

PLATITUDE DU MODULE UNIVERSEL POUR GL_3 EN CARACTÉRISTIQUE NON BANALE

PAR JOËL BELLAÏCHE & ANIA OTWINOWSKA

RÉSUMÉ. — Soient F un corps p -adique, $G = GL_3(F)$. Pour χ un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique de G sur un anneau commutatif k , on introduit à la suite de Serre une représentation lisse M_χ de G sur k qui gouverne la théorie des représentations non ramifiées de G sur k . Nous prouvons que M_χ est plat sur k et que si p est inversible dans k , alors pour tout sous-groupe compact ouvert suffisamment petit U de G , le module M_χ^U est libre de rang fini sur k . Ceci était conjecturé par Lazarus. Comme corollaire, nous obtenons que si k est un corps de caractéristique différente de p , M_χ a même semi-simplification que la série principale non ramifiée de caractère χ , dont la structure est décrite par les travaux de Vignéras.

ABSTRACT (*Flatness of the universal module for GL_3*). — Let F be a p -adic field, $G = GL_3(F)$, and χ a character of the spherical Hecke algebra over a commutative ring k . We introduce, following Serre, a smooth representation of G over k which is central for the theory of unramified representation of G over k . We prove that M_χ is flat over k for arbitrary k , and that if p is invertible in k , that M_χ^U is free of finite rank over k for U small compact open subgroup of G . This was conjectured by Lazarus. As a corollary, we obtain that if k is a field of characteristic different of p , M_χ has the same semi-simplification that the unramified principal serie with character χ , whose structure is known thanks to Vignéras.

Texte reçu le 19 juillet 2002, accepté le 20 décembre 2002

JOËL BELLAÏCHE, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2 (France) • *E-mail* : jbellaic@math.unice.fr

Url : <http://www.math.unice.fr/~jbellaic>

ANIA OTWINOWSKA, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail* : Ania.Otwinowska@math.u-psud.fr

Url : <http://www.math.u-psud.fr/~ania>

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C12, 20C20.

Mots clefs. — Platitude, module universel, représentations modulaires, représentations non ramifiées, immeubles.

1. Introduction

1.1. Soient G un groupe réductif \mathfrak{P} -adique, K un bon sous-groupe compact maximal de G (cf. [4], 4.4.1), λ un caractère de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, K)$ à valeurs dans un anneau k . Le *module universel non ramifié* associé à λ (nous dirons *module universel*) $M_{\lambda;k}$ (ou simplement M_λ , quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base k) a été introduit par Borel (dans le cas où $k = \mathbb{C}$) :

$$M_{\lambda;k} = \mathcal{C}(G/K) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k,$$

où $\mathcal{C}(G/K)$ désigne l'espace des fonctions sur G localement constantes à support compact K -invariantes à droite, et où k est muni d'une structure de module sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ via λ .

1.2. Depuis son introduction, le module universel a largement montré son utilité dans l'étude des représentations des groupes \mathfrak{P} -adiques, en particulier dans l'étude des représentations *modulaires* au sens de Brauer, *i.e.* définies sur un corps de caractéristique positive. Voir le cours de Serre au Collège de France [10], ainsi que sa lettre à Kazhdan [11], pour des applications aux formes modulaires classiques en caractéristique p . Voir [5], [1], pour des applications à l'augmentation du niveau des formes automorphes pour des groupes unitaires à trois variables.

1.3. L'objet de cet article est de démontrer la conjecture de Lazarus (voir [9], conjecture 1.0.5), et un peu plus, dans le cas où G est le groupe linéaire PGL_3 d'un corps \mathfrak{P} -adique. Cette conjecture affirme que pour G non ramifié⁽¹⁾ et de type adjoint, K hyperspécial, et k un corps de caractéristique différente de p , $\mathcal{C}(G/K, k)$ est plat sur l'anneau commutatif $\mathcal{H}_k(G, K)$.

Nous espérons pouvoir prouver par des méthodes semblables la conjecture de Lazarus pour PGL_d . Nous espérons aussi (mais ce sera sans doute plus difficile), que ces méthodes pourront mener à une preuve de la conjecture de Lazarus en général, *i.e.* pour tous les groupes réductifs de type adjoint.

1.4. Soient F une extension finie de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_F son anneau d'entiers, \bar{F} son corps résiduel, π une uniformisante et $d \geq 2$ un nombre entier. On pose $G = \mathrm{PGL}_d(F)$, et on note K l'image de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F)$ dans G . On fixe aussi un anneau quelconque k . L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, K)$ est alors commutative, isomorphe à une algèbre de polynômes $k[T_1, \dots, T_{d-1}]$, et pour tout caractère λ de cette algèbre, on introduit le module universel $M_\lambda = \mathcal{C}(G/K, k) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k$,

⁽¹⁾Les auteurs pensent qu'on peut étendre la conjecture de Lazarus en enlevant cette hypothèse, ainsi que celle sur K et toute restriction à l'anneau k . Voir en ce sens le théorème 1.5 ainsi que [1, ch. IV]. Rappelons (voir [9]) que l'hypothèse « de type adjoint » est nécessaire, ou du moins doit être remplacée par une hypothèse sur l'action du groupe de Weyl sur le tore maximal de G : l'énoncé de platitude est faux pour $G = \mathrm{SL}_3$ par exemple.

où $\mathcal{C}(G/K, k)$ désigne l'espace des fonctions à support fini sur G/K à valeurs dans k , vu comme un k -module sur lequel G agit à droite. Nous démontrons :

THÉORÈME 1.5. — *On suppose $d = 3$. Le module M_λ est plat sur k . De plus, si p est inversible dans k , pour tout pro- p -sous-groupe compact ouvert U de G , le k -module M_λ^U est libre et de type fini sur k .*

La première assertion de notre théorème implique (et est en fait équivalente à) la platitude de $\mathcal{C}(G/K, k)$ sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ pour tout anneau k . En effet, quand λ est le caractère tautologique $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_k(G, K)}(G, K) \rightarrow \mathcal{H}_k(G, K)$, le module universel $M_{\lambda; \mathcal{H}_k(G, K)}$ s'identifie comme module sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ à $\mathcal{C}(G/K)$.

Notons que pour d quelconque et k un corps de caractéristique banale pour GL_d , la preuve de la conjecture de Lazarus fait l'objet de l'article [8]. La méthode de Lazarus utilise un résultat de Kato [7] donnant une description de $\mathcal{C}(B \backslash G/K)$ (où B est un Iwahori de G) en caractéristique banale.

1.6. Notons également qu'en utilisant l'irréductibilité générique bien connue des séries principales non ramifiées pour GL_3 en caractéristique zéro, on déduit par une méthode classique (cf. [10], [9] ou [1, V.6.2.5]) de ce théorème le corollaire suivant, en utilisant le principe de Brauer pour les représentations lisses, cf. [14].

