Bull. Soc. math. France
129 (1), 2001, p. 1–31

SUR CERTAINES EXTENSIONS DE SU$(n, 4)$

PAR MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on étudie certaines extensions scindées et non scindées des groupes unitaires $\mathrm{SU}(n, 4)$, pour $n \geq 4$, sur le corps $\mathbb{F}_4$ par des 2-groupes extra-spéciaux. Les extensions ainsi obtenues sont des groupes de 3-transpositions, on en donne des présentations fischériennes.

ABSTRACT (*On some extensions of* $\mathrm{SU}(n, 4)$). — In this paper we study some split and nonsplit extensions of unitary groups $\mathrm{SU}(n, 4)$, $n \geq 4$, over the field $\mathbb{F}_4$ by extraspecial 2-groups.These extensions are 3-transpositions groups for which we give Fischerian presentations.

1. Introduction

1.1. Objet du travail. — Une classe de 3-*transpositions* d'un groupe G est une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 engendrant G telle que le produit de deux éléments quelconques de la classe est d'ordre au plus 3. L'objet de ce travail est l'étude de certaines extensions des groupes spéciaux unitaires $\mathrm{SU}(n, 4)$ sur le corps $\mathbb{F}_4$ par des 2-groupes extra-spéciaux. On dit qu'un p-groupe E (avec p premier) est *extra-spécial* si le groupe de Frattini de E (intersection des sous-groupes maximaux de E) est d'ordre p et égal au centre de E. L'ordre d'un p-groupe extra-spécial est toujours une puissance impaire de p.

Texte reçu le 10 mars 1999, révisé le 2 septembre 1999

MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 9984, Université de Paris 7 Denis Diderot, 2 place Jussieu 75251 Paris Cedex (France).

Classification mathématique par sujets (2000). — 20, 20F.

Mots clefs. — 2-groupe extra-spécial, extension, graphe de Coxeter, groupe de 3-transpositions, groupe unitaire, présentation fischérienne, transvection unitaire.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2001/1/$ 5.00

Le centre d'un p-groupe extra-spécial non abélien est cyclique d'ordre p et est égal au groupe dérivé $\mathcal{D}(E)$ de E. Les p-groupes extra-spéciaux considérés ici correspondent au cas $p = 2$ et sont obtenus de la manière suivante. On considère l'ensemble D des transvections unitaires du groupe $\mathrm{SU}(n+2,4)$; c'est une classe de 3-transpositions du groupe $\mathrm{SU}(n+2,4)$ et l'on fixe un élément d de D. Les éléments de D qui commutent à d engendrent un sous-groupe d'indice 3 (noté $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$) du centralisateur de d dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$. Le groupe $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ est appelé D-*centralisateur* de d dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$ et est l'extension scindée

$$1 \to 2^{2n-3} \longrightarrow \mathrm{DC}_{\mathrm{n+2}}(d) \longrightarrow \mathrm{SU}(n,4) \to 1$$

où 2^{2n-3} désigne un 2-groupe extra-spécial de centre le groupe cyclique engendré par d. Le but de cet article est de donner une présentation fischérienne du groupe $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ pour $n \geq 4$.

1.2. Définitions. Conventions et notations utiles

1) On appelle *système de Fischer* (G,X) la donnée d'un groupe G et d'un ensemble générateur X formé d'involutions tel que pour x_1 et x_2 dans X, l'ordre du produit x_1x_2 est au plus 3. Une présentation $(X/\gamma,\mathcal{R})$ d'un groupe G est dite *fischérienne* si le couple (G,X) est un système de Fischer, si γ est le graphe de Coxeter associé à X (*i.e.* les sommets de γ sont indexés par les éléments de X, et x_1 et x_2 sont liés par une arête si et seulement si le produit x_1x_2 est d'ordre 3) et si $\mathcal{R}$ est un ensemble de relations de la forme

$$(x_1^g x_2)^k = 1 \text{ avec } 1 \leq k \leq 3, \quad g \text{ dans } G, \text{ et } x_1, x_2 \text{ dans } X.$$

Soient G un groupe de présentation $(X/\gamma,\mathcal{R})$ et H un quotient de G par un sous-groupe central de G ; une présentation $(X/\gamma,\mathcal{R},\mathcal{S})$ de H est encore dite fischérienne.

Un système de Fischer (G,X) s'appelle un *couple fischérien* lorsque X est une classe de conjugaison de G. Dans ce cas, on dit que G est un *groupe de* 3-*transpositions* et que X est une *classe de* 3-*transpositions* ou encore une *classe de Fischer*.

Soit G un groupe ; on désigne par $\mathrm{Z}(G)$ le centre de G (*i.e.* l'ensemble des éléments z de G qui commutent avec tous les éléments de G), par $\mathbb{O}_p(G)$ avec p premier, le plus grand p-sous-groupe normal de G, par $\mathcal{D}(G)$ le groupe des commutateurs ou *groupe dérivé* de G, par $\mathrm{F}(G)$ le *sous-groupe de Fitting* de G (*i.e.* le plus grand sous-groupe normal nilpotent de G) et enfin par $\mathrm{F}^*(G)$ le sous-groupe $\mathrm{F}(G)\mathrm{E}(G)$ où $\mathrm{E}(G)$ désigne le plus grand sous-groupe semi-simple de G. Rappelons enfin qu'un groupe G est *nilpotent de classe* 2 si le quotient $G/\mathrm{Z}(G)$ est abélien.

Soit g un élément d'un groupe G ; on appelle *fermeture normale* de g dans G le plus petit sous-groupe normal de G contenant g.

2) Par convention, l'inverse d'un élément g d'un groupe G sera noté $\bar{g}$ au lieu de g^{-1} dans le but d'alléger les formules ; la notation x^g, avec x et g dans

G, représente l'élément $\overline{g}xg$. Pour représenter le produit de deux groupes, nous suivrons les conventions de l'ATLAS [2] légèrement simplifiées ; soient A et B deux groupes :

- $A \times B$ désigne le produit direct de A et de B ;
- $A \rtimes B$ désigne le produit semi-direct, l'extension $1 \to A \to A \rtimes B \to B \to 1$ est scindée ;
- $A \cdot B$ désigne l'extension non scindée $1 \to A \to A \cdot B \to B \to 1$.

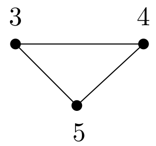
Quand la nature du produit n'est pas précisée nous utiliserons la notation $A\,.\,B$.

Si p est premier, p^n (avec n entier) désigne le groupe abélien élémentaire ; cette notation est utilisée dans les produits de groupes quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Par convention, les sommets d'un graphe de Coxeter représentant un ensemble de relations portant sur les éléments indexés x_i seront repérés par leur indice.

3) Le groupe $\mathbb{H}$ est le groupe dont $(x_3, x_4, x_5/\gamma_{\mathbb{H}})$, avec

$\gamma_{\mathbb{H}}$:

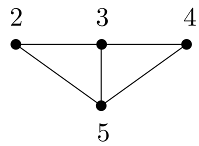


$$(x_3^{x_4} x_5)^3 = 1,$$

est une présentation ; c'est un groupe de 3-transpositions d'ordre 54 dont le centre d'ordre 3 est engendré par $(x_3x_4x_5)^2$. Pour plus de détails voir [5], [14].

4) Le groupe $\mathbb{I}$ est le groupe dont $(x_2, x_3, x_4, x_5/\gamma_{\mathbb{I}}, r(5))$, avec

$\gamma_{\mathbb{I}}$:



$$r(5):\quad (x_2^{x_3}x_5)^3 = (x_3^{x_4}x_5)^3 = (x_2^{x_3x_4}x_5)^3 = 1\,,$$

est une présentation ; c'est un groupe de 3-transpositions d'ordre $2^8 3^8$. On pose :

$$s := (x_3x_5x_4)^2, \qquad s' := (x_3x_5x_2)^2,$$

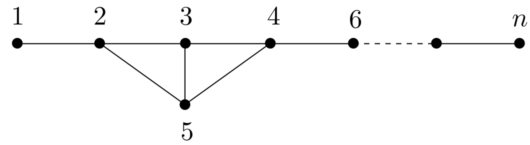
$$t' := x_2^{\overline{s}} \ \text{ (on a aussi } t' = x_4^{s'}), \qquad t'' := x_2^{s} \ \text{ (on a aussi } t'' = x_4^{\overline{s}'}),$$

$$q := x_2x_4t't'' \ \text{ (on a aussi } q = (s\overline{s}')^2).$$

Le centre du groupe $\mathbb{I}$ est un sous-groupe d'ordre 2 engendré par l'élément q introduit ci-dessus ; q est le produit de quatre conjugués de x_2 commutant deux à deux (voir [4], [6], [9], [14]).

5) Étant donné un groupe G, on désigne par $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble générateur de cardinal n ; pour $n \geq 5$, $\gamma(n)$ est le graphe de Coxeter

$\gamma(n)$:



et $r(n)$ un ensemble de relations incluant les relations $r(5)$ données ci-dessus en 4).

Si G est un groupe de présentation $(X_n/\gamma(n), r(n))$, on pose :

$$Q := x_1^{qx_1} q, \quad Q' := x_6^{qx_6} q \quad \text{(notation 4).}$$

Le groupe $\mathrm{SU}(n,4)$ admet une présentation de cette forme, les relations $r(n)$ sont explicitées ci-dessous en 1.4.

1.3. Motivation. — Au cours de ces dernières années J. Hall et F. Zara ont étudié des problèmes voisins ; donnons brièvement un aperçu de leurs résultats.

Dans sa thèse, F. Zara étudie des groupes M sur lesquels opère un système de Fischer (G, X) de telle sorte que deux conditions, notées MG2 et MG3, soient satisfaites (voir [14], [15]) ; de tels groupes sont appelés des (G, X)-groupes. L'un des premiers résultats qu'il établit applicables aux groupes unitaires est le suivant :

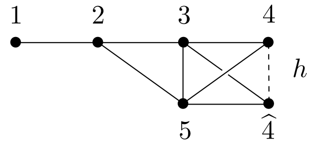
Soient G un groupe et M un module libre sur un anneau principal K qui soit un groupe sur lequel G opère. Soit $[G, M]$ le sous-groupe de M engendré par les sous-ensembles $[g, M] := \{g(m)\overline{m} \mid m \in M\}$, g parcourant G. Si le groupe G est de présentation $(X_n/\gamma(n), r(5))$ (avec $n \geq 5$), s'il existe un entier p tel que $[x_1, M] = \langle a_1 \rangle$ soit de rang p et si $M = [G, M]$, alors la donnée de deux matrices A et B de $\mathrm{GL}(p, K)$ satisfaisant à $A + A^{-1} + \mathrm{I} = B + B^{-1} + \mathrm{I} = AB^{-1} + BA^{-1} = 0$ permet de décrire complètement l'action des éléments x_j de X_n sur M.

Il prouve en outre l'existence d'un tel système de Fischer et démontre que G est fini si et seulement si $n = 5$: dans ce cas, G est isomorphe à $2 \times \mathrm{SU}(5,4)$.

Ensuite, F. Zara étudie les formes bilinéaires sur M invariantes par certains groupes G et construit des extensions centrales $\widehat{M}$ de M qui sont des (G, X)-groupes, puis des extensions $\widehat{M} \rtimes G = \widehat{G}$. Il obtient, entre autres, une présentation du groupe $\widehat{G}_h = \widehat{M} \rtimes (2 \times \mathrm{SU}(5,4))$, $h \in \mathbb{N}^*$; (avec les notations 1.2)

$$\widehat{G}_h = \big((X_5 \cup \widehat{x}_4)/\widehat{\gamma}(5), \widehat{r}(5), (\widehat{x}_4 x_1^{s' x_4 x_3})^2 = 1\big)$$

$\widehat{\gamma}_h(5)$:



$(x_4\hat{x}_4)^h = 1,$

$$\widehat{r}_h(5) \begin{cases} r(5), \\ (\widehat{x}_4 y)^3 = 1 \ \text{ pour } \ y \in \{x_3^{x_5}, x_5^{x_4}, x_4^{x_3}, x_3^{x_4x_5}, x_4^{x_5x_3}, x_5^{x_3x_4}\}, \\ (\widehat{x}_4 t')^2 = (\widehat{x}_4 t'')^2 = 1, \quad \widehat{x}_4^{\,x_3x_4s'x_4x_3} = \widehat{x}_4^{\,s} \end{cases}$$

et prouve que $\widehat{M}$ est nilpotent de classe 2 et $\mathcal{D}(\widehat{M})$ central dans $\widehat{G}_h$. Sous l'hypothèse $h = 2$ (resp. $h = 3$), la classe de conjugaison de x_2 est une classe de 3-transpositions de $\widehat{G}_h$ et l'on a $2\,h^{23}|\mathrm{PSU}(5, 4)| = |\widehat{G}_h|$. Moyennant une relation supplémentaire, il obtient une présentation du D-centralisateur $\mathrm{DC}_7(d)$ d'une transvection unitaire d de SU$(7, 4)$ (voir [14]).

La situation étudiée par J. Hall est légèrement différente. Il se donne un groupe de 3-transpositions $\widetilde{G}$ tel que $\mathrm{Z}(\widetilde{G}) = 1$, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G}) = \mathrm{F}(\widetilde{G}) = \mathrm{F}^*(\widetilde{G})$. Le théorème de classification de Fischer de [2] permet de décrire le quotient $G = \widetilde{G}/\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$; $\widetilde{G}$ est donc obtenu comme une extension :

$$\text{(E)} \qquad 1 \to \mathbb{O}_2(\widetilde{G}) \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \to 1.$$

Dans cette situation, J. Hall détermine la structure de $\widetilde{G}$ (voir [5], [6]).

