Bull. Soc. math. France
132 (2), 2004, p. 157–199

ÉLÉMENTS RÉGULIERS ET REPRÉSENTATIONS DE GELFAND-GRAEV DES GROUPES RÉDUCTIFS NON CONNEXES

PAR KARINE SORLIN

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ et F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Soit σ un automorphisme rationnel quasi-central de G. Nous construisons ci-dessous l'équivalent des représentations de Gelfand-Graev du groupe $\widetilde{G}^F = G^F \cdot \langle\sigma\rangle$, lorsque σ est unipotent et lorsqu'il est semi-simple. Nous montrons de plus que ces représentations vérifient des propriétés semblables à celles vérifiées par les représentations de Gelfand-Graev dans le cas connexe en particulier par rapport aux éléments réguliers.

Texte reçu le 17 décembre 2002, accepté le 7 mars 2003

KARINE SORLIN, LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80000 Amiens (France) • *E-mail :* `karine_sorlin@yahoo.fr` • *Url :* `http://www.mathinfo.u-picardie.fr/sorlin/`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C33, 20G05.

Mots clefs. — Groupes réductifs finis, groupes algébriques non connexes.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2004/157/$ 5.00

Abstract (*Regular Elements and Gelfand-Graev Representations for Disconnected Reductive Groups*)

Let G be a connected reductive group defined over $\mathbb{F}_q$ and let F be the corresponding Frobenius endomorphism. Let σ be a quasi-central automorphism of G, which means that σ is quasi-semi-simple (*i.e.* σ stabilises $(T \subset B)$ where T is a maximal torus included in a Borel subgroup B of G) and $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ for any quasi-semi-simple automorphism $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, where $\mathrm{ad}(g)$ is the conjugation by g for all $g \in G$. We suppose also that σ is rational.

We define in this article Gelfand-Graev representations for the group $\widetilde{G}^F = G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ when σ is unipotent and when it is semi-simple, which extend the σ-stable Gelfand-Graev representations for connected reductive groups.

Let T be a σ-stable rational maximal torus of G included in a σ-stable rational Borel subgroup of G. Let U be the unipotent radical of B.

In the connected reductive case, Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing an irreducible linear character of U^F which is called a regular character. We define a regular character of $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ as the extension of a σ-stable regular character of U^F. When σ is unipotent, σ-stable Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing σ-stable regular characters of U^F. In this case, we define Gelfand-Graev representations of $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ as the representations obtained by inducing regular characters of $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$. When σ is semi-simple, the definition of Gelfand-Graev representations is more complicated.

Gelfand-Graev representations of $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ have similar properties to Gelfand-Graev representations of G^F. They are multiplicity free and their Harish-Chandra restrictions to a rational σ-stable Levi subgroup included in a rational σ-stable parabolic subgroup still are Gelfand-Graev representations. We say that an element of $G\cdot\sigma$ is regular if the dimension of its centralizer in G is minimal among all elements of $G\cdot\sigma$. The dual of any Gelfand-Graev representation of $G^F\cdot\sigma$ is zero outside regular unipotent elements of $G^F\cdot\sigma$ when σ is unipotent (resp. outside regular pseudo-unipotent elements of $G^F\cdot\sigma$, *i.e.* conjugates under G of regular elements of $U\cdot\sigma$, when σ is semi-simple). Moreover, Gelfand-Graev representations can be used to calculate the average value of irreducible characters of $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ on the set of G^F-classes of regular unipotent (resp. pseudo-unipotent) elements of $G^F\cdot\sigma$ if σ is unipotent (resp. semi-simple). When σ is semi-simple, the characteristic can be chosen good for $(G^\sigma)^0$ and we can get the exact values of irreducible characters of $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ on G^F-classes of regular pseudo-unipotent elements of $G^F\cdot\sigma$.

1. Introduction

Les groupes réductifs non connexes de la forme $G\cdot\langle\sigma\rangle$, où G est un groupe réductif connexe et σ un automorphisme de G, ont été étudiés par R. Steinberg [8], F. Digne & J. Michel [4] et G. Malle [6].

On suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, que F est l'endomorphisme de Frobenius correspondant et que σ est un automorphisme quasi-central de G, ce qui signifie que σ est quasi-semi-simple (*i.e.* σ stabilise un couple $(T \subset B)$ où T est un tore maximal inclus dans un sous-groupe de

Borel B de G) et $\dim(G^{\sigma}) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où $\mathrm{ad}(g)$ est la conjugaison par g pour tout $g \in G$. On suppose de plus σ rationnel.

La notion d'élément quasi-central a été introduite par F. Digne & J. Michel dans [4]. Ils ont montré [4, prop. 1.34] que pour tout automorphisme rationnel σ' de G, il existe g dans G tel que $\sigma' \circ \mathrm{ad}(g)$ soit rationnel quasi-central. Quand σ' est un automorphisme quasi-semi-simple de G, alors $G^{\sigma'}$ est un groupe réductif [4, th. 1.8] et quand σ' est quasi-central, il y a de nombreuses similarités entre $G \cdot \sigma'$ et $(G^{\sigma'})^0$, en particulier pour les systèmes de racines et les groupes de Weyl [4, th. 1.15], les caractères de Deligne-Lusztig [4, section 4] et les représentations de Gelfand-Graev (section 5).

Le but de cet article est de définir des représentations de Gelfand-Graev pour $\widetilde{G}^F = G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ qui étendent les représentations de Gelfand-Graev σ-stables pour les groupes réductifs connexes.

Soit T un tore maximal rationnel σ-stable de G inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. Soit U le radical unipotent de B. Dans le cas connexe, les représentations de Gelfand-Graev de G^F sont obtenues en induisant certains caractères irréductibles de U^F qu'on appelle caractères réguliers. Dans le cas non connexe, on définit un caractère régulier de $U^F \cdot \langle\sigma\rangle$ comme l'extension d'un caractère régulier σ-stable de U^F. Nous nous placerons dans un des deux cas extrêmes σ unipotent ou σ quasi-semi-simple. Le cas général peut s'y ramener en utilisant la décomposition de Jordan de σ.

Lorsque σ est unipotent, les représentations de Gelfand-Graev σ-stables de G^F sont obtenues en induisant un caractère régulier σ-stable de U^F (proposition 5.1). Dans ce cas, on définit les représentations de Gelfand-Graev de $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ comme les représentations obtenues en induisant les caractères réguliers de $U^F \cdot \langle\sigma\rangle$ (définition 5.2). Quand σ est semi-simple, la proposition 5.1 n'est plus vraie. La définition des représentations de Gelfand-Graev est alors plus compliquée (définition 5.3).

Les représentations de Gelfand-Graev de $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ ont les mêmes propriétés que les représentations de Gelfand-Graev de G^F. Leurs composantes irréductibles sont de multiplicité 1 (proposition 6.1). Leur restriction de Harish-Chandra à un sous-groupe de Levi σ-stable rationnel inclus dans un sous-groupe parabolique σ-stable rationnel est encore une représentation de Gelfand-Graev (proposition 6.4). On dit qu'un élément de $G \cdot \sigma$ est régulier si la dimension de son centralisateur dans G est minimale parmi les éléments de $G \cdot \sigma$. Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F \cdot \sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents réguliers de $G^F \cdot \sigma$ quand σ est unipotent (resp. en dehors des éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F \cdot \sigma$, *i.e.* des conjugués sous G d'éléments réguliers de $U \cdot \sigma$, quand σ est semi-simple) (proposition 7.2).

Les représentations de Gelfand-Graev peuvent être utilisées pour calculer la valeur moyenne des caractères irréductibles de $G^F \cdot \langle\sigma\rangle$ sur un ensemble de classes de G^F-conjugaison d'éléments unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers de $G^F\cdot\sigma$ si σ est unipotent (resp. semi-simple) (théorème 8.4). Quand σ est semi-simple et quand la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, on peut alors obtenir les valeurs exactes des caractères irréductibles de $G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ sur les classes de G^F-conjugaison d'éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F\cdot\sigma$.

2. Résultats généraux sur les groupes réductifs non connexes

Soit $\widetilde{G}$ un groupe réductif non connexe. On note G la composante neutre de $\widetilde{G}$. Nous utiliserons les définitions suivantes, introduites dans [4], qui généralisent les notions de tore et de sous-groupe de Borel :

Définition 2.1. — Un *quasi-borel* de $\widetilde{G}$ est le normalisateur dans $\widetilde{G}$ d'un sous-groupe de Borel de G. Un *quasi-tore* de $\widetilde{G}$ est le normalisateur dans $\widetilde{G}$ d'un couple $T\subset B$ formé d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel de G.

On note $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p à q éléments (q étant une puissance de p). Désormais et jusqu'à la fin de l'article, on considère un groupe réductif non connexe $\widetilde{G}$ de la forme

$$\widetilde{G} = G\cdot\langle\sigma\rangle,$$

où G est un groupe réductif connexe sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ défini sur $\mathbb{F}_q$ (on note F l'endomorphisme de Frobenius correspondant) et σ un automorphisme de G. On dit que σ est quasi-semi-simple s'il fixe un couple (T,B) formé par un tore maximal T de G inclus dans un sous-groupe de Borel B de G.