COROLLAIRE 1.7. — *Soit k un corps de caractéristique différente de p , et qui contient une racine carrée de q . Soient χ un caractère non ramifié du Borel standard de G et λ le caractère de $\mathcal{H}(G, K)$ associé à χ via l'isomorphisme de Satake. Alors les représentations M_λ et I_χ (où I_χ désigne l'induite unitaire de χ de B à G) ont mêmes facteurs de décomposition (avec les mêmes multiplicités).*

Comme la structure des séries principales non ramifiées est connue (voir [14], ch. III), on connaît aussi la semi-simplification des modules universels.

1.8. Notre méthode donne aussi l'information suivante (qui découle immédiatement du théorème 3.2.4 point 1) :

PROPOSITION 1.9. — *Soient L une extension finie de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_L son anneau d'entier et λ un caractère de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_L}(G, K)$. Alors le module $M_{\lambda; \mathcal{O}_L}$ ne contient pas de L -droites.*

Cette proposition signifie que le sous-module (c'est un sous-module d'après le théorème principal) $M_{\lambda; \mathcal{O}_L}$ de $M_{\lambda; L}$ est un réseau au sens de [3, p. 13], ce qui implique (*loc. cit.*) qu'il est libre sur \mathcal{O}_L . Pour $G = PGL_2(F)$, $F = \mathbb{Q}_p$ mais des représentations plus générales, un résultat analogue a été récemment démontré par Breuil [3, th. 3.3.2].

2. Traduction en un problème sur l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(F)$

2.1. Rappels et notations sur l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(F)$

2.1.1. On note X l'immeuble de Bruhat-Tits attaché (voir [2, exercice 10, §2]) au système de Tits standard [2, exercice 21, §2] de $G = \mathrm{PGL}_d(F)$. Nous renvoyons à [2, exercice 15, §1] pour la définition d'un immeuble, et à cet exercice et aux suivants pour les notions de facette, chambre, cloison, appartement. On appellera *arêtes* les facettes de cardinal 2 et *sommets* les éléments de X . On dira que deux sommets sont voisins si la paire qu'ils forment est une arête.

Rappelons [12, p. 88–90] que X est en bijection canonique avec les classes d'homothéties de \mathcal{O}_F -réseaux dans F^d et que deux sommets distincts x et x' sont voisins si et seulement s'il existe deux réseaux Λ et Λ' représentant x et x' tels que

$$\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda.$$

Le quotient $\Lambda'/\pi\Lambda$ est alors un sous- \bar{F} -espace vectoriel propre de $\Lambda/\pi\Lambda = \bar{F}^d$ dont la dimension est un entier compris entre 1 et $d-1$, dont la classe dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est appelée la *type* de l'arête (x, x') . Si x'' est un autre voisin de x , il est voisin de x' si et seulement si le sous-espace de $\Lambda/\pi\Lambda$ qui lui correspond contient ou est inclus dans celui qui correspond à x' . Les types des arêtes obéissent aux règles (évidentes) suivantes :

- si (x, x') est une arête de type i , alors (x', x) est une arête de type $-i$;
- si (x, x') , (x', x'') et (x, x'') sont trois arêtes, alors le type de (x, x'') est la somme de ceux de (x, x') et (x', x'') .

2.1.2. *Appartements*. — Rappelons (voir [12, §5]) qu'à une base (e_1, \dots, e_d) de F^d nous pouvons associer un *appartement* de X , défini comme l'ensemble des sommets de X représentés par des réseaux de la forme $\mathcal{O}_F\pi^{a_1}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_F\pi^{a_d}e_d$. Le choix d'une base détermine un isomorphisme entre A et $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$ (voir [12, p. 94]). Un représentant dans \mathbb{Z}^n d'une classe dans $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$ correspondant à un point $x \in A$ s'appelle un *système de coordonnées* de x .

Nous utiliserons librement le résultat suivant : deux facettes de X sont toujours contenues dans un même appartement [2, exercice 24, §1].

2.1.3. *Distance combinatoire*. — La *distance combinatoire* d sur X , ou simplement distance est définie ainsi : pour (x, x') dans X , $d(x, x')$ est le plus petit entier n tel qu'il existe des points $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x'$, tels que x_i et x_{i+1} soient voisins pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

Si A est un appartement contenant x et x' , et si (x_1, \dots, x_d) et (x'_1, \dots, x'_d) sont des systèmes de coordonnées de x et x' (pour une certaine base de F^d définissant l'appartement A), on vérifie facilement que

$$d(x, x') = \max_{i,j=1,\dots,d} |(x_i - x'_i) - (x_j - x'_j)|.$$

2.1.4. *Action de G .* — L'action naturelle de $GL_d(F)$ sur les \mathcal{O}_F -réseaux de F^d induit une action de G sur l'ensemble des sommets de X qui respecte la structure d'immeuble de X

2.1.5. *Boules et sphères.* — Nous supposons dorénavant fixé le sous-groupe compact maximal K de G et nous notons O l'unique sommet laissé fixe par K .

On note B_n (resp. S_n) la boule (resp. sphère) combinatoire de centre O et de rayon n , i.e. l'ensemble des sommets $x \in X$ vérifiant $d(O, x) \leq n$ (resp. $d(O, x) = n$).

On note K_n le fixateur dans G de la boule B_n . Si l'on choisit une base (e_1, \dots, e_d) de F^d telle que $\mathcal{O}_F e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_F e_d$ est un réseau représentant O , l'image réciproque du groupe K_n dans $GL_d(F)$ s'identifie au groupe des matrices congrues à une matrice scalaire inversible modulo π^n . Le groupe K_n est donc un sous-groupe compact ouvert de G , et un pro- p -groupe dès que $n \geq 1$. Les groupes K_n forment un système de voisinage de l'élément neutre dans G .

2.1.6. *Notations.* — Si Y est un sous-ensemble de X , on notera $\mathcal{C}(Y)$ le k -module des applications (ou « fonctions ») à support fini de Y dans k . On posera $C_n = \mathcal{C}(B_n)$.

2.2. Traduction du problème en terme d'immeubles

2.2.1. Comme G agit transitivement sur X , on dispose d'une bijection canonique $G/K \simeq X$ ($g \mapsto gO$). L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$ agit naturellement à droite sur $\mathcal{C}(G/K)$, et cette action identifie $\mathcal{H}(G, K)$ à l'algèbre des endomorphismes k -linéaires sur $\mathcal{C}(G/K)$ commutant à l'action de G .

En particulier, pour $i = 1, \dots, d - 1$, les opérateurs T_i définis par

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall x \in X, \quad (T_i f)(x) = \sum_{\substack{y \text{ voisin de} \\ \text{type } i \text{ de } x}} f(y)$$

commutent à l'action de G et appartiennent à $\mathcal{H}_k(G, K)$. On sait que ces éléments sont algébriquement indépendants et que $\mathcal{H}_k(G, K) = k[T_1, \dots, T_{d-1}]$.

2.2.2. Soit λ un caractère de $\mathcal{H}_k(G, K)$. Posons $\lambda_i = \lambda(T_i)$. Le k -module M_λ de l'introduction s'identifie, avec son action de G , au quotient

$$\mathcal{C}(X) / (\text{Im}(T_1 - \lambda_1) + \dots + \text{Im}(T_{d-1} - \lambda_{d-1})).$$

2.3. Quelques résultats particuliers à l'immeuble de PGL_3 .

— Dorénavant, on prend $d = 3$.