Énonçons le résultat qu'il obtient dans le cas où G est un groupe unitaire SU$(n, 4)$, $n \geq 5$ (groupe noté $\mathrm{SU}_n(2)$ par J. Hall)

1) Si G est isomorphe à SU$(n, 4)$ *avec $n \neq 5$ et $n \neq 7$, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$ est une somme de copies du module naturel de G sur $\mathbb{F}_4$; l'extension (E) est scindée.*

2) Si G est isomorphe à SU$(5, 4)$*, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$ est un groupe abélien élémentaire ; comme G-module c'est une somme directe de copies du module naturel* V_{10} *de G sur $\mathbb{F}_4$ ou de l'extension non scindée de* V_{10} *par lui-même ; l'extension (E) est scindée.*

3) Si G est isomorphe à SU$(7, 4)$*, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$ est un groupe abélien élémentaire ; c'est une somme directe de copies du module naturel de G sur $\mathbb{F}_4$. Pour chaque $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$, il y a exactement deux possibilités pour l'extension (E) l'une est scindée et l'autre non scindée.*

Ainsi pour $n \geq 5$, ces résultats décrivent en particulier l'extension scindée

$$1 \to \mathrm{V} \longrightarrow \widetilde{G} \to \mathrm{SU}(n, 4) \longrightarrow 1$$

où V désigne le module naturel de SU$(n, 4)$ sur $\mathbb{F}_4$; $\widetilde{G}$ est alors le D-centralisateur d'une transvection unitaire dans SU$(n + 2, 4)$.

Dans la situation $n = 5$, J. Hall donne des présentations de ces groupes, retrouvant ainsi les résultats de F. Zara. De plus, il donne une présentation fischérienne des extensions non scindées $2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7, 4)$ et $2 \times (2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7, 4))$ de manière concise via des énumérations de classes par ordinateur (voir [4], [6]) ; plus récemment, il prouve l'existence de ces extensions via la cohomologie [7].

1.4. Résultats préliminaires. — L'outil important pour notre étude est la connaissance d'une présentation fischérienne de $\mathrm{SU}(n,4)$ [11, 2.2.9] : il existe un ensemble de transvections unitaires $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ telles que $(X_n/\gamma(n), r(n))$ et $(X_n/\gamma(n), r(n), Q = 1)$ soient respectivement une présentation fischérienne de $2 \times \mathrm{SU}(n,4)$ et de $\mathrm{SU}(n,4)$. Explicitons les relations $r(n)$ (notation 1.2).

1) *Pour* $n = 5$, on a $2 \times \mathrm{SU}(5,4) = (X_5/\gamma(5), r(5))$ et Q est l'involution centrale de $2 \times \mathrm{SU}(5,4)$ (voir [4], [11], [13]).

2) *Pour* $n = 6$, dans [4], B. Fischer établit que le groupe simple $\mathrm{PSU}(6,4)$ — dont D désigne la classe de 3-transpositions — admet trois classes de sous-groupes engendrés par des éléments de D, isomorphes à $\mathrm{R}/\mathrm{Z}(R)$ où R est le groupe orthogonal non déployé de dimension 6 sur le corps $\mathbb{F}_3$, $\mathrm{O}_6^-(3)$ (notation de l'ATLAS), noté $\mathrm{G}^+(6,3)$ dans [11]. Le centre de R est d'ordre 2, engendré par un élément que l'on désigne par $m(\mathrm{R})$. Ces trois classes fusionnent dans $\mathrm{U}(6,4)$, c'est-à-dire qu'elles ne forment plus qu'une seule classe dans $\mathrm{U}(6,4)$. Nous avons établi que dans l'extension non scindée de $\mathrm{PSU}(6,4)$ par la 2-partie de son multiplicateur de Schur (voir [2]) $\underline{M}_2$, il y a exactement trois classes de sous-groupes isomorphes à R : C_1, C_2, C_3 et que les éléments d'une même classe ont la même involution centrale $m_i := m(\mathrm{R})$ quelque soit le groupe R considéré dans C_i. On a en outre $1 = m_1 m_2 m_3$ et $\langle m_1, m_2\rangle = \underline{M}_2$. (*cf.* [2], [3], [4], [9], [11]).

Avec les notations ci-dessus et en désignant par $\sigma(6)$ la relation

$$\sigma(6) : \quad (x_1^{q x_2 x_3 x_4} x_6)^2 = 1,$$

on a alors les présentations fischériennes suivantes :

$$\begin{aligned}
2 \times \mathrm{SU}(6,4) &= \bigl(X_6/\gamma(6), r(5), \sigma(6), m_1 = m_2 = 1\bigr),\\
\mathrm{SU}(6,4) &= \bigl(X_6/\gamma(6), r(5), \sigma(6), m_1 = m_2 = 1, Q = 1\bigr),\\
2 \times \bigl((2 \times 2) \cdot \mathrm{SU}(6,4)\bigr) &= \bigl(X_6/\gamma(6), r(5), \sigma(6)\bigr) ;
\end{aligned}$$

les calculs sont détaillés en [11, 2.2.3], les éléments m_i sont explicités ci-dessous en 4).

3) *Pour* $n \geq 7$, on a les présentations fischériennes suivantes :

$$\begin{aligned}
2 \times \mathrm{SU}(n,4) &= \bigl(X_n/\gamma(n), r(5), \sigma(6), x_7^{m_i} x_7 = 1\bigr),\\
\mathrm{SU}(n,4) &= \bigl(X_n/\gamma(n), r(5), \sigma(6), x_7^{m_i} x_7 = 1, Q = 1\bigr) ;
\end{aligned}$$

de plus, pour $n \geq 8$ on montre que les éléments m_1, m_2 et m_3 sont triviaux [11].

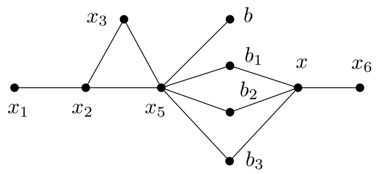
4) Les éléments m_i, les groupes R_i. Les éléments m_i sont les involutions centrales des sous-groupes R_i isomorphes à $\mathrm{G}^+(6,3)$ contenus dans $(2 \times 2) \cdot \mathrm{SU}(6,4)$ et appartenant à des classes de conjugaison distinctes (voir [4], [9]).

Soit $G = (X_6/\gamma(6), r(5), \sigma(6))$; soient d_i $(1 \leq i \leq 6)$ des transvections unitaires de $\mathrm{SU}(6,4)$ pour une forme hermitienne ϕ satisfaisant aux relations $\gamma(6)$ et $r(5)$. Sur chacune des droites isotropes associées on peut choisir des vecteurs v_i, $1 \leq i \leq 6$ satisfaisant aux conditions suivantes avec $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$, et $\Sigma = \{\{i, i+1\} \cup \{2,5\} \cup \{4,6\} \mid i \in \{1,2,3,4\}\}$:

$$\phi(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \{i,j\} \in \Sigma, \\ 0 & \text{pour } \{i,j\} \notin \Sigma \cup \{3,5\} \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq 6, \\ \omega & \text{pour } i = 5 \text{ et } j = 3. \end{cases}$$

D'une manière générale, la transvection de droite engendrée par le vecteur w (dite aussi transvection associée à w) est notée t_w ; ici on a $d_i = t_{v_i}$. Posons $d' = t_{v_2 + \omega v_4}$ et $d'' = t_{v_2 + \overline{\omega} v_4}$. Il existe un morphisme du groupe G sur $\mathrm{SU}(6,4)$ qui applique x_i sur d_i, t' sur d', t'' sur d'' (notations 1.2, 4), q correspond au produit $d_2 d_4 d' d''$, Q et Q' correspondent à $t_{v_2+v_4} d_2 d_4 d' d''$ et l'on a $Q = Q'$.

Posons $b = x_1^{q x_2 x_3 x_4}$; le sous-groupe de G engendré par les éléments x_1, x_2, x_3, x_5, b est un quotient de $2 \times \mathrm{PSU}(4,4)$; il centralise exactement trois éléments de la classe de conjugaison de x_1 : x_6, x, x_6^x où l'on a posé $x = x_1^{x_2 x_5 b x_3 x_5 x_2 x_4 x_5 x_6 x_4}$. Les éléments b et x correspondent aux transvections a et d relatives à $v_1 + v_3$ et $\omega v_1 + \overline{\omega} v_3 + \omega v_4 + v_5 + v_6$. Il existe alors trois conjugués de b dans G, notés b_1, b_2, b_3, satisfaisant aux relations



Ces éléments correspondent aux transvections associées à $(v_1 + v_3) + \omega v_6$, $(v_1 + v_3) + \overline{\omega} v_6$, $(v_1 + v_3) + v_6$; ils s'écrivent sur les générateurs :

$$b_1 = x_5^{x_4 x_2 b x_6 x_4 x_5 t'}, \quad b_2 = b_1^{t' x_6 b t'}, \quad b_3 = x^{b_1 b_2 x_6 x}.$$

Les sous-groupes $R_i = \langle x_1, x_2, x_3, x_5, b_i, x \rangle$ de G sont isomorphes à $\mathrm{G}^+(6,3)$, leur centre $\mathrm{Z}(R_i)$ est engendré par l'involution $m_i = x_1 x_3 x_6 b_i b_i' b_i''$ $(1 \leq i \leq 3)$ avec $b_i' = b_i^{x_2 x_5 x_2 x_1 x_3 x_2 x_5 x_2}$ et $b_i'' = b_i'^{\,x_2 x_1 x_3 x_2}$ (voir [9], [11]).

1.5. Plan du travail

1) Dans la première partie de ce travail, nous appliquons les résultats de F. Zara décrits ci-dessus en 1.3, aux groupes unitaires, nous établissons le résultat suivant :

Soient G un groupe de présentation $(X_n/\gamma(n), r(5), \sigma(6))$ et M un (G, X_n)-groupe abélien qui est un module sur un anneau principal K. Alors K est de caractéristique 2 *et l'on a $A = B$ et $B^3 = \mathrm{I}$, avec les notations introduites en* 1.3.

Le groupe $\mathrm{SU}(n,4)$ est un quotient d'un groupe G ci-dessus, la relation $\sigma(6)$ limite les possibilités pour K et M (§ 2).

2) Dans la deuxième partie (§ 3), nous étudions le D-centralisateur d'une transvection unitaire d dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$. Après des rappels de quelques propriétés géométriques des groupes unitaires (§ 3.1), nous étudions le cas des petites dimensions : $n=4$ et $n=5$. On établit que chacun des groupes $\mathrm{SU}(4,4)$ et $\mathrm{SU}(5,4)$ possède deux extensions par des 2-groupes, notés A, dont l'une fournit le D-centralisateur d'une transvection unitaire d :

- $1 \to A \to G \to 2 \times \mathrm{SU}(4,4) \to 1$, avec A nilpotent de classe 2, $|A| = 2^{8+3}$;
- $1 \to A \to \mathrm{DC}_6(d) \to \mathrm{SU}(4,4) \to 1$, avec A extra-spécial d'ordre 2^{8+1} ;
- $1 \to A \to G \to 2 \times \mathrm{SU}(5,4) \to 1$, avec A nilpotent de classe 2, $|A| = 2^{23}$;
- $1 \to A \to \mathrm{DC}_7(d) \to \mathrm{SU}(5,4) \to 1$, avec A nilpotent de classe 2, $|A| = 2^{11}$.

Dans chacune de ces situations, l'extension est scindée, et le groupe obtenu est un groupe de 3-transpositions dont on donne une présentation fischérienne (prop. 3.2, 3.3).

On observe que pour $n=4$ et $n=5$, les présentations fischériennes de $\mathrm{SU}(n,4)$ ne comportent par la relation $\sigma(6)$, on peut construire des extensions scindées $1 \to A \to G \to 2 \times \mathrm{SU}(4,4) \to 1$, où A désigne soit un groupe nilpotent de classe 2 d'ordre 3^{11}, soit un groupe abélien élémentaire d'ordre 3^5, et $1 \to A \to G \to 2 \times \mathrm{SU}(5,4) \to 1$, où A désigne soit un groupe nilpotent de classe 2 d'ordre 3^{23}, soit un groupe extra-spécial d'ordre 3^{11} (§ 3.3).

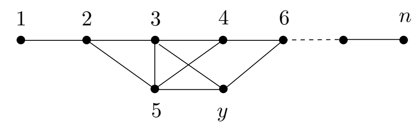
Nous étudions le cas général $n \geq 6$ au paragraphe suivant (§ 4). On démontre le théorème 3.7 :

Le D*-centralisateur* $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ *d'une transvection unitaire d dans* $\mathrm{SU}(n+2,4)$, $n \geq 6$ *admet une présentation fischérienne*

$$\big((X_n \cup \{y\})/\widehat{\gamma}(n), \widehat{r}(n), \sigma(6), m_i = 1, Q = 1\big)$$

avec

$\widehat{\gamma}(n)$



$\widehat{r}(n)$ *désignant des relations incluant les relations* $r(5)$ *; l'extension*

$$1 \to A_n \longrightarrow \mathrm{DC}_{n+2}(d) \longrightarrow \mathrm{SU}(n,4) \to 1$$

est scindée, $A_n/\langle d\rangle$ est un groupe abélien élémentaire isomorphe au module naturel de $\mathrm{SU}(n,4)$, $|A_n| = 2^{2n+1}$.

3) Dans la dernière partie (§ 4), nous étudions l'extension non scindée $1 \to 2^{14} \to G \to \mathrm{SU}(7,4) \to 1$ et nous établissons que $(X_7/\gamma(7), r(5), \sigma(6), Q = 1)$ en est une présentation fischérienne, et que si l'on omet la relation $Q = 1$, on obtient une présentation fischérienne du groupe $2 \times (2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7,4))$.

Dans le souci d'alléger l'exposition et de faciliter la lecture de ce travail, tous les calculs établis à la main et n'utilisant que les relations entre les générateurs seront dits « élémentaires » et ne seront pas reproduits ici.

1.6. Perspective. — Après avoir longuement discuté avec Anne-Marie Aubert et Marie-France Vignéras, il semble que des phénomènes proches de ceux que nous étudions ici, apparaissent dans la construction des représentations lisses irréductibles des groupes réductifs p-adiques. Comme le suggère d'ailleurs le *referee*, cela peut faire l'objet d'un autre travail.

2. Les (G, X)-groupes

2.1. Les conditions MGi. — Soient (G, X), un système de Fischer et M un groupe sur lequel G opère. Pour tout élément g de G, on pose

$$[g, M] = \big\{g(m)\overline{m} \mid m \in M\big\}$$

et on désigne par $[G, M]$, le sous-groupe de M engendré par les ensembles $[g, M]$, quand g parcourt G.