Le théorème suivant explicite les relations qui existent alors entre G et le groupe G^σ des points de G fixes par σ.

Théorème 2.2 (voir [4], th. 1.8). — (i) *G^σ est un groupe réductif.*

(ii) *Soit T un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G. Soit Φ l'ensemble des racines relativement à (G,T). Si $\alpha\in\Phi$, si $\lambda\mapsto x_\alpha(\lambda)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant, et si i est l'ordre de la σ-orbite de α, on définit $C_{\sigma,\alpha}\in\overline{\mathbb{F}}_q^\times$ par*

$$\sigma^i\bigl(x_\alpha(\lambda)\bigr) = x_\alpha(C_{\sigma,\alpha}\lambda).$$

Alors, il existe une surjection naturelle de l'ensemble des orbites sous σ vérifiant la condition

$$(*)\qquad C_{\sigma,\alpha} = \pm 1,$$

où -1 n'est autorisé que s'il existe deux racines de l'orbite dont la somme est une racine, sur l'ensemble des racines de $(G^\sigma)^0$ relativement à $(T^\sigma)^0$. Cette surjection est bijective et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ, *où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Alors, pour toute racine α telle que $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ soit une racine, les orbites de α et de $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ ont même image et $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma,\alpha+\sigma^k(\alpha)}$.*

On dit que σ est *quasi-central* s'il est quasi-semi-simple et si l'on a $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple σ' tel que $\sigma' = \sigma \circ \mathrm{ad}(g)$, où on note $\mathrm{ad}(g)$ la conjugaison par g pour tout $g \in G$.

THÉORÈME 2.3 (voir [4, th. 1.15, 1.29, 1.33 et 1.36] et [5, prop. 2.1])

(i) *Si σ est quasi-semi-simple, alors σ est quasi-central si et seulement si, pour tout couple (T, B) où T est un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable B de G, toute racine simple relativement à (T, B) vérifie la condition (*) du théorème 2.2.*

(ii) *Si σ est quasi-central, alors on a $G^\sigma = (G^\sigma)^0 \cdot \mathrm{Z}(G^\sigma)$.*

(iii) *Si σ est quasi-central unipotent, alors G^σ est connexe et si T est un tore maximal σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ-stable, T^σ est connexe et on a $T = T^\sigma \times \mathcal{L}(T)$, où $\mathcal{L} : T \to T$ est définie par $t \mapsto t^{-1}\sigma(t)$.*

(iv) *Si σ est quasi-central et rationnel, alors, il existe un couple (T, B) formé par un tore maximal rationnel σ-stable T inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable B de G.*

NOTATION 2.4. — Lorsque pour toute racine simple α, on a l'égalité $C_{\sigma,\alpha} = 1$, on dira que σ vérifie la condition (RS).

REMARQUE 2.5. — Lorsque σ est unipotent quasi-central, la condition (RS) est vérifiée.

Démonstration. — Comme σ est quasi-central, on a $C_{\sigma,\alpha} = \pm 1$ pour toutes les racines $\alpha \in \Pi$ et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de $\widetilde{G}$ possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Mais, dans ce cas particulier, le cardinal de l'orbite de α est alors égal à $2k$; or on a supposé σ unipotent, donc l'ordre de σ est une puissance de la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$. Mais comme l'ordre de α divise l'ordre de σ, c'est donc que la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$ vaut 2. Ainsi, on a encore $C_{\sigma,\alpha} = 1$. □

On supposera par la suite que σ est rationnel, quasi-central, unipotent ou semi-simple. On choisit un couple $T \subset B$ où T est un tore maximal rationnel σ-stable inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ-stable de G. On note U le radical unipotent de B.

Soit Φ le système de racines de (G, T). On choisit sur Φ l'ordre tel que

$$U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha$$

et on note Π la base de racines correspondante. Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on fixe un isomorphisme $x_\alpha : \overline{\mathbb{F}}_q^+ \to U_\alpha$ et on définit c_α par $\sigma(x_\alpha(a)) = x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha a)$ pour tout $a \in \overline{\mathbb{F}}_q^+$, on note $o(\alpha) = \min\{i\,;\sigma^i(\alpha) = \alpha\}$, le cardinal de la σ-orbite de α, et on retrouve le coefficient $C_{\sigma,\alpha}$ du théorème 2.2, en effet, on a $C_{\sigma,\alpha} = \prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} c_{\sigma^i(\alpha)}$. Enfin, on pose

$$U^* = \prod_{\alpha\in\Phi^+-\Pi} U_\alpha \quad \text{et} \quad \widetilde{U} = U/U^*.$$

3. Éléments réguliers

Comme nous le verrons dans la section 7, les propriétés des représentations de Gelfand-Graev impliquent ceux des éléments réguliers. Dans cette section, nous donnons leur définition et quelques unes de leurs propriétés. Nous allons nous intéresser particulièrement aux éléments réguliers de $G\cdot\sigma$ qui sont unipotents lorsque σ est quasi-central unipotent et pseudo-unipotents lorsque σ est quasi-central semi-simple (lorsque σ est semi-simple, on appelle élément pseudo-unipotent de $G\cdot\sigma$ tout conjugué sous G d'un élément de $U\cdot\sigma$).

Définition 3.1. — Soit y un élément d'un groupe réductif non connexe H. Alors y est dit *régulier* dans H si la dimension de son centralisateur dans H est minimale dans la composante connexe $H^0\cdot y$, où H^0 est la composante neutre de H.

3.1. Éléments unipotents réguliers de $G\cdot\sigma$ lorsque σ est unipotent

On suppose que σ est unipotent quasi-central rationnel.

Proposition 3.2. — *Les éléments unipotents réguliers existent dans $G\cdot\sigma$ et ils sont tous conjugués sous G.*

Démonstration. — Voir [7, cor. I.4.8]. □

Proposition 3.3. — *Soit $u\cdot\sigma \in G\cdot\sigma$ un élément unipotent; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$u\cdot\sigma$ est régulier ;*

(b) $\dim(\mathrm{C}_G(u\cdot\sigma)) = \mathrm{rg}(G^\sigma)$ *;*

(c) $\dim(\mathcal{B}^G_{u\cdot\sigma}) = 0$*, où $\mathcal{B}^G_{u\cdot\sigma}$ est la variété des sous-groupes de Borel de G normalisés par $u\cdot\sigma$;*

(d) $\left|\mathcal{B}^G_{u\cdot\sigma}\right| = 1$ *;*

(e) *$u\cdot\sigma$ est conjugué sous G à un élément de la forme $\prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1)u^*\cdot\sigma$, où $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ est un système de représentants des σ-orbites dans Π et u^* est un élément quelconque de U^*.*

Démonstration. — Voir [7, prop. II.10.2]. □

THÉORÈME 3.4. — *Soit* $u = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(\lambda_\alpha)$ *un élément de* U*. Alors* $u\cdot\sigma$ *est unipotent et il est régulier si et seulement si pour toute racine* $\alpha \in \Pi$,

$$\sum_{n=0}^{o(\alpha)-1} c_{\sigma^n(\alpha)} c_{\sigma^{n+1}(\alpha)} \cdots c_{\sigma^{o(\alpha)-1}(\alpha)} \lambda_{\sigma^n(\alpha)} \neq 0.$$

Démonstration. — Soient u un élément de U et k l'ordre de σ. Alors

$$(u\cdot\sigma)^k = u\sigma(u)\cdots\sigma^{k-1}(u).$$

Or U est un sous-groupe σ-stable de G, donc $u\sigma(u)\cdots\sigma^{k-1}(u)$ est un élément de U et est unipotent ; cela suffit pour conclure que $u\cdot\sigma$ l'est aussi car on est en caractéristique p.

On peut ainsi appliquer à $u\cdot\sigma$ la proposition 3.3 : l'élément $u\cdot\sigma$ est régulier unipotent si et seulement si il est conjugué sous G à un élément de la forme

$$u_0\cdot\sigma = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1)u^*\cdot\sigma,$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ est un système de représentants des σ-orbites dans Π et u^* est un élément quelconque de U^*.

On peut tout d'abord remarquer que $u\cdot\sigma$ et $u_0\cdot\sigma$ sont conjugués sous G si et seulement si ils sont conjugués sous $T^\sigma U$. Soit en effet $x \in G$ tel que $u\cdot\sigma = {}^x(u_0\cdot\sigma)$; alors ${}^x(u_0\cdot\sigma) \in \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$, donc $u_0\cdot\sigma$ normalise ${}^{x^{-1}}B$, ce qui entraîne que $x \in B$ car $u_0\cdot\sigma$ est unipotent régulier. De plus, supposons trouvé $b = vt \in UT$ tel que $u\cdot\sigma = {}^b(u_0\cdot\sigma)$; alors $u^{-1}v\,{}^t{u_0}^{t\sigma(t)^{-1}}\sigma(v)^{-1} = \sigma(t)t^{-1}$, donc $t \in T^\sigma$. Donc $u\cdot\sigma$ est conjugué à $u_0\cdot\sigma$ si et seulement si il existe $t \in T^\sigma$ et $v \in U$ tels que $u = v\,{}^tu_0\sigma(v)^{-1}$.