2.3.1. Soit X l'immeuble de PGL_3 . Les arêtes orientées sont alors de deux types : 1 ou 2 mod 3. Une arête non orientée a une unique orientation pour laquelle elle est de type 1 ; sur les dessins, on représentera toujours cette orientation par une flèche.

2.3.2. *Appartements et dessins.* — Soient (e_1, e_2, e_3) une base de F^3 et A l'appartement associé. Soit H l'hyperplan des vecteurs de somme nulle dans \mathbb{R}^3 . On plonge A dans H par l'application $A = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}(1, 1, 1) \subset \mathbb{R}^3/\mathbb{R}(1, 1, 1) \rightarrow H$ (où $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}(1, 1, 1) \rightarrow H$ envoie une classe sur son unique représentant de somme nulle) les arêtes orientées par des flèches reliant deux sommets, on obtient la figure 1 suivante pour A .

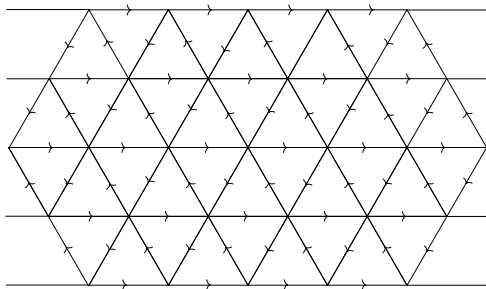


FIGURE 1

2.3.3. *Appartements contenant l'origine.* — Soit A un appartement contenant O . Fixons une base de F^3 qui engendre un réseau représentant O , définit l'appartement A et une bijection $A = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}$ envoyant O sur $(0, 0, 0)$.

Alors $B_n \cap A$ est l'ensemble des points de coordonnées (x_1, \dots, x_n) vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, d\}, |x_i - x_j| \leq n;$$

ce sont les points dont l'image dans H appartient à un hexagone plein comme dans la figure 2.

LEMME 2.3.4. — *Soit A un appartement contenant O et soit $x \in S_n \cap A$ (avec $n \geq 1$). Alors x a soit un seul voisin dans $S_{n-1} \cap A$, soit deux voisins de types différents. Dans le second cas, x et ces deux voisins forment une chambre.*

Démonstration. — Quitte à permuter les coordonnées de A , on peut supposer x de la forme $(0, u, n)$, avec $0 \leq u \leq n$. Si $u = n$ (resp. $u = 0$) le seul voisin de x a pour système de coordonnées $(0, n-1, n-1)$ (resp. $(0, 0, n-1)$). Si $0 < u < n$ les voisins de x dans $S_n \cap A$ ont pour système de coordonnées $(0, u, n-1)$ et $(0, u-1, n-1)$. Ce sont des voisins de types différents de x et comme ils sont voisins entre eux, ils forment une chambre avec x . \square

LEMME 2.3.5. — *Soit $n \geq 1$. Soit $x \in S_n$. Alors tous les voisins de x dans S_{n-1} appartiennent à tout appartement contenant O et x . Ces voisins sont au nombre de 1 ou 2, auquel cas ils ne sont pas de même type.*

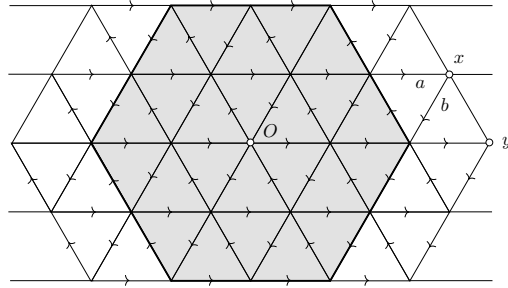


FIGURE 2

Démonstration. — Soit A un appartement passant par x et O . D’après le lemme précédent, il existe une chambre C dans A contenant x et son ou ses voisins dans $S_{n-1} \cap A$. Notons ρ la rétraction de X sur A de centre C (cf. [4, 2.3.5]). Comme ρ envoie arête sur arête, elle est contractante pour la distance combinatoire. Si z est un voisin de x dans S_{n-1} , on a donc $d(O, \rho(z)) \leq n - 1$ et $d(\rho(z), x) \leq 1$, et l’inégalité triangulaire implique que ces deux inégalités sont des égalités. Le point $\rho(z)$ est donc un voisin de x dans $S_{n-1} \cap A$. Il appartient donc à C , donc $z \in \rho^{-1}(C) = C \subset A$ d’après [4, th. 2.3.4]. \square

REMARQUE. — *Ce lemme est faux pour $d > 3$: si $d > 3$, un point de S_n possède en général plusieurs voisins du même type dans S_{n-1} , et plus de $d - 1$ voisins dans S_{n-1} au total.*

DÉFINITION. — On dit que $x \neq O$ est *pointu* si $x \in S_n$ n’a qu’un seul voisin dans S_{n-1} .

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

LEMME 2.3.6. — *Soit x dans S_n , a et b ses voisins dans S_{n-1} (on prend $a = b$ si x est un pointu). Soit y un voisin de x distinct de a et b . Alors $y \in S_n$ si et seulement si y est voisin de a ou de b .*

Démonstration. — Soit A un appartement contenant l’arête (x, y) et O . D’après le lemme précédent, A contient aussi a et b . Le lemme résulte alors d’un calcul facile en coordonnées (voir la figure 2). \square

3. Preuve de la platitude de $M_{\lambda, \mu}$

3.1. Réduction du support

PROPOSITION 3.1.1. — *Soit $n \geq 1$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions à support dans S_n . On suppose que la fonction $T_1 f_1 + T_2 f_2$ est nulle sur S_{n+1} . Alors*

il existe une fonction g à support dans S_{n-1} telles que f_1 et f_2 coïncident respectivement avec les restrictions des fonctions T_2g et $-T_1g$ à S_n .

REMARQUES

• Réciproquement, si f_1 et f_2 sont les restrictions à S_n de T_2g et T_1g , où g est une fonction sur S_{n-1} , on a

$$T_1f_1 + T_2f_2 = T_1T_2g - T_2T_1g = 0$$

sur la sphère S_{n+1} .

• La proposition a l'interprétation cohomologique suivante. Le $k[T_1, T_2]$ -module $C = \mathcal{C}(X)$ est naturellement « filtré » par les sous- k -modules $C_n = \mathcal{C}(B_n)$: si $P \in k[T_1, T_2]$ est homogène de degré d , on a $PC_n \subset C_{n+d}$. Le k -module gradué associé $\widehat{C} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_{n+1}/C_n$ hérite d'une action de $k[T_1, T_2]$, qui en fait un module gradué sur l'algèbre graduée $k[T_1, T_2]$.

On peut donc appliquer la théorie du complexe de Koszul (cf. [6]) : si k désigne le $k[T_1, T_2]$ -module trivial, conoyau de l'idéal homogène maximal (T_1, T_2) , les groupes $\text{Tor}^i(k, \widehat{C})$ sont naturellement gradués et sont calculés par le complexe de Koszul de \widehat{C} . Or on voit facilement que la proposition affirme exactement l'exactitude en 1 de la n -ième graduation de ce complexe. Autrement dit, la proposition pour un n donné équivaut à $\text{Tor}^1(k, \widehat{C})^n = 0$ et comme la proposition est énoncée pour tout n , elle équivaut à $\text{Tor}^1(k, \widehat{C}) = 0$.