On dit que M est un (G, X)-*groupe* s'il satisfait aux conditions :

- MG2 : pour tout $\{x, y\}$ dans X, si xy est d'ordre 2 alors

$$[x, M] \subset \big\{m \mid m \in M,\ y(m) = m\big\};$$

- MG3 : pour tout $\{x, y\}$ dans X, si xy est d'ordre 3 alors on a $xy(m) = \overline{m}y(m)$ pour tout élément m de $[x, M]$.

Ces conditions sont nécessaires pour que le produit semi-direct $\widehat{G} = M \rtimes G$ admette une classe de Fischer. De manière précise on a le résultat suivant :

Théorème 2.1 (F. Zara). — *Avec les notations ci-dessus, soit $\widehat{D}$ la classe de conjugaison dans $\widehat{G}$ d'un élément $(1, x)$, $x \in X$. Si (G, X) est un couple fischérien une condition nécessaire et suffisante pour que $(\widehat{G}, \widehat{D})$ soit un couple fischérien est que les conditions suivantes soient remplies :*

1) *M est un (G, X)-groupe ;*

2) *M est égal à $[G, M]$;*

3) *pour tout x de X, l'ordre des éléments $[x, M]$ est au plus égal à 3.*

Preuve. — Voir [14, théorème 6] . □

2.2. Application aux groupes unitaires. — Soit p un entier. Désignons par S_p la situation suivante : (G, X) est un système de Fischer, K est un anneau principal, M est un K-module libre noté additivement sur lequel G opère de telle sorte que les conditions suivantes soient remplies :

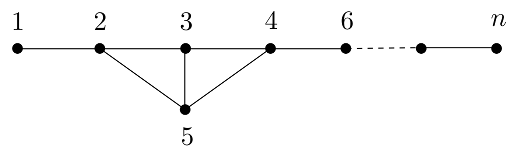
1) $[x, M]$ est un K-module libre de rang p ;

2) on a $M = [G, M]$;

3) M est un (G, X)-groupe.

Proposition 2.2. — *Soit G un groupe de présentation $(X_n/\gamma(n), r(5))$ pour un entier $n \geq 5$, où*

$\gamma(n)$



$$r(5) \qquad (x_2^{x_3} x_5)^3 = (x_3^{x_4} x_5)^3 = (x_2^{x_3 x_4} x_5)^3 = 1\,.$$

Soient K un anneau principal et M un K-groupe libre sur lequel G opère comme dans la situation S_p ci-dessus. Pour chaque j, $1 \leq j \leq n$, on désigne par a_j le p-uplet engendrant $[x_j, M]$. Alors :

1) *Il existe des matrices A et B dans $\mathrm{GL}(p, K)$ telles que*

$$A + A^2 + \mathrm{I} = 0, \quad B + B^2 + \mathrm{I} = 0, \quad AB^{-1} + BA^{-1} = 0$$

et dont la donnée détermine entièrement l'action de G sur M.

2) *Si l'on ajoute la relation $\sigma(6)$: $(x_1^{q x_2 x_3 x_4} x_6)^2 = 1$, la caractéristique de K est 2 et l'on a $A = B$. Les actions de s, s' et q sont données ci-dessous, les éléments m_i $(1 \leq i \leq 3)$ agissent trivialement sur M (pour les notations, voir* 1.2) :

$$\begin{array}{ll}
s(a_j) = a_j, \quad j \in \{1,7\}; & \bar{s}'(a_j) = a_j, \quad j \in \{6,7\};\\
s(a_j) = a_j \overline{A}, \quad j \in \{3,4,5\}; & \bar{s}'(a_j) = a_j A, \quad j \in \{2,3,5\};\\
s(a_2) = a_2 + a_3 + a_4 A; & \bar{s}'(a_1) = a_1 + a_2 \overline{A} + a_3 + a_4 \overline{A};\\
s(a_6) = a_3 \overline{A} + a_4 A + a_6; & \bar{s}'(a_4) = a_2 + a_4;
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
q(a_j) = a_j, \quad j \notin \{1,6\};\\
q(a_1) = a_1 + a_2 + a_4;\\
q(a_6) = a_2 + a_4 + a_6.
\end{array}$$

Preuve. — 1) Pour $n = 5$ cette assertion est établie dans [14] et l'action de G sur M y est entièrement décrite. Pour $n \geq 5$, on peut choisir dans chaque

$[x_j, M]$ un p-uplet a_j de telle sorte que l'on ait :

$x_j(a_j) = -a_j$;
$x_j(a_i) = a_i$ si $i \neq j$ et si $\{i,j\}$ n'est pas une arête de $\gamma(n)$;
$x_j(a_i) = a_i + a_j$ si $\{i,j\}$ est une arête de $\gamma(n)$ distincte de $\{2,5\}$ et $\{4,5\}$;
$x_2(a_5) = a_5 + a_2\overline{A}$, $x_4(a_5) = a_5 + a_4\overline{B}$;
$x_5(a_2) = a_2 + a_5A$, $x_5(a_4) = a_4 + a_5B$.

Comme dans le cas $n = 5$, les relations $(x_2^{x_3}x_5)^3 = 1$ et $(x_4^{x_3}x_5)^3 = 1$ imposent $\mathrm{I} + A + A^2 = 0$ et $\mathrm{I} + B + B^2 = 0$ et la dernière relation de $r(5)$ impose $A\overline{B} + B\overline{A} = 0$.

2) Grâce aux relations ci-dessus, on trouve sans difficulté :

$s(a_j) = a_j$, $j = 1$ ou $j \geq 7$;
$s(a_j) = a_j\overline{B}$, $j \in \{3,4,5\}$;
$s(a_2) = a_2 + a_3(2\mathrm{I} + A + B) + a_4(\mathrm{I} - BA) + a_5(\mathrm{I} + A - AB)$;
$s(a_6) = -a_3\overline{B} + a_4(2\mathrm{I} + B) + a_5B + a_6$;

$s'(a_j) = a_j$, $j \geq 6$;
$s'(a_j) = a_jA$, $j \in \{2,3,5\}$;
$s'(a_1) = a_1 + a_2(2\mathrm{I} + \overline{A}) + a_3 + a_4(\mathrm{I} + A)$;
$s'(a_4) = a_2(-A + \overline{A}B) + a_3(\mathrm{I} + \overline{A}B) + a_4 + a_5(-\overline{B} - AB)$.

De là, on déduit l'action de q :

$$
\begin{aligned}
q(a_j) &= -a_j, \quad j \in \{2,3,4,5\};\\
q(a_j) &= a_j, \quad j \geq 7;\\
q(a_1) &= a_1 + 3a_2 + a_3(2\mathrm{I} + A + \overline{A}\overline{B}) + a_4(\mathrm{I} + \overline{B}A + B\overline{A}) + a_5(B + 3A + 2\mathrm{I});\\
q(a_6) &= a_2(\overline{A}\overline{B} + B + \mathrm{I}) + a_3(4\mathrm{I} + A + 2\overline{A}\overline{B} + B) + a_4(\mathrm{I} - \overline{A}B - A\overline{B})\\
&\qquad + a_5(B + 3\mathrm{I} + 4A - \overline{B}) + a_6(-2\overline{B} + A - AB).
\end{aligned}
$$

Pour $n \geq 6$, posons $b = x_1^{qx_2x_3x_5}$; puisque $(bx_6)^2 = 1$, l'élément bx_6bx_6 opère trivialement sur M. Posons $b(a_4) = \sum_{i=1}^n a_jE_j$ avec E_j dans $\mathrm{GL}(p,k)$; alors

$$x_6b(a_4) = b(a_4) + a_6E_4 + a_6E_7 - 2a_6E_6.$$

Par ailleurs, $bx_6b(a_4) = x_6(a_4) = a_4 + a_6$; donc $x_6b(a_4) = b(a_4) + b(a_6)$, ce qui donne

$$b(a_6) = a_6(-2E_6 + E_7 + E_4). \tag{*}$$

En calculant l'action de b sur a_6, on obtient sans difficulté

$$b(a_6) = a_6 + x_4x_3x_2\big(q(a_1)(-\mathrm{I} + (\overline{A}\overline{B} + B + \mathrm{I}))\big).$$

Connaissant l'action de q sur a_1, il résulte de (*) que

$$-I + (\overline{A}\overline{B} + B + \mathrm{I}) = 0,$$

ce qui conduit à $\overline{A}\,\overline{B} + B = 0$. Nous avons aussi $\mathrm{I} + B + B^2 = 0 = \mathrm{I} + A + A^2$ (par 1), donc $B = \overline{B}$ et $A = \overline{A}$; ainsi $A = -B$ et de $\overline{A}B + B\overline{A} = 0$. Il vient $2\overline{A}A = 2B\overline{B} = 0$ d'où l'on déduit le reste de l'assertion. □

Remarque 2.3. — Dans cette situation, l'action de q sur a_1 et a_6 s'écrit :

$$q(a_1) = a_1 + a_2 + a_4, \quad q(a_6) = a_2 + a_4 + a_6.$$

D'où l'on déduit :

$$Q(a_j) = a_j \ \ (1 \le j \le n) \ \text{ avec } \ Q = x_1^{qx_1} q,$$
$$Q'(a_j) = a_j \ \ (1 \le j \le n) \ \text{ avec } \ Q' = x_6^{qx_6} q.$$

3. D-centralisateur d'une transvection dans $\mathbf{SU(n, 4)}$

3.1. Résultats géométriques.— Soit V_{n+2} un espace vectoriel de dimension $n+2$ sur $\mathbb{F}_4$, $n \ge 4$, muni d'une forme hermitienne non dégénérée Φ dont le groupe des isométries est $\mathrm{G}_{n+2} = \mathrm{SU}(n+2, 4)$. Soient $d = t_v$ une transvection unitaire et H son D-centralisateur ; H est le sous-groupe engendré par les transvections qui commutent à d. Notons W l'orthogonal d'un plan hyperbolique $P = \langle v, v' \rangle$ contenant v tel que $\Phi(v, v') = 1$ et $\Phi(v', v') = 0$. On a donc $V_{n+2} = P \oplus W$, toute transvection appartenant à H s'écrit $t_{w+\alpha v}$ où w est un vecteur isotrope de W et α un élément de $\mathbb{F}_4$. La forme Φ est non dégénérée sur W ; W admet une base formée de vecteurs isotropes satisfaisant aux conditions suivantes avec $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$:

- Pour $n = 4$, on pose $v_5 = \omega v_4 + v_1$ et $\Sigma = \big\{\{2,5\}, \{i, i+1\} \mid 1 \le i \le 3\big\}$,

$$\Phi(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 \ \text{ pour } \{i,j\} \in \Sigma, \\ 0 \ \text{ pour } \{i,j\} \notin \Sigma \cup \{3,5\} \ , \ 1 \le i, j \le 5, \\ \omega \ \text{pour } i = 5 \ , \ j = 3. \end{cases}$$

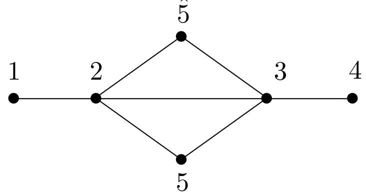
- Pour $n \ge 5$, on pose $\Sigma = \big\{\{2,5\}, \{4,6\}, \{i, i+1\} \mid 1 \le i \le n-1 \text{ et } i \ne 5\big\}$,

$$\Phi(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 \ \text{ pour } \{i,j\} \in \Sigma, \\ 0 \ \text{ pour } \{i,j\} \notin \Sigma \cup \{3,5\} \ , \ 1 \le i, j \le n, \\ \omega \ \text{ pour } i = 5 \ , \ j = 3. \end{cases}$$

Posons $t_i = t_{v_i}$, $1 \le i \le n$, et $\widehat{t}_4 = t_{v_4+v}$ si $n \ge 5$, $\widehat{t}_5 = t_{v_5+v}$ si $n = 4$. Les relations ci-dessous sont satisfaites :

- Si $n = 4$,

$\widehat{\gamma}(4)$:



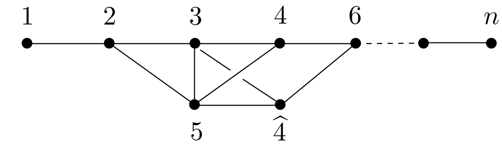
$$
\begin{aligned}
&(t_2^{t_3}t_5)^3 = (t_2^{t_3}\widehat{t}_5)^3 = (\widehat{t}_5 t)^3 = 1, \quad t \in \{t_5^{t_2t_3}, t_5^{t_3t_2}\},\\
&\rho^2 = \rho'^2 = \rho''^2 = 1,\\
&\rho\rho'\rho'' = t_v\rho = t_v\rho'' = \rho' = 1,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\rho &:= t_5 t_{v_5+\overline{\omega}v} t_1 t_{v_1+\overline{\omega}v} t_4\ t_{v_4+\overline{\omega}v},\\
\rho' &:= t_5\widehat{t}_5 t_{v_1+\overline{\omega}v} t_{v_1+\omega v} t_4 t_{v_4+\overline{\omega}v},\\
\rho'' &:= \widehat{t}_5 t_{v_5+\overline{\omega}v}\ t_1 t_{v_1+\omega v} t_{v_4+\overline{\omega}v} t_{v_4+\omega v}.
\end{aligned}
$$

- Si $n \geq 5$,

$\widehat{\gamma}(n)$:



$$
\begin{aligned}
&r(5) \qquad \text{(voir 1.2, 4)},\\
&(\widehat{t}_4 t)^3 = 1 \ \text{ pour } t \in \{t_3^{t_5}, t_4^{t_3t_5}, t_4^{t_5t_3}\},\\
&t_2 t_4 t_{v_2+\omega v_4} t_{v_2+\overline{\omega}v_4} t_{v_2+v_4} = 1.
\end{aligned}
$$

En posant $\zeta = (t_3t_5t_4)^2$ et $\zeta' = (t_3t_5t_2)^2$, on a :

$$
t_{v_2+\omega v_4} = t_4^{\zeta'} = t_2^{\bar{\zeta}}, \quad t_{v_2+\omega v_4} = t_4^{\bar{\zeta}'} = t_2^{\zeta}.
$$

- Supposons $n \geq 6$. Soient P un plan hyperbolique de V_{n+2}, $\langle u\rangle$ une droite non isotrope de P et v un vecteur isotrope non nul de $P^{\perp}$. Désignons par H (resp. H_0) le fixateur de v (resp. u) dans G_{n+2} (resp. H). Alors :

Lemme 3.1. — *Avec les notations ci-dessus :*

1) *Les sous-groupes H et H_0 de G_{n+2} sont respectivement isomorphes au* D-*centralisateur d'une transvection de* $\mathrm{SU}(n+2,4)$ *et* $\mathrm{SU}(n+1,4)$.

