Bull. Soc. math. France
132 (1), 2004, p. 81–103

ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION NON UNIFORMÉMENT HYPERBOLIQUE DE L'INTERVALLE $[0, 1[$

PAR ALBERT RAUGI

RÉSUMÉ. — Nous étudions un exemple de transformation non uniformément hyperbolique de l'intervalle $[0, 1[$. Des exemples analogues ont été étudiés par de nombreux auteurs. Notre méthode utilise une théorie spectrale, pour une classe d'opérateurs vérifiant des conditions faibles de Doeblin-Fortet, introduite dans [1]. Elle nous permet, en particulier, de donner une estimation de la vitesse de décroissance des corrélations pour des fonctions non höldériennes.

ABSTRACT (*An example of a Non Uniformly Expanding Transformations of* $[0, 1[$)
We give an example of a non uniformly expanding transformations of $[0, 1[$. Analogous examples have been given by different authors. Our method is based on a general spectral theory for a class of operators satisfying weak "Doeblin-Fortet" conditions (see [1]). This technique makes it possible to estimate the decay of correlations for non Hölder functions.

Introduction

L'étude d'un exemple de transformation présentant une perte d'hyperbolicité en un point fixe a été l'objet de nombreux articles. Les travaux les plus récents (voir [2], [3], [4], [6], [7]) portent sur le problème de vitesse de décroissance des corrélations d'une fonction höldérienne, en vue d'obtenir un théorème de la limite centrale pour ses sommes de Birkhoff.

Texte reçu le 27 mars 2002, révisé le 20 novembre 2002, accepté le 10 décembre 2002.

ALBERT RAUGI, IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France) • *E-mail :* `raugi@univ-rennes1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37A30, 37C30, 37E05, 47B38, 60F05.

Mots clefs. — Opérateurs de transfert, décroissance des corrélations, théorème de la limite centrale.

Une approche souvent utilisée est celle de l'« induction », proche de la technique probabiliste du « balayage ». On recherche un borélien « récurrent » B de I pour lequel la transformation induite est uniformément dilatante. En découpant alors une somme de Birkhoff suivant les temps de retour dans B, on est « ramené » à une somme de Birkhoff associée à la transformation induite (voir [2], [3], [7]). Une seconde méthode consiste à approcher l'opérateur de « transfert », associé à la transformation, par un opérateur, obtenu par une perturbation aléatoire, ayant de bonnes propriétés spectrales (voir [4]).

Notre approche, basée sur une théorie spectrale pour une classe d'opérateurs vérifiant des conditions faibles de Doeblin-Fortet, permet d'établir directement de bonnes propriétés spectrales pour l'opérateur de transfert. Cette technique permet de travailler avec des fonctions non nécessairement höldériennes. Signalons aussi, que dans le cas höldérien, l'estimation obtenue dans [4] permet d'obtenir le théorème de la limite centrale pour un coefficient de Hölder supérieur à $\alpha/(1-\alpha)$. Ici (*cf.* corollaire 1.7) ce résultat est obtenu pour un coefficient de Hölder supérieur à $\alpha/(1+\alpha)$.

1. Notations et résultats

1.1. Pour tout réel x, nous désignons respectivement par $[x]$ et $\{x\}$ les parties entière et fractionnaire de x. Pour tout réel x et tout réel strictement positif r, nous notons $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a,r) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\big\}.$$

Nous considérons l'intervalle $I = [0,1[$ muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{B}(I)$ et de la mesure de Lebesgue normalisée m. Nous choisissons un réel $\alpha \in\,]0,1[$ et nous introduisons la transformation τ de I définie par

$$\tau(x) = \big\{x(1-x^\alpha)^{-1/\alpha}\big\}.$$

On notera que 0 est un point fixe « neutre » de τ et qu'en tout point non nul de I, la transformation τ est strictement dilatante.

Nous appelons P l'opérateur dual de l'opérateur de composition par τ :

$$\forall f,g \in \mathbb{L}^2(I,m), \quad \int_0^1 f\ g\circ\tau \,\mathrm{d}m = \int_0^1 Pf\ g\,\mathrm{d}m.$$

La mesure de Lebesgue m est invariante par P et un petit calcul montre que

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(m),\ \forall x \in I, \quad Pf(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u\big(s_k(x)\big) f\big(s_k(x)\big),$$

en posant, pour $x \in I$,

$$u(x) = (1-x^\alpha)^{1+1/\alpha}, \quad t(x) = x\ (1+x^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ s_k(x) = t(x+k).$$

Notons aussi que la dérivée de t et la j-ième itérée de t, pour $j \in \mathbb{N}^*$, sont données par

$$t'(x) = (1 + x^\alpha)^{-(1+1/\alpha)}, \quad t^j(x) = x(1 + jx^\alpha)^{-1/\alpha}.$$

1.2. Dans le cas d'une transformation uniformément dilatante, l'étude classique du comportement asymptotique des itérés P^n, $n \geq 1$, de l'opérateur de transfert P, est basée sur la technique suivante. Les inverses s_n, $n \in \mathbb{N}$, de τ sont uniformément contractants ; autrement dit, il existe un réel $\rho \in [0, 1[$ tel que

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in I, \quad s_n\big(B(x, \rho^k)\big) \subset B\big(s_n(x), \rho^{k+1}\big).$$

Si f est une fonction continue sur I, on introduit alors les quantités

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{v}(f, k) = \sup\big\{|f(x) - f(y)| : (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \rho^k\big\}$$

qui mesurent les variations de f sur les boules de rayon ρ^k. À l'aide de ces variations, on construit dans $\mathbb{L}^1(m)$ une nouvelle norme pour laquelle P est un opérateur de Doeblin-Fortet au sens fort.

Dans notre cas, nous commençons par chercher une suite $(\eta_k)_{k \geq 0}$ de fonctions sur $]0, 1[$ telle que

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in I, \quad s_n\big(B\big(x, \eta_k(x)\big)\big) \subset B\big(s_n(x), \eta_{k+1}\big(s_n(x)\big)\big).$$

Nous verrons (lemme 2.1) que la suite définie par

$$\eta_k(x) = (2 + j \vee k)^{-1-1/\alpha}, \ \text{ si } \ x \in [t^j(1), t^{j-1}(1)[,\ j \geq 1,$$

répond à la question.

Pour toute fonction borélienne f sur I, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$$\mathcal{V}(f, x, n) = \big\|f(x) - f(\cdot)\big\|_{\mathbb{L}^\infty(B(x, \eta_n(x)), m)}, \quad v(f, n) = \int_0^1 \mathcal{V}(f, t, n) \mathrm{d}t.$$

On notera que cette mesure des variations de f est bien plus générale que la précédente ; en particulier, on peut avoir $\lim_n v(f, n) = 0$ pour une fonction f non continue. Pour tout réel $\beta \in [0, 1 - \alpha[$, nous notons m_β la mesure de densité $x^{-\beta}$ par rapport à la mesure de Lebesgue m. À l'aide de ces variations, nous construisons dans $\mathbb{L}^1(m_\beta)$ une suite de semi-normes pour laquelle P est un opérateur de Doeblin-Fortet au sens faible (*cf.* [1]). La construction de cette suite sera donnée dans la section 2.

1.3. Nous appelons $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications L de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ de la forme

$$L(x) = x \exp\Big(\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} \mathrm{d}t\Big)$$

pour une fonction continue positive ε sur $]0,+\infty[$ telle que

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

En particulier, pour tout entier naturel non nul p, appelons $\ln^{\circ p}$ la p-ième itérée du logarithme népérien. Pour tout réel $a>0$ suffisamment grand, l'application

$$f(x)=x\Big(\ln^{\circ p}\Big(a+\frac{1}{x}\Big)-\ln^{\circ p}(a+1)\Big)\underset{0}{\sim} x\ln^{\circ p}(1/x)$$

appartient à $\mathcal{S}$.

Nous posons

$$V_\beta=\big\{f\in\mathbb{L}^1(I,m_\beta):\lim_{n\to+\infty}v(f,n)=0\big\}.$$

Pour tout $f\in V_\beta$, nous introduisons la suite $u_\beta(f,\cdot)$ de terme général

$$u_\beta(f,n)=v(f,n)+\int_0^{t^n(1)}|f|\,\mathrm{d}m_\beta.$$

Enfin, nous appelons γ le réel $\min\{(1-\beta)/\alpha,2+(\beta/\alpha)\}$.