La proposition reste vraie pour $n = 0$ avec la convention que $S_{-1} = \emptyset$ et que l'unique fonction sur S_{-1} est la fonction nulle.

La proposition 3.1.1 repose sur le lemme suivant.

LEMME 3.1.2. — Soient f_1 et f_2 deux fonctions à support dans S_n telles que $T_1f_1 + T_2f_2 = 0$ sur S_{n+1} . Alors pour tout $x \in S_{n-1}$ la fonction f_1 est constante sur l'ensemble Z_1 des voisins de x dans S_n de type 2, et f_2 est constante sur l'ensemble Z_2 des voisins de x dans S_n de type 1. De plus, on a

$$f_1(Z_1) = -f_2(Z_2).$$

3.1.3. Montrons que le lemme implique la proposition. Posons $g(x) = f_1(Z_1) = -f_2(Z_2)$ pour tout $x \in S_{n-1}$ et $g(x) = 0$ sinon. Nous devons montrer que pour tout $y \in S_n$ nous avons $f_1(y) = T_2g(y)$.

Si y a un voisin de type 2 dans S_{n-1} ce dernier est unique par le lemme 2.3.5 et l'assertion est vraie.

Si y n'a pas de voisins de type 2 dans S_{n-1} alors on a $T_2g(y) = 0$. Nous devons donc montrer qu'on a aussi $f_1(y) = 0$. Considérons un appartement A contenant x et O : nous pouvons supposer y de coordonnées $(0, n, n)$ (pour un choix convenable de coordonnées) ; le point z de A de coordonnées $(0, n+1, n+1)$ appartient à $S_{n+1} \cap A$ et possède y comme unique voisin dans $S_n \cap A$, donc dans S_n , de type 1. On a donc $f_1(y) = T_1f_1(z) = 0$

Le même argument montre que pour tout $y \in S_n$ nous avons $f_2(y) = T_1g(y)$.

Il nous suffit donc de prouver le lemme.

3.1.4. Montrons le lemme 3.1.2 : considérons le graphe G_x dont les sommets sont les éléments de $Z_1 \cup Z_2$ et dont les arêtes relient deux points s'ils sont l'un dans Z_1 et l'autre dans Z_2 et s'il sont voisins dans X (G_x est donc un sous-graphe du graphe sous-jacent à X).

Soient y et z deux points dans G_x reliés par une arête. Alors (x, y, z) forme une facette. En se plaçant dans un appartement contenant O et cette facette il est facile de montrer l'existence d'un point t dans S_{n+1} qui a exactement y et z comme voisins (de type 1 et 2 respectivement) dans S_n . L'annulation de $T_1f_1 + T_2f_2$ en t implique alors

$$f_1(z) = -f_2(y).$$

Le lemme 3.1.2 résulte donc du lemme suivant.

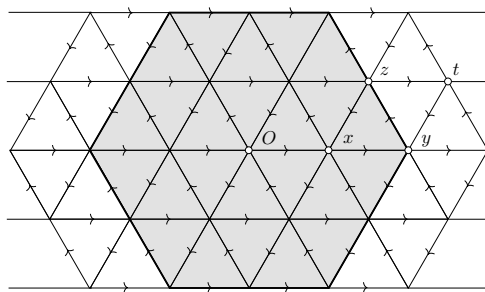


FIGURE 3

LEMME 3.1.5. — *Le graphe G_x est connexe.*

3.1.6. On suppose d'abord $n \geq 2$. Nous allons interpréter le graphe G_x en termes de géométrie projective.

Nous savons déjà que l'ensemble des voisins (de type 1 et 2 respectivement) de x s'interprète comme l'ensemble des points et des droites (respectivement) dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\overline{F})$. Deux voisins de x sont eux-mêmes voisins si l'un correspond à un point et l'autre à une droite contenant ce point.

Il nous faut distinguer deux cas, selon que le point x a un ou deux voisins dans S_{n-2} .

Supposons d'abord que x ait deux voisins distincts u et v dans S_{n-2} qui correspondent à un point P et une droite D dans \mathbb{P}^2 , avec $P \subset D$. Les voisins de x dans S_{n-1} sont alors exactement les voisins de x qui sont aussi voisins soit de u soit de v (cf. lemme 2.3.6), autrement dit ce sont les points (différents de P) de \mathbb{P}^2 qui sont dans D , et les droites (différentes de D) qui contiennent P .

Finalement, les points de G_x sont les voisins de x qui ne sont ni dans S_{n-1} , ni dans S_{n-2} ; ce sont donc les points de $\mathbb{P}^2 - D$ et les droites de \mathbb{P}^2 qui ne contiennent pas P .

Sous cette forme il est facile de montrer que G_x est connexe : montrons par exemple que deux points Q et Q' de $\mathbb{P}^2 - D$ sont reliés. Si P , Q et Q' ne sont pas alignés, Q est relié à Q' via la droite (QQ') qui ne passe pas par P . Si P , Q et Q' sont alignés, on prend Q'' n'appartenant pas à D ni à (QQ') (un tel Q'' existe car

$$|\mathbb{P}^2| - |D| - |(QQ')| + |D \cap (QQ')| = q^2 + q + 1 - 2(q + 1) + 1 = q^2 - q > 0$$

pour tout $q = |\bar{F}|$). Alors Q est relié à Q'' et Q'' à Q' .

Le cas où x n'a qu'un seul voisin u dans S^{n-2} est encore plus simple : si u correspond à un point $P \in \mathbb{P}^2$ (le cas d'une droite est dual) G_x s'interprète comme l'ensemble des points de \mathbb{P}^2 distincts de P et des droites de \mathbb{P}^2 ne passant par P , et la connexité se montre de même. Le cas $n = 1$ est facile.

On a donc montré le lemme 3.1.5, donc le lemme 3.1.2 et la proposition 3.1.1.

3.2. Platitude

COROLLAIRE 3.2.1. — Soit $f \in C_n = \mathcal{C}(B_n)$, tel que $f \in (T_1 - \lambda)C + (T_2 - \mu)C$. Alors il existe $g_1 \in C_{n-1}$, $g_2 \in C_{n-1}$ tels que

$$f = (T_1 - \lambda)g_1 + (T_2 - \mu)g_2.$$

Démonstration. — Par hypothèse

$$f = (T_1 - \lambda)f_1 + (T_2 - \mu)f_2$$

avec f_1 et $f_2 \in C$. Supposons que f_1 et f_2 soient toutes deux à support dans B_{n+m} avec $m \geq 0$. Nous allons construire deux fonctions f'_1 et f'_2 , à support dans B_{n+m-1} , vérifiant toujours la relation

$$f = (T_1 - \lambda)f'_1 + (T_2 - \mu)f'_2.$$

Le corollaire en résulte par récurrence descendante sur m .