2) *Le groupe H_0 opère transitivement sur* $\mathrm{D}\cap H\setminus H_0$, *$H_0$ est un sous-groupe maximal de H parmi les sous-groupes engendrés par les éléments de* D.

3) *Pour tout élément h de H il existe des transvections d et d' dans H telles que h appartienne à $H_0d\cup H_0dd'$.*

4) *Si un élément de H_0 conserve globalement une des droites isotropes de P, il la fixe point par point; le fixateur de cette droite dans H_0 est isomorphe au* D-*centralisateur d'une transvection dans* $\mathrm{SU}(n,4)$

Preuve (*avec les notations de l'énoncé*). — 1) Désignons par t_v la transvection unitaire de vecteur v et par $\mathrm{C}_{n+2}(t_v)$ le centralisateur de t_v dans G_{n+2}. Tout élément g de $\mathrm{C}_{n+2}(t_v)$ conserve la droite $\langle v\rangle$; on a $g(v)=\alpha v$, avec α dans $\mathbb{F}_4^*$. Le fixateur H de t_v est un sous-groupe propre de $\mathrm{C}_{n+2}(t_v)$ contenant le D-centralisateur $\mathrm{DC}_{n+2}(t_v)$ de t_v ; comme ce dernier est un sous-groupe d'indice 3 de $\mathrm{C}_{n+2}(t_v)$, on a $H=\mathrm{DC}_{n+2}(t_v)$. Les éléments de H_0 sont les isométries de G_{n+2} qui fixent v et u. Notons V le sous-espace orthogonal à u ; V est non dégénéré de dimension $n+1$. Le groupe des isométries de la restriction de ϕ à V est G_{n+1} ($\mathrm{G}_{n+1} \sim \mathrm{SU}(n+1,4)$) et G_{n+1} est isomorphe au fixateur de u dans G_{n+2}. De la première partie de la preuve il résulte que H_0 est isomorphe au D-centralisateur d'une transvection dans G_{n+1}.

2) Décrivons d'abord les éléments de $\mathrm{D} \cap H_0$ et de $\mathrm{D} \cap H \setminus H_0$. Soit P_0 un plan hyperbolique contenant v, orthogonal à u. Le sous-espace $P_0 \oplus \langle u \rangle$ est non dégénéré de dimension 3 ; notons V' son orthogonal. On a alors la décomposition en sous-espaces orthogonaux :

$$V_{n+2} = V' \oplus \langle u \rangle \oplus P_0 \ .$$

Sans difficulté, on vérifie les égalités

$$D \cap H_0 = \big\{ t_{v'+\alpha u} \mid v' \text{ vecteur isotrope de } V',\ \alpha \text{ dans } \mathbb{F}_4 \big\},$$

$$D \cap H \setminus H_0 = \big\{ t_{u'+u+\alpha v} \mid u' \text{ vecteur non isotrope de } V',\ \alpha \text{ dans } \mathbb{F}_4 \big\}.$$

Établissons maintenant l'assertion 2). Soient d_1 et d_2 des éléments de $D \cap H \setminus H_0$; il existe des vecteurs non isotropes u'_1 et u'_2 dans V' et des scalaires α_1 et α_2 dans $\mathbb{F}_4$ tels que

$$d_1 = t_{u'_1+u+\alpha_1 v} \quad \text{et} \quad d_2 = t_{u'_2+u+\alpha_2 v}$$

Si u'_1 et u'_2 sont orthogonaux, $u'_1 + u'_2$ est un vecteur isotrope de V', la transvection $d = t_{u'_1+u'_2+(\alpha_1+\alpha_2)v}$ est un élément de H_0 qui satisfait à $dd_1d = d_2$. Si u'_1 et u'_2 ne sont pas orthogonaux, le sous-espace qu'ils engendrent est dégénéré, il est contenu dans un sous-espace non dégénéré de dimension 3 de V'. Il existe donc un vecteur non isotrope u' dans V' orthogonal à u'_1 et u'_2 ($\dim V' = n-1 \geq 5$). Les transvections $d' = t_{u'_1+u'+(\alpha_1+\alpha_2)v}$ et $d'' = t_{u'_2+u'}$ sont dans H_0 et satisfont à $d''d'd_1d'd'' = d_2$. Ainsi H_0 opère transitivement sur $D \cap H \setminus H_0$. De plus, tout sous-groupe H_1 de H qui contient $D \cap H_0$ et un élément de $D \cap H \setminus H_0$ contient $D \cap H$, on a donc $H = H_1$.

3) Soit h un élément de H, on a $h(v) = v$. Si h fixe u, h est élément de H_0. Pour tout élément d de $D \cap H_0$, h est dans H_0dd. Notons u' l'image de u par h ; on peut donc supposer u' distinct de u. Si u et u' sont orthogonaux, le vecteur $u+u'$ est isotrope, $t_{u+u'}(v) = v$ et $t_{u+u'}(h(u)) = u$. Par conséquent, $t_{u+u'}h$ est un élément de H qui fixe u ; c'est donc un élément de H_0. Si u et u' ne sont pas orthogonaux, ils engendrent avec v un sous-espace dégénéré contenu dans un sous-espace non dégénéré de dimension 5. Il existe un vecteur u'' non isotrope orthogonal à u,u' et v ; les transvections $d = t_{u+u''}$ et $d' = t_{u'+u''}$ sont dans $D \cap H$ et satisfont à $dd'h(u) = u$; $dd'h$ est donc un élément de H_0 d'où l'assertion.

4) Choisissons un vecteur v' isotrope dans le plan hyperbolique P contenant u, on peut supposer $\Phi(u, v') = 1$. Soit g un élément de H_0 conservant la droite

$\langle v' \rangle$, on a $g(v') = \alpha v'$. Montrons que $\alpha = 1$. Puisque g fixe v et u, on a :

$$1 = \Phi(v', u) = \Phi\big(g(v'), g(u)\big) = \Phi(\alpha v', u) = \alpha,$$

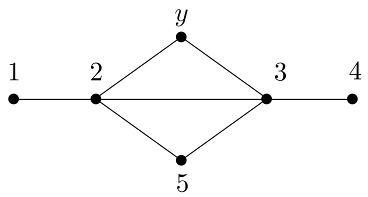
d'où l'assertion.

L'ensemble de tels éléments g (fixant P et v) est un sous-groupe H_0' de H_0. Observons que l'orthogonal de P est un sous-espace vectoriel $P^{\perp}$ de dimension n sur lequel la restriction de Φ est non dégénérée et dont le groupe des isométries est G_n, $G_n \sim \mathrm{SU}(n,4)$. À tout élément g de G_n, on associe l'unique élément de G_{n+2} qui est l'identité sur P et qui en tout point w de $P^{\perp}$ vaut $g(w)$. Les éléments de H_0' correspondent alors aux éléments de G_{n+2} qui fixent v ; le résultat vient alors de 1). $\square$

3.2. Les petites dimensions n = 4 et n = 5.— Ces situations sont traitées en détail dans [14] ; nous ne donnons ici que l'énoncé des résultats et le schéma de la preuve ; cela nous sera utile pour décrire l'extension non scindée $2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7,4)$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit G un groupe de présentation $(x_1, \dots, x_5, y / \widehat{\gamma}(4), \widehat{r}(4), r_0, r_0')$ avec :*

$\widehat{\gamma}(4)$:



$$\begin{aligned}
\widehat{r}(4) :&\quad (x_2^{x_3} x_5)^3 = 1, \quad (xy)^3 = 1,\ x \in \{x_2^{x_3}, x_5^{x_2x_3}, x_5^{x_3x_2}\},\\
r_0 :&\quad (y^{s'} x_1)^2 = (y^{s'} x_4)^2 = 1 \quad \textit{avec } s' = x_3x_5x_2x_3x_5x_2,\\
r_0' :&\quad up = p' = 1\\
&\quad \textit{avec}\ \ u = x_4 y y^{s'} y^{\bar{s}'}, \quad p = x_1 y^{s' x_2x_5x_1x_2} x_4 y^{s' x_3x_5x_4x_3} x_5 y^{s'},\\
&\quad p' = y^{s' x_2x_5x_1x_2} y^{\bar{s}' x_2x_5x_1x_2} x_4\ y^{x_3x_5x_4x_3} x_5 y.
\end{aligned}$$

Alors, si on omet la relation r_0', la classe de conjugaison de x_1 dans G est une classe de 3-transpositions de cardinal 4×45 ; G est l'extension scindée

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow 2 \times \mathrm{PSU}(4,4) \to 1$$

où A est un groupe nilpotent de classe 2 et d'ordre 2^{8+3}.

Avec la relation r_0', la classe de x_1 est une classe de 3-transpositions de cardinal 4×45 ; le groupe G est l'extension scindée

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{PSU}(4,4) \to 1$$

où A est extra-spécial d'ordre 2^{8+1} ; $A = \mathbb{O}_2(G)$, $\mathcal{D}(A) = \mathrm{Z}(A) = \mathrm{Z}(G) = \langle u \rangle$ où $u = x_4 y y^{s'} y^{\bar{s}'}$. Le groupe G est isomorphe au D*-centralisateur* $\mathrm{DC}_6(d)$ *d'une transvection de* $\mathrm{SU}(6,4)$.

Preuve (*avec les notations ci-dessus*). — Nous ne donnons qu'une idée de la preuve quand on a la relation r'_0 ; pour plus de détails voir [6, th. 1], [8, 6.19].

1) Il existe un morphisme F de G dans $\mathrm{DC}_6(d)$ qui applique x_i sur t_i, $(1 \le i \le 5)$ y sur $\widehat{t}_5$ et u sur t_v. De plus les images par F des six éléments de x_1^G définissant p (resp. p') sont les transvections définissant ρ (resp. ρ'), on a $F(p) = \rho$, $F(p') = \rho' = 1$.

2) Il existe un endomorphisme Θ de G tel que $\Theta(x_i) = x_i$ et $\Theta(y) = x_5$ $(1 \le i \le 5)$. Comme $\Theta^2 = 1$, G est isomorphe au produit semi-direct $\mathrm{Ker}\,\Theta \rtimes \mathrm{Im}\,\Theta$ où $\mathrm{Im}\,\Theta$ est isomorphe à $2 \times \mathrm{SU}(4,4)$.

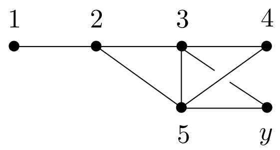
3) Posons $\alpha = yx_5$ et désignons par A la fermeture normale de α dans G (voir 1.2). Il est clair que A contient les éléments α, $\alpha_3 = \alpha^{x_3x_5}$, $\alpha_4 = \alpha_3^{x_4x_3}$, $\alpha_2 = \alpha_3^{x_2x_3}$, $\alpha_1 = \alpha_2^{x_1x_2}$, $\beta = \alpha^{s'}$, $\beta_3 = \beta^{x_3x_5}$, $\beta_4 = \beta_3^{x_4x_3}$, $\beta_2 = \beta_3^{x_2x_3}$, $\beta_1 = \beta_2^{x_1x_2}$. On établit les résultats suivants :

(i) $u = [\alpha_2, \alpha_5]$ et $\mathcal{D}(A) = \langle u \rangle$;
(ii) pour $\{i,j\} \neq \{2,5\}$, $x_i\delta_j x_i = \delta_j$ si $(x_ix_j)^2 = 1$, $x_i\delta_j x_i = \delta_i\delta_j$ sinon, $\delta \in \{\alpha, \beta\}$;
(iii) $x_5\alpha_2x_5 = \alpha_2\beta_5$, $x_5\beta_2x_5 = \beta_5\beta_2\alpha_5$, $x_2\alpha_5x_2 = \alpha_5\beta_2$, $x_2\beta_5x_2 = \alpha_2\beta_5$;
(iv) $\mathrm{Z}(A) = \langle u, p, p' \rangle$, $p = \alpha_1\beta_4\beta_5$, $p' = \alpha_1\alpha_4\alpha_5\beta_1$. Les relations r'_0 prouvent que $\langle u \rangle = \mathrm{Z}(A) \subset \mathrm{Z}(G)$.

4) Le groupe A est nilpotent de classe 2. On a $\mathrm{Z}(A) = \mathrm{Z}(G)$ et $|A| = 2^{8+1}$. La classe de conjugaison de x_1 est de cardinal 4×45, c'est une classe de 3-transpositions de G ; G/A est isomorphe à $\mathrm{SU}(4,4)$. $\square$

Proposition 3.3. — *Soit G un groupe de présentation $(x_1, \ldots, x_5, y/\widehat{\gamma}(5), \hat{r}(5), r')$ où*

$\widehat{\gamma}(5)$:



$$\begin{aligned}\hat{r}(5) :\quad & (x_3^{x_2}x_5)^3 = (x_4^{x_3}x_5)^3 = (x_2^{x_3x_4}x_5)^3 = 1,\\ & (yx)^3 = 1, \quad x \in \{x_2^{x_3x_5}, x_2^{x_5x_3}, x_4^{x_3x_5}, x_4^{x_5x_3}, x_3^{x_5}\},\\ & (yx_2^{s})^2 = (yx_4^{s'})^2 = 1 \quad \textit{avec } s = (x_3x_5x_4)^2,\ s' = (x_3x_5x_2)^2.\end{aligned}$$

1) *Si r' désigne la relation $(yx_1^{x_3x_4s'x_4x_3})^2 = 1$, la classe de conjugaison de x_1 est une classe de 3-transpositions de G de cardinal $2^4 \times 165$; le groupe G est l'extension scindée*

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow 2 \times \mathrm{PSU}(5,4) \to 1,$$

où A est un groupe nilpotent de classe 2 de cardinal 2^{23} ; on a $|G| = 2 \times 2^{23}\,|\mathrm{PSU}(5,4)|$.