THÉORÈME 1.4. — *Pour tout $a\in\ ]0,1[$, la suite de fonctions $(P^n1)_{n\ge0}$ converge uniformément sur $[a,1[$ vers une fonction h, continue, strictement positive et invariante par P. De plus, il existe $c>0$ tel que $h(x)\sim_0 c/x^\alpha$ et pour tout $\varepsilon>0$, $v(h,n)=o\big(n^{\varepsilon-1/\alpha}\big)$.*

Pour tout $\beta\in[0,1-\alpha[$ et toute fonction g de V_β, la suite $(P^ng)_{n\ge0}$ converge dans $L^1(I,m_\beta)$ vers $m(g)h$. Lorsque $m(g)=0$, nous avons :

$$\text{(i)}\ \|P^ng\|_{\mathbb{L}^1(m_\beta)}=o\Big(L(n^{-\gamma})\sum_{k=0}^n\Big[L(u_\beta(g,k))+L\Big(k^{(\beta-1)/\alpha}\sum_{j=1}^k v\,(g,j)\Big)\Big]\\ +L\big(u_\beta(g,[\tfrac12 n])\big)+L\Big(n^{(\beta-1)/\alpha}\sum_{j=1}^n v(g,j)\Big)\Big)$$

pour tout $L\in\mathcal{S}$.

(ii) *Si $\sum_{k\ge0}u_\beta(g,k)<+\infty$, alors pour tout $L\in\mathcal{S}$,*

$$\|P^ng\|_{\mathbb{L}^1(m_\beta)}=o\big(L(n^{-\gamma})+L\big(u_\beta(g,[\tfrac12 n])\big)\big).$$

(iii) *Si pour un réel $r<\gamma-1$, la série $\sum_{k\ge0}k^ru_\beta(g,k)$ converge, alors la série $\sum_{k\ge0}k^r\|P^ng\|_{\mathbb{L}^1(m_\beta)}$ converge aussi.*

1.5. Nous considérons l'opérateur relativisé $\widetilde{P}$ défini par

$$\widetilde{P}f = h^{-1}P(hf).$$

Pour tous réels $\beta \in [0, 1-\alpha[$ et $p \in [1, +\infty[$, nous posons :

$$\widetilde{V}_{\beta,p} = \big\{ f \in \mathbb{L}^p(I, hm_\beta) : \lim_{n\to+\infty} v(hf, n) = 0 \big\}.$$

Pour tout $f \in \widetilde{V}_{\beta,p}$, nous introduisons la suite $\widetilde{u}_{\beta,p}(f, \cdot)$ de terme général

$$\widetilde{u}_{\beta,p}(f,n) = v(hf,n) + \Big(\int_0^{t^n(1)} |f|^p h \mathrm{d}m_\beta \Big)^{1/p}.$$

THÉORÈME 1.6. — *Soient $\beta \in [0, 1-\alpha[$ et $p \in [1, +\infty[$ tels que*

$$\gamma_p = \min \Big\{ 2 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1-\beta}{p\alpha} \Big\} > 1.$$

Alors, pour toute fonction g de $\widetilde{V}_{\beta,p}$, la suite $(\widetilde{P}^n g)_{n\geq 0}$ converge dans $L^p(I, hm_\beta)$ vers $m(gh)$. Lorsque $m(gh) = 0$, nous avons :

(i) *pour tout $L \in \mathcal{S}$,*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{P}^n g\|_{\mathbb{L}^p(hm_\beta)} = o\Big(L(n^{-\gamma_p}) \sum_{k=0}^{n} \Big[L\big(\widetilde{u}_{\beta,p}(g,k)\big) + L\Big(k^{(\beta-1)/p\alpha} \sum_{j=1}^{k} v(gh,j) \Big) \Big] \\ + L\big(\widetilde{u}_{\beta,p}(g, [\tfrac{1}{2}n])\big) + L\Big(n^{(\beta-1)/p\alpha} \sum_{j=1}^{n} v(gh,j) \Big) \Big); \end{aligned}$$

(ii) $\sum_{k\geq 0} \widetilde{u}_{\beta,p}(g,k) < \infty$, *alors pour tout $L \in \mathcal{S}$,*

$$\|\widetilde{P}^n g\|_{\mathbb{L}^p(hm_\beta)} = o\Big(L\big(n^{-\gamma_p}\big) + L\big(\widetilde{u}_{\beta,p}(g, [\tfrac{1}{2}n])\big) \Big);$$

(iii) *si pour un réel $r < \gamma_p - 1$, la série $\sum_{k\geq 0} k^r \widetilde{u}_{\beta,p}(g,k)$ converge, alors la série $\sum_{k\geq 0} k^r \|\widetilde{P}^n g\|_{\mathbb{L}^p(hm_\beta)}$ converge aussi.*

COROLLAIRE 1.7. — *Supposons que $\alpha < 1/2$. Pour toute fonction borélienne g telle que $m(gh) = 0$, nous avons :*

(i) *Si*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\sqrt{k}} \Big(v(gh,k) + \Big(\int_0^{t^k(1)} |g|^2(x) x^{-\alpha} \mathrm{d}x \Big)^{1/2} \Big) < +\infty,$$

alors la suite de fonctions $\big(n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ \tau^j\big)_{n\geq 1}$ converge en loi sous hm vers une loi normale centrée (cf. [5]). En particulier, c'est le cas pour la fonction $g(x) = (a-x)/(x^{\alpha+\eta})$ avec $4\alpha + 2\eta < 1$ et a tel que $m(hg) = 0$.

(ii) *Si g est bornée et*

$$\sum_{k\geq 0}\Big(v(gh,k)+\int_0^{t^k(1)}|g|(x)x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x\Big)<+\infty,$$

alors la suite de fonctions $\big(n^{-1/2}\sum_{j=0}^{n-1} g\circ\tau^j\big)_{n\geq 1}$ *converge en loi sous hm vers une loi normale centrée. En particulier, c'est le cas pour une fonction g höldérienne d'ordre $\delta\in\,]\alpha/(1+\alpha),1]$ sur $[0,1]$.*

2. Démonstration du théorème 1.4

Lemmes préliminaires

LEMME 2.1. — *Pour tout entier naturel k et tout couple (x,y) de I^2 vérifiant $|x-y|\leq \eta_k(x)$, nous avons $|s_\ell(x)-s_\ell(y)|\leq \eta_{k+1}(s_\ell(x))$ pour tout $\ell\in\mathbb{N}$.*

Démonstration. — Soient $x\in[(j+1)^{-1/\alpha},j^{-1/\alpha}[$ et $y\in I$ tels que $|x-y|\leq \eta_k(x)$.

▷ Pour $\ell\geq 1$, nous avons $s_\ell(x)\in[2^{-1/\alpha},1[$, $\eta_{k+1}(s_\ell(x))=(k+3)^{-(1+1/\alpha)}$ et

$$\begin{aligned}\big|s_\ell(x)\ -s_\ell(y)\big| &\leq \eta_k(x)\big(1+(\ell+x-\eta_k(x))^\alpha\big)^{-(1+1/\alpha)}\\ &\leq \big[(j\vee k+2)\big(1+(\ell+(j+1)^{-1/\alpha}-(j\vee k+2)^{-(1+1/\alpha)})^\alpha\big)\big]^{-(1+1/\alpha)}\\ &\leq \big[2(j\vee k+2)\big]^{-(1+1/\alpha)}\leq (k+3)^{-(1+1/\alpha)}.\end{aligned}$$

▷ Pour $\ell=0$, nous avons :

$$\big|t(x)-t(y)\big|\leq \big[(j\vee k+2)\big(1+((j+1)^{-1/\alpha}-(j\vee k+2)^{-(1+1/\alpha)})^\alpha\big)\big]^{-(1+1/\alpha)}.$$

Comme

$$(j\vee k+2)\big((j+1)^{-1/\alpha}-(j\vee k+2)^{-(1+1/\alpha)}\big)^\alpha\geq \frac{(j\vee k+2)}{j+1}\Big(1-\frac{1}{j\vee k+2}\Big)^\alpha\geq 1,$$

il s'ensuit que $|t(x)-t(y)|\leq \big[j\vee k+3\big]^{-(1+1/\alpha)}=\eta_{k+1}(t(x))$. □

LEMME 2.2. — *Pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^2$ et tout $x\in E$, nous avons :*

(i) $\mathcal{V}(\ln(u\circ s_n),x,k)\leq (1+\alpha)\eta_k(x)\big(n+(x-\eta_k(x))^{1-\alpha}\big)^{-1}$;

(ii) $\mathcal{V}(u,x,k)\leq (1+\alpha)\eta_k(x)(x-\eta_k(x))^{\alpha-1}$;

(iii) *pour tout $\beta\in[0,1-\alpha[$,*

$$\sup_{x\in]0,1[}\big[x^\beta\eta_k(x)(x-\eta_k(x))^{\alpha-1}\big]\leq 2^{\beta/\alpha}(k+1)^{-(2+\beta/\alpha)};$$

