leq h(2r)$, où h est un module de continuité de $\varphi|_{K_1}$.

D'autre part, par le lemme A.8, on en déduit que

$$\text{dist}(\phi(z), E) \leq c' \sqrt{\text{diam } E}.$$

Ainsi, comme $\phi(z_1) \in E$,

$$|\phi(z_1) - \phi(z)| \leq C(\text{diam } E),$$

où $C(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. Comme $\text{diam } E \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$, on en déduit que ϕ est continue en z_0 . \square

On retourne à notre étude de la figuration canonique.

PROPOSITION A.9. — *L'application définie au lemme A.4 satisfait les hypothèses de la proposition A.7. En particulier, l'application ϕ définie à l'aide de χ est un homéomorphisme.*

Avant la démonstration de cette proposition, nous allons faire quelques remarques relatives aux objets manipulés ci-dessus.

(a) Si $\kappa \geq 7 + 4\sqrt{3}$ alors $\widehat{\omega}_z(\widehat{B}) \geq \frac{2}{3}$. En effet,

$$\widehat{\omega}_z(\widehat{B}) = \omega_z(B(z, \kappa\delta_1(z)) \cap K_1, B(z, \kappa\delta_1(z)) \setminus K_1),$$

et par le théorème de projection de Beurling,

$$\omega_z(B(z, \kappa\delta_1(z)) \cap K_1, B(z, \kappa\delta_1(z)) \setminus K_1) \geq \omega_0([1/\kappa, 1], \mathbb{D} \setminus [1/\kappa, 1]);$$

le cas extrémal s'obtient pour $\kappa = 7 + 4\sqrt{3}$: un calcul explicite permet de conclure.

(b) L'ombre considérée dans la proposition A.7 correspond à un intervalle de \mathbb{S}^1 car E est connexe. Par φ_1^{-1} , on obtient donc un intervalle I qui contient $\iota_1(\widehat{B})$.

Démonstration. — Soit $r > 0$ assez petit pour que h soit défini sur $\chi\{1 - r \leq |\zeta| \leq 1\}$. Soit

$$A_0 = \{(1 - r) \leq |\zeta| \leq (1 - r)^{1/d}\}.$$

Par compacité et continuité uniforme, il existe une fonction $u :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ telle que si $z \in A_0$ et $I \subset \mathbb{S}^1$ est un intervalle tel que $\omega_z(I, \mathbb{D}) \geq c$ alors $\omega_{\chi(z)}(\chi(I), \mathbb{D}) \geq u(c)$.

Si $|\zeta| > r$ et s'il existe n tel que $h^n(\chi(\zeta)) \in \chi(A_0)$, alors l'estimation est aussi vraie pour ζ , par invariance conforme et par ci-dessus. En effet, $\omega_\zeta(B(\zeta, (1 - |\zeta|)\sqrt{2}) \cap I, \mathbb{D}) \geq \frac{1}{6}$, et par hyperbolicité et distorsion bornée, on en déduit que $\omega_{P^n(\zeta)}(P^n(B(\zeta, (1 - |\zeta|)\sqrt{2}) \cap I), \mathbb{D}) \geq c > 0$. Ensuite, on applique ce qui précède, et on revient à $\chi(\zeta)$ en considérant la bonne branche de h^{-n} .

Le dernier cas consiste en les points qui s'envoie dans un pétale attractif. On suppose que $\chi(1) = 1$ est un point parabolique fixe de h . On considère un anneau A bordé par $\{|\zeta - 1| = r'\}$ ($r' > 0$ petit) et son image réciproque par P_0 qui fixe 1. On note $Q = A \cap S$ et I_\pm les composantes connexes de $P_0^{-1}(A) \cap \mathbb{S}^1$.

Il existe $\delta_Q > 0$ tel que pour tout $z \in B_P^{-1}(Q)$ on ait $\delta(z) \geq \delta_Q$. De plus, il existe $c > 0$ telle que

$$\max\{\text{dist}(z, B_P^{-1}(I_+)), \text{dist}(z, B_P^{-1}(I_-)), z \in B_P^{-1}(Q)\} \leq c.$$

Par suite, pour tout $z \in B_P^{-1}(Q)$, pour $i = \pm$, on a

$$\text{dist}(z, B_P^{-1}(I_i)) \leq (c/\delta_Q) \cdot \delta(z).$$

Cette estimation est valide sur tout S par le théorème de Koebe, quitte à multiplier à droite par une constante universelle. On se fixe $\kappa \geq 7 + 4\sqrt{3}$ qui satisfait aussi cette condition.