2) *Si* r' *désigne la relation* $y^{x_3x_4s'x_4x_3}y^s = 1$ (*), *la classe de conjugaison de* x_1 *est une classe de* 3*-transpositions de* G *de cardinal* 4×165 *; le groupe* G *est l'extension scindée*

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow 2 \times \mathrm{PSU}(5,4) \to 1,$$

où A *est nilpotent de classe* 2, $|A| = 2^{10+1}$ *; soit* $u := x_4yy^sy^{\bar{s}}$, *on a* $\mathrm{Z}(A) = \mathcal{D}(A) = \langle u\rangle \subset \langle u, Q\rangle = \mathrm{Z}(G)$.

3) *Si* r' *désigne l'ensemble des relations* $Q = 1$ *et* (*) *alors* G *est isomorphe au* D*-centralisateur d'une transvection unitaire de* SU$(7,4)$, x_1^G *est une classe de* 3*-transpositions de* G, $|x_1^G| = 4 \times 165$ *;* G *est l'extension scindée*

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{PSU}(5,4) \to 1,$$

où A *satisfait aux conditions de* 2) *; de plus on a* $\mathrm{Z}(A) = \mathrm{Z}(G) = \langle u\rangle$.

Preuve. — Ces résultats sont établis dans [14, 6.46] et dans [8], voir ci-après. Nous ne rappelons ici que les étapes de la démonstration de 2), elles nous seront utiles par la suite.

1) Il existe un morphisme F de G dans le D-centralisateur $\mathrm{DC}_7(d)$ d'une transvection unitaire $t_v = d$ de SU$(7,4)$ qui applique x_i sur t_i $(1 \leq i \leq 5)$, y sur $t_{v_4+v} := \hat{t}_4$ (notations introduites au § 1). On a

$$F(u) = t_v, \quad F(y^s) = t_{v_4+\bar{\omega}v}, \quad F\big(y^{x_3x_4s'x_4x_3}\big) = t_{v_4+\bar{\omega}v}, \quad F(Q) = 1.$$

2) Le groupe G admet un endomorphisme Θ qui applique x_i sur x_i $(1 \leq i \leq 5)$, y sur x_4 et qui satisfait à $\Theta^2 = \Theta$. Le groupe G est donc le produit semi-direct $\mathrm{Ker}\,\Theta \rtimes \mathrm{Im}\,\Theta$, $\mathrm{Im}\,\Theta$ est isomorphe à $2 \times \mathrm{PSU}(5,4)$ et $\mathrm{Ker}\,\Theta$ est le plus petit sous-groupe normal de G contenant x_4y.

3) Posons $\alpha = x_4y$ et notons A la fermeture normale de α dans G. Rappelons que s et s' engendrent un sous-groupe isomorphe à SL$(2,3)$ dont le centre, d'ordre 2, est engendré par $(\bar{s}'s)^2$. On sait que $(\bar{s}'s)^2 = q$ où $q = x_2x_4t't''$ est central dans $\langle x_2, x_3, x_4, x_5\rangle$ (1.2). À chaque élément g de $\langle s, s'\rangle$, on associe un élément $\chi_3 = \alpha^{x_3x_4g}$ de A, puis de proche en proche, on définit $\chi_4 = \chi_3^{x_4x_3}$, $\chi_5 = \chi_3^{x_5x_3}$, $\chi_2 = \chi_3^{x_2x_3}$, $\chi_1 = \chi_2^{x_1x_2}$. De manière générale, on a $\chi_i^q = \overline{\chi}_i$; mais χ_i est d'ordre 2, q centralise donc χ_i $(1 \leq i \leq 5)$. La relation r' impose $x_3y^{sx_3x_4} = x_3y^{x_3x_4s'}$, c'est-à-dire $\alpha_3^s = \alpha_3^{s'}$; ainsi on a $\alpha_3 = \alpha_3^{s\bar{s}'} = \alpha_3^{\bar{s}s'} = \alpha_3^{ss's}$, $\beta_3 := \alpha_3^s = \alpha_3^{s'} = \alpha_3^{\bar{s}\bar{s}'} = \alpha_3^{\bar{s}'\bar{s}}$, $\delta_3 := \alpha_3^{\bar{s}} = \alpha_3^{\bar{s}'} = \alpha_3^{ss'} = \alpha_3^{s's}$; le sous-groupe A est alors engendré par les éléments $\alpha_i\,\beta_i$, δ_i, $(1 \leq i \leq 5)$ définis ci-dessus. L'élément $u = x_4yy^sy^{\bar{s}}$ s'écrit aussi $\alpha_4\beta_4\delta_4$; on montre que $A/\langle u\rangle$ est abélien élémentaire d'ordre 4^5 et $\mathcal{D}(A) = \langle u\rangle$.

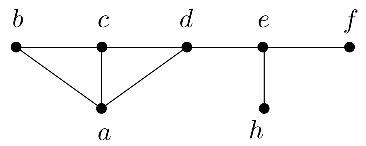
4) La classe de conjugaison de x_1 est une classe de 3-transpositions de G, de cardinal 4×165 ; le reste de l'assertion est immédiat. ☐

Note. — On trouve une démonstration similaire et totalement détaillée, s'appliquant aux cas des groupes orthogonaux sur $\mathbb{F}_3$ dans [12].

Par des méthodes différentes et partant d'une présentation non fischérienne J. Hall et L. Soicher obtiennent les mêmes résultats :

PROPOSITION 3.4. — *Soit G un groupe de présentation* $(a, b, c, d, e, f, h/\Gamma_5, r_1, r_2)$ *où*

Γ_5 :



$$\begin{aligned} r_1 : \quad & (a^c b)^3 = (a^c d)^3 = (a^b c^d)^3 = 1, \\ & h = \big((acb)^{-2}(acd)^2\big)^2 (abcde)^{15}, \\ r_2 : \quad & \varnothing \quad (\textit{resp.}\ [a, (bcdefh)^5] = 1,\ \textit{resp.}\ (abcde)^{15} = 1). \end{aligned}$$

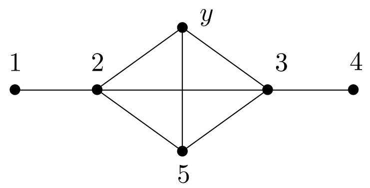
Alors le groupe G satisfait aux conclusions 1) (*resp.* 2)*, resp.* 3)) *de* 3.3.

Preuve. — Voir [8, 8.9]. □

3.3. Situation spécifique : n = 4 et n = 5.— Le groupe $G = 2 \times \mathrm{PSU}(4,4)$ peut être considéré comme un groupe orthogonal sur $\mathbb{F}_3$ à savoir $2 \times \mathrm{O}_5(3)$ (voir [2], [3]). On peut alors construire une extension de G par des 3-groupes normaux. Pour une étude complète et détaillée nous renvoyons à [8] et [12]. Énonçons ici le résultat dans la situation $n = 4$.

PROPOSITION 3.5. — *Soit G de présentation* $(x_1, \dots, x_5, y/\widehat{\gamma}'(4), \widehat{r}'(4), r', r'')$ *où*

$\widehat{\gamma}'(4)$:



$$\begin{aligned} \hat{r}(4) : \quad & \textit{voir } 3.2, \\ r' : \quad & (yx)^3 = 1 \quad x \in \{x_2^{x_3}, x_3^{x_5}, x_5^{x_2}, x_2^{x_3 x_5}, x_3^{x_5 x_2}, x_5^{x_2 x_3}\}, \\ r'' : \quad & (y^{s'} x_1)^2 = (y^{s'} x_4)^2 = 1 \quad (\textit{resp.}\ y^{s'} y = 1). \end{aligned}$$

Alors la classe de conjugaison de x_1 dans G est une classe de 3*-transpositions de cardinal* $3^2 \times 45$ *(resp.* 3×45*) ; G est l'extension scindée*

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow 2 \times \mathrm{O}_5(3) \to 1,$$

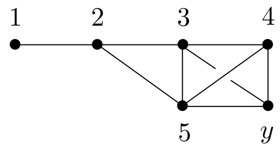
où A est nilpotent de classe 2*, d'ordre* 3^{10+1} (*resp. abélien élémentaire d'ordre* 3^5).

Preuve. — (Voir [8, 8.4], [12, 2.1 et 2.3], [14, 6.19]. □

Pour $n = 5$, on peut également construire des extensions de $2 \times \mathrm{PSU}(5, 4)$ par un 3-groupe, pour les détails nous renvoyons à [8] et [12].

PROPOSITION 3.6. — *Soit G un groupe de présentation* $(x_1, \ldots, x_5, y/\widehat{\gamma}'(5), \widehat{r}(5), r_3, r_4)$ *où*

$\widehat{\gamma}'(5)$:

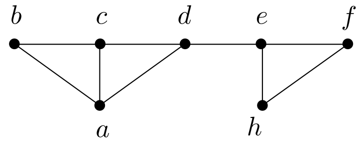


$$\begin{aligned} \widehat{r}(5) :&\quad \textit{voir } 3.3, \\ r_3 :&\quad (yx)^3 = 1, \quad x \in \{x_3^{x_4}, x_5^{x_4}, x_3^{x_5 x_4}\}, \\ r_4 :&\quad (y x_1^{x_3 x_4 s' x_4 x_3})^2 = 1 \quad (\textit{resp. } y^s y^{x_3 x_4 s' x_4 x_3} = 1). \end{aligned}$$

Alors :

1) *Le groupe G admet la présentation* $(a, b, c, d, e, f, h/\Gamma_5', (e^h f)^3 = 1, r_1, r_5)$ *où*

Γ_5' :



$$\begin{aligned} r_1 :&\quad \textit{voir } 3.4, \\ r_5 :&\quad \varnothing \ (\textit{resp. } [e^{(acd)^2}, (efh)^2] = 1). \end{aligned}$$

2) *La classe de conjugaison de x_1 est une classe de 3-transpositions de G de cardinal* $3^4 \times 165$ (*resp.* $3^2 \times 165$) *; G est l'extension scindée de* $2 \times \mathrm{PSU}(5, 4)$ *par un groupe A nilpotent de classe 2 d'ordre* 3^{23} (*resp. extra-spécial d'ordre* 3^{11}).

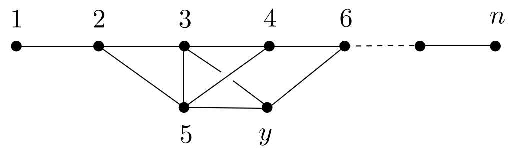
Démonstration. — Voir [8, 8.2] et [14, 6.46]. □

On ne peut pas obtenir de résultats similaires pour $n \geq 6$, puisque la condition $\sigma(6)$, exigée dans les présentations fischériennes que l'on utilise pour les groupes unitaires SU$(n, 4)$, fait alors obstruction (voir § 2).

3.4. Cas général : $n \geq 6$

THÉORÈME 3.7. — *Soit G un groupe de présentation* $(x_1, \ldots, x_n, y/\widehat{\gamma}(n), \widehat{r}(5), (*), \sigma(6), m_1 = m_2 = 1, r'(6))$ *où*

$\widehat{\gamma}(n)$:



$$\begin{aligned} &\hat{r}(5) \textit{ et } (*) \ : \textit{voir } 3.3,\\ &\sigma(6): \quad (x_1^{qx_2x_3x_4}x_6)^2 = 1 \quad \textit{avec } q = x_2x_4x_2^sx_4^{s'},\\ &r'(6): \quad (y^{x_3x_4}x_6)^2 = 1,\end{aligned}$$

pour s, s', m_1, m_2 voir 1.2, 4) *et* 1.4, 4). *Alors la classe de conjugaison de x_1 dans G est une classe de* 3*-transpositions de G de cardinal* $4 \times \frac{1}{3}(2^{2n-1} + (-1)^n 2^{n-1} - 1)$. *Le groupe G est l'extension scindée*

$$1 \to A \longrightarrow G \longrightarrow 2 \times \mathrm{SU}(n,4) \to 1,$$

où A est un groupe nilpotent de classe 2, $|A| = 2^{2n+1}$, $\mathrm{Z}(A) = \mathcal{D}(A) = \langle u\rangle \subset \langle u, Q\rangle \subset \mathrm{Z}(G)$ *avec* $u := x_4yy^sy^{\bar{s}}$.

Si l'on adjoint la relation $Q = 1$, le groupe obtenu est isomorphe au D*-centralisateur* $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ *d'une transvection unitaire d dans* $\mathrm{SU}(n+2,4)$ *; l'extension*

$$1 \to 2^{2n+1} \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{SU}(n,4) \to 1$$

est scindée.

Pour établir ce résultat, nous utilisons le théorème d'extension établi dans [10, th. 1.3.1] dont l'énoncé est le suivant :

Soit G un groupe de présentation $(X, \mathcal{R})$ où X est un ensemble d'involutions de cardinal au moins égal à 3 *et soit b un élément de X tel que :*

(i) *il existe un élément x_0 dans $X - \{b\}$ avec $(x_0b)^3 = 1$;*
(ii) *pour tout élément x dans $X - \{b\}$ on a ou bien $(xb)^2 = 1$ ou bien $(xb)^3 = 1$;*
(iii) *le sous-groupe K engendré par $X - \{b\}$ est distinct de G et admet une classe de* 3*-transpositions* $\mathrm{D}(K)$ *contenant $X - \{b\}$.*

Si les conditions suivantes sont remplies :

C0 : *le centralisateur B de b dans K, $\mathrm{C}_K(b)$, opère transitivement (par conjugaison) sur $\mathrm{D}(K) \setminus B$;*
C1 : *pour tout élément k dans K, il existe des éléments e et e' dans $\mathrm{D}(K)$ tels que k appartienne à $Be \cup Bee'$;*

alors l'ensemble $E = \mathrm{D}(K) \cup \{b^k \mid k \in K\}$ est une classe de 3*-transpositions de G et l'on a* $|E| = |\mathrm{D}(K)| + |K : \mathrm{C}_K(b)|$.

Preuve de 3.7. — Le théorème 3.7 est prouvé par récurrence sur l'entier n. Observons que si $n = 5$, les relations $\sigma(6), m_1 = m_2 = 1, r'(6)$ qui font intervenir x_6 n'ont plus lieu d'être ; on retrouve alors la proposition 3.3.