(iv) *pour tous $y\in B(x,\eta_k(x))$ et $n\geq 1$,*

$$\frac{|u(s_n(x))-u(s_n(y))|}{u(s_n(x))}\leq (1+\alpha)e^{1+\alpha}\eta_k(x)\leq 2e^2(1+k)^{-(1+1/\alpha)}.$$

Démonstration. — (i) Considérons la fonction $\psi = \ln(u \circ t)$. Pour tout $x \in I$, nous avons

$$\psi(x) = -(1+\alpha^{-1})\ln(1+x^\alpha) \quad \text{et} \quad \psi'(x) = -(1+\alpha)\big(x + x^{1-\alpha}\big)^{-1}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ et $x, y \in I$ vérifiant $|x-y| \le \eta_k(x)$,

$$\begin{aligned}\big|\psi(x+n) - \psi(y+n)\big| &\le (1+\alpha)|x-y|\big(n + x\wedge y + (n + x \wedge y)^{1-\alpha}\big)^{-1}\\ &\le (1+\alpha)\eta_k(x)\big(n + (x - \eta_k(x))^{1-\alpha}\big)^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) Nous avons $|u'(x)| = (1+\alpha)(1-x^\alpha)^{1/\alpha}x^{\alpha-1} \le (1+\alpha)x^{\alpha-1}$ pour tout $x \in \,]0,1[$, et par suite $\mathcal{V}(u,x,k) \le (1+\alpha)\eta_k(x)(x-\eta_k(x))^{\alpha-1}$.

(iii) Pour tous $j \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [t^j(1), t^{j-1}(1)[$, en posant $\ell = \max\{j,k\}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{x^\beta \eta_k(x)}{(x-\eta_k(x))^{1-\alpha}} &\le j^{-\beta/\alpha}(2+\ell)^{-(1+1/\alpha)}\big((1+j)^{-1/\alpha} - (2+\ell)^{-(1+1/\alpha)}\big)^{\alpha-1}\\ &\le j^{-\beta/\alpha}(2+\ell)^{-(1+1/\alpha)}(1+j)^{-1+1/\alpha}\Big(1 - \Big(\frac{1+j}{2+\ell}\Big)^{1/\alpha}\frac{1}{2+\ell}\Big)^{\alpha-1}\\ &\le j^{-\beta/\alpha}(2+\ell)^{-(1+1/\alpha)}(1+j)^{-1+1/\alpha}\big(1-(2+\ell)^{-1}\big)^{\alpha-1}\\ &\le j^{-\beta/\alpha}(2+\ell)^{-(\alpha+1/\alpha)}(1+j)^{-1+1/\alpha}(1+\ell)^{\alpha-1}\\ &\le (1+j)^{(1-\beta-\alpha)/\alpha}(1+j^{-1})^{\beta/\alpha}(1+\ell)^{-(1+1/\alpha)}\\ &\le (1+\ell)^{(1-\beta-\alpha)/\alpha}2^{\beta/\alpha}(1+\ell)^{-(1+1/\alpha)}\\ &\le 2^{\beta/\alpha}(1+\ell)^{-(2+\beta/\alpha)} \le 2^{\beta/\alpha}(1+k)^{-(2+\beta/\alpha)}.\end{aligned}$$

(iv) Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{|u(s_n(x)) - u(s_n(y))|}{u(s_n(x))} &\le \mathrm{e}^{\mathcal{V}(\ln(u\circ s_n),x,k)} - 1\\ &\le \mathcal{V}\big(\ln(u\circ s_n),x,k\big)\mathrm{e}^{\mathcal{V}(\ln(u\circ s_n),x,k)}.\end{aligned}$$

Le résultat cherché se déduit alors de (i). □

LEMME 2.3. — *Pour tous $\beta \in [0, 1-\alpha[$, il existe des réels strictement positifs c_1 et c_2 tels que pour tous $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ et $f \in V_\beta$:*

(i) $v(Pf,k) \le \mathrm{e}^{2/(k+1)^2} v(f,k+1) + c_1(k+1)^{-(2+\beta/\alpha)}\displaystyle\int_0^1 |f|\,\mathrm{d}m_\beta$;

(ii) $v(P^n f,k) \le \mathrm{e}^{4/(k+1)} v(f,k+n) + c_2(k+1)^{-(1+\beta/\alpha)}\displaystyle\int_0^1 |f|\,\mathrm{d}m_\beta$.

Démonstration. — (i) Du lemme précédent, il résulte que

$$\begin{aligned}
\bigl|Pf(x)-Pf(y)\bigr| &\le \sum_{n\in\mathbb{N}}\bigl|u(s_n(x))f(s_n(x))-u(s_n(y))f(s_n(y))\bigr|\\
&\le \sum_{n\in\mathbb{N}} u(s_n(y))\bigl|f(s_n(x))-f(s_n(y))\bigr|\\
&\qquad\qquad + \sum_{n\in\mathbb{N}}\bigl|u(s_n(x))-u(s_n(y))\bigr|\bigl|f(s_n(x))\bigr|\\
&\le \mathrm{e}^{2/(1+k)^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} u(s_n(x))\bigl|f(s_n(x))-f(s_n(y))\bigr|\\
&\qquad + \frac{2\mathrm{e}^2}{(k+1)^{1+1/\alpha}}P|f|(x)+\bigl|u(t(x))-u(t(y))\bigr|\cdot\bigl|f(t(x))\bigr|\\
&\le \mathrm{e}^{2/(1+k)^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} u\bigl(s_n(x)\bigr)\bigl|f(s_n(x))-f(s_n(y))\bigr|\\
&\qquad + \frac{2\mathrm{e}^2}{(k+1)^{1+1/\alpha}}P|f|(x)+\frac{2^{1+\beta/\alpha}}{(k+1)^{2+\beta/\alpha}}\frac{|f(t(x))|}{(t(x))^\beta}\cdot
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(Pf,x,k) \le{}& \mathrm{e}^{2/(k+1)^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} u\bigl(s_n(x)\bigr)\mathcal{V}\bigl(f,s_n(x),k+1\bigr)\\
&+\frac{c_1}{2(k+1)^{2+\beta/\alpha}}\Bigl(P|f|(x)+\frac{|f(t(x))|}{(t(x))^\beta}\Bigr).
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à m et en tenant compte de la P-invariance de m, on obtient :

$$\begin{aligned}
v(Pf,k) &\le \mathrm{e}^{2/(k+1)^2}v(f,k+1)\\
&\qquad+\frac{c_1}{2(k+1)^{2+\beta/\alpha}}\Bigl(\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^{t(1)}x^{-\beta}|f(x)|\mathrm{d}x\Bigr)\\
&\le \mathrm{e}^{2/(k+1)^2}v(f,k+1)+\frac{c_1}{(k+1)^{2+\beta/\alpha}}\int_0^1 x^{-\beta}\bigl|f(x)\bigr|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(ii) Par récurrence, on montre que, pour tout entier $n\ge 1$,

$$v(P^nf,k)\le \exp\Bigl(2\sum_{j=k+1}^{k+n}\frac{1}{j^2}\Bigr)v(f,k+n)+c_1\Bigl(\sum_{j=k+1}^{k+n}\frac{1}{j^{2+\beta/\alpha}}\Bigr)\int_0^1 x^{-\beta}\bigl|f(x)\bigr|\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat. □

LEMME 2.4. — *Pour tous $k\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathcal{L}^\infty([t^j(1),1[,m)$, nous avons :*

$$\|f\|_{L^\infty([t^j(1),1[,m)}\le 2^{-1}(2+j\vee k)^{1+1/\alpha}\Bigl(v(f,k)+\int_0^1|f|\mathrm{d}m\Bigr).$$

Démonstration. — Pour $y \in [t^j(1), 1[$, on a $\eta_k(y) \geq \eta_k(t^j(1))$. Il s'ensuit que, pour m-presque tout $x \in [t^j(1), 1[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
1_{B(x,\eta_k(t^j(1)))}(y)\bigl|f(x)\bigr| &\leq 1_{B(x,\eta_k(t^j(1)))}(y)\bigl(|f(x)| - |f(y)|\bigr) + \bigl|f(y)\bigr| \\
&\leq \bigl\|f(\cdot) - f(y)\bigr\|_{L^\infty(E,B(y,\eta_k(t^j(1))),m)} + \bigl|f(y)\bigr| \\
&\leq \widetilde{\mathcal{V}}(f, y, k) + \bigl|f(y)\bigr|.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par intégration. □