On note p la projection de U sur $\widetilde{U} = U/U^*$.

LEMME 3.5. — *L'élément* u *est* σ*-conjugué à un élément de la forme*

$$u_0 = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1)u^*, \quad \textit{avec } u^* \in U^*,$$

si et seulement si $p(u)$ *est* σ*-conjugué à* $\tilde{u}_0 = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1) \in \widetilde{U}$.

Démonstration. — Pour tout $t \in T^\sigma$ on note Φ_t l'application de $U\times U$ dans U telle que $\Phi_t : (x,y) \mapsto y\,{}^tx\sigma(y)^{-1}$. Soient $t \in T^\sigma$, $(x,y) \in U \times U$ et x', y' quelconques dans U^* ; alors on a

$$\Phi_t(xx', yy') = yy'\,{}^t(xx')\sigma(yy')^{-1} = y\,{}^tx\sigma(y)^{-1}w'$$

avec

$$w' = \big[\big([y', {}^tx]y'\,{}^tx'\sigma(y')^{-1}\big), \sigma(y)^{-1}\big]\big([y', {}^tx]y'\,{}^tx'\sigma(y')^{-1}\big) \in U^*.$$

Donc, pour tout $t \in T^\sigma$, l'application Φ_t passe au quotient ; soit $\widetilde{\Phi}_t : \widetilde{U}\times\widetilde{U} \to \widetilde{U}$ telle que

$$\widetilde{\Phi}_t(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{y}^t\,\tilde{x}\,\sigma(\tilde{y})^{-1}$$

pour tout $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \widetilde{U}\times\widetilde{U}$. Alors on a $p(\Phi_t(x,y)) = \widetilde{\Phi}_t(p(x),p(y))$ pour tout couple (x,y) dans $U\times U$.

Ainsi, u est σ-conjugué à un élément de la forme

$$u_0 = \prod_{i=1}^{r} x_{\alpha_i}(1)u^*, \quad \text{avec } u^* \in U^*,$$

si et seulement si il existe $t \in T^\sigma$ et $v \in U$ tels que $u = \Phi_t(u_0,v)$, ce qui implique que $p(u) = \widetilde{\Phi}_t(p(u_0),p(v))$. Réciproquement, si on pose $\tilde{u_0} = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1)$ dans U/U^* et si $p(u) = \widetilde{\Phi}_t(\tilde{u_0},p(v))$, alors $u = \Phi_t(u_0,v)$ pour un u_0 de la forme $u_0 = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1)u^*$. Donc, pour que u soit σ-conjugué à un élément de la forme $u_0 = \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(1)u^*$, il faut et il suffit que $p(u)$ soit σ-conjugué à $\tilde{u}_0$. □

Notons $o(i)$ le cardinal de la σ-orbite de α_i. D'après le lemme ci-dessus, pour que $u\cdot\sigma = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(\lambda_\alpha)\cdot\sigma$ soit unipotent régulier, il faut et il suffit qu'il existe $t \in T^\sigma$ et $v \in \widetilde{U}$ tels que si $\tilde{u} = \prod_{\alpha\in\Pi} x_\alpha(\lambda_\alpha)$, alors $\tilde{u} = v^t\tilde{u}_0\sigma(v)^{-1}$. On pose $v = \prod_{\alpha\in\Pi} x_\alpha(\ell_\alpha)$. Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{u} = v^t\tilde{u}_0\sigma(v)^{-1} & \\
\iff \forall i \in \{1,\dots,r\},\ \forall j \in \{0,\dots,o(i)-1\} & \\
\ell_{\sigma^j(\alpha_i)} + \alpha_i(t) - c_{\sigma^{j-1}(\alpha_i)}\ell_{\sigma^{j-1}(\alpha_i)} &= \lambda_{\sigma^j(\alpha_i)} \\
\iff \forall i \in \{1,\dots,r\},\quad A_i\,L_i = B_i &
\end{aligned}$$

avec

$$A_i = \begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & -c_{\sigma^{-1}(\alpha_i)} \\
-c_{\alpha_i} & 1 & 0 & & & \\
& \ddots & & \ddots & & \\
& & & 1 & 0 & \\
& & & -c_{\sigma^{o(\alpha_i)-3}(\alpha_i)} & 1 & 0 \\
& & & & -c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} & 1
\end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} -\alpha_i(t) + \lambda_{\alpha_i} \\ \vdots \\ -\alpha_i(t) + \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \end{pmatrix}, \qquad L_i = \begin{pmatrix} \ell_{\alpha_i} \\ \vdots \\ \ell_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in \{1,\dots,r\}$; alors, d'après la remarque 2.5, le coefficient

$$C_{\sigma,\alpha_i} = c_{\alpha_i}\cdots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}}$$

est égal à 1. Ainsi, A_i est une matrice $o(\alpha_i) \times o(\alpha_i)$ de rang $o(\alpha_i) - 1$ et $A_i\, L_i = B_i$ a une solution si et seulement si

$$(*i) \qquad \big(c_{\alpha_i} \cdots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} + \cdots + c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} + 1\big)\alpha_i(t) = c_{\alpha_i} \cdots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}\lambda_{\alpha_i} + \cdots + \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)}$$

Ainsi, on a montré que $u\cdot\sigma$ est unipotent régulier si et seulement s'il existe $t \in T^\sigma$ tel que $(*i)$ soit vérifié pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Or un tel t existe si et seulement si le coefficient de $\alpha_i(t)$ dans le membre de gauche de $(*i)$ est non nul pour tout i, ce qui est vrai car pour tout r-uplet $(x_1, \ldots, x_r)$ de $(\overline{\mathbb{F}}_q^\times)^r$, il existe $t \in T$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on ait $\alpha_i(t) = \cdots = \sigma^{o(i)-1}(\alpha_i)(t) = x_i$ (*cf.* [3, lemme 0.22]), et alors on a $t \in T^\sigma$.

Ainsi, $u\cdot\sigma$ est unipotent régulier si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$c_{\alpha_i} \cdots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}\lambda_{\alpha_i} + \cdots + c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}\lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} + \lambda_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} \neq 0.$$

On retrouve alors l'équation du théorème 3.4 en multipliant l'équation ci-dessus par $c_{\sigma^{o(i)-1}(\alpha)}$. □

THÉORÈME 3.6. — *Si ℓ est le rang semi-simple de G^σ, le nombre d'éléments unipotents réguliers rationnels dans $G\cdot\sigma$ est égal à*

$$\frac{|G^F|}{|(Z(G^\sigma)^0)^F| \times q^\ell}.$$

Démonstration. — La preuve du théorème 3.6 résulte de plusieurs lemmes.

LEMME 3.7. — *Dans tout quasi-borel rationnel, il y a le même nombre d'éléments unipotents réguliers rationnels de $G\cdot\sigma$.*

Démonstration. — Le résultat est clair car le conjugué sous G^F d'un unipotent régulier rationnel l'est aussi et deux quasi-borel rationnels sont conjugués sous G^F. Donc la conjugaison envoie bijectivement les éléments unipotents réguliers rationnels de l'un sur ceux de l'autre. □

LEMME 3.8. — *Tout élément unipotent régulier rationnel est dans un quasi-borel rationnel.*

Démonstration. — Soit x un élément unipotent régulier rationnel. Soit B' l'unique sous-groupe de Borel de G normalisé par x. On a $F({}^xB') = {}^xF(B')$ car x est rationnel et $F({}^xB') = F(B')$ car x normalise B', donc x normalise aussi $F(B')$. Mais comme x normalise un unique sous-groupe de Borel de G, on a $F(B') = B'$. □

Un élément unipotent régulier rationnel de $G\cdot\sigma$ est dans un seul quasi-borel et celui-ci est rationnel. Donc le nombre d'éléments unipotents réguliers de $(G\cdot\sigma)^F$ est égal au nombre de sous-groupes de Borel rationnels de G multiplié par le nombre de tels éléments dans l'intersection de $G\cdot\sigma$ et du quasi-borel rationnel $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$.

LEMME 3.9. — *L'ensemble des éléments réguliers unipotents de* $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)\cap G\cdot\sigma$ *est de la forme* $\mathcal{U}_B=\left\{bu\sigma(b)^{-1}\cdot\sigma\,;b\in B\right\}$ *où* $u\cdot\sigma$ *est un élément unipotent régulier fixé de* $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$.