Pour ce faire, notons que $T_1f_1 + T_2f_2 = f + \lambda f_1 + \mu f_2$ est nulle sur la sphère S_{n+m+1} , puisque c'est déjà le cas de f , f_1 et f_2 . D'après la proposition précédente, il existe donc g à support dans la sphère S_{n+m-1} telle que f_1 et T_2g , ainsi que f_2 et $-T_1g$ coïncident sur S_{n+m} .

Posons alors $f'_1 = f_1 - (T_2 - \mu)g = (f_1 - T_2g) + \mu g$. Alors f'_1 est à support dans B_{n+m-1} , puisque g l'est, et que f_1 et T_2g sont à support dans B_{n+m} mais coïncident sur S_{n+m} . Posons de même $f'_2 = f_2 + (T_1 - \lambda)g$, qui est à support dans B_{n+m-1} .

On voit alors que

$$\begin{aligned} & (T_1 - \lambda)f'_1 + (T_2 - \mu)f'_2 \\ &= [(T_1 - \lambda)f_1 + (T_2 - \mu)f_2] \\ & \quad - [(T_1 - \lambda)(T_2 - \mu)g - (T_2 - \mu)(T_1 - \lambda)g] = f - 0 = f, \end{aligned}$$

car $(T_1 - \lambda)$ et $(T_2 - \mu)$ commutent. □

3.2.2. Le k -module C est filtré par ses sous- k -module $C_n = \mathcal{C}(B_n)$. Si l'on note \bar{C}_n l'image de C_n dans $M_{\lambda, \mu}$, on obtient une filtration de $M_{\lambda, \mu}$.

PROPOSITION 3.2.3. — 1) On a un isomorphisme canonique de k -modules

$$\bar{C}_n = C_n / [(T_1 - \lambda)C_{n-1} + (T_2 - \mu)C_{n-1}].$$

2) Notons L_n le sous-espace de $\mathcal{C}(S_n)$ constitué des restrictions à S_n des fonctions de la forme $T_1 f_1 + T_2 f_2$, où f_1 et f_2 appartiennent à $\mathcal{C}(S_{n-1})$. Alors on a un isomorphisme canonique de k -modules :

$$\bar{C}_n / \bar{C}_{n-1} = \mathcal{C}(S_n) / L_n.$$

3) Ce dernier module $\mathcal{C}(S_n) / L_n$ est libre de type fini.

Démonstration. — On a

$$\bar{C}_n = C_n / [(T_1 - \lambda)C + (T_2 - \mu)C] \cap C_n.$$

Or le corollaire précédent affirme que

$$((T_1 - \lambda)C + (T_2 - \mu)C) \cap C_n = (T_1 - \lambda)C_{n-1} + (T_2 - \mu)C_{n-1},$$

ce qui prouve 1). On en déduit

$$\bar{C}_n / \bar{C}_{n-1} = (C_n / C_{n-1}) / p([(T_1 - \lambda)C_{n-1} + (T_2 - \mu)C_{n-1}]),$$

où p désigne la projection canonique $C_n \rightarrow C_n / C_{n-1}$. La restriction $C_n = \mathcal{C}(B_n) \rightarrow \mathcal{C}(S_n)$ induit un isomorphisme de C_n / C_{n-1} sur $\mathcal{C}(S_n)$, et cet isomorphisme envoie $p([(T_1 - \lambda)C_{n-1} + (T_2 - \mu)C_{n-1}])$ sur le sous-module de $\mathcal{C}(S_n)$ que nous avons appelé L_n . Ceci prouve 2).

Pour prouver 3), considérons la suite de morphismes

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(S_{n-2}) \longrightarrow \mathcal{C}(S_{n-1})^2 \longrightarrow \mathcal{C}(S_n) \longrightarrow \mathcal{C}(S_n) / L_n \rightarrow 0,$$

où le premier morphisme non trivial est celui qui à $g \in \mathcal{C}(S_{n-2}) \subset C$ associe le couple des fonctions $(-T_2 g, T_1 g)$ restreintes à S_{n-1} , le second morphisme est celui qui à $(g_1, g_2) \in \mathcal{C}(S_{n-1})^2$ associe la restriction à S_n de $T_1 g_1 + T_2 g_2$, et enfin le dernier morphisme est simplement la projection canonique.

Que cette suite est un complexe est formel. C'est d'ailleurs (si l'on s'arrête à l'avant-dernier terme) le $(n-1)$ -gradué du complexe de Koszul de \hat{C} mentionné à la remarque ci-dessus.

Nous affirmons que cette suite est une suite exacte. De droite à gauche : l'exactitude en $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est évidente. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_n)$ résulte de la définition de L_n . L'exactitude en $\mathcal{C}(S_{n-1})^2$ est la proposition 3.1.1. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_{n-2})$ résulte facilement du lemme 2.3.5 : en effet, il faut montrer que si $f \in \mathcal{C}(S_{n-2})$, la nullité de T_1f et de T_2f sur S_{n-1} implique celle de f . Pour cela soit x un point de S_{n-2} . Le point x possède toujours au moins un voisin y dans S_{n-1} (regarder dans un appartement) disons de type 1. Donc d'après 2.3.5, $0 = (T_1f)(y) = f(x)$.

On en déduit, si k est un corps :

$$\dim_k \mathcal{C}(S_n)/L_n = \dim_k \mathcal{C}(S_n) - \dim_k \mathcal{C}(S_{n-1})^2 + \dim_k \mathcal{C}(S_{n-2}).$$

Comme le membre de droite est un nombre indépendant du corps k (il est égal à $|S_n| - 2|S_{n-1}| + |S_{n-2}|$), il en va de même pour le membre de gauche.

Pour prouver que $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est libre de type fini sur tout anneau k , il suffit de le faire pour $k = \mathbb{Z}$ car la formation de ce module commute à tout changement de base. La type-finitude de $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ étant évidente, il suffit de prouver la platitude, donc, d'après le critère numérique de platitude, de prouver que ce module à la même dimension sur tous les corps \mathbb{F}_p et \mathbb{Q} . C'est ce que nous venons de faire. \square

THÉORÈME 3.2.4. — Soit $n \geq 0$. Alors :

- 1) $\overline{C}_n/\overline{C}_{n-1}$ est libre de type fini sur k .
- 2) \overline{C}_n est libre de type fini sur k .
- 3) $M_{\lambda,\mu}$ est plat sur k .
- 4) Si p est inversible dans k , $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est plat sur k si $n \geq 1$.

Démonstration. — Le point 1) résulte immédiatement de la proposition précédente. Le point 1) implique le point 2) par récurrence sur n , compte tenu de ce qu'une extension de modules libres de type fini l'est encore.

Le point 2) implique le point 3) car $M_{\lambda,\mu}$ est limite inductive filtrante des \overline{C}_n .

Le point 3) implique le point 4) car K_n est un pro- p -groupe ($n \geq 1$), si bien que $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est facteur direct de $M_{\lambda,\mu}$. \square

4. Preuve de l'admissibilité $M_{\lambda,\mu}$

Le but de cette sous-partie est de démontrer que pour tout anneau k dans lequel p est inversible, tout λ et μ dans k , et tout n , $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est de type fini sur k .