Notons $\hat{\alpha} \in \widehat{K(P)}$ le sommet de $B_P^{-1}(S)$ muni de son accès. Comme χ est défini sur S en envoyant arcs de cercle centrés en 1 en arcs de cercle centrés en 1, on en déduit que l'ensemble E défini précédemment va porter son ombre sur $\hat{\alpha}$. Par conséquent, l'intérieur de I contiendra le point 1. En utilisant le fait que

$$\chi(1 \pm 1/d^n) - 1 \asymp \pm(1/n)^{1/(2\nu')},$$

on montre que l'on a bien une borne inférieure $\omega_0 > 0$ sur la mesure harmonique. \square

Appendice B. Prolongements d'applications conformes définies sur des secteurs

Dans les différentes chirurgies sur les secteurs, on a besoin de prolonger des applications conformes de façon quasiconforme. L'existence de ces applications dépend de la géométrie du bord, ainsi que des singularités des applications définies au bord.

Ci-dessous, sont données deux méthodes d'extension dont l'une provient de [BD] (voir aussi [BF]), qui utilise la dynamique au voisinage d'un point répulsif.

Bandes σ -périodiques et difféomorphismes C^1 -bornés. — Ce paragraphe regroupe (sans démonstration) des lemmes techniques démontrés par B. Branner et A. Douady.

Soit $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}\sigma > 0$. On définit une bande C^1 σ -périodique H comme un ensemble fermé de \mathbb{C} invariant par la translation $z \mapsto z + \sigma$, et bordé par deux courbes Γ_+ et Γ_- , de classe C^1 . Une *moitié gauche* $H^<$ est la composante connexe de H privé d'une courbe C^1 transverse à Γ_+ et Γ_- , stable par image inverse de la translation.

Soient H_1 et H_2 deux bandes σ -périodiques. Une application $h : H_1 \rightarrow H_2$ est σ -périodique si $h(z + \sigma) = h(z) + \sigma$.

LEMME B.1. — *Il existe un homéomorphisme holomorphe σ -périodique entre les bandes si et seulement si les modules des anneaux $H_1/\sigma\mathbb{Z}$ et $H_2/\sigma\mathbb{Z}$ sont les mêmes.*

Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes C^1 σ -périodiques; on note $\Gamma_1^<$ et $\Gamma_2^<$ leur moitié gauche; un difféomorphisme $h : \Gamma_1^< \rightarrow \Gamma_2^<$ est C^1 -borné si $|h(z) - z|$ et $|\log h'(z)|$ restent bornées quand z tend vers $-\infty$.

LEMME B.2. — Soit $h : \Gamma_1^< \rightarrow \Gamma_2^<$ un difféomorphisme σ -périodique, alors h est C^1 -borné.

PROPOSITION B.3. — Si $h : H_1^< \rightarrow H_2^<$ est holomorphe, σ -périodique et tels que les anneaux soient isomorphes, alors sa restriction au bord est de classe C^1 et est C^1 -bornée.

La réciproque de ce résultat est (sans condition sur les modules) :

PROPOSITION B.4. — En gardant les mêmes notations, si $\varphi_{\pm} : \Gamma_{1\pm}^< \rightarrow \Gamma_{2\pm}^<$ sont deux difféomorphismes C^1 -bornés sur les bords des moitiés gauches de bandes H_1 et H_2 σ -périodiques et si φ_0 est un difféomorphisme entre les arcs transverses définissant $H_1^<$ et $H_2^<$, alors il existe une application quasiconforme $\phi : H_1^< \rightarrow H_2^<$ prolongeant ces difféomorphismes.

Extension sans dynamique. — On considère ici une extension qui n'utilise pas de dynamique locale.

LEMME B.5. — Soient $h > 0$, $B_h := \{z \in \mathbb{C}; 0 < \text{Im } z < h \text{ et } \text{Re } z < 0\}$; soient $f_i : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_-$, $i = 1, 2$, deux difféomorphismes tels que $f_i(z) = az + b_i + O(1/z)$ à l'infini, avec $a > 0$. Alors, pour tout $(h, h') \in \mathbb{R}_+^{*2}$, il existe $F : B_h \rightarrow B_{h'}$ quasiconforme telle que $F|_{\mathbb{R}} = f_1, F|_{\mathbb{R}+ih} = f_2 + ih'$.

Démonstration. — On définit

$$F : B_h \longrightarrow B_{h'}, \quad x + iy \longmapsto (1 - y)f_1(x) + yf_2(x) + iyh'/h.$$

F est un C^1 -difféomorphisme; regardons à l'infini :

$$F(x + iy) = ax + b_1 + y(b_2 - b_1) + yO(1/x) + iyh'/h.$$

On calcule les dérivées partielles, et on obtient :

$$\begin{aligned} 2F_{\bar{z}} &= a - h'/h + O(1/x) + i(b_2 - b_1) + O(1/x), \\ 2F_z &= a + h'/h + O(1/x) - i(b_2 - b_1) + O(1/x); \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \frac{F_{\bar{z}}}{F_z} \right|^2 = \frac{[a - h'/h + O(1/x)]^2 + [b_2 - b_1 + O(1/x)]^2}{[a + h'/h + O(1/x)]^2 + [b_2 - b_1 + O(1/x)]^2}.$$