Au cours de la démonstration, nous utilisons les notations introduites en 3.2 et 3.3. Pour tout entier n, $n \geq 5$, $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ désigne le D-centralisateur d'une transvection unitaire dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$.

On suppose d'abord $Q = 1$.

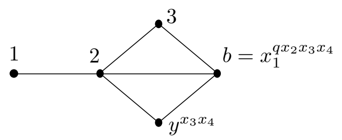
1) *Il existe un morphisme F de G sur* $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$, $n \geq 6$. Posons $C = \mathrm{DC}_{n+2}(d)$, et notons $\mathrm{D}(C)$ la classe de 3-transpositions de C. Utilisons les notations de 3.1. La correspondance de graphes établie par $x_i \mapsto t_i$, $y \mapsto \hat{t}_4$ $(1 \leq i \leq n)$ détermine un morphisme de G dans C, avec $d = t_v$, à condition que les relations $\hat{r}_5, \sigma(6), r'(6)$ soient satisfaites dans C et que les images de m_1 et m_2 soient triviales.

Les éléments $y^{x_3x_4}$, t', t'', $x_1^{t't''x_3x_4}$ correspondent respectivement à t_{v_3+v}, $t_{v_2+\omega v_4}$, $t_{v_2+\overline{\omega} v_4}$, $t_{v_1+v_3}$. Puisque v_6 est orthogonal à v_1+v_3 et à v_3+v, l'assertion est démontrée pour $r'(6)$ et $\sigma(6)$; pour $\hat{r}(5)$, elle a été prouvée dans 3.3. Enfin, pour les relations $m_i = 1$ $(i = 1,2)$, il suffit d'écrire m_i en fonction des générateurs $x_1, \ldots, x_5, y$ et de vérifier par un calcul élémentaire que l'image de m_i est triviale.

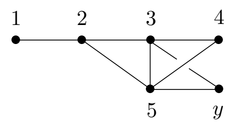
2) *Le sous-groupe K de G engendré par $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ est isomorphe à* $\mathrm{DC}_{n+1}(d)$. Si $n = 6$, les générateurs de K satisfont aux relations $\widehat{\gamma}(5)$ et $\hat{r}_5$; K est donc un quotient de $\mathrm{DC}_7(d)$ (3.3). Si $n \geq 7$, l'hypothèse de récurrence impose que K soit un quotient de $\mathrm{DC}_{n+1}(d)$. L'image $F(K)$ de K dans C contient les transvections $t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{v_4+v}$; elle contient par conséquent toutes les transvections de la forme $t_{\lambda v+w}$ $(\lambda \in \mathbb{F}_4, w$ isotrope dans $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle)$. Il s'ensuit que $F(K)$ est isomorphe à $\mathrm{DC}_{n+1}(d)$. Ainsi, la restriction de F à K est un isomorphisme de K sur le sous-groupe de C, qui fixe v et la droite non isotrope orthogonale au sous-espace $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$; l'élément $u = x_4yy^sy^{\bar{s}}$ appartient à K, en vertu de la récurrence c'est la 2-partie du centre de K.

3) *Le centralisateur B de x_n dans K est isomorphe* à $\mathrm{DC}_n(d)$. De manière évidente, B contient le sous-groupe B_0 engendré par les éléments suivants :

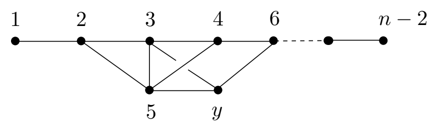
- si $n = 6$,



- si $n = 7$,



- si $n \geq 8$,



(vérification élémentaire).

Observons que B_0 est isomorphe à un quotient de $\mathrm{DC}_{n+1}(d)$. En effet, pour $n \geq 7$, les relations $\widehat{\gamma}(n-1)$, $\widehat{r}(5)$, $m_1 = m_2 = 1$, $\sigma(6)$ et $r'(6)$ sont satisfaites.

Pour $n = 6$, des calculs élémentaires établissent les relations $\widehat{\gamma}(4)$ et r_0 (notations 3.2). Il reste à prouver r_0'. Posons $\widehat{x}_3 = y^{x_3x_4}$; des calculs élémentaires conduisent aux égalités

$$\begin{array}{ll}
F(\widehat{x}_3) = t_{v_3+v}, & F(\widehat{x}_3^{\,s'}) = t_{v_3+\overline{\omega}v}, \\
F(\widehat{x}_3^{\,\overline{s}'}) = t_{v_3+\omega v}, & F(\widehat{x}_3^{\,s'x_2x_3x_1x_2}) = t_{v_1+\overline{\omega}v}, \\
F(\widehat{x}_3^{\,\overline{s}'x_2x_3x_1x_2}) = t_{v_1+\omega v}, & F(\widehat{x}_3^{\,x_5x_3bx_5}) = t_{v_1+v_3+v}, \\
F(\widehat{x}_3^{\,\overline{s}'x_5x_3bx_5}) = t_{v_1+v_3+\omega v}, &
\end{array}$$

d'où l'on déduit que $F(u) = t_v$ et que

$$\begin{aligned}
F(p) &= t_{v_1}t_{v_3}t_{v_1+v_3}t_{v_1+\omega v}t_{v_1+v_3+\omega v}t_{v_3+\omega v} = t_v, \\
F(p') &= t_{v_3}t_{v_1+v_3}t_{v_3+v}t_{v_1+\omega v}t_{v_1+\overline{\omega}v}t_{v_1+v_3+v} = 1.
\end{aligned}$$

On a donc $F(up) = F(p') = 1$ et par suite $up = 1$ et $p' = 1$.

L'image de B_0 par F est engendrée par les transvections t_{v_i} et t_{v_3+v} $(1 \leq i \leq n-2)$, $F(B_0)$ contient toutes les transvections $t_{\lambda v+w}$ avec λ dans $\mathbb{F}_4$ et w isotrope dans le sous-espace $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$: $F(B_0)$ est donc isomorphe à $\mathrm{DC}_n(d)$.

Soit P un plan hyperbolique contenant v et orthogonal à $W = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$; $F(K)$ est le fixateur de v. Notons $\langle v_0\rangle$ et $\langle v_0'\rangle$ des droites non isotropes telles que $W = \langle v_0\rangle \perp \langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$ et $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle = \langle v_0'\rangle \perp \langle v_1, \ldots, v_{n-2}\rangle$, alors $F(x_n) = t_{v_n}$ et $v_n = v_0 + v_0'$.

Soit g un élément de K qui centralise x_n : son image $F(g)$ fixe v et v_0' ; elle conserve la droite $\langle v_n\rangle$ par conséquent elle fixe v_0'. C'est un élément de $F(B_0)$, on a $F(B_0) = F(B)$, il s'ensuit que $B_0 = B$.

4) *L'ensemble $E = x_1^K \cup x_n^K$ est une classe de 3-transpositions de G. On a $|E| = 4\,|\mathrm{D}(\mathrm{SU}(n,4))|$ et G est une extension centrale de $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$.*

Nous avons établi que K est isomorphe à $\mathrm{DC}_{n+1}(d)$ et que la classe de conjugaison $\mathrm{D}(K)$ de x_1 dans K est une classe de 3-transpositions de K,

$$|\mathrm{D}(K)| = 4\,\big|\mathrm{D}(\mathrm{SU}(n-1,4))\big|.$$

Puis nous avons déterminé le centralisateur B dans K, d'un élément x_n n'appartenant pas à K. Afin d'appliquer le théorème d'extension (*loc. cit.*) à cette situation, nous devons vérifier que les conditions C0 et C1 sont remplies, c'est-à-dire que B opère transitivement sur $\mathrm{D}(K) \setminus B$ (C0) et que pour tout élément k dans K il existe des éléments e et e' dans $\mathrm{D}(K)$ tels que k appartienne à $Be \cup Bee'$ (C1). Mais rappelons que le morphisme F de K sur $F(K)$ est un isomorphisme et que les groupes $F(K)$ et $F(B)$ satisfont à C0 et C1 (lemme 3.1). En conséquence, le théorème d'extension permet d'affirmer que $E = \mathrm{D}(K) \cup \{x_n^k \mid k \in K\}$ est une classe de 3-transpositions de G dont le cardinal est $|E| = |\mathrm{D}(K)| + |K : B|$, ce qui donne

$$|E| = 4\big|\mathrm{D}(\mathrm{SU}(n-1,4))\big| + \frac{2^{2(n-1)+1}|\mathrm{SU}(n-1,4)|}{2^{2(n-2)+1}|\mathrm{SU}(n-2,4)|} = 4\big|\mathrm{D}(\mathrm{SU}(n,4))\big| = \big|\mathrm{D}(C)\big|.$$

Ainsi la classe de 3-transpositions E de G est équipotente à celle de C, C désignant le D-centralisateur d'une transvection unitaire de $\mathrm{SU}(n+2,4)$

5) *Les groupes G et $C = \mathrm{DC}_{n+2}(d)$ sont isomorphes.* Désignons par $\mathrm{N}(G)$ (resp. $\mathrm{N}(C)$) le sous-groupe de G (resp. C) engendré par les produits ee' d'éléments de E (resp. $\mathrm{D}(C)$) tels que $e' = e^h$ avec h dans $\mathbb{O}_2(G)$ (resp. $\mathbb{O}_2(C)$). D'une part on sait que $\mathrm{N}(G)$ est le plus petit sous-groupe normal N de G tel que $N \subset \mathbb{O}_2(G)$ et $\mathbb{O}_2(G/N) \subset \mathrm{Z}(G/N)$ et on sait aussi que $\mathrm{N}(C)$ possède ces propriétés (voir [4], [14]) ; d'autre part, $\mathrm{N}(C)$ est égal à $\mathbb{O}_2(G)$ et l'on a $|C/\mathrm{N}(C)| = |\mathrm{SU}(n,4)|$.

Considérons l'endomorphisme Θ de G défini par $\Theta(x_i) = x_i$ $(1 \le i \le n)$ et $\Theta(y) = x_5$ si $n \ge 7$ et $\Theta(y) = x_4$ si $n = 6$. L'image de cet endomorphisme est isomorphe à $\mathrm{SU}(n,4)$ et son noyau est la fermeture normale (voir 1.2) de yx_5 si $n \ge 7$ et de yx_4 si $n = 6$; $\mathrm{Ker}\,\Theta$ est donc contenu dans $\mathrm{N}(G)$. En conséquence l'ordre de G divise celui de $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ ce qui entraîne (par 4) que G et C sont isomorphes.

De là on déduit sans difficulté le reste des assertions du théorème.

Supposons maintenant $Q \neq 1$.

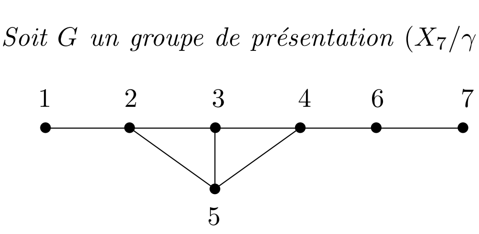
Rappelons que Q est défini comme le produit $qx_1^{qx_1}$ où $q = x_2x_4x_2^sx_4^{s'}$ (1.2, 1.4). Le morphisme F défini en 1), de G dans C, envoie Q sur 1 puisque l'image de Q par F est le produit de transvections $t_{v_2}t_{v_4}t_{v_2+\omega v_4}t_{v_2+\bar\omega v_4}t_{v_2+v_4}$. Par conséquent, Q est un élément central de K et l'on a $K = \langle Q\rangle \times K_1$ avec $K_1 \sim \mathrm{DC}_{n+1}(d)$; on a aussi $B = \langle Q\rangle \times B_1$ avec $B_1 \sim \mathrm{DC}_n(d)$. D'après la première partie, $G/\langle Q\rangle$ est isomorphe à $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ et par suite on a $G \sim \langle Q\rangle \times \mathrm{DC}_{n+2}(d)$, la classe de conjugaison de x_1 s'envoyant sur celle de $(1,t_1)$ qui est une classe de 3-transpositions de $\langle Q\rangle \times \mathrm{DC}_{n+2}(d)$. $\square$

4. L'extension non scindée $\mathbf{2^{14} \cdot SU(7,4)}$

Nous utilisons les notations introduites en 1.2 et 1.4.

Proposition 4.1. — *Soit G un groupe de présentation $(X_7/\gamma(7), r(5), \sigma(6))$ où*

$\gamma(7)$:



$$r(5):\quad (x_2^{x_3}x_5)^3 = (x_3^{x_4}x_5)^3 = (x_2^{x_3x_4}x_5)^3 = 1,$$

$$\sigma(6):\quad (x_1^{qx_2x_3x_4}x_6)^2 = 1 \quad \textit{avec } q = x_2x_4x_2^sx_2^{\bar s}.$$

Alors G est l'extension non scindée

$$1 \to N \longrightarrow G \longrightarrow 2 \times \mathrm{SU}(7,4) \to 1$$

où N est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre 2^{14} ; la classe de conjugaison de x_1 dans G est de cardinal 4×2709, c'est une classe de 3-transpositions de G. Le centre de G est d'ordre 2, $\mathrm{Z}(G) = \langle Q \rangle$.

Preuve. — 1) *Préliminaires.* Rappelons que l'élément $Q := x_1^{qx_1} q$ est un élément central d'ordre 2 de G et que les éléments m_i $(1 \leq i \leq 3)$ décrits en 1.4, 4) sont dans le centre du sous-groupe $K := \langle x_1, \ldots, x_6 \rangle$ de G. Rappelons enfin que si ces éléments m_i centralisent x_7, ils sont triviaux, dans ce cas G est isomorphe à $2 \times \mathrm{SU}(7,4)$ et $\mathrm{Z}(G) = \langle Q \rangle$ (voir 1.4, 3).

Nous supposons donc que l'un des m_i $(1 \leq i \leq 3)$ ne centralise pas x_7 ; nous le notons m, ainsi $x_7 \neq x_7^m$.

Il existe un morphisme F de G sur $\mathrm{SU}(7,4)$, qui applique chaque élément x_i $1 \leq i \leq 7$ sur la transvection unitaire t_i (notations 3.1). Dans ces conditions, $F(Q) = F(m_i) = 1$, $(1 \leq i \leq 3)$. L'image du sous-groupe K est le quotient $K/\operatorname{Ker} F_K$ où F_K désigne la restriction de F à K, on a $\operatorname{Ker} F_K = \langle Q, m_1, m_2, m_3 \rangle$. Rappelons que les éléments Q et Q' coïncident (voir 1.4, 4).