LEMME 2.5. — *Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ deux suites positives décroissantes. Alors, pour tout $t \in\,]0,1[$, le terme général du produit de Cauchy $u * v$ de ces deux suites vérifie :*

$$\begin{aligned}
u * v(n) \leq u\bigl([tn]\bigr)\bigl(v(0) &+ \cdots + v(n - [nt])\bigr) \\
&+ v(n + 1 - [nt])\bigl(u(0) + \cdots + u([nt] - 1)\bigr)\bigr).
\end{aligned}$$

LEMME 2.6. — *Pour tout $\beta \in [0, 1 - \alpha[$, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe un réel strictement positif c_3 tel que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $f \in V$,*

$$\int_0^{t^k(1)} |Pf| \mathrm{d}m_\beta \leq \int_0^{t^{k+1}(1)} |f| \mathrm{d}m_\beta + c_3(k+1)^{(\beta-1)/\alpha}\Bigl(v(f,0) + \int_0^1 \bigl|f(x)\bigr|\mathrm{d}x\Bigr).$$

(ii) *Introduisons les suites z et $\delta_\beta(f, \cdot)$ de termes généraux*

$$z(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{j^2} = \frac{\pi^2}{3} - \sum_{j\geq n+1} \frac{2}{j^2},$$

$$\delta_\beta(f, n) = \int_0^{t^n(1)} |f| \mathrm{d}m_\beta + c_3 \sum_{j=0}^{n} (n + 1 - j)^{(\beta-1)/\alpha} \mathrm{e}^{z(j)} v(f, j).$$

Alors il existe un réel strictement positif c tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in V$,

$$\delta_\beta(Pf, n) \leq \delta_\beta(f, n + 1) + c(1 + n)^{-\gamma} \int_0^1 |f| \mathrm{d}m_\beta.$$

Démonstration. — (i) Nous pouvons supposer que $f \geq 0$. Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t^k(1)} & x^{-\beta} Pf(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^{t^k(1)} x^{-\beta} u\big(t(x+n)\big) f\big(t(x+n)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{t(n)}^{t(n+t^k(1))} \big(y(1-y^\alpha)^{-1/\alpha} - n\big)^{-\beta} f(y)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{t(n)}^{t(n+t^k(1))} \big(t^{-1}(y) - t^{-1}(t(n))\big)^{-\beta} f(y)\mathrm{d}y \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \int_{t(n)}^{t(n+t^k(1))} \big(y - t(n)\big)^{-\beta} \big(1-(t(n))^\alpha\big)^{\beta(1+1/\alpha)} f(y)\mathrm{d}y \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \int_0^{t(n+t^k(1))-t(n)} z^{-\beta} f\big(z+t(n)\big)\,\mathrm{d}z \\
&\leq \int_0^{t^{k+1}(1)} z^{-\beta} f(z)\mathrm{d}z \\
&\qquad + (1-\beta)^{-1} \|f\|_{L^\infty([t(1),1[,m)} \sum_{n\geq 1} \big(t(n+t^k(1)) - t(n)\big)^{1-\beta} \\
&\leq \int_0^{t^{k+1}(1)} z^{-\beta} f(z)\mathrm{d}z + \frac{c_3}{(k+1)^{(1-\beta)/\alpha}} \|f\|_{L^\infty([t(1),1[,m)}
\end{aligned}
$$

avec $c_3 = (1-\beta)^{-1} \sum_{n\geq 0} \big(1+(t(n))^\alpha\big)^{(\beta-1)(1+1/\alpha)}$. L'assertion (i) se déduit alors du lemme précédent.

(ii) Pour tout réel $b > 0$, notons w_b la suite de terme général $w_b(n) = (n+1)^{-b}$. D'après le lemme 2.3, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} & (k+1-j)^{(\beta-1)/\alpha} \mathrm{e}^{z(j)} v(Pf,j) \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} (k+1-j)^{(\beta-1)/\alpha} \mathrm{e}^{z(j)} \Big(\mathrm{e}^{2/(j+1)^2} v(f,j+1) \\
&\qquad\qquad + c_1 (j+1)^{-(2+\beta/\alpha)} \int_0^1 f\,\mathrm{d}m_\beta \Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k+1} (k+2-j)^{(\beta-1)/\alpha} \mathrm{e}^{z(j)} v(f,j) \\
&\qquad\qquad + c_1 e^{\frac{1}{3}\pi^2} w_{(1-\beta)/\alpha} * w_{2+\beta/\alpha}(k) \int_0^1 f\,\mathrm{d}m_\beta.
\end{aligned}
$$

À l'aide du lemme précédent, on voit facilement qu'il existe un réel $c_4 > 0$ tel que $w_{(1-\beta)/\alpha} * w_{2+\beta/\alpha}(n) \leq c_4 w_\gamma(n)$. D'où le résultat. $\square$

Suite de semi-normes sur V_β

2.7. Soient $\beta \in [0, 1-\alpha[$ et g une fonction de V_β. Nous choisissons (*cf.* lemme 2.14.) une suite réelle positive décroissante φ telle que

$$\varphi(0) = 1, \quad \forall n \geq 0,\ \varphi(n) \leq \frac{1}{n+1},$$
$$\sum_{k\geq 0} \varphi(k) = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} \varphi(k) u_\beta(g,k) < +\infty.$$

Nous introduisons sur V_β la suite de semi-normes suivantes :

$$\forall n \geq 0, \quad |f|_{\beta,n} = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\delta_\beta(f, k+n)$$

où $\delta_\beta(f,\cdot)$ est la suite définie dans l'énoncé du lemme 2.6. Nous notons

$$B_\beta = B_\beta(g,\varphi)$$

le sous-espace vectoriel de V_β défini par $B_\beta = \{f \in V_\beta : |f|_{\beta,0} < +\infty\}$. Pour alléger l'écriture, nous notons

$$\|\cdot\|_{1,\beta} = \|\cdot\|_{\mathbb{L}^1(I,m_\beta)} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{\mathbb{L}^1(I,m)}.$$

Observons que $|\cdot|_\beta = |\cdot|_{\beta,0}$ est une norme sur B_β majorant la norme $\|\cdot\|_{1,\beta}$ et équivalente à la norme définie par $|f|'_\beta = \sum_{k\geq 0} \varphi(k) u_\beta(f,k)$.

Lemme 2.8. — *P est un opérateur de $(B_\beta, \|\cdot\|_{1,\beta})$ à puissances bornées, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{L}^1(I, m_\beta)$, $\|P^n f\|_{1,\beta} \leq M\|f\|_{1,\beta}$.*

Démonstration. — D'après les assertions (i) du lemme 2.6 et (ii) du lemme 2.3, pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |P^n f(x)| \mathrm{d}m_\beta(x) \\
&\quad \leq \int_0^{t^n(1)} \bigl|f(x)\bigr| \mathrm{d}m_\beta(x) + c_3 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{(\beta-1)/\alpha} \bigl(v(P^{n-1-k}f, 0) + \|f\|_1\bigr) \\
&\leq \int_0^{t^n(1)} \bigl|f(x)\bigr| \mathrm{d}m_\beta(x) + c_3 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{(\beta-1)/\alpha} \bigl(\mathrm{e}^4 v(f, n-1+k) + (c_2+1)\|f\|_1\bigr).
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $f \in B_\beta$, $\sup_{n\geq 0} \|P^n f\|_{1,\beta} < +\infty$. Le lemme est alors une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus. □

Lemme 2.9. — *La boule unité $\mathcal{B}_{1,\beta} = \{f \in B_\beta : |f|_\beta \leq 1\}$ est compacte dans* $(B_\beta, \|\cdot\|_{1,\beta})$

Démonstration. — 1) Nous commençons par montrer que $\mathcal{B}_{1,0}$ est relativement compacte dans $(B_0, \|\cdot\|_1)$. Pour chaque entier $k \geq 1$ choisissons un recouvrement fini d'ouverts du compact $K_k = [t^k(1), 1]$ de $\mathbb{R}$; soit

$$K_k = \bigcup_{1 \leq j \leq p_k} B\big(x_{j,k}, \eta_k(x_{j,k})\big).$$

Considérons une partition de l'unité $\big(\psi_{j,k}\big)_{1 \leq j \leq p_k}$ subordonnée à ce recouvrement ; c'est-à-dire que les fonctions $\psi_{j,k}$, pour $k \geq 0$ et $1 \leq j \leq p_k$, sont positives et vérifient

$$\forall x \in K_k,\ \sum_{j=1}^{k} \psi_{j,k}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \notin B\big(x_{j,k}, \eta_k(x_{j,k})\big),\ \ \psi_{j,k}(x) = 0.$$