Cette quantité est strictement majorée par 1 au voisinage de l'infini, donc F est quasiconforme à l'infini. Le complémentaire est compact, F est un C^1 -difféomorphisme et respecte l'orientation, donc F est quasiconforme. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [Ah] AHLFORS (L.). — *Lectures on quasiconformal mappings*. — Van Nostrand, 1966.
- [Bi] BIELEFELD (B.), éd. — *Conformal dynamics problem list*. — Preprint IMS at Stony Brook, 1990.
- [BD] BRANNER (B.), DOUADY (A.). — *Surgery on complex polynomials*. — Proc. Symp. of Dyn. Syst., Mexico (1986), Lecture Notes in Math. **1345**, 1988, p. 11–72.
- [BF] BRANNER (B.), FAGELLA (N.). — *Homeomorphisms between limbs of the Mandelbrot set*, J. Geom. Anal., t. **9**, 1999, p. 327–390.
- [BH] BRANNER (B.), HUBBARD (J.H.). — *The iteration of cubic polynomials II : Patterns and parapatterns*, Acta Math., t. **169**, 1992, p. 229–325.
- [Bu] BUFF (X.). — *Points fixes de renormalisation*. — Thèse de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 1997.
- [CG] CARLESON (L.), GAMELIN (T.W.). — *Complex dynamics*. — Springer-Verlag, 1993.
- [Da] DAVID (G.). — *Solutions de l'équation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., t. **13**, 1988, p. 25–70.
- [Do1] DOUADY (A.). — *Systèmes dynamiques holomorphes*, Sémin. Bourbaki, vol. 1982/83, Astérisque **105-106**, Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 39–63.
- [Do2] DOUADY (A.). — *Descriptions of compact sets of \mathbb{C}* , Topological methods in modern mathematics (Stony Brook 1991), 1993, p. 429–465.
- [DH1] DOUADY (A.), HUBBARD (J.H.). — *Étude dynamique des polynômes complexes I & II*. — Pub. math. d'Orsay 84–02 et 85–05, 1984/85.
- [DH2] DOUADY (A.), HUBBARD (J.H.). — *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École normale sup., t. **18**, 1985, p. 287–343.
- [EY] EPSTEIN (A.) & YAMPOLSKY (M.). — *Geography of the cubic connected locus I : intertwining surgery*, Ann. Sci. École normale sup., t. **32**, 1999, p. 151–185.
- [Fa] FAUGHT (D.). — *Local connectivity in a family of cubic polynomials*. — Ph.D. Thesis, Cornell, 1992.
- [Ha1] HAÏSSINSKY (P.). — *Applications de la chirurgie holomorphe, notamment aux points paraboliques*. — Thèse de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 1998.
- [Ha2] HAÏSSINSKY (P.). — *Chirurgie parabolique*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **327**, 1998, p. 195–198.
- [Ha3] HAÏSSINSKY (P.). — *Déploiement J -équivalent de polynômes géométriquement finis*, Fund. Math., t. **163**, 2000, p. 131–141.

- [Ha4] HAÏSSINSKY (P.). — Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot, in *The Mandelbrot set, theme and variations*. — Tan Lei, éd., Lecture Note Series **274**, Cambridge Univ. Press, 2000, p. 37–65.
- [Hu] HUBBARD (J.H.). — *Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci : three theorems of J.-C. Yoccoz*, Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, 1991), 1993, p. 467–511.
- [Mc] McMULLEN (C.T.). — *Automorphisms of rational maps*, Proc. MSRI Holomorphic functions and moduli I, Berkeley (1986), 1988, p. 31–60.
- [McS] McMULLEN (C.T.), SULLIVAN (D.). — *Quasiconformal homeomorphism & dynamics III : the Teichmüller space of a holomorphic dynamical system*, Adv. Math., t. **135**, 1998, p. 351–395.
- [MSS] MAÑÉ (R.), SAD (P.), SULLIVAN (D.). — *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École normale sup., 1983, p. 193–217.
- [Mi] MILNOR (J.). — *Dynamics in one complex variable : Introductory lectures*. — Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999.
- [Mo] MOORE (R.L.). — *Concerning upper semi-continuous collections of compacta*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **27**, 1925, p. 416–428.
- [Pe] PETERSEN (C.L.). — *On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality*, Erg. Th. & Dyn. Sys., t. **13**, 1993, p. 785–806.
- [Po] POMMERENKE (C.). — *Univalent functions*, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [Ri] RICKMAN (S.). — *Removability theorems for quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Fenn. Sc., t. **449**, 1969.
- [Sh] SHISHIKURA (M.). — The parabolic bifurcation of rational maps, ou Bifurcation of parabolic fixed points, in *The Mandelbrot set, theme and variations*, Tan Lei, éd., Lecture Note Series **274**, Cambridge University Press, 2000, p. 325–363.