2) *Les sous-groupes U, V, W.* On désigne par U, V, W les sous-groupes

$$U := \langle x_1, \ldots, x_5 \rangle, \quad V := \langle x_2, \ldots, x_6 \rangle, \quad W := \langle x_2, \ldots, x_6^{x_7} \rangle.$$

On a $G = \langle U, V, W \rangle$. Compte tenu des relations $r(5)$ et $\sigma(7)$, U, V et W sont isomorphes à $2 \times \mathrm{PSU}(5,4)$ et l'on a $\mathrm{Z}(U) = \mathrm{Z}(V) = \mathrm{Z}(W) = \langle Q \rangle = \langle Q' \rangle$.

3) *Les éléments $\widehat{x}_i$, la relation (r).* Posons $\alpha = x_7 x_7^m$ et $\widehat{x}_7 = x_7^m$; puisque m ne centralise pas x_7, α n'est pas trivial. Introduisons les éléments définis de proche en proche comme dans la preuve de la proposition 3.2 :

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_6 = \widehat{x}_7^{x_6 x_7}, \quad \widehat{x}_{67} = \widehat{x}_7^{(x_7 x_6 x_7) x_7}, \quad \widehat{x}_4 = \widehat{x}_6^{x_4 x_6}, \\
&\widehat{x}_3 = \widehat{x}_4^{x_3 x_4}, \quad \widehat{x}_2 = \widehat{x}_3^{x_2 x_3}, \quad \widehat{x}_1 = \widehat{x}_2^{x_1 x_2}, \quad \widehat{x}_5 = \widehat{x}_3^{x_5 x_3},
\end{aligned}$$

puis posons $x_{67} := x_6^{x_7}$ et $\alpha_i := x_i \widehat{x}_i$ pour $i \in \{1, \ldots, 6, 67\}$.

On désigne par (r) la relation

$$(r) \qquad \widehat{x}_4^{x_3 x_2 x_4 x_3 x_5 x_2 x_4 x_5} \widehat{x}_4 = 1.$$

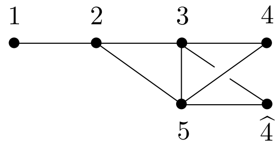
On démontre « à la main » et par des calculs élémentaires que (r) est conséquence des relations de définition de G.

4) *Les sous-groupes $\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}$.* On pose $\widehat{U} = \langle U, \widehat{x}_4 \rangle$, $\widehat{V} = \langle V, \widehat{x}_2 \rangle$, $\widehat{W} = \langle W, \widehat{x}_2 \rangle$

On a les relations suivantes :

- dans $\widehat{U}$:

(i) $r(5)$ et

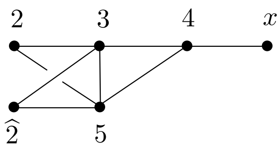


(ii) $\widehat{r}(5)$ où l'on remplace y par $\widehat{x}_4$;

(iii) $\widehat{x}_4^s = x_4^{x_3x_4s'x_4x_3}$;

- dans $\widehat{V}$ (resp. $\widehat{W}$)

(i) $r(5)$ avec $x = x_6$ (resp. x_{67}), et



(ii) $(\widehat{x}_2 x')^3 = 1, \quad x' \in \{x_2^{x_3}, x_3^{x_5}, x_5^{x_2}, x_2^{x_3x_5}, x_3^{x_5x_2}, x_5^{x_2x_3}\}$,
$(\widehat{x}_2 x_4^{s'})^2 = (\widehat{x}_2 x_2^s)^2 = 1$;

(iii) $\widehat{x}_2^{s'} = \widehat{x}_2^{x_3x_2sx_2x_3}$.

Par des calculs élémentaires, on prouve les relations (i) et (ii). Les relations (iii) pour $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$ (resp. $\widehat{W}$) sont équivalentes. En effet, on a

$$\widehat{x}_2 = \widehat{x}_4^{x_3x_4x_2x_3}, \quad s'^{x_3x_2} = s', \quad s^{x_4x_3} = s.$$

Donc la relation (iii) pour $\widehat{V}$ s'écrit aussi $(\widehat{x}_4^{x_3x_4x_2x_3})^{x_3x_2sx_2x_3} = (\widehat{x}_4^{x_3x_4x_2x_3})^{s'}$, c'est-à-dire $\widehat{x}_4^s = \widehat{x}_4^{x_3x_4s'x_4x_3}$, ce qui est la relation (iii) pour $\widehat{U}$. Mais cette relation s'écrit aussi $\widehat{x}_4^{x_5x_4x_3x_5x_4x_3} = \widehat{x}_4^{x_3x_4(x_2x_3x_5x_2x_3x_5)x_4x_3}$ ou encore $\widehat{x}_4 = \widehat{x}_4^{x_3x_4x_2x_3x_5x_2x_4x_5}$, ce qui est la relation (r). Il résulte alors de la proposition 3.3 que les groupes $\widehat{U}$, $\widehat{V}$, $\widehat{W}$ sont isomorphes à des quotients de $H = 2\times(2^{10+1}\rtimes \mathrm{PSU}(5,4))$. On a $\widehat{U} = \langle Q\rangle\times(A\rtimes U_0)$ (resp. $\widehat{V} = \langle Q'\rangle\times(B\rtimes V_0)$, resp. $\widehat{W} = \langle Q'\rangle \times (C \rtimes W_0)$) ; $\widehat{U}/A$ (resp. $\widehat{V}/B$, resp. $\widehat{W}/C$) est isomorphe à $2 \times \mathrm{PSU}(5,4)$; A (resp. B, resp. C) est un quotient d'un groupe nilpotent de classe 2, c'est la fermeture normale de $x_4\widehat{x}_4$ (resp. $x_2\widehat{x}_2$) dans $\widehat{U}$ (resp. $\widehat{V}$, resp. $\widehat{W}$) ; on a $\mathcal{D}(A) = \langle u_A\rangle$ (resp. $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(C) = \langle u_B\rangle = \langle u_C\rangle$) avec $u_A = x_4\widehat{x}_4\widehat{x}_4^s\widehat{x}_4^{\bar{s}}$ (resp. $u_B = x_2\widehat{x}_2\widehat{x}_2^{s'}\widehat{x}_4^{\bar{s}'} = u_C$ et $u_A^2 = u_B^2 = 1$, u_A (resp. u_B) est central dans $\widehat{U}$ (resp. $\widehat{V}$, resp. $\widehat{W}$). On a $\mathrm{Z}(\widehat{U}) = \langle Q, u_A\rangle$, $\mathrm{Z}(\widehat{V}) = \mathrm{Z}(\widehat{W}) = \langle Q', u_B\rangle$.

Observons que u_A est centralisé par x_2,x_3,x_4,x_5 et que l'on a $\widehat{x}_4^{x_3x_4x_2x_3} = \widehat{x}_2$ (définition de $\widehat{x}_2$), donc $\widehat{x}_4^{sx_3x_4x_2x_3} = \widehat{x}_2^{x_3x_2x_4x_3sx_3x_4x_2x_3} = \widehat{x}_2^{x_3x_2sx_2x_3} = \widehat{x}_2^{s'}$ (relation (r)) ; de même, $\widehat{x}_4^{\bar{s}x_3x_4x_2x_3} = \widehat{x}_2^{\bar{s}'}$, ainsi $u_A = u_A^{x_3x_4x_2x_3} = x_2\widehat{x}_2\widehat{x}_2^{s'}\widehat{x}_2^{\bar{s}'} = u_B$.

Désormais on pose $u := u_A = u_B = u_C$.

5) *Les éléments* α_i*,* β_i*,* δ_i. Dans 3), nous avons défini des éléments α_i, i dans $\{1,\dots,67\}$; posons

$$\beta_3 := \alpha_3^s = x_3\widehat{x}_3^s, \quad \delta_3 := \alpha_3^{\bar{s}} = x_3\widehat{x}_3^{\bar{s}}.$$

Si χ est l'un des symboles α, β, δ, on introduit les éléments

$$\begin{aligned} \chi_4 &:= \chi_3^{x_4x_3}, & \chi_5 &:= \chi_3^{x_5x_3}, & \chi_2 &:= \chi_3^{x_2x_3}, \\ \chi_1 &:= \chi_2^{x_1x_2}, & \chi_6 &:= \chi_4^{x_6x_4}, & \chi_{67} &:= \chi_4^{x_{67}x_4}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$A = \langle \alpha_i, \beta_i, \delta_i \mid 1 \le i \le 5 \rangle, \quad B = \langle \alpha_i, \beta_i, \delta_i \mid 2 \le i \le 6 \rangle,$$
$$C = \langle \alpha_i, \beta_i, \delta_i \mid 2 \le i \le 5,\ i = 67 \rangle$$

et aussi $u = \alpha_4\beta_4\delta_4 = \alpha_2\beta_2\delta_2$ (voir aussi le 3) de la preuve 3.3).

6) *Soit* $N = \langle A, B, C \rangle$ *;* N *est un sous-groupe normal de* G*, abélien, d'ordre* 2^{14}.

Remarque 1. — Les éléments x_1, x_6, x_7 commutent à $\widehat{x}_3$ donc à χ_3. En effet, on a $\widehat{x}_3 = x_7^{mx_6x_7x_4x_6x_3x_4}$; par conséquent, $\widehat{x}_3$, $\widehat{x}_3^s$, $\widehat{x}_3^{\bar{s}}$ commutent à x_1 et l'on a $|\widehat{x}_3x_7| = |x_7^{mx_6x_4x_7x_6}x_7| = |x_7^m x_4| = 2$ et $|\widehat{x}_3x_6| = |x_7^{mx_6x_7x_4x_3}x_4| = |x_7^m x_3| = 2$.

En vertu de la relation (r), $\widehat{x}_3^s = \widehat{x}_3^{s'}$; par suite x_6 et x_7 qui commutent à s' et $\bar{s}'$ commutent aussi à $\widehat{x}_3^s$ et à $\widehat{x}_3^{\bar{s}}$ donc à χ_3.

Remarque 2. — On a $\alpha_{67} = \alpha^{x_6}$ puisque

$$\alpha_{67} = \alpha_4^{x_6x_7x_6x_4} = \alpha^{x_6x_7x_4x_6x_6x_7x_6x_4} = \alpha^{x_6x_4x_6x_4} = \alpha^{x_6}.$$

Remarque 3. — L'élément $\alpha = x_7x_7^m$ est dans N puisque l'on a

$$\alpha = x_7(x_6x_7^m x_6x_7^m x_6) = (x_7x_6\alpha x_6x_7)x_7x_6x_7x_6x_7^m x_6 = \alpha_6(x_6\alpha x_6) = \alpha_6\alpha_{67},$$

$\alpha_6 \in B$ et $\alpha_{67} \in C$.

Remarque 4. — On a $\chi_4^{x_6x_4} = \chi_4^{x_6}\chi_4$. En effet,

$$\chi_4^{x_6x_4}\chi_4 = x_4x_6(x_4\widehat{x}_4')x_6x_4(x_4\widehat{x}_4')$$

où $\widehat{x}_4'$ désigne $\widehat{x}_4$, $\widehat{x}_4^s$, $\widehat{x}_4^{\bar{s}}$ suivant que χ désigne α, β ou δ ; comme $\widehat{x}_4'x_6$ est d'ordre 3, on a $x_6x_4\widehat{x}_4'x_6 = x_6x_4x_6\widehat{x}_4'x_6\widehat{x}_4'$ et il vient $\chi_4^{x_6x_4}\chi_4 = \chi_4^{x_6}$ d'où l'assertion.

Remarque 5. — Les éléments x_2, x_3, x_4, x_5 normalisent N car ils appartiennent à $\widehat{U} \cap \widehat{V} \cap \widehat{W}$.

Démontrons que N est normal dans G. — Pour cela il suffit de vérifier que x_1, x_6, x_{67} normalisent N

(i) x_1 normalise N car x_1 normalise A et

$$\chi_6^{x_1} = \chi_3^{x_4x_3x_6x_4x_1} = \chi_4^{x_6x_4} = \chi_3, \quad \chi_{67} = \chi_3^{x_4x_3(x_6x_7x_6)x_4x_1} = \chi_{67} \text{ (rem. 1)}.$$

(ii) x_6 normalise N. En effet x_6 centralise χ_3 donc aussi χ_1 (rem. 1). L'élément $\alpha_{67}^{x_6}$ qui est égal à α est dans N (rem. 1 et 2). Puisque $\chi_4^{x_6x_4} = \chi_4\chi_4^{x_6}$ (rem. 4) on a aussi les égalités

$$\chi_{67}^{x_6} = \chi_4^{x_6x_7x_6x_4x_6} = \chi_4^{x_6x_4x_7x_6x_4} = (\chi_4^{x_7x_6x_4})(\chi_4^{x_6x_7x_6x_4}) = \chi_6\chi_{67}.$$

Mais χ_6 et χ_{67} sont dans N, $\chi_{67}^{x_6}$ aussi et l'assertion est établie.

(iii) x_{67} normalise N. En effet, x_{67} centralise χ_3 donc χ_1 par la remarque 1 ; de plus

$$\chi_6^{x_6x_7x_6} = (\chi_4^{x_6x_4})^{x_7x_6} = (\chi_4^{x_6x_7x_6})(\chi_4^{x_7x_6}) = \chi_{67}^{x_4}\chi_4^{x_6} \quad \text{(rem. 4)}.$$

Mais x_4 et x_6 normalisant N, on en déduit donc l'assertion.