Démonstration. — Soit $u\cdot\sigma$ un élément unipotent régulier rationnel de $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$. Soit $x\in G$ tel que ${}^{x}(u\cdot\sigma)\in\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$. Alors ${}^{xu\sigma x^{-1}}B=B$, ce qui entraîne que ${}^{u\cdot\sigma}({}^{x^{-1}}B)={}^{x^{-1}}B$. Or si $x\notin B$, on a ${}^{x^{-1}}B\neq B$ et ${}^{x^{-1}}B,B$ sont tous les deux normalisés par $u\cdot\sigma$ ce qui est impossible car $u\cdot\sigma$ est régulier. Ainsi on a montré que tout $x\in G$ tel que ${}^{x}(u\cdot\sigma)\in\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$ appartient à B. Par ailleurs dans $G\cdot\sigma$, il y a une unique classe unipotente régulière. Donc les éléments unipotents réguliers de $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)\cap G\cdot\sigma$ sont les conjugués sous B de $u\cdot\sigma$. Si on note $\mathcal{U}_B$ l'ensemble de ces éléments, on a $\mathcal{U}_B=\{bu\sigma(b)^{-1}\cdot\sigma\,;b\in B\}$. □

Calculons le nombre d'éléments unipotents réguliers rationnels dans l'intersection de $G\cdot\sigma$ et du quasi-borel $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$.

Soit $u_0\cdot\sigma$ un élément de $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$ unipotent régulier et rationnel. Alors le nombre cherché est égal au nombre de conjugués de $u_0\cdot\sigma$ sous B qui sont rationnels, c'est-à-dire au nombre de σ-conjugués de u_0 sous B qui sont rationnels. On pose $\widetilde{B}=B/U^*$. Soit $\phi:B\to B$ définie par $b\mapsto bu_0\sigma(b)^{-1}$. Soient b et b' dans B tels qu'il existe $u\in U^*$ tel que $b'=bu$. Alors on a $\phi(b')=\phi(b)v$ avec $v\in U^*$ (car B normalise U^*) et ϕ passe au quotient. Par ailleurs, d'après le lemme 3.5 et la partie (e) de la proposition 3.3, le fait qu'un élément $u\cdot\sigma$ où $u\in B$ est unipotent régulier ne dépend que de l'image de u dans U/U^* et tout élément rationnel de $\widetilde{B}$ a un représentant rationnel dans B. Cela montre donc que le nombre cherché est égal au nombre de σ-conjugués rationnels de $\tilde{u}_0$ sous $\widetilde{B}$ (où on note $\tilde{u}_0$ l'image de u_0 dans $\widetilde{B}$) multiplié par $|U^{*F}|$. On note $b\cdot\tilde{u}_0$ l'action de σ-conjugaison de $b\in\widetilde{B}$ sur $\tilde{u}_0$. Soit

$$\mathcal{O}_B=\left\{b\cdot\tilde{u}_0\,;b\in\widetilde{B}\right\}.$$

Alors $\mathcal{O}_B$ est F-stable car $\tilde{u}_0$ est rationnel.

PROPOSITION 3.10 (voir [3, prop. 3.21]). — (i) *Soit* $g\in\widetilde{B}$. *Alors* $g\cdot\tilde{u}_0\in\mathcal{O}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{F}}$ *si et seulement si* $g^{-1}\,{}^{F}g\in\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$ *où* $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)=\{g\in\widetilde{B}\,;g\cdot\tilde{u}_0=\tilde{u}_0\}$.

(ii) *Il y a une application bien définie qui envoie la* $\widetilde{B}^F$*-orbite de* $g\cdot\tilde{u}_0\in\mathcal{O}_B^F$ *sur la classe de* F*-conjugaison de l'image de* $g^{-1F}g$ *dans* $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0$ *; c'est une bijection et le stabilisateur de* $g\cdot\tilde{u}_0$ *dans* $\widetilde{B}^F$ *est isomorphe au* F*-centralisateur de* $g^{-1F}g$ *dans* $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$.

D'après le (i), si $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$ est abélien, le nombre d'éléments est le même dans toutes les $\widetilde{B}^F$-orbites et vaut $|\widetilde{B}^F/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|$. Cela entraîne avec le (ii) que le nombre de σ-conjugués de $\tilde{u}_0$ dans $\widetilde{B}^F$ est égal au nombre de F-classes de conjugaison de $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0$ multiplié par $|\widetilde{B}^F/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|$.

On note $\mathrm{H}^1(F,H)$ l'ensemble des classes de F-conjugaison d'un groupe algébrique H défini sur $\mathbb{F}_q$. On a

$$\mathrm{H}^1(F,H) = \mathrm{H}^1(F,H/H^0)$$

et si H/H^0 est abélien,

$$\bigl|\mathrm{H}^1(F,H/H^0)\bigr| = \bigl|H^F/(H^0)^F\bigr|.$$

Lemme 3.11. — *On a* $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0) = \mathrm{Z}(G)^\sigma \times \widetilde{U}^\sigma$.

En utilisant le lemme ci-dessus, on obtient l'expression suivante du nombre d'éléments réguliers unipotents de $(G\cdot\sigma)^F$:

$$\begin{aligned}
\bigl(|G^F|/|B^F|\bigr) &\times \bigl|(U^*)^F\bigr| \times \bigl|\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)/\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0)\bigr| \times \bigl(|\widetilde{B}^F|/|\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|\bigr)\\
&= |G^F|/\bigl(|(U^*)^F| \times |\widetilde{B}^F|\bigr) \times \bigl|(U^*)^F\bigr| \times \bigl|\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F/(\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0)^F\bigr|\\
&\qquad\qquad \times\bigl(|\widetilde{B}^F|/|\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^F|\bigr)\\
&= |G^F|/\bigl|(\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)^0)^F\bigr| = |G^F|/\bigl(|(\mathrm{Z}(G^\sigma)^0)^F| \times |(\widetilde{U}^\sigma)^F|\bigr).
\end{aligned}$$

Or $\widetilde{U}^\sigma = (\prod_{\alpha\in\Pi} U_\alpha)^\sigma$ est isomorphe à $\prod_{\alpha\in\Pi/\sigma} U_\alpha$ car les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1 (remarque 2.5) ; donc $|((\prod_{\alpha\in\Pi} U_\alpha)^F)^\sigma| = q^\ell$, où q est le rang semi-simple de $(G^\sigma)^0 = G^\sigma$. Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à démontrer le lemme 3.11 :

Démonstration. — Par définition, $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0) = \{b \in \widetilde{B}\,; b\cdot\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0\}$. Soient $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ un ensemble de représentants des σ-orbites de Π. Pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$, on note $O(i)$ la σ-orbite de α_i, $o(i)$ le cardinal de $O(i)$ et $U(i) = \prod_{\alpha\in O(i)} U_\alpha$; on pose enfin

$$\tilde{u}_0 = \prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha) \quad\text{et}\quad u = \prod_{i=1}^r \prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(\ell_\alpha).$$

Nous allons expliciter $\mathrm{Stab}(\tilde{u}_0)$ dans les calculs qui suivent. Soit $b = ut \in \widetilde{B}$:

$$
\begin{aligned}
&(ut)\tilde{u}_0\sigma(ut)^{-1} = \tilde{u}_0\\
&\quad\iff ({}^t\tilde{u}_0)^{-1}u^{-1}\tilde{u}_0\sigma(u) = t\sigma(t)^{-1}\\
&\quad\iff t \in T^\sigma \text{ et } u^t\tilde{u}_0\sigma(u)^{-1}\tilde{u}_0^{-1} = 1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \big(\text{car } ({}^t\tilde{u}_0)^{-1}u^{-1}\tilde{u}_0\sigma(u) \in \widetilde{U} \text{ et } t\sigma(t)^{-1} \in T\big)\\
&\quad\iff t \in T^\sigma \text{ et}\\
&\qquad \prod_{i=1}^{r}\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(\ell_\alpha)^t\Big(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad \times\sigma\Big(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(\ell_\alpha)\Big)^{-1}\Big(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha)\Big)^{-1} = 1\\
&\quad\iff t \in T^\sigma \text{ et}\\
&\qquad \prod_{i=1}^{r}\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(\ell_\alpha)\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(\alpha(t)k_\alpha)\\
&\qquad\qquad\qquad \Big(\prod_{\alpha\in O(i)} x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha\ell_\alpha)\Big)^{-1}\Big(\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha(k_\alpha)\Big)^{-1} = 1\\
&\quad\iff t \in T^\sigma \text{ et } \prod_{i=1}^{r}\prod_{\alpha\in O(i)} x_\alpha\big(\ell_\alpha + \alpha(t)k_\alpha - c_{\sigma^{-1}\alpha}\ell_{\sigma^{-1}\alpha} - k_\alpha\big) = 1\\
&\quad\iff t \in T^\sigma \text{ et } \forall i \in \{1,\dots,r\},\ \forall \alpha \in O(i),\\
&\qquad\qquad\qquad \ell_\alpha + \alpha(t)k_\alpha - c_{\sigma^{-1}\alpha}\ell_{\sigma^{-1}\alpha} - k_\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

On obtient le système d'équations suivant pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{cases}
\ell_{\alpha_i} - c_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)}\ell_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} = (1-\alpha_i(t))k_{\alpha_i},\\
\ell_{\sigma(\alpha_i)} - c_{\alpha_i}\ell_{\alpha_i} = (1-\alpha_i(t))k_{\sigma(\alpha_i)},\\
\cdots\\
\ell_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} - c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}\ell_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)} = (1-\alpha_i(t))k_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)}
\end{cases}
$$

(car $t \in T^\sigma$ donc $\alpha(t) = \alpha_i(t)$ pour tout $\alpha \in O(i)$).