4.1. Le cas où k est un corps

4.1.1. Notons que ce résultat s'obtient sans effort si k est un corps de caractéristique différente de p . En effet, supposons k algébriquement clos, ce qui est loisible, posons $A = W(k)$ (anneau des vecteurs de Witt de k) et choisissons

des relevés λ' et μ' de λ et μ dans A . Soit $n \geq 1$. On a $M_{\lambda',\mu';A} \otimes_A k = M_{\lambda,\mu}$ par définition, et comme K_n est un pro- p -groupe et que $\text{char } k \neq p$, on en déduit

$$M_{\lambda',\mu';A}^{K_n} \otimes_A k = M_{\lambda,\mu;k}^{K_n}.$$

Par ailleurs, si $\text{Frac}(A)$ désigne le corps des fractions de A , qui est de caractéristique nulle, la type finitude de $M_{\lambda',\mu'}^{K_n} \otimes_A K = M_{\lambda,\mu;\text{Frac}(A)}^{K_n}$ est bien connue d'après la théorie de Bernstein (cf. e.g. [9]). Pour montrer la type finitude sur k de $M_{\lambda,\mu}$, il suffit donc, compte tenu de la platitude de $M_{\lambda,\mu;A}^{K_n}$ sur A (théorème 3.2.4, point 4)), d'appliquer le lemme suivant.

LEMME 4.1.2. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K , de corps résiduel k ; soit M un module plat sur A , tel que $M \otimes K$ est de dimension finie sur K . Alors $M \otimes k$ est de dimension finie sur k .*

Démonstration. — Si v_1, \dots, v_n est une famille libre de $M \otimes k$ sur k , v'_1, \dots, v'_n des relevés des précédents dans M , alors la famille v'_1, \dots, v'_n est encore libre sur K : par l'absurde, supposant la famille liée et écrivant une relation de liaison $\sum_i \lambda_i v'_i = 0$ dans $M \otimes K$, on peut en divisant cette égalité par π^q , où π est une uniformisante de A et q le minimum des valuations des λ_i , se ramener au cas où les λ_i sont dans A , et au moins l'un d'entre eux inversible dans A . Réduisant cette égalité modulo (π) , on obtient une relation non triviale de liaison des v_i dans $M \otimes k$, ce qui est absurde.

Le cardinal d'une famille libre de $M \otimes k$ est donc borné, ce qui implique que cet espace est de dimension finie. \square

4.2. Le cas général

4.2.1. Cependant cet argument ne s'applique pas quand k est un anneau quelconque (où p est inversible). Nous donnons donc une autre méthode, immobilière, qui a en outre les avantages de ne pas utiliser la théorie en caractéristique nulle (et donc de donner une nouvelle preuve de l'admissibilité en caractéristique nulle), et d'être effective, i.e. de donner une borne (facilement) calculable pour le rang de $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$.

LEMME 4.2.2. — *Soit $x \in S_m$. Tout chemin de O à x de longueur m est entièrement contenu dans tout appartement contenant O et x .*

Démonstration. — Soit $x_0 = O, x_1, \dots, x_m = x$ un chemin de longueur m de O à x . Alors on a $x_i \in S_i$, et x_{i-1} est un voisin de x_i dans S_{i-1} . Le lemme résulte donc du lemme 2.3.5 par récurrence descendante sur i . \square

LEMME 4.2.3. — *Soit $x \in S_m$. Tout chemin de O à x de longueur m a le même nombre a d'arêtes de type 1, et le même nombre b d'arêtes de type 2. On a $a + b = m$.*

Démonstration. — Soit A un appartement contenant x et O . On décrit le point x par un système de coordonnées $(0, u, v)$ avec $0 \leq u \leq v$ (ce qu'on peut toujours faire quitte à permuter les éléments de la base définissant le système de coordonnées). Si x_0, x_1, \dots, x_m est un chemin de O à x , les coordonnées de x_i peuvent s'écrire $(0, u_i, v_i)$ et l'on a

$$(u_{i+1} - u_i, v_{i+1} - v_i) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1)\}$$

(c'est la condition pour que x_i soit voisin de x_{i+1} .) On en déduit immédiatement que $v \leq m$. Si l'on avait $v < m$, on pourrait trouver un chemin de longueur $v < m$ de O à x (en prenant u arêtes $(1, 0)$ puis $v - u$ arêtes $(1, 1)$) ce qui est absurde; donc

$$v = m.$$

Les $(u_{i+1} - u_i, v_{i+1} - v_i)$ sont donc tous de la forme $(1, 1)$ ou $(0, 1)$, et l'arête (x_i, x_{i+1}) est respectivement de type 1 et 2. On en déduit que le nombre d'arêtes de type 1 (resp. 2) dans ce chemin est

$$a = u, \quad b = v - u,$$

nombre visiblement indépendant du chemin choisi. \square

DÉFINITION. — On appelle (a, b) le *type* du point x .

Il est clair (vu la preuve du lemme précédent) que $x \in S_m$ de type (a, b) est pointu si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. Son unique voisin dans S_{m-1} est de type $(a - 1, 0)$ si $a > 0$, $(0, b - 1)$ si $b > 0$. Si x n'est pas pointu, ses deux voisins dans S_{m-1} sont de type $(a - 1, b)$ et $(a, b - 1)$.

Dans un appartement donné, un point n'est pas déterminé par son type (à un type donné correspondent trois ou six points) mais c'est vrai dans un *secteur* :

DÉFINITION. — Un *secteur* est une partie d'un appartement contenant O de la forme $\{(0, u, v)\}$, $0 \leq u \leq v$, pour un système de coordonnées tel que $(0, 0, 0)$ est une coordonnée de O .

4.2.4. Il y a donc six secteurs dans un appartement, qui le recouvrent, et qui sont deux à deux d'intersection soit réduite à O soit une demi-droite. La preuve du lemme 4.2.3 montre que si x est dans un secteur, tous les chemins de longueur m de O à x sont dans ce même secteur. Elle montre aussi que si l'on choisit les coordonnées d'un appartement A contenant ce secteur tel qu'il soit l'ensemble des $(0, u, v)$ avec $0 \leq u \leq v$, il n'y a qu'un seul point du secteur de type (a, b) à savoir $(0, a, a + b)$.

DÉFINITION 4.2.5. — Soit $x \in S_m$, et $n \leq m$. On appelle *projection* de x sur S_n l'ensemble des points de S_n par lesquels passe un chemin de longueur m reliant O à x . On appelle *projeté* de x sur S_n tout point de la projection de x sur S_n .

Tous les projetés de x sur S_n appartiennent à tout appartement contenant x et O , et dans un tel appartement, sont contenus dans un même secteur. On a trivialement :

LEMME 4.2.6 (Transitivité de la projection). — *Soit $\ell \leq n \leq m$ et $x \in S_m$. La projection de x sur S_ℓ est la réunion des projections sur S_ℓ des projetés de x sur S_n .*

DÉFINITION 4.2.7. — On appelle *segment* de S_n tout ensemble de points de S_n qui est inclus dans un appartement contenant O , et qui, dans un système de coordonnées adéquates (où l'origine a pour coordonnées $(0, 0, 0)$) est l'ensemble des $(0, u, n)$ où u parcourt les entiers d'un intervalle fermé de $[0, n]$. Autrement dit, un segment est l'ensemble des points d'un secteur dont les types sont de la forme $a, n - a$ avec a parcourant un intervalle de $[0 \dots n]$. Autrement dit, un *segment* est un intervalle fermé d'un des côtés de l'hexagone que dessine la sphère S_n dans un appartement.