On a $\mathcal{D}(N) = \langle u\rangle$. — Pour cela, on utilise les résultats suivants dont les démonstrations sont élémentaires et laissées au lecteur (on peut trouver des démonstrations similaires, entièrement détaillées, dans [12], [13]). Soit χ l'un des symboles α, β, δ et soient i et j, $j \neq i$, dans $\{1, \ldots, 6, 67\}$. Alors on a :

- $x_i\chi_jx_i = \chi_i\chi_j$ si $\{i,j\} \neq \{2,5\}, \{4,5\}$ et $(x_ix_j)^3 = 1$;
- $x_i\chi_jx_i = \chi_j$ si $(x_ix_j)^2 = 1$;
-

χ	$x_2\chi_5x_2$	$x_4\chi_5x_4$
α_5	$\delta_2\alpha_5$	$\delta_4\alpha_5$
β_5	$\alpha_2\beta_5$	$\alpha_4\beta_5$
δ_5	$\beta_2\delta_5$	$\beta_4\delta_5$

χ	$x_5\chi_2x_5$
α_2	$\beta_5\alpha_2$
β_2	$\delta_5\beta_2$
δ_2	$\alpha_5\delta_2$

χ	$x_5\chi_4x_5$
α_4	$\beta_5\alpha_4$
β_4	$\delta_5\beta_4$
δ_4	$\alpha_5\delta_4$

- $[\chi, \chi']$:

$\chi\backslash\chi'$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_{67}	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_{67}
α_1	1	1	1	1	1	1	1	1	u	1	1	1	1	1
α_2	1	1	1	1	u	1	1	u	1	u	1	1	1	1
α_3	1	1	1	1	1	1	1	1	u	1	u	u	1	1
α_4	1	1	1	1	u	1	1	1	1	u	1	1	u	u
α_5	1	u	1	u	1	1	1	1	u	1	u	1	1	1
α_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	u	1	1	u
α_{67}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	u	1	u	1
δ_1	1	u	1	1	1	1	1	1	u	1	1	1	1	1
δ_2	u	1	u	1	1	1	1	u	1	u	1	u	1	1
δ_3	1	u	1	u	u	1	1	1	u	1	1	1	1	1
δ_4	1	1	u	1	1	u	u	1	1	u	1	u	u	u
δ_5	1	u	1	u	1	1	1	1	1	u	1	1	1	1
δ_6	1	1	1	u	1	1	u	1	1	1	u	1	1	u
δ_{67}	1	1	1	u	1	u	1	1	1	1	u	1	u	1

De là l'assertion résulte immédiatement.

Le sous-groupe N est abélien. — Nous allons prouver que l'élément u est trivial. En utilisant les résultats ci-dessus et le fait que u s'écrive $u=\alpha_2\beta_2\delta_2$ et aussi $u=\alpha_i\beta_i\delta_i$ ($i\in\{1,\dots,6,67\}$) par conjugaison, il vient :

$$\begin{aligned}\alpha_2^s &= \alpha_2^{x_4x_3x_5x_4x_3x_5} = (\alpha_2^{x_3})^{x_5x_4x_3x_5}\\ &= (\alpha_2\alpha_3)^{x_5x_4x_3x_5} = (\beta_5\alpha_2\alpha_5\alpha_3)^{x_4x_3x_5}\\ &= (u\beta_5\alpha_5\alpha_2\alpha_3)^{x_4x_3x_5} = (\delta_5\alpha_2\alpha_3)^{x_4x_3x_5}\\ &= (\beta_4\delta_5\alpha_2\alpha_4\alpha_3)^{x_3x_5} = (\beta_4\alpha_4\delta_5\alpha_2\alpha_3)^{x_3x_5}\\ &= (u\delta_4\delta_5\alpha_2\alpha_3)^{x_3x_5} = (u\delta_3\delta_4\delta_3\delta_5\alpha_3\alpha_2\alpha_3)^{x_5}\\ &= (u\delta_4\delta_5\alpha_2)^{x_5} = u\alpha_5\delta_4\delta_5\beta_5\alpha_2\\ &= u\alpha_5u\delta_5\delta_4\beta_5\alpha_2 = u\alpha_5\delta_5\beta_5\delta_4\alpha_2 = \delta_4\alpha_2.\end{aligned}$$

De manière semblable, on a $\beta_2^s=\alpha_4\beta_2$, $\delta_2^s=\beta_4\delta_2$. En conséquence, nous obtenons $u=u^s=(\alpha_2\beta_2\delta_2)^s=(\delta_4\alpha_2)(\alpha_4\beta_2)(\alpha_4\delta_2)=\delta_4\alpha_4\beta_4\alpha_2\beta_2\delta_2=uu=1$ d'où l'assertion.

On a $|N|=2^{14}$. — D'après ce qui précède, l'ordre de N divise 2^{14}. Par ailleurs, N contient A, $|A|=2^{10}$, et l'on a $N=\langle A,\alpha_6,\alpha_{67},\beta_6,\beta_{67}\rangle$. L'élément α_6 n'est pas dans A, sinon

$$\alpha_6=\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\dots\ \alpha_5^{n_5}\beta_1^{n_1'}\dots\ \beta_5^{n_5'}\quad n_i,n_i'\in\{0,1\}.$$

En écrivant que x_6 et x_2 commutent à α_6, on obtient $n_4=n_4'=0$, $n_3+n_5+n_5'=0$, $n_3'+n_5=0$. Puis, sachant que $x_4\alpha_6x_4=\alpha_6\alpha_4$, il vient $n_3+n_5+n_5'=1$ et $n_3'+n_5=0$, ce qui prouve que la situation est impossible.

De manière similaire, on prouve que α_{67} (resp. β_6, resp. β_{67}) n'est pas dans $\langle A,\alpha_6\rangle$ (resp. $\langle A,\alpha_6,\alpha_{67}\rangle$, resp. $\langle A,\alpha_6,\alpha_{67},\beta_6\rangle$), d'où le résultat.

7) *Le groupe quotient G/N est isomorphe à $2\times\mathrm{PSU}(7,4)$ et l'extension* (e) $1\to N\to G\to 2\times\mathrm{PSU}(7,4)\to 1$ *n'est pas scindée.* Désignons par π la projection canonique de G sur G/N. Les relations $\gamma(7)$ et $r(5)$ sont satisfaites dans G/N, l'élément $\pi(m)$ centralise $\pi(x_7)$ puisque $x_7x_7^m$ est dans N (voir remarque 3) ; il est donc central dans G/N. En conséquence dans G/N, qui est un quotient de $2\times\mathrm{PSU}(7,4)$, les éléments $\pi(Q)$ et $\pi(m)$ sont centraux ; mais $\pi(m)$ qui est dans le groupe dérivé de G/N est trivial [11] et $\mathrm{Z}(G/N)=\langle\pi(Q)\rangle$. La première partie de l'assertion est établie.

Soit K le sous-groupe de G engendré par $x_1,\dots,x_6$; $\pi(K)$ contient $\pi(Q)$ et est isomorphe à $2\times\mathrm{PSU}(6,4)$. Les éléments m_i appartiennent à K ($1\le i\le 3$), leurs images par π sont triviales ; puisque l'extension $1\to\langle m_1,m_2\rangle\to K\to 2\times\mathrm{PSU}(6,4)\to 1$ est non scindée, il en est de même de l'extension (e).

8) *La classe de conjugaison $E=x_2^G$ est une classe de 3-transpositions de G de cardinal* 4×2709. — Conservons la notation $\pi:G\to G/N$ et, pour tout e dans E, posons $F(e)=E\cap\pi^{-1}(\pi(e))$.

(i) On a $|F(x_2)| = 4$. En effet, $F(x_2)$ contient $X = \{x, \widehat{x}_2, \widehat{x}_2^{s'}, \widehat{x}_2^{\bar{s}'}\}$. Le noyau de la restriction de π à $\widehat{U}$ est $N \cap \widehat{U} = A$ et X est l'ensemble des éléments de $x_2^{\widehat{U}}$ ayant pour image $\pi(x_2)$. Or G est engendré par $\widehat{U}, x_6, x_{67}$ (rappelons que x_{67} désigne $x_6x_7x_6$), on vérifie facilement que x_6 et x_{67} centralisent X et l'on en déduit que $F(x_2) = X$.

(ii) On a $|E| = 4 \times 2709$. D'après ce qui précède, $|F(e)| = 4$ pour tout élément e de E et par suite $|E| = 4\ |\pi(E)|$. Comme l'image de E par π est la classe des 3-transpositions de $2 \times \mathrm{PSU}(7,4)$ laquelle est en bijection avec la classe des transvections de $\mathrm{SU}(7,4)$, on a $|\pi(E)| = 2709$. D'où l'assertion.

(iii) Les éléments de $F(x_2)$ commutent à ceux de $F(x_4)$. Ce sont des vérifications élémentaires qui utilisent la relation (r) et les relations des groupes $\widehat{U}$, $\widehat{V}$, $\widehat{W}$ données dans 4).

(iv) Le produit d'un élément de $F(x_2)$ et d'un élément de $F(x_3)$ est d'ordre 3. En effet on a $|x_2\widehat{x}_3| = |x_2x_3|$ (élémentaire), $x_2^\sigma = x_2$ pour $\sigma \in \{1, s', \bar{s}'\}$, par suite $|x_2\widehat{x}_3^\sigma| = |x_2x_3|$, et l'assertion en résulte immédiatement.

(v) La classe E est une classe de 3-transpositions de G. Pour cela il suffit de prouver que l'ordre du produit de deux éléments de E est au plus égal à 3. Soient e et e' dans E ; sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $e' = x_2$. Il existe, dans G/N un élément qui conserve $\pi(x_2)$ et conjugue $\pi(e)$ sur l'un des éléments $\pi(x_2)$, $\pi(x_3)$, $\pi(x_4)$ suivant l'ordre du produit $\pi(x_2)\pi(e)$. Supposons que e ne soit pas dans $F(x_2)$, nous pouvons supposer qu'il existe un élément de G qui stabilise $F(x_2)$ et qui envoie e sur un des éléments de $F(x_3)$ ou de $F(x_4)$. L'assertion résulte alors de (4) ou de (3). □

Proposition 4.2. — *(Avec les notations de 4.1.) Soit G un groupe avec la présentation $(X_7/\gamma(7), r(5), \sigma(6), Q = 1)$. Alors G est l'extension non scindée*

$$1 \to N \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{SU}(7,4) \to 1$$

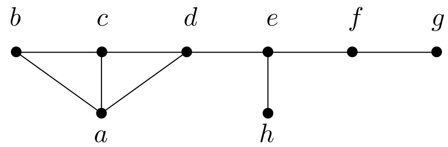
où N est abélien élémentaire d'ordre 2^{14} ; la classe de conjugaison de x_1 est une classe de 3-transpositions de G de cardinal 4×2709. Le centre de G est trivial.

Preuve. — C'est une conséquence de la proposition 4.1. □

Donnons, pour terminer, les présentations des extensions $2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7,4)$ et $2 \times (2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7,4))$ établies par J. Hall et L. Soicher.

Proposition 4.3. — *Soit G un groupe de présentation $((a,\dots,g)/\underline{r})$ avec*

$(\underline{r})$



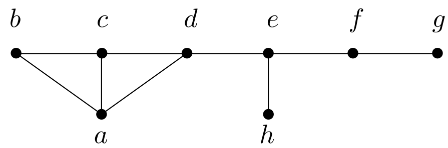
$$
\begin{cases}
(a^c b)^3 = (a^c d)^3 = (a^b c^d)^3 = 1,\\
h = \big((acb)^{-2}(acd)^2\big)^2,\\
(ah^{efgdcbefcdedcd})^2 = 1.
\end{cases}
$$

Alors G est l'extension non scindée $2^{14}\cdot \mathrm{SU}(7,4)$ et satisfait aux conclusions de la proposition 4.2.

Preuve. — Voir [6, (A.5)]. □

Proposition 4.4. — *Soit G un groupe de présentation $(a,\dots,g/\underline{r}')$ avec*

$(\underline{r}')$



$$
\begin{cases}
(a^c b)^3 = (a^c d)^3 = (a^b c^d)^3 = 1,\\
h = ((acb)^{-2}(acd)^2)^2(abcde)^{15},\\
(a(bcdefh)^5(bcdefgh)^9)^2 = 1.
\end{cases}
$$

Alors G est l'extension non scindée $2\times(2^{14}\cdot\mathrm{SU}(7,4))$ et satisfait aux conclusions de la proposition 4.1.

Preuve. — Voir [8, 8.10]. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aschbacher (M.) – 3-*Transposition Groups*, Cambridge University Press, 1997.

[2] Conway (J.H.), Curtis (R.T.), Norton (S.P.), Parker (R.A.), Wilson (R.A.) – *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[3] Fischer (B.) – *Finite groups generated by* 3*-transpositions*, University of Warwick Lecture Note, 1969.

[4] Fischer (B.) – *Finite groups generated by* 3*-transpositions I*, Invent. Math., t. **13** (1971), 232–246.

[5] Hall (J.I.) – *Some* 3*-transposition groups with normal* 2*-subgroups*, Proc. London Math. Soc., t. **3-58** (1989), 112-136.

[6] Hall (J.I.) – *3-transposition groups with non-central 2-subgroups*, J. Algebra, t. **146** (1992), 49–76.

[7] Hall (J.I.) – *Some 3-transposition cohomology*, Comm. Algebra, t. **24-12** (1996), 3827–3838.

[8] Hall (J.I.), Soicher (L.H.) – *Presentations of some 3-transposition groups*, Comm. Algebra, t. **23-7** (1995), 2517–2559.

[9] Virotte Ducharme (M.M.) – *Couples fischériens presque simples*, Thèse, Paris 7, 1985.

[10] Virotte Ducharme (M.M.) – *Présentations des groupes de Fischer I*, Geom. Dedicata, t. **41** (1992), 275–335.

[11] Virotte Ducharme (M.M.) – *Présentations de certains couples fischériens de type classique*, Bull. Soc. Math. France, t. **121** (1993), 227–270.

[12] Virotte Ducharme (M.M.) – *Présentations de couples fischériens de type orthogonal admettant un 3-groupe normal non central : cas scindé*, Bull. UMI, t. **7-9B** (1995), 105–151.

[13] Virotte Ducharme (M.M.) – *Présentations de certaines extensions non scindées de groupes orthogonaux sur* $\mathbb{F}_3$, Rend. Matematica, VII (1997), 347–371.

[14] Zara (F.) – *Classification des couples fischériens*, Thèse, Université de Picardie, 1985.

[15] Zara (F.) – *A first step toward the classification of Fischer groups*, Geom. Dedicata, t. **25** (1988), 503–512.

[16] Zara (F.) – *Constructing new Fischer groups from old ones*, Europ. J. Combin., t. **15** (1994), 87–104.