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}_{1,0}$. D'après le lemme 2.4, nous pouvons supposer que ces fonctions sont bornées sur K_k par $2^{-1}(1+k)^{1+1/\alpha}$. Pour tous entiers naturels k, n et p, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\|f_{n+p} - f_n\|_{L^1(K_k,m)} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{p_k} \int_{K_k} \psi_{j,k} |f_{n+p} - f_n| \mathrm{d}m \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\int_{K_k} \psi_{j,k} \big|f_{n+p} - f_{n+p}(x_{j,k})\big| \mathrm{d}m + \int_{K_k} \psi_{j,k} \big|f_n - f_n(x_{j,k})\big| \mathrm{d}m \\
&\qquad\qquad + \int_{K_k} \psi_{j,k} \mathrm{d}m \big|f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})\big| \Big) \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\int_{K_k} \psi_{j,k} \mathcal{V}(f_{n+p}, \cdot, k) \mathrm{d}m + \int_{K_k} \psi_{j,k} \mathcal{V}(f_n, \cdot, k) \mathrm{d}m \\
&\qquad\qquad + \int_{K_k} \psi_{j,k} \mathrm{d}m \big|f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})\big| \Big) \\
&\quad \leq v(f_{n+p}, k) + v(f_n, k) + \sum_{j=1}^{p_k} \int_{K_k} \psi_{j,k} \mathrm{d}m \big|f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})\big| \\
&\quad \leq \frac{2}{\sum_{j=0}^{k} \varphi(j)} + \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\int_{K_k} \psi_{j,k} \mathrm{d}m \Big) \big|f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})\big|.
\end{aligned}$$

Comme

$$\|f_{n+p} - f_n\|_{L^1(K_k^c,m)} \leq \int_0^{t^k(1)} |f_{n+p}| \mathrm{d}m + \int_0^{t^k(1)} |f_n| \mathrm{d}m \leq \frac{2}{\sum_{j=0}^{k} \varphi(j)},$$

il s'ensuit que

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leq \frac{4}{\sum_{j=0}^{k} \varphi(j)} + \sum_{j=1}^{p_k} \int_{K_k} \psi_{j,k} \mathrm{d}m \big|f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})\big|.$$

Si $(\sigma(n))_{n \geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers pour laquelle les suites réelles $(f_{\sigma(n)}(x_{j,k}))_{n \geq 0}$ convergent, pour tout $k \geq 0$ et $j \in [1, p_k]$, alors la suite de fonctions $(f_{\sigma(n)})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(E,m)$. Cette suite, que nous notons encore $(f_n)_{n\geq 0}$ pour alléger l'écriture, converge donc dans $L^1(E,m)$ vers une fonction f. D'où la relative compacité.

2) Considérons à présent une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de $\mathcal{B}_{1,\beta}$. Comme $|f_n|_0 \leq |f_n|_\beta \leq 1$ pour tout $n \geq 0$, d'après ce qui précède, il existe une sous-suite, encore notée $(f_n)_{n\geq 0}$ pour alléger l'écriture, qui converge dans $L^1(E,m)$ vers une fonction f. D'après le lemme de Fatou, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi(k) \int_0^{t^k(1)} |f| \mathrm{d}m_\beta \leq \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{t^k(1)} |f_n| \mathrm{d}m_\beta \leq 1.$$

Il s'ensuit que f appartient à $\mathbb{L}^1(I,m_\beta)$ et $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) \int_0^{t^k(1)} |f| \mathrm{d}m_\beta \leq 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\|f - f_n\|_{1,\beta} &= \int_0^{t^k(1)} |f - f_n| \mathrm{d}m_\beta + \int_{t^k(1)}^{1} |f - f_n| \mathrm{d}m_\beta \\ &\leq 2\Big(\sum_{j=0}^{k} \varphi(j)\Big)^{-1} + \big(t^k(1)\big)^{-\beta} \|f - f_n\|_1.\end{aligned}$$

D'où la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, converge vers f dans $L^1(E,m_\beta)$.

Nous venons de montrer que la boule unité $\mathcal{B}_{1,\beta}$ est relativement compacte dans $(B_\beta, \|\cdot\|_{1,\beta})$. Il nous reste à prouver que cette boule est fermée.

3) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}_{1,\beta}$ qui converge dans $L^1(E,m_\beta)$ vers une fonction f. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge m-p.s. vers f. D'après le théorème d'Egorov, il existe une suite croissante $(E_p)_{p\geq 0}$ de boréliens de I telle que

$$\lim_{p\to+\infty} m(E_p) = 1 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^\infty(E_p,m)} = 0.$$

Pour tous entiers $k, p \geq 0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_{E_p} \big\| f(x) - &\ f(\cdot) \big\|_{L^\infty(B(x,\eta_k(x))\cap E_p, m)} x^{-\beta} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{E_p} \big\| f_n(x) - f_n(\cdot) \big\|_{L^\infty(B(x,\eta_k(x))\cap E_p, m)} x^{-\beta} \mathrm{d}x \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{E_p} \big\| f_n(x) - f_n(\cdot) \big\|_{L^\infty(B(x,\eta_k(x))\big), m)} x^{-\beta} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'où l'on déduit aisément que $|f|_\beta \leq \sup_{n\geq 0} |f_n|_\beta \leq 1$. $\square$

LEMME 2.10. — *Pour tout $f \in B_\varphi$, on a $\lim_{n\to+\infty} |f|_{\beta,n} = 0$.*

Démonstration. — Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons $|f|_{\beta,n} = u_n + c_3 v_n$ avec

$$u_n = \sum_{k\geq 0} \varphi(k) \int_0^{t^{k+n}(1)} |f| \mathrm{d}m_\beta,$$
$$v_n = \sum_{k\geq 0} \varphi(k) \sum_{j=0}^{k+n} (k+n+1-j)^{(\beta-1)/\alpha} \mathrm{e}^{z(j)} v(f,j).$$

Avec les notations de la preuve du lemme 2.6. (ii), nous avons

$$v_n \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi^2} \sum_{k\geq 0} \varphi(k) \big(w_{(1-\beta)/\alpha} * v(f,\cdot)\big)(n+k).$$

Du lemme 2.5, on déduit qu'il existe un réel $c > 0$ tel que

$$\big(w_{(1-\beta)/\alpha} * v(f,\cdot)\big)(n+k) \leq c\Big(w_{(1-\beta)/\alpha}(n+k) \sum_{j=0}^{n+k} v(f,j) + v\big(f, \tfrac{1}{2}[n+k]\big)\Big).$$

D'après le théorème de convergence monotone, les deux suites de termes généraux u_n et $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) v(f, \frac{1}{2}[n+k])$ décroissent vers zéro. D'autre part, nous avons

$$\sum_{k\geq 0} \varphi(k) w_{(1-\beta)/\alpha}(n+k) \sum_{j=0}^{n+k} v(f,j) \leq z_n \sum_{k\geq 0} \varphi(k) w_{(1-\beta-\alpha)/\alpha}(n+k)$$

avec $z_n = \sup_{\ell\geq n} \ell^{-1} \sum_{j=0}^{\ell} v(f,j)$. Du théorème de Cesaro et du théorème de convergence monotone, il s'ensuit alors que la suite v_n tend vers zéro. On notera que la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) w_{(1-\beta-\alpha)/\alpha}(k)$ est assurée par le fait que $\varphi(k) \leq (k+1)^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

De la dernière assertion du lemme 2.6, on déduit immédiatement que :

LEMME 2.11. — *Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $f \in B_\varphi$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$|Pf|_{\beta,n} \leq |f|_{\beta,n+1} + c\Big(\sum_{k\geq 0} \varphi(k)(n+k+1)^{-\gamma}\Big) \|f\|_{1,\beta}.$$

2.12. Décomposition spectrale. — Les lemmes 2.8, 2.9, 2.10 et 2.11, nous montrent que le quadruplet $(P, B_\beta, \|\cdot\|_{1,\beta}, (|\cdot|_{\beta,n})_{n\geq 0})$ vérifie les hypothèses du théorème 1.2 de [1].

Désignons par W_1 le sous-espace de B_β engendré par les vecteurs propres de P associés à des valeurs propres de module 1 et par W_2 le sous-espace constitué des fonctions f de B_β telles que $\lim_{n\to+\infty} \|P^n f\|_{1,\beta} = 0$.