Or $C_{\sigma,\alpha} = 1$ (remarque 2.5), donc le système (I) est de rang $o(\alpha_i) - 1$ et il existe des solutions si et seulement si

$$
\big(c_{\alpha_i}\cdots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}k_{\alpha_i} + \cdots + c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}k_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}} + k_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}}\big)\big(1-\alpha_i(t)\big) = 0.
$$

D'après le théorème 3.4, l'équation ci-dessus entraîne que $t \in \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ et que

$$
\begin{cases}
\ell_{\sigma(\alpha_i)} = c_{\alpha_i}\ell_{\alpha_i},\\
\cdots\\
\ell_{\sigma^{o(\alpha_i)-1}(\alpha_i)} = c_{\alpha_i}\cdots c_{\sigma^{o(\alpha_i)-2}(\alpha_i)}\ell_{\alpha_i}.
\end{cases}
$$

Donc $t \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\alpha_i \cap T^\sigma = \mathrm{Z}(G)^\sigma$ et si on note $u = \prod_{i=1}^{r} u_i$ avec $u_i \in U(i)$, alors on a $u_i \in U(i)^\sigma$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

On démontre facilement que réciproquement

$$\mathrm{Z}(G)^\sigma \times \Big(\prod_{i=1}^{r} U(i)^\sigma\Big) \subset \mathrm{Stab}(\tilde{u}_0).$$

D'où l'égalité. Ce qui termine les démonstrations du lemme 3.11 et du théorème 3.6. □

3.2. Éléments pseudo-unipotents réguliers de $\boldsymbol{G\cdot\sigma}$ lorsque $\boldsymbol{\sigma}$ est semi-simple. — On suppose que σ est semi-simple quasi-central rationnel.

On rappelle que l'on appelle *éléments pseudo-unipotents* de $G\cdot\sigma$ les conjugués sous G des éléments de $U\cdot\sigma$. Avant d'étudier les éléments pseudo-unipotents réguliers de $G\cdot\sigma$, on étudie les éléments réguliers de $U\cdot\sigma$.

PROPOSITION 3.12. — *Tout élément de $U\cdot\sigma$ est conjugué sous U à un élément de $U^\sigma\cdot\sigma$.*

Démonstration. — LEMME 3.13. — *Tout élément semi-simple $v\cdot\sigma$ de $U\cdot\sigma$ est conjugué sous U à σ.*

Démonstration. — Selon [8, prop. 7.6], tout automorphisme semi-simple d'un groupe résoluble stabilise un tore maximal de ce groupe. Or tout élément semi-simple $v\cdot\sigma$ avec $v \in U$ induit un automorphisme semi-simple de B et donc stabilise un tore maximal ${}^xT$ de B, conjugué de T par un élément x de U. Ainsi, $x^{-1}(v\cdot\sigma)x$ est un élément de $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(T) \cap U\cdot\sigma = \{\sigma\}$, ce qui montre directement que $v\cdot\sigma$ est conjugué à σ sous U. □

Soit $x\cdot\sigma \in U\cdot\sigma$; on note $x\cdot\sigma = us$ la décomposition de Jordan de $x\cdot\sigma$. Alors $u \in U$ car σ est semi-simple et s est de la forme $v\cdot\sigma$ avec $v \in U$. On applique à $s = v\cdot\sigma$ le lemme précédent : il existe $w \in U$ tel que $x\cdot\sigma = w({}^{w^{-1}}u)\sigma w^{-1}$ et ${}^{w^{-1}}u \in U^\sigma$ car u commute à s ; donc ${}^{w^{-1}}u$ commute à ${}^{w^{-1}}s = \sigma$. □

COROLLAIRE 3.14. — *Un élément $u\cdot\sigma \in U\cdot\sigma$ est régulier si et seulement si il est conjugué sous U à un élément $v\cdot\sigma \in U^\sigma\cdot\sigma$ tel que v soit régulier dans G^σ.*

Démonstration. — Selon la proposition précédente, $u\cdot\sigma \in U\cdot\sigma$ est conjugué sous U à un élément $v\cdot\sigma \in U^\sigma\cdot\sigma$. Par unicité de la décomposition de Jordan de $v\cdot\sigma$, on a $\mathrm{C}_G(v\cdot\sigma) = \mathrm{C}_{G^\sigma}(v)$ et la dimension de $\mathrm{C}_G(v\cdot\sigma)$ est minimale si et seulement si la dimension de $\mathrm{C}_{G^\sigma}(v)$ l'est. □

PROPOSITION 3.15. — *Il existe une unique G-classe de conjugaison pseudo-unipotente régulière dans $G\cdot\sigma$.*

Démonstration. — Par le corollaire 3.14, toute classe pseudo-unipotente régulière possède un représentant $v\cdot\sigma$ dans $U^\sigma\cdot\sigma$ avec v régulier dans G^σ et v dans $U^\sigma \subset (G^\sigma)^0$. Comme tous les éléments unipotents réguliers de $(G^\sigma)^0$ sont conjugués dans $(G^\sigma)^0$ (*cf.* [3, prop. 14.16]), on obtient le résultat. □

On a l'analogue de 3.3 (d) :

PROPOSITION 3.16. — *Un élément pseudo-unipotent régulier normalise un unique sous-groupe de Borel de G.*

Démonstration. — On se ramène à un élément unipotent régulier de la forme $u\cdot\sigma$ avec $u \in U$. En utilisant le corollaire 3.14, on peut se ramener au cas où u est σ-stable, régulier dans $(G^\sigma)^0$. Alors, si $u\cdot\sigma$ est contenu dans un quasi-borel, ses parties semi-simples et unipotentes le sont aussi, donc tout sous-groupe de Borel normalisé par $u\cdot\sigma$, l'est aussi par u et par σ.

Supposons que u normalise un sous-groupe de Borel σ-stable de G autre que B ; alors, comme deux sous-groupes de Borel σ-stables ont un tore σ-stable en commun, on peut se ramener au cas où il existe $n \in (\mathrm{N}_G(T))^\sigma$ tel que $u \in U \cap {}^nU$. On note $u = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(k_\alpha)$. Soit $w \in W^\sigma$ tel que n soit un représentant de w. Alors, pour toute racine $\alpha \in \Pi$ telle que $w(\alpha) \in \Phi^-$, on a $k_\alpha = 0$. Si $w \neq 1$, alors, comme w est σ-stable, il existe une σ-orbite $\mathcal{A}$ de Π telle que pour toute racine $\alpha \in \mathcal{A}$, on ait $k_\alpha = 0$. Or cela contredit le fait que u soit régulier dans $(G^\sigma)^0$, d'où le résultat. □

Le nombre d'éléments pseudo-unipotents réguliers rationnels dans $G\cdot\sigma$ est donné dans la remarque 8.11.

4. Caractères réguliers

On garde les notations de la section 2 ; en particulier, on note Φ l'ensemble des racines associées à (G,T) et Π la base de racines associée à B. Alors $(B^\sigma)^0$ est un sous-groupe de Borel du groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$ de décomposition de Levi $(B^\sigma)^0 = (T^\sigma)^0 U^\sigma$. On note Φ^σ l'ensemble des racines associées à $((G^\sigma)^0, (T^\sigma)^0)$ et Π/σ la base de racines associée à $(B^\sigma)^0$. De plus, τ sera l'action de F sur les racines et si $\mathcal{O}$ est une τ-orbite de Π, alors on note $U_{\mathcal{O}}$ l'image de $\prod_{\alpha\in\mathcal{O}} U_\alpha$ dans U/U^* et Π/τ l'ensemble des τ-orbites de Π. Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on fixe un isomorphisme $x_\alpha : \overline{\mathbb{F}}_q^+ \to U_\alpha$ tel que $F(x_\alpha(a)) = x_{\tau(\alpha)}(a^q)$ et on définit comme dans la section précédente le coefficient c_α pour toute racine $\alpha \in \Phi$ par $\sigma(x_\alpha(a)) = x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha a)$. On fixe $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_s\}$, un ensemble de représentants des σ-orbites de Π/τ.

Dans le cas des groupes réductifs connexes, les représentations de Gelfand-Graev sont obtenues en induisant certains caractères linéaires irréductibles de U^F appelés caractères réguliers. Nous généralisons la notion de caractères réguliers dans la définition 4.2.