Un segment est dit *saturé à l'origine* (resp. *à l'extrémité*) s'il contient (dans la description précédente) le point de type $(n, 0)$ (resp $(0, n)$).

Un segment est donc saturé (d'un côté ou de l'autre) si et seulement s'il contient un point pointu. Dans la figure 2, le point x (qui est de type $(2, 1)$) a pour projection sur S_2 le segment $[ab]$ qui est de longueur 1, et qui est saturé à l'origine, mais pas à l'extrémité. Le point y (de type $(3, 0)$) a une projection réduite au point b , donc un segment de longueur zéro, là encore saturé à l'origine.

LEMME 4.2.8. — *La projection d'un point $x \in S_m$ sur S_n est toujours un segment P . Si x est de type (a, b) , on a*

$$a \geq \sup_{p \in P} a_p \quad \text{et} \quad b \geq \sup_{p \in P} b_p$$

où (a_p, b_p) désigne le type du point p de P ; la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si P n'est pas saturé à l'origine. En particulier, si ce segment n'est pas saturé, il est de longueur $n - m$ (i.e. il contient $n - m + 1$ points).

Démonstration. — Dans un secteur donné passant par x , les points de P sont tous (d'après la preuve du lemme 4.2.3) les points de type $(a_p, b_p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $a_p + b_p = m$, $a_p \geq a$, $b_p \geq b$. Le lemme en découle. \square

4.2.9. Soit $m \geq n$. Notons $Y_{m,n}$ l'ensemble des triplets (P, a, b) , $P \subset X$, avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant les propriétés suivantes :

- P est un segment de S_n ,
- $a + b = m$,

• $a \geq \sup_{p \in P} a_p$ et $b \geq \sup_{p \in P} b_p$ où (a_p, b_p) désigne le type du point p de P ; la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si P n'est pas saturé à l'origine (resp. à l'extrémité).

On définit une application $f : S_m \rightarrow Y_{m,n}$ en envoyant $x \in S_m$ sur (P, a, b) où P est la projection de x sur S_n , et où (a, b) est le type de x . Que (P, a, b) appartiennent à $Y_{m,n}$ résulte du lemme 4.2.8.

Il est clair que le triplet (P, a, b) ne dépend que de l'orbite sous K_n de x . L'application f induit donc une application $f : S_m/K_n \rightarrow Y_{m,n}$.

PROPOSITION 4.2.10. — *L'application $f : S_m/K_n \rightarrow Y_{m,n}$ est une bijection.*

Démonstration. — Montrons que f est surjective. Soit $(P, a, b) \in Y_{m,n}$. Soit A un appartement contenant P et O , dans lequel P est l'ensemble des points $(0, u, n)$ avec $u_0 \leq u \leq u_1$. Les types de ces points sont les $(u, n - u)$. Par hypothèse on a donc $u_1 \leq a$ et $n - u_0 \leq b$, avec égalité (dans l'une ou l'autre) si P n'est pas saturé (à l'origine ou à l'extrémité).

Prenons alors pour x le point de coordonnées $(O, a, a + b)$. Le point x est bien dans S_m et de type (a, b) . De plus, d'après la preuve du lemme 4.2.8, la projection de P est l'ensemble des $(0, u', n)$ avec

$$\max(n - b, 0) \leq u' \leq \min(n, a).$$

Si P n'est pas saturé, cette égalité se réécrit $u_0 \leq u \leq u_1$, et l'on voit donc que la projection de x est P . Si P est saturé à l'origine, mais pas à l'extrémité, cette égalité se réécrit $0 \leq u' \leq u_1$, et là encore le projeté de x est bien P . Le cas où P est saturé à l'extrémité (ou aux deux bouts) se traite de même. Ainsi, P est toujours le projeté de x , et $(P, a, b) = f(x)$.

Montrons que f est injective, *i.e.* que si x et $y \in S_m$ ont même (P, a, b) , alors x et y sont dans la même K_n -orbite. Soit A un appartement contenant x et O , et A' un appartement contenant y et O . D'après 4.2.5, $P \subset A \cap A'$. D'après [4], proposition. 2.5.8, il existe $g \in G$ tel que $gA = A'$ qui est l'identité sur $A \cap A'$, donc sur P et sur $\{O\}$. On a $g(x) = y$, car $g(x)$ a même type et même projeté que y dans A' , donc est dans le même secteur de A' (voir 4.2.4.)

Dans une base adéquate définissant l'appartement A et engendrant un réseau représentant O , le fait que g soit l'identité sur P se traduit par le fait que sa matrice est à coefficient entiers, et vérifie une congruence de la forme suivante (où les $*$ désignent des éléments de \mathcal{O}/π^n) :

$$g \equiv \begin{pmatrix} * & * & * \\ \pi^{u_1} * & * & * \\ 0 & \pi^{n-u_0} * & * \end{pmatrix} \pmod{\pi^n}.$$

On peut donc choisir une matrice $g' \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) $g' \equiv g \pmod{\pi^n}$;
- (b) $g'_{13} = 0$;

- (c) si $u_1 = n$ alors $g'_{12} = 0$, sinon π^{u_1} divise g'_{12} ;
- (d) si $u_0 = 0$ alors $g'_{23} = 0$, sinon π^{n-u_0} divise g'_{23} .

On a $g'^{-1}g \in K_n$, par la propriété (a). Nous allons montrer que $g'^{-1}g(x) = y$, ce qui prouvera la proposition. Il suffit de montrer que $g'(y) = y$.

Si P n'est pas saturé, *i.e.* si $u_0 > 0$ et $u_1 < n$, y est de type $(a, b) = (u_1, n - u_0)$ (voir ci-dessus) donc de coordonnées $(0, u_1, n - u_0 + u_1)$. Les propriétés (b), (c), et (d) de g' montre alors que $g'(y) = y$.

Si P est saturé à l'origine mais pas à l'extrémité, *i.e.* si $u_0 = 0$, et $u_1 < n$, on a $b = n - u_0$, mais seulement $a \geq 0$, et y a pour coordonnées $(0, a, n - u_0 - a)$, avec un $a \geq 0$ quelconque. Mais on voit encore que y est fixe par g' , d'après les propriétés (b), (c) et (d) de g' (noter que $g'_{23} = 0$ d'après (d)).

Enfin, le cas où P est saturé à l'extrémité mais pas à l'origine est symétrique du précédent, et le cas où P est saturé des deux côtés se traite de manière tout à fait analogue. □

On note $O_{P,a,b}$ l'orbite correspondant à (P, a, b) via f^{-1} . On note $\mathbf{1}_{P,a,b}$ la fonction caractéristique de l'orbite $O_{P,a,b}$ dans S_m ($m = a + b$).