Nous savons alors que le sous-espace W_1 est de dimension finie et $B_\beta = W_1 \oplus W_2$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel q et un réel

$M>0$ tels que, pour tous $f\in W_2$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$|P^n f|_\beta \le \sum_{p\ge 0}(\xi^{*p}*\zeta_f)(n)$$

où ξ et ζ_f sont les suites définies par :

$$\xi(n)=\begin{cases}\varepsilon\big(\sum_{j\ge 0}\varphi(j)(n-q+j)^{-\gamma}\big) & \text{si } n\ge q+1,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$\zeta_f(n)=C|f|_{\beta,n}+qM\Big(\sum_{j\ge 0}\varphi(j)(n+1+j)^{-\gamma}\Big)\|f\|_{1,\beta}.$$

On voit facilement que, s'il existe un réel r pour lequel les séries $\sum_{k\ge 0}k^r\xi(k)$ et $\sum_{k\ge 0}k^r\zeta_f(k)$ convergent, alors la série $\sum_{k\ge 0}k^r|P^kf|_\beta$ converge.

Estimation de $|P^n f|_\beta$, $f\in W_2$

2.13. Pour tout réel $b>1$ et tout $f\in V_\beta$, nous introduisons les suites u_b et s_f définies par

$$\begin{aligned} u_b(n) &= \sum_{k\ge 0}\varphi(k)(n+k+1)^{-\gamma},\\ s_f(n) &= \sum_{k\ge 0}\varphi(k)\Big(v(f,k+n)+\int_0^{t^{k+n}(1)}x^{-\beta}|f(x)|\mathrm{d}x\Big).\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.5, nous avons

$$(u_\gamma*u_\gamma)(n)\le 2\Big(\sum_{k\ge 0}u_\gamma(k)\Big)u_\gamma\big([\tfrac12 n]\big)\le 2^{\gamma+1}\Big(\sum_{k\ge 0}u_\gamma(k)\Big)u_\gamma(n).$$

Nous prenons $\varepsilon<\big(2^{\gamma+2}\sum_{k\ge 0}u_\gamma(k)\big)^{-1}$. Pour $n<2q+2$, $\xi^{*2}(n)=0$ et pour $n\ge 2q+2$,

$$\xi^{*2}(n)=\varepsilon^2u^{*2}(n-2q-2)\le \tfrac12\xi(n-q-1).$$

Il s'ensuit alors que, pour tout $1\le p\le [n/(q+1)]$,

$$\xi^{*(p+1)}(n)\begin{cases}=0 & \text{si } n<(p+1)(q+1),\\ \le(\frac12)^p\xi(n-p(q+1)) & \text{sinon.}\end{cases}$$

On en déduit qu'il existe (lemme 2.5) des réels positifs C_1, C_2 tels que

$$\begin{aligned}\sum_{p\ge 0}\xi^{*(p+1)}(n) &\le \sum_{p=0}^{[n/(q+1)]}\big(\tfrac12\big)^p\xi\big(n-p(q+1)\big)\\ &\le C_1\Big(\xi(n-[\tfrac12[n/(q+1)]](q+1))+\big(\tfrac12\big)^{[\frac12[n/(q+1)]]}\Big)\\ &\le C_1\Big(\xi([\tfrac12 n])+\big(\tfrac12\big)^{[\frac12[n/(q+1)]]}\Big)\le C_2\xi(n).\end{aligned}$$

D'autre part (*cf.* preuve du lemme 2.10), pour tous $t \in]0,1[$ et $b > 1$, il existe un réel positif $c > 1$ tel que, pour tous $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\big(w_b * v(f,\cdot)\big)(n+k) \le c\Big(w_b(n+k)\sum_{j=0}^{[(n+k)t]} v(f,j) + v\big(f,[(n+k)t]\big)\Big).$$

En notant r_f la suite de terme général

$$r_f(n) = \sum_{k\ge 0}\varphi(k)\Big(w_{(1-\beta)/\alpha}(n+k)\sum_{j=0}^{n+k} v(f,j)\Big),$$

on obtient $|f|_{\beta,n} \le c(([1/t]+1)s_f([nt])+r_f(n))$ et par suite, pour tout $t \in]0,1[$, il existe $D > 1$ tel que, pour tout entier $n \ge 1$,

$$\zeta_f(n) \le D\big(s_f\big([nt]\big) + r_f(n) + u_\gamma(n)\big].$$

Finalement, on en déduit que, pour tous $t \in]0,1[$, il existe des réels positifs C_1, C_2 et C_3 tels que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |P^n f|_\beta &\le C_1\big(\zeta_f(n) + (\xi * \zeta_f)(n)\big)\\ &\le C_2\Big(\zeta_f\big([nt]\big) + \xi(n)\sum_{j=0}^{[nt]+1}\zeta_f(j)\Big)\\ &\le C_3\Big(s_f\big([nt^2]\big) + r_f(n) + u_\gamma(n)\sum_{j=0}^{[nt]+1}\big(s_f(j)+r_f(j)\big)\Big). \end{aligned}$$

Pour continuer, nous devons préciser le choix de la suite φ.

LEMME 2.14. — (i) *Toute application L de $\mathcal{S}$ vérifie :*

$$\lim_{x\to 0_+} L(x) = 0,\quad \int_0^1 \frac{L(t)}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty \quad \textit{et} \quad \int_0^x \frac{L(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{0}{\sim} L(x).$$

(ii) *Pour tout $L \in \mathcal{S}$ et toute suite strictement positive décroissant vers zéro, $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une suite $\varphi = \varphi_u$ décroissante telle que :*

$\varphi(0) = 1,$

$\sum_{k\ge 0}\varphi(k) = +\infty$ *et pour tout entier naturel n,*

$$\varphi(n) \le \frac{1}{n+1} \quad \textit{et} \quad \sum_{k\ge 0}\varphi(k)u(k+n) = o\big(L(u(n))\big).$$

De plus, si v est une suite strictement positive décroissante vérifiant pour tout $n \ge 0$, $v(n) \le u(n)$, alors $\sum_{k\ge 0}\varphi(k)v(k+n) = o(L(v(n)))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — L'assertion (i) est évidente.

(ii) Appelons ε la fonction associé à $L \in \mathcal{S}$ (voir 1.3) et considérons la fonction $\widetilde{L}$ de $\mathcal{S}$ correspond à la fonction $\frac{1}{2}\varepsilon$. Il est clair qu'au voisinage de zéro, $\widetilde{L}(x) = o(L(x))$. Considérons la suite φ définie par

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{L}(u(n))}{u(n)} - \dfrac{\widetilde{L}((u(n-1))}{u(n-1)} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Nous avons $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) = +\infty$ et il existe $c = c(u,v) > 0$ tel que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 0} \varphi(k)u(k+n) &\leq u(n) + \sum_{k\geq 0} \frac{\widetilde{L}(u(k))}{u(k)}\big(u(k+n) - u(k+n+1)\big) \\ &\leq u(n) + \int_0^{u(n)} \frac{\widetilde{L}(t)}{t}\mathrm{d}t \leq c\widetilde{L}\big(u(n)\big) = o\big(L(u(n))\big). \end{aligned}$$

Le même calcul montre, avec des notations évidentes, que

$$\sum_{k\geq 0} \varphi_u(k)v(k+n) = v(n) + \sum_{k\geq 0} \varphi_v(k)v(k+n) + \Big(\frac{\widetilde{L}(v(0))}{v(0)} - \frac{\widetilde{L}(u(0))}{u(0)}\Big)v(1+n).$$

Pour rendre la suite φ décroissante si elle ne l'est pas, on opère de la façon suivante. Soit p le plus petit entier naturel tel que $\varphi(p+1) > \varphi(p)$; alors on prend

$$\varphi(p+1) = \cdots = \varphi\Big(p + \Big[\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)}\Big]\Big) = \varphi(p),$$

$$\varphi\Big(p + 1 + \Big[\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)}\Big]\Big) = \Big\{\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)}\Big\}\varphi(p)$$

et ainsi de suite.

Lorsque la suite φ est décroissante, nous pouvons la remplacer par la suite $\widetilde{\varphi}$ de terme général $\varphi(n) \wedge 1/(n+1)$. En effet, si on avait $\sum_{k\geq 0} \widetilde{\varphi}(k) < +\infty$, alors on aurait, puisque la suite $\widetilde{\varphi}$ est décroissante, $\lim_{n\to+\infty} n\widetilde{\varphi}(n) = 0$ ce qui entraînerait que $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) < +\infty$. D'où le résultat. $\square$

2.15. Pour obtenir les assertions i) du théorème, on choisit la suite φ du lemme associée à L et à la suite

$$u(n) = u_\beta\big(g, [\tfrac{1}{2}n]\big) + w_\gamma(n) + w_{(1-\beta)/\alpha}(n)\sum_{j=1}^{n} v(g,j).$$

Lorsque $\sum_{k\geq 0} u_\beta(g,k) < +\infty$, on choisit la suite φ du lemme associée à L et à la suite $u(n) = \sum_{j\geq n} u_\beta(g,j) + w_\gamma(n) + w_{(1-\beta)/\alpha}$. Ce choix nous assure que

$\sum_{k\geq 0} s_g(k) < +\infty$; et par suite, pour tous $t \in]0,1[$, il existe un réel positif C tel que

$$|P^n f|_\beta \leq C\big(s_f\big([nt^2]\big) + u_\gamma(n)\big).$$

D'où l'assertion (ii) du théorème.