NOTATION 4.1. — Soit χ un caractère linéaire de U^F tel que sa restriction à $(U^*)^F$ soit triviale. Alors χ se factorise à travers $(U/U^*)^F \simeq U^F/U^{*F}$. On identifie de cette façon χ à un caractère $\overline{\chi}$ de $U^F/U^{*F} \simeq \prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau} U_{\mathcal{O}}^F$. Pour toute partie F-stable I de Π,

(i) on note U_I l'image de $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ dans U/U^* ;

(ii) on définit $\chi_{|U_I^F}$ comme la restriction de $\overline{\chi}$ à U_I^F.

DÉFINITION 4.2. — Un caractère multiplicatif $\widetilde{\chi} \in \operatorname{Irr}(U^F\cdot\langle\sigma\rangle)$ est appelé *caractère régulier* si pour tout $u \in U^F$

$$\widetilde{\chi}(u\cdot\sigma) = \chi(u)\,\widetilde{\chi}(\sigma),$$

où χ est un caractère σ-stable de $\operatorname{Irr}(U^F)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) la restriction de χ à $(U^*)^F$ est triviale ;

(ii) pour toute τ-orbite $\mathcal{O}$ de Π, $\chi_{|U_{\mathcal{O}}^F}$ n'est pas triviale.

Sous ces conditions, on dit que χ est *régulier* et pour tout caractère régulier σ-stable χ de U^F ; on note $\widetilde{\chi}$ et on appelle *extension normalisée* de χ l'extension de χ à $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ telle que $\widetilde{\chi}(\sigma) = 1$.

REMARQUE 4.3. — Plaçons-nous dans le cas du groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$. Les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$ sont définis par les conditions (i) et (ii) de la définition précédente en remplaçant U par U^σ et Π par Π/σ.

PROPOSITION 4.4. — *On suppose que la condition* (RS) *est vérifiée. Alors il existe une bijection entre les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$ et les caractères réguliers σ-stables de U^F.*

Démonstration. — La démonstration repose sur une série de lemmes numérotés de 4.5 à 4.12.

LEMME 4.5. — *Pour toute racine $\alpha \in \Phi$ et pour tout entier k, on a*

$$c_{\tau^k(\alpha)} = (c_\alpha)^{q^k}.$$

Démonstration. — Soient $\alpha \in \Phi$ et un entier k ; alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^+$, on a

$$\begin{aligned}\sigma\big(F^k\big(x_\alpha(\lambda)\big)\big) &= \sigma\big(x_{\tau^k(\alpha)}(\lambda^{q^k})\big) = x_{\sigma(\tau^k(\alpha))}\big(c_{\tau^k(\alpha)}\lambda^{q^k}\big),\\ F^k\big(\sigma\big(x_\alpha(\lambda)\big)\big) &= F^k\big(x_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha\lambda)\big) = x_{\tau^k(\sigma(\alpha))}\big((c_\alpha)^{q^k}\lambda^{q^k}\big).\end{aligned}$$

Or les actions de σ et F commutent, donc $\sigma(F^k(x_\alpha(\lambda))) = F^k(\sigma(x_\alpha(\lambda)))$ et $\sigma\circ\tau^k = \tau^k\circ\sigma$, ce qui entraîne le résultat. $\square$

REMARQUE 4.6. — Le lemme 4.5 entraîne que pour tout $\alpha \in \Phi$, si $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, alors le coefficient c_α est dans $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$.

LEMME 4.7. — *On considère la τ-orbite $\mathcal{O} = \{\alpha, \tau(\alpha), \dots, \tau^{k-1}(\alpha)\}$ d'une racine $\alpha \in \Pi$. Soit $\mathcal{A} = \{\alpha, \sigma(\alpha), \dots, \sigma^{n-1}(\alpha)\}$ la σ-orbite de α. Soient $a \in \{1, \dots, k\}$ le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$ et $o \in \{1, \dots, n\}$ le cardinal de la σ-orbite de $\mathcal{O}$. Alors il existe un entier r tel que $k = a \times r$ et $n = o \times r$.*

Démonstration. — Pour tout entier t, on a

$$\begin{aligned}\sigma^t(\mathcal{O}) &= \bigl\{\sigma^t(\alpha), \tau(\sigma^t(\alpha)), \dots, \tau^{k-1}(\sigma^t(\alpha))\bigr\},\\ \tau^t(\mathcal{A}) &= \bigl\{\tau^t(\alpha), \sigma(\tau^t(\alpha)), \dots, \sigma^{n-1}(\tau^t(\alpha))\bigr\}.\end{aligned}$$

Par définition de o et de a, on a $\sigma^o(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et $\tau^a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. De plus, on a l'égalité $\mathcal{O} \cup \dots \cup \sigma^{o-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{A} \cup \dots \cup \tau^{a-1}(\mathcal{A})$, ce qui entraîne que

1) $o \times k = a \times n$.

Par ailleurs, $\sigma^n(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ et $\tau^k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$; donc il existe deux entiers u et v tels que

2) $n = u \times o$ et

3) $k = v \times a$.

On obtient donc la relation $u = v$, ce qui conclut la preuve du lemme 4.7. □

LEMME 4.8. — *On suppose que σ est quasi-central et que pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, on a $C_{\sigma,\alpha} = 1$. Soit $\alpha \in \Pi$, soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}$ respectivement la σ-orbite et la τ-orbite de α, soit o le cardinal de la σ-orbite de $\mathcal{O}$ et a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$, soit $i \in \{1, \dots, |\mathcal{O}|\}$ tel que $\sigma^o(\alpha) = \tau^i(\alpha)$ et soit $j \in \{1, \dots, |\mathcal{A}|\}$ tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$; enfin soit r tel que $|\mathcal{A}| = r \times o$. Alors on a*

$$\bigl(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)}\bigr)^{1+q^i+\dots+q^{(r-1)i}} = 1 \quad \textit{et} \quad \bigl(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\bigr)^{1+q^a+\dots+q^{(r-1)a}} = 1.$$

Démonstration. — Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}&\bigl(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)}\bigr)^{1+q^i+\dots+q^{(r-1)i}}\\ &\quad= c_\alpha \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)} c_\alpha^{q^i} \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)}^{q^i} \cdots c_\alpha^{q^{(r-1)i}} \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)}^{q^{(r-1)i}}\\ &\quad= c_\alpha \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)} c_{\tau^i(\alpha)} \cdots c_{\sigma^{o-1}(\tau^i(\alpha))} \cdots c_{\tau^{(r-1)i}(\alpha)} \cdots c_{\sigma^{o-1}(\tau^{(r-1)i}(\alpha))}\\ &\quad= c_\alpha \cdots c_{\sigma^{o-1}(\alpha)} c_{\sigma^o(\alpha)} \cdots c_{\sigma^{2o-1}(\alpha)} \cdots c_{\sigma^{(r-1)o}(\alpha)} \cdots c_{\sigma^{ro-1}(\alpha)}\\ &\quad= c_\alpha \cdots c_{\sigma^{|\mathcal{A}|-1}(\alpha)} = 1\end{aligned}$$

On montre de la même façon que $(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)})^{1+q^a+\dots+q^{(r-1)a}} = 1$. □

LEMME 4.9. — *Soit $\alpha \in \Pi$; on note H le sous-réseau de $\mathbb{Z}^2$ défini par*

$$H = \bigl\{(i,j) \,;\, \tau^i(\alpha) = \sigma^j(\alpha)\bigr\}.$$

Si n est le cardinal de la σ-orbite de α, et si $a > 0$ est minimal tel qu'il existe un entier ℓ tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^\ell(\alpha)$ (si $\mathcal{A}$ est la σ-orbite de α, alors a est le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$) et si j est tel que $\tau^a(\alpha) = \sigma^j(\alpha)$, alors H est engendré par les couples $(0, n)$ et (a, j).

Démonstration. — Soit p_1 la première projection de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}$, alors l'image de H par p_1 est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ égal à $a\cdot\mathbb{Z}$ par définition de a. Ainsi pour tout $(k,\ell)\in H$, il existe un entier s tel que $k-sa=0$; on a alors $(0,\ell-sj)\in H$, c'est-à-dire $\sigma^{\ell-sj}(\alpha)=\alpha$, ce qui entraîne que n divise $\ell-sj$. Donc, pour tout $(k,\ell)\in H$, il existe deux entiers s et t tels que $(k,\ell)=s(a,j)+t(0,n)$, ce qui montre que H est engendré par les couples $(0,n)$ et (a,j). □

LEMME 4.10. — *On suppose que σ est quasi-central et que pour toute racine simple $\alpha\in\Pi$, on a $C_{\sigma,\alpha}=1$. Pour toute racine $\alpha\in\Pi$, si on note $\mathcal{O}$ la τ-orbite de α, $\mathcal{A}$ sa σ-orbite et a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$ et j l'élément de $\{1,\dots,\mathcal{A}\}$ tel que $\tau^a(\alpha)=\sigma^j(\alpha)$, alors on peut choisir pour tout $\beta\in\mathcal{A}$, l'isomorphisme $x_\beta:\overline{\mathbb{F}}_q^+\to U_\beta$ de façon que $c_\alpha\cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}=1$.*

Démonstration. — On s'est donné des isomorphismes $x_\alpha:\overline{\mathbb{F}}_q^+\to U_\alpha$ pour tout $\alpha\in\Phi$ tels que $F(x_\alpha(\lambda))=x_{\tau(\alpha)}(\lambda^q)$ pour tout $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_q^+$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{F}}_q^+$; alors on peut définir la famille d'isomorphismes $(x'_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ par la relation $x'_\alpha(\lambda)=x_\alpha(a_\alpha\lambda)$ pour tout $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_q^+$.