LEMME 4.2.11. — *Si P est saturé à l'origine (resp. à l'extrémité),*

$$T_1 \mathbf{1}_{P,a,b} = \mathbf{1}_{P,a+1,b} \quad \text{sur } S_{m+1}$$

(resp. $T_2 \mathbf{1}_{P,a,b} = \mathbf{1}_{P,a,b+1}$ sur S_{m+1}).

Démonstration. — Supposons P saturé à l'origine. Cela implique $a \geq n$.

Soit $x \in O_{P,a+1,b}$. Comme x n'est pas de type $(*, 0)$, x possède exactement un voisin y dans S_m tel que (y, x) soit de type 1. Un tel y est de type (a, b) . Ses projetés sur S_n sont tous dans un secteur contenant 0 et y et ont pour type les (a_p, b_p) avec $a_p + b + p = n$, $0 \leq a_p \leq a$, $0 \leq b_p \leq b$. Mais comme $a \geq n$, ce système d'inégalité est équivalent aux systèmes où l'on a remplacé $a_p \leq a$ par $a_p \leq a + 1$, ce qui montre que les projetés de y sont exactement les projetés de x , autrement dit que $y \in O_{P,a,b}$. Réciproquement, il est clair que tout 1-voisin d'un $y \in O_{P,a,b}$ appartient à $O_{P,a+1,b}$, si bien que $T_1 \mathbf{1}_{P,a,b} = \mathbf{1}_{P,a+1,b}$. □

LEMME 4.2.12. — *Si $m \geq 2n - 2$, l'application $(\mathcal{C}(S_m)^{K_n})^2 \rightarrow \mathcal{C}(S_{m+1})^{K_n}$ qui à (g_1, g_2) fonctions K_n -invariantes sur S_m associe la fonction (nécessairement K_n -invariante) $T_1 f_1 + T_2 f_2$ restreinte à S_{m+1} est surjective.*

Démonstration. — Une fonction K_n -invariante sur S_{m+1} est combinaison linéaire de $\mathbf{1}_{P,a,b}$ avec $a + b = m + 1$. Par linéarité il suffit de prouver qu'un tel $\mathbf{1}_{P,a,b}$ est dans l'image. Si P n'était pas saturé, sa longueur serait $m + 1 - n \geq n - 1$, mais un segment de longueur $n - 1$ est toujours saturé (un coté de S_n dans un appartement est de longueur n). Le segment P est donc saturé, disons à l'origine. Alors d'après le lemme précédent, $T_1 \mathbf{1}_{P,a-1,b} = \mathbf{1}_{P,a,b}$. □

PROPOSITION 4.2.13. — *On suppose p inversible dans k . Si $n \geq 1$ et $m \geq 2n - 2$, $m \geq 1$, l'application $C_m^{K_n} \rightarrow M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est surjective. En particulier, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est de type fini.*

Démonstration. — Comme K_n est un pro- p -groupe, l'application $C^{K_n} \rightarrow M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est surjective. Si $\phi \in M_{\lambda,\mu}^{K_n}$, ϕ admet donc un relevé $f \in C$ qui est K_n -invariant, et qui est à support dans une boule B_k . Si $k \leq m$, la proposition est prouvée. Sinon, on a $k \geq 2n - 1$ et on va montrer qu'on peut diminuer k . D'après le lemme précédent, la restriction à S_k de f s'écrit $T_1 f_1 + T_2 f_2$ sur S_k , avec f_1 et f_2 fonctions sur S_{k-1} . Quitte à moyenner f_1 et f_2 par K_n , on peut supposer que ces deux fonctions sont K_n -invariantes. On pose $f' = f - (T_1 - \lambda)f_1 - (T_2 - \mu)f_2$. Alors f' est maintenant à support dans B_{k-1} , est encore K_n -invariante et son image dans $M_{\lambda,\mu}$ est encore ϕ . Répétant ce procédé, on arrive à $k \geq m$, ce qui prouve la proposition. \square

5. Preuve de la liberté de $M_{\lambda,\mu}^U$ pour U pro- p -groupe

Soit k un anneau où p est inversible. Pour montrer que le module $M_{\lambda,\mu}$ est libre de type fini sur k , il suffit de le vérifier pour l'anneau $A = \mathbb{Z}[1/p][X_1, X_2]$, car $M_{\lambda,\mu;k}^U$ sur k s'obtient à partir de $M_{X_1, X_2; A}^U$ par l'extension des scalaires $A \rightarrow k$, $T_1 \mapsto \lambda$, $T_2 \mapsto \nu$ (car U est un pro- p -groupe). Or sur A tout module plat et de type fini est libre d'après un résultat bien connu de Suslin [13].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BELLAÏCHE (J.) – *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*, Thèse, Université Paris Sud, 2002, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/theses-orsay/2002/2395.html>.
- [2] BOURBAKI (N.) – *Éléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1972.
- [3] BREUIL (C.) – *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* I, Prépublication, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/~breuil/liste-prepub.html>, 2001.
- [4] BRUHAT (F.) & TITS (J.) – *Groupes réductifs sur un corps local*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., t. 41 (1972), pp. 5–251.
- [5] CLOZEL (L.) – *On Ribet's Level-raising theorem for $U(3)$* , Amer. J. Math., t. 122 (2000), pp. 1265–1287.
- [6] GREEN (M.) – *Koszul cohomology and geometry*, in *Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987)*, World Sci. Publishing, 1987, pp. 177–200.
- [7] KATO (S.) – *On eigenspaces of the Hecke algebra with respect to a good maximal compact subgroup of a p -adic reductive group*, Math. Ann., t. 257 (1981), pp. 1–7.

- [8] LAZARUS (X.) – *Module universel en caractéristique $\ell > 0$ associé à un caractère de l'algèbre de Hecke de $GL(n)$ sur un corps p -adique, avec $\ell \neq p$* , J. Algebra, t. **213** (1999), no. 2, pp. 662–686.
- [9] ———, *Module universel non ramifié pour un groupe réductif p -adique*, Thèse, Université d'Orsay, 2000, non publiée.
- [10] SERRE (J.-P.) – *Cours au Collège de France (1987–1988)*, photocopies de notes manuscrites anonymes ; résumé dans les Œuvres complètes de Serre, vol. 3.
- [11] ———, *Two letters on quaternion and modular forms*, Israel J. Math., t. **95** (1996), pp. 281–299.
- [12] STEGER (T.) – *Local Fields and Buildings*, in *Harmonic Functions on Trees and buildings (New York, 1995)* (Koranyi (A.), éd.), Contemporary Mathematics, vol. 206, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 79–107.
- [13] VASERŠTEĪN (L.N.) & SUSLIN (A.N.) – *Serre's problem on projective modules over polynomial rings, and algebraic K-theory*, Funk. Anal. i Priložen., t. **8** (1974), no. 2, pp. 65–66, en russe.
- [14] VIGNÉRAS (M.-F.) – *Représentations ℓ -modulaire d'un groupe réductif p -adique avec $\ell \neq p$* , Progress in Math., vol. 137, Birkhäuser, 1996.