Enfin l'assertion (iii) s'obtient en choisissant la suite φ du lemme associée à L et à la suite $u(n) = \sum_{k\geq n} k^r(u_\beta g,(k) + k^{-\gamma}) + w_\gamma(n) + w_{(1-\beta)/\alpha}$.

Pour achever la démonstration du théorème, il nous reste à montrer la « convergence » de la suite $(P^n 1)_{n\geq 0}$ et à prouver que $W_1 = \mathbb{C}h$.

Convergence « uniforme » de la suite de fonctions $(P^n 1)$

Lemme 2.16. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute fonction f de B_β strictement positive,*

$$\sup_{x\in]0,1[} \mathcal{V}(\ln Pf, x, k) \leq \frac{2}{(k+1)^2} + \sup_{x\in]0,1[} \mathcal{V}(\ln f, x, k+1).$$

Démonstration. — Pour tous $(x,y) \in I^2$, vérifiant $|x-y| \leq \eta_k(x)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
Pf(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} u\big(s_n(x)\big) f\big(s_n(x)\big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u(s_n(x))f(s_n(x))}{u(s_n(y))f(s_n(y)} u\big(s_n(y)\big) f\big(s_n(y)\big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{\mathcal{V}(\ln u\circ s_n, x, k) + \mathcal{V}(\ln f, s_n(x), k+1)} u\big(s_n(y)\big) f\big(s_n(y)\big) \\
&\leq \sup\nolimits_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{\mathcal{V}(\ln u\circ s_p, x, k) + \mathcal{V}(\ln f, s_p(x), k+1)} Pf(y).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{V}(\ln Pf, x, k) \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \big(\mathcal{V}(\ln u \circ s_p, x, k) + \mathcal{V}(\ln f, s_p(x), k+1)\big).$$

D'après le lemme 2.2, nous avons :

$$\sup_{x\in]0,1[} \sup_{p\in\mathbb{N}} \big(\mathcal{V}(\ln u \circ s_p, x, k)\big) \leq \frac{2}{(k+1)^2}.$$

D'où le résultat. □

Lemme 2.17. — *La suite de fonctions $(P^n 1)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,1[$, pour $0 < a < 1$, vers une fonction h continue strictement positive et P-invariante.*

Démonstration. — De la décomposition spectrale, $B_\beta = W_1 \oplus W_2$, on déduit que la suite $n^{-1}\big(1 + P1 + \cdots + P^{n-1}1\big)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^1(I, m_\beta)$ vers une fonction P-invariante positive h.

Les lemmes 2.16 et 2.4 montrent que la famille de fonctions $\{P^n 1 : n \geq 0\}$ est équicontinue et bornée sur tout compact de $]0,1[$. D'après le théorème d'Ascoli, cette famille est donc relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $]0,1[$.

Ces deux propriétés impliquent que la suite de fonctions $(P^n 1)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur les compacts de $]0,1[$ vers une fonction continue, positive et P-invariante h, vérifiant $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = 1$.

Si $h(x_0) = 0$ pour $x_0 \in]0,1]$ alors $h(s_{j_1}\cdots s_{j_p}(x_0)) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et tout $(j_1,\ldots,j_p) \in \mathbb{N}^p$. Comme $\{s_{j_1}\cdots s_{j_p}(x_0) : p \geq 1, (j_1,\ldots,j_p) \in \mathbb{N}^p\}$ est un sous-ensemble dense de $]0,1[$, il s'ensuit que h est nulle sur $]0,1[$; ce qui contredit le fait que $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = 1$. □

Spectre périphérique de P

LEMME 2.18. — *$W_1 = \mathbb{C}h$.*

Démonstration. — Soit g une fonction P-invariante de $\widetilde{B}_\varphi$. De la P-invariance de la mesure m, il résulte que les fonctions g^+ et g^- sont aussi P-invariantes. Nous pouvons donc supposer que g est positive.

Pour la même raison, pour tout réel a, la fonction $g \wedge ah$ est aussi P-invariante ; par suite, la fonction $g_a = h^{-1}g \wedge a$ est $\widetilde{P}$-invariante, où $\widetilde{P}$ est l'opérateur relativisé défini par $\widetilde{P}(f) = h^{-1}P(hf)$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \big(g_a(x) - g_a(u)\big)^2 \widetilde{P}^r(u,\mathrm{d}x)h(u)\mathrm{d}u &= \int_0^1 \big({}^h P^r(g_a^2) + g_a^2 - 2g_a\widetilde{P}^r g_a\big)h\mathrm{d}m\\ &= \int_0^1 \big(\widetilde{P}^r(g_a^2) - g_a^2\big)h\mathrm{d}m = 0.\end{aligned}$$

Ce qui montre que, pour tout $r \geq 1$ et tout $(j_1,\ldots,j_r) \in \mathbb{N}^p$,

$$g_a\big(s_{j_1}\cdots s_{j_r}(u)\big) = g_a(u),$$

pour m-presque tout $u \in E$. Comme g appartient à $\widetilde{B}_\varphi$, la fonction

$$C(x) = \sum_{k\geq 0}\varphi(k)\big\|g(x) - g\big\|_{L^\infty(B(x,\eta_k(x),m)}$$

est m-intégrable et donc m-presque partout finie. Pour tout $n \geq 0$ et $x \in]0,1]$ tel que $C(x) < +\infty$, nous avons :

$$\big\|g(x) - g\big\|_{L^\infty(B(x,\eta_n(x))} \leq \frac{C(x)}{\sum_{k=0}^n \varphi(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $x \in \{C < +\infty\}$. Choisissons une suite d'entiers naturels $(j_k)_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $u \in]0,1]$, $s_{j_1}\cdots s_{j_n}(u) \to x$. Pour m-presque tout $u \in]0,1]$, nous avons $g(s_{j_1}\cdots s_{j_n}(u)) \to g(x)$ et donc $g_a(s_{j_1}\cdots s_{j_n}(u)) = g_a(u) \to g_a(x)$. D'où g_a est m-presque partout constante.

On en déduit que pour tout $a > 0$, $g \wedge ah$ appartient à $\mathbb{C}h$ et donc g appartient à $\mathbb{C}h$.

2) Soit $g \in \widetilde{B}_\varphi$ une fonction propre pour P associée à la valeur propre λ de module 1. La fonction $|g|$ est P-invariante. De ce qui précède, il s'ensuit que g prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et $f = g/|g|$ est une fonction propre pour $\widetilde{P}$ associée à la valeur propre λ. Comme auparavant, pour tout $r \geq 1$, nous avons alors :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| f(x) - \lambda^r f(u) \right|^2 h P^r(u, \mathrm{d}x) h(u) \mathrm{d}u = 0.$$

On en déduit que pour m-presque tout $u \in E$, $f(s_{j_1} \cdots s_{j_r}(u)) = \lambda^r f(u)$, pour tout $r \geq 1$ et tout $(j_1, \ldots, j_r) \in \mathbb{N}^p$. Le même argument que précédemment montre que f est m-presque partout constante. □

3. Démonstration du théorème 1.6

LEMME 3.1. — *Il existe $c > 0$ tel que $h(x) \underset{0}{\sim} c/x^\alpha$.*

Démonstration. — Appelons Q l'opérateur défini par

$$Qf(x) = \sum_{k \geq 1} u\bigl(s_n(x)\bigr) f\bigl(s_n(x)\bigr).$$

Pour tout $x \in I$ et tout entier $n \geq 1$ nous avons :

$$\begin{aligned} h(x) &= u\bigl(t(x)\bigr) h\bigl(t(x)\bigr) + Qh(x) \\ &= u\bigl(t(x)\bigr) u\bigl(t^2(x)\bigr) h\bigl(t^2(x)\bigr) + u\bigl(t(x)\bigr) Qh\bigl(t(x)\bigr) + Qh(x) \\ &= u\bigl(t^n(x)\bigr) \cdots u\bigl(t(x)\bigr) h\bigl(t^n(x)\bigr) + \sum_{k=0}^{n-1} u\bigl(t^k(x)\bigr) \cdots u\bigl(t(x)\bigr) Qh\bigl(t^k(x)\bigr) \\ &= (1 + nx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)} h\bigl(t^n(x)\bigr) + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + kx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)} Qh\bigl(t^k(x)\bigr). \end{aligned}$$