Les isomorphismes vérifient $F(x'_\alpha(\lambda))=x'_{\tau(\alpha)}(\lambda^q)$ pour tout $\alpha\in\Phi$, si et seulement si on a $a_{\tau(\alpha)}=a_\alpha^q$: c'est l'hypothèse que l'on va faire sur les a_α désormais.

Pour tout $\alpha\in\Phi$, on définit c'_α par $\sigma(x'_\alpha(\lambda))=x'_{\sigma(\alpha)}(c'_\alpha\lambda)$ pour tout $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_q^+$, alors $c'_\alpha=c_\alpha\times a_\alpha/a_{\sigma(\alpha)}$. Pour tout $\alpha\in\Pi$, on a

$$c'_\alpha\cdots c'_{\sigma^{|\mathcal{A}|-1}(\alpha)}=C_{\sigma,\alpha}=1,$$

où $\mathcal{A}$ est la σ-orbite de α.

Soit $\alpha\in\Pi$, soit a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$ et j l'élément de $\{1,\dots,|\mathcal{A}|\}$ tel que $\tau^a(\alpha)=\sigma^j(\alpha)$, alors $c'_\alpha\cdots c'_{\sigma^{j-1}(\alpha)}=a_\alpha^{1-q^a}c_\alpha\cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}$. On a vu (lemme 4.8) que

$$\big(c_\alpha\cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\big)^{1+q^a+\cdots+q^{(r-1)a}}=\big(c_\alpha\cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\big)^{(q^{ra}-1)/(q^a-1)}=1.$$

Donc il existe $a_\alpha\in\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, où $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α tel que

$$(a_\alpha)^{q^a-1}=c_\alpha\cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)},$$

ce qui termine la démonstration. □

On suppose dans la suite que les isomorphismes x_β vérifient la propriété du lemme 4.10.

NOTATION 4.11. — Pour toute racine $\alpha\in\Pi$, si $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, on définit l'isomorphisme u_α de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$ dans $U_{\mathcal{O}}^F$ par

$$\lambda\longmapsto u_\alpha(\lambda)=x_\alpha(\lambda)\cdots x_{\tau^{|\mathcal{O}|-1}(\alpha)}(\lambda^{q^{|\mathcal{O}|-1}}).$$

Si $\widetilde{\chi}$ est un caractère régulier normalisé de $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$, il existe $\chi\in\mathrm{Irr}(U^F)$ régulier σ-stable tel que $\widetilde{\chi}$ soit l'extension triviale de χ à $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$. Pour tout $\alpha\in\Pi$, si $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, on note χ_α le morphisme de $\mathbb{F}^+_{q^{|\mathcal{O}|}}$ dans $\mathbb{C}^\times$ défini par $\lambda\mapsto\chi\circ u_\alpha(\lambda)$. Alors le caractère χ est défini par la donnée de $(\chi_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ avec pour toute racine $\alpha\in\Pi$ les relations

$$\chi_{\tau(\alpha)}(\lambda^q)=\chi_\alpha(\lambda)$$

pour tout $\lambda\in\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, où $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α.

Soit $\{\alpha_1,\dots\alpha_r\}$ un ensemble de représentants des τ-orbites de Π. Alors, pour tout $u\in\prod_{i=1}^r u_{\alpha_i}(\lambda_{\alpha_i})(U^*)^F$, on a la formule suivante qui ne dépend pas du choix de l'ensemble $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$:

$$\chi(u)=\prod_{i=1}^r\chi_{\alpha_i}(\lambda_{\alpha_i}).$$

On note $\{\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_s\}$ un ensemble de représentants des σ-orbites de Π/τ. Dans toute τ-orbite $\mathcal{O}_r$, on choisit un élément α_r. Pour tout $r\in\{1,\dots,s\}$, $\mathcal{A}_r$ est la σ-orbite de α_r, $a(r)$ le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}_r$ et $o(r)$ le cardinal de la σ-orbite de $\mathcal{O}_r$. On fixe un entier N multiple de $|\mathcal{O}|$ pour toute τ-orbite $\mathcal{O}$ de racines de Π. On fixe un caractère ϕ_0 de $\mathbb{F}^+_{q^N}$ tel que la restriction de ϕ_0 à $\mathbb{F}^+_q$ soit non triviale.

Lemme 4.12. — *On suppose que σ est quasi-central et que $C_{\sigma,\alpha}=1$ pour toute racine simple $\alpha\in\Pi$. Pour tout $r\in\{1,\dots,s\}$, pour tout caractère linéaire σ-stable χ_r du sous-groupe $\prod_{i=0}^{o(r)-1}U^F_{\sigma^i(\mathcal{O}_r)}$ de $(U/U^*)^F$, il existe un $d_r\in\mathbb{F}_{q^{a(r)}}$ tel que*

$$\begin{aligned}\chi_r\Big(&\prod_{i=0}^{o(r)-1}u_{\sigma^i(\alpha_r)}\big(\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)}\big)\Big)\\&=\phi_0\circ\mathrm{Tr}_r\big(d_r\big(\lambda_{\alpha_r}+(1/c_{\alpha_r})\lambda_{\sigma(\alpha_r)}\\&\qquad\qquad+\cdots+(1/(c_{\alpha_r}\cdots c_{\sigma^{o(r)-2}(\alpha_r)}))\lambda_{\sigma^{o(r)-1}(\alpha_r)}\big)\big)\end{aligned}$$

où $\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)}\in\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ et où Tr_r est la trace de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ dans $\mathbb{F}_{q^{a(r)}}$. Tout caractère linéaire σ-stable χ de $(U/U^*)^F$ est de la forme $\chi=\prod_{r=1}^s\chi_r$, où χ_r est comme ci-dessus. De plus, l'application

$$\Psi:\big(\big((U/U^*)^F\big)^\wedge\big)^\sigma\longrightarrow\prod_{r=1}^s\mathbb{F}^+_{q^{a(r)}},\quad\chi\longmapsto(d_1,\dots,d_s)$$

est un isomorphisme et χ est régulier si et seulement si aucun des d_r n'est nul.

Démonstration. — Soit $(s,t) \in H$ le sous-réseau du lemme 4.9. Alors, dans $\widetilde{U} = U/U^*$,

$$\begin{aligned}\sigma^t(u_\alpha(\lambda)) &= x_{\sigma^t(\alpha)}\big(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda\big) \cdots x_{\tau^{|\mathcal{O}|-1}(\sigma^t(\alpha))}\big((c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)^{q^{|\mathcal{O}|-1}}\big)\\ &= x_{\tau^s(\alpha)}\big(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda\big) \cdots x_{\tau^{|\mathcal{O}|+s-1}(\alpha)}\big((c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)^{q^{|\mathcal{O}|-1}}\big)\\ &= u_{\tau^s(\alpha)}\big(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda\big).\end{aligned}$$

Donc, si $\sigma^t(\alpha) = \tau^s(\alpha)$, alors $\sigma^t(u_\alpha(\lambda)) = u_{\tau^s(\alpha)}(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda)$, comme éléments de U/U^*.