La fonction h est continue et bornée sur $[t(1), 1[$; par suite la fonction Qh est continue et bornée sur I. Il s'ensuit que, pour tout $x \in \,]0, 1[$, la série $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + kx^\alpha)^{-1} Qh(t^k(x))$ converge. En posant, $\widetilde{h}(x) = x^{\alpha+1} h(x)$, nous avons :

$$\widetilde{h}(x) = \widetilde{h}(t^n(x)) + x^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + kx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)} Qh\bigl(t^k(x)\bigr),$$

ce qui montre que la suite de terme général $\widetilde{h}(t^n(x))$ converge vers une fonction Φ nécessairement t-invariante. La m-intégrabilité de h entraîne alors celle de $\Phi/x^{1+\alpha}$; en décomposant l'intégrale sur les intervalles $[t^n(1), t^{n-1}(1)[$, $n \geq 1$, on voit que Φ est nécessairement la fonction nulle. D'où

$$h = \sum_{k \geq 0} (1 + kx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)} Qh \circ t^k.$$

D'autre part, nous avons

$$\int_0^{+\infty}(1+tx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)}\mathrm{d}t \le \sum_{k\ge 0}(1+kx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)} \le 1+\int_0^{+\infty}(1+tx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)}\mathrm{d}t$$

et $\int_0^{+\infty}(1+tx^\alpha)^{-(1+1/\alpha)}\mathrm{d}t = \alpha x^{-\alpha}$.

Pour tout réel $\eta \in \,]0,1[$ appelons $m(\eta)$ et $M(\eta)$ les bornes inférieures et supérieurs du sous-ensemble $\{Qh(y) : y \in \,]0,\eta]\}$ de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \,]0,\eta]$, nous avons alors :

$$m(\eta)\alpha x^{-\alpha} \le h(x) \le M(\eta)(1+\alpha x^{-\alpha}).$$

Comme $m(\eta)$ et $M(\eta)$ tendent vers $Qh(0)$, quand η tend vers zéro, on en déduit que $h(x) \underset{0}{\sim} Qh(0)\alpha x^{-\alpha}$. □

Lemme 3.2. — *Pour tous réels $\beta \in [0,1-\alpha[$ et $p \in [1,+\infty[$, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe un réel strictement positif c tel que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \widetilde{V}_{\beta,p}$,*

$$\Big(\int_0^{t^k(1)}|\widetilde{P}f|^p h\,\mathrm{d}m_\beta\Big)^{1/p} \le \Big(\int_0^{t^{k+1}(1)}|f|^p h\,\mathrm{d}m_\beta\Big)^{1/p} + c(k+1)^{(\beta-1)/p\alpha}\Big(v(hf,0)+\int_0^1\big|f(x)\big|h(x)\mathrm{d}x\Big).$$

(ii) *Introduisons la suite $\widetilde{\delta}_{\beta,p}(f,\cdot)$ de terme général*

$$\widetilde{\delta}_{\beta,p}(f,n) = \Big(\int_0^{t^n(1)}|f|^p h\,\mathrm{d}m_\beta\Big)^{1/p} + c\sum_{j=0}^{n}(n+1-j)^{(\beta-1)/p\alpha}\mathrm{e}^{z(j)}v(hf,j).$$

Alors il existe un réel strictement positif C tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in V$,

$$\widetilde{\delta}_{\beta,p}(\widetilde{P}f,n) \le \delta_\beta(f,n+1) + C(1+n)^{-\gamma/p}\Big(\int_0^1|f|^p h\,\mathrm{d}m_\beta\Big)^{1/p}.$$

Démonstration. — L'opérateur $\widetilde{P}$ étant markovien, nous avons $h|\widetilde{P}f|^p \le P\big(h|f|^p\big)$. La majoration $i)$ s'obtient : en reprenant l'inégalité obtenue dans la démonstration de l'assertion $i)$ du lemme 2.6. ; en remplaçant, quitte à changer la constante c_3, $\|h|f|^p\|_{L^\infty([t(1),1[,m)}$ par $\|h|f|\|^p_{L^\infty([t(1),1[,m)}$; en passant à la puissance $1/p$ et en appliquant le lemme 2.4.

Comme pour le lemme 2.6, la seconde assertion se déduit de l'assertion précédente. □

3.3. Soient $\beta \in [0, 1-\alpha[$, $p \in [1, +\infty[$ et g une fonction de $\widetilde{V}_{\beta,p}$. Nous choisissons une suite réelle positive décroissante φ telle que

$$\varphi(0) = 1,\ \forall n \geq 0,\ \varphi(n) \leq \frac{1}{n+1},\ \sum_{k\geq 0} \varphi(k) = +\infty \text{ et } \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\widetilde{u}_{\beta,p}(g,k) < +\infty.$$

Nous introduisons sur $\widetilde{V}_{\beta,p}$ la suite de semi-normes suivantes :

$$\forall n \geq 0, \quad |\!|\!| f |\!|\!|_{\beta,p,n} = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\widetilde{\delta}_{\beta,p}(f, k+n),$$

où $\widetilde{\delta}_{\beta,p}(f,\cdot)$ est la suite définie dans l'énoncé du lemme 3.2. Nous notons

$$\widetilde{B}_{\beta,p} = \widetilde{B}_{\beta,p}(g,\varphi)$$

le sous-espace vectoriel de $\widetilde{V}_{\beta,p}$ défini par $\widetilde{B}_{\beta,p} = \{f \in \widetilde{V}_{\beta,p} : |\!|\!| f |\!|\!|_{\beta,p} < +\infty\}$. Observons que $|\!|\!| f |\!|\!|_{\beta,p}$ est une norme sur $\widetilde{B}_{\beta,p}$ majorant la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(I,hm_\beta)}$.

Lemme 3.4. — *$\widetilde{P}$ est un opérateur de $\big(\widetilde{B}_{\beta,p}, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(I,hm_\beta)}\big)$ à puissances bornées.*

Démonstration. — Analogue à celle du lemme 2.8, le lemme 2.6 étant remplacé par le lemme 3.2. □

Lemme 3.5. — *La boule unité de $\widetilde{B}_{\beta,p}$ pour la norme $|\!|\!| f |\!|\!|_{\beta,p}$ est compacte dans $(\widetilde{B}_{\beta,p}, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(I,hm_\beta)})$.*

Démonstration. — Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions de la boule unité en question, alors $(hf_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions de la boule unité de $(B_\beta, |\cdot|_\beta)$. D'après le lemme 2.9, il existe une sous-suite de la suite $(hf_n)_{n\geq 0}$ qui converge dans $\mathbb{L}^1(I, m_\beta)$. Ce qui revient à dire qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ qui converge dans $\mathbb{L}^1(I, hm_\beta)$. Pour achever la démonstration, il suffit de reprendre les arguments développés aux étapes 2 et 3 de la preuve du lemme 2.9. □

Lemme 3.6. — *Pour tout $f \in \widetilde{B}_{\beta,p}$, $\lim_{n\to+\infty} |\!|\!| f |\!|\!|_{\beta,n} = 0$.*

Démonstration. — Identique à celle du lemme 2.10. □

Lemme 3.7. — *Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $f \in \widetilde{B}_{\beta,p}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$|\!|\!| \widetilde{P}f |\!|\!|_{\beta,p,n} \leq |\!|\!| f |\!|\!|_{\beta,p,n+1} + c\Big(\sum_{k\geq 0} \varphi(k)(n+k+1)^{-\gamma_p}\Big)\|f\|_{\mathbb{L}^p(I,hm_\beta)}.$$

Démonstration. — Elle se déduit immédiatement du lemme 3.2. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONZE (J.-P.) & RAUGI (A.) – *Convergence of iterates of a transfer operator, application to dynamical systems and to Markov chains*, ESAIM P&S, t. **7** (2003), pp. 115–146.

[2] GOUËZEL (S.) – *Sharp polynomial bounds for the decay of correlations*, Preprint, 2002.

[3] HU (H.) – *Decay of correlations for piecewise smooth maps with indifferent fixed points*, preprint.

[4] LIVERANI (C.), SAUSSOL (B.) & VAIENTI (S.) – *A probabilistic approach to intermittency*, Ergod. Th. and Dyn. Sys., t. **19** (1999), pp. 671–685.

[5] MAXWELL (M.) & WOODDROOFE (M.) – *Central limit theorems for additive functionals of Markov chains*, Annals of Probability, t. **28** (2000), pp. 713–724.

[6] POLLICOTT (M.) & YURI (M.) – *Statistical properties of maps with indifferent periodic points*, Comm. Math. Phys., t. **217** (2001), no. 3, pp. 503–520.

[7] YOUNG (L.-S.) – *Recurrence times and rates of mixing*, Israel J. Math., t. **110** (1999), pp. 153–188.