Pour que χ soit un caractère régulier σ-stable de U^F, il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in \Pi$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, où $\mathcal{O}$ est la τ-orbite de α, on ait

$$\chi_{\sigma(\alpha)}(c_\alpha\lambda) = \chi_\alpha(\lambda),$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède, que pour tout couple (s,t) tel que $\sigma^t(\alpha) = \tau^s(\alpha)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$, on ait

$$\chi_{\sigma^t(\alpha)}\big(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda\big) = \chi_{\tau^s(\alpha)}\big(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{t-1}(\alpha)}\lambda\big) = \chi_\alpha(\lambda).$$

Par le lemme 4.9, cette condition est équivalente à la condition suivante pour toute racine $\alpha \in \Pi$, où on note $\mathcal{O}$ la τ-orbite de α, $\mathcal{A}$ sa σ-orbite, a le cardinal de la τ-orbite de $\mathcal{A}$, et où on définit j comme l'élément de $\{1,\ldots,|\mathcal{O}|\}$ tel que $\sigma^j(\alpha) = \tau^a(\alpha)$,

$$\chi_{\tau^a(\alpha)}\big(c_\alpha \cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\lambda\big) = \chi_\alpha(\lambda), \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}},$$

c'est-à-dire $\chi_\alpha((c_\alpha \cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)}\lambda)^{q^{|\mathcal{O}|-a}}) = \chi_\alpha(\lambda)$, soit encore

$$\chi_\alpha(\lambda^{q^{|\mathcal{O}|-a}}) = \chi_\alpha(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}},$$

car on a fait en sorte que $c_\alpha \cdots c_{\sigma^{j-1}(\alpha)} = 1$ grâce au lemme 4.10. Alors

$$\chi_\alpha(\lambda^{q^a}) = \chi_\alpha\big((\lambda^{q^a})^{q^{|\mathcal{O}|-a}}\big) = \chi_\alpha\big(\lambda^{q^{|\mathcal{O}|}}\big) = \chi_\alpha(\lambda),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}|}}$.

Ainsi, si χ_r est un caractère linéaire σ-stable de $\prod_{i=0}^{o(r)-1} U^F_{\sigma^i(\mathcal{O}_r)}$ avec $r \in \{1,\ldots,s\}$, il existe un caractère ϕ_r de $\mathbb{F}^+_{q^{a(r)}}$ tel que

$$\begin{aligned}&\chi_r\Big(\prod_{i=0}^{o(r)-1} u_{\sigma^i(\alpha_r)}(\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)})\Big)\\ &= \phi_r \circ \mathrm{Tr}_r\big(\lambda_{\alpha_r} + (1/c_{\alpha_r})\lambda_{\sigma(\alpha_r)} \cdots + (1/(c_{\alpha_r} \cdots c_{\sigma^{o(r)-2}(\alpha_r)}))\lambda_{\sigma^{o(r)-1}(\alpha_r)}\big),\end{aligned}$$

où $\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)} \in \mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ et où Tr_r est la trace de $\mathbb{F}_{q^{|\mathcal{O}_r|}}$ dans $\mathbb{F}_{q^{a(r)}}$. C'est-à-dire, il existe un $d_r \in \mathbb{F}_{q^{a(r)}}$ tel que

$$\chi_r\Big(\prod_{i=0}^{o(r)-1} u_{\sigma^i(\alpha_r)}\big(\lambda_{\sigma^i(\alpha_r)}\big)\Big) = \phi_0 \circ \mathrm{Tr}_r\big(d_r\big(\lambda_{\alpha_r} + (1/c_{\alpha_r})\lambda_{\sigma(\alpha_r)} + \cdots + (1/(c_{\alpha_r}\cdots c_{\sigma^{o(r)-2}(\alpha_r)}))\lambda_{\sigma^{o(r)-1}(\alpha_r)}\big)\big).$$

Et le caractère χ est σ-stable si et seulement si $\chi = \prod_{r=1}^{s} \chi_r$, où χ_r est comme ci-dessus, de plus, il est régulier si et seulement si les d_r sont non nuls.

Les autres assertions du lemme 4.12 sont claires. □

On peut appliquer le lemme 4.12, non seulement à $G\cdot\langle\sigma\rangle$ mais aussi au groupe réductif $(G^\sigma)^0\cdot\langle\sigma\rangle$. Cela montre que les caractères réguliers σ-stables de $U^F/(U^*)^F$ et les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F/((U^\sigma)^*)^F$ sont en bijection avec le même ensemble. La proposition 4.4 s'en déduit immédiatement. □

Corollaire 4.13. — *Supposons la condition* (RS) *vérifiée. Alors les caractères réguliers σ-stables de U^F sont paramétrés par $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, où $\mathcal{L}_{(T^\sigma)^0}$ est l'application de Lang $t \mapsto t^{-1}F(t)$ de $(T^\sigma)^0$ dans $(T^\sigma)^0$.*

Démonstration. — Selon la proposition 14.28 de [3] appliquée au groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$, $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ agit transitivement sur l'ensemble des caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$, et comme cette action a pour noyau $\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$, les caractères réguliers de $(U^\sigma)^F$ sont paramétrés par l'ensemble

$$\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}\big(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)\big)/\mathrm{Z}\big((G^\sigma)^0\big).$$

La proposition précédente permet donc de conclure. □

Précisons la bijection obtenue dans le corollaire 4.13 : on fixe un caractère régulier σ-stable χ_1 de U^F afin de bien définir ce paramétrage.

D'après le lemme 1.3 de [2], $\mathcal{L}^{-1}_{(T^\sigma)^0}(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))/(\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)((T^\sigma)^0)^F)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, donc les $((T^\sigma)^0)^F$-orbites des caractères réguliers σ-stables de U^F sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$. Comme $(T^\sigma)^0$ est connexe, l'application de Lang de $(T^\sigma)^0 \to (T^\sigma)^0$ est surjective. De plus, on a $Z((G^\sigma)^0) \subset (T^\sigma)^0$. Donc, pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, il existe $t \in (T^\sigma)^0$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et z paramètre la $((T^\sigma)^0)^F$-orbite de ${}^t\chi_1$.

5. Définition des représentations de Gelfand-Graev

5.1. Cas où σ est unipotent. — On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent. On rappelle que, lorsque σ est quasi-central unipotent, on a $(G^\sigma)^0 = G^\sigma$ et $(T^\sigma)^0 = T^\sigma$. Nous allons étendre toute représentation de

Gelfand-Graev σ-stable de G^F en une représentation de Gelfand-Graev de $\widetilde{G}^F$. Selon la proposition 5.1 ci-dessous, il suffit d'induire de $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ à $\widetilde{G}^F$ les caractères réguliers normalisés de $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$.

PROPOSITION 5.1. — *Si σ est un automorphisme quasi-central unipotent rationnel de G, alors, tout caractère σ-stable de Gelfand-Graev de G^F est l'induit d'un caractère régulier σ-stable de U^F.*

Démonstration. — Les représentations de Gelfand-Graev de G comme les T^F-orbites de caractères réguliers de U^F sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G))$ (proposition 14.28 de [3]) de la façon suivante : on fixe un caractère régulier de U^F que l'on note ϕ_1. Soit $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G))$, soit $t\in\mathcal{L}_T^{-1}(Z(G))$ tel que la classe de F-conjugaison de $\mathcal{L}(t)$ dans $\mathrm{Z}(G)$ soit z. On note $\dot z$ l'image dans $\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G))/\mathrm{Z}(G)$ de t. Soit $\phi_{\dot z}$ le caractère régulier de U^F défini par $\phi_{\dot z}={}^t\phi_1$, alors on définit Γ_z par $\Gamma_z=\mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}(\phi_{\dot z})$. On démontre que $\Gamma_z=\Gamma_{z'}$ si et seulement si $z=z'$.

Soit $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G))$ tel que Γ_z soit une représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F, soit $t\in\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G))$ défini comme ci-dessus. Soit $\phi={}^t\phi_1$, alors $\Gamma_z=\mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}(\phi)$ et ${}^\sigma\Gamma_z=\mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}({}^\sigma\phi)$. Par ailleurs, ${}^\sigma\phi$ est un caractère régulier de U^F. Donc, comme Γ_z est σ-stable, il existe $t'\in\mathcal{L}_T^{-1}(Z(G))$ tel que la classe de F-conjugaison de $\mathcal{L}(t')$ dans $\mathrm{Z}(G)$ soit z, c'est-à-dire celle de t, et tel que ${}^\sigma\phi={}^{t'}\phi_1$. Ainsi il existe $t''\in\mathrm{Z}(G)$ tel que $\mathcal{L}(t')={t''}^{-1}\mathcal{L}(t)F(t'')$, c'est-à-dire tel que $F(t'(tt'')^{-1})=t'(tt'')^{-1}$. Donc il existe $t''\in\mathrm{Z}(G)$ et $t_0\in T^F$ tels que $t'=t_0tt''$. Ainsi, on a

$$ {}^\sigma\phi={}^{t'}\phi_1={}^{t_0tt''}\phi_1={}^{t_0}\phi, $$

avec $t_0\in T^F$. On a donc montré que la T^F-orbite de ϕ était σ-stable ; il reste à prouver qu'elle contient un élément σ-stable.

Soit k l'ordre de σ, alors ${}^{\sigma^k}\phi=\phi$, c'est-à-dire $\sigma^{k-1}(t_0)\cdots\sigma(t_0)t_0\in\mathrm{Z}(G)$. Comme σ est unipotent quasi-semi-simple, alors, d'après le (iii) du théorème 2.3, $T=\mathcal{L}_\sigma(T)\times T^\sigma$, où $\mathcal{L}_\sigma:t\to t^{-1}\sigma(t)$. Ainsi, on peut écrire $t_0=t^{-1}\sigma(t)t_1$ avec $t^{-1}\sigma(t)\in T^F$ et $t_1\in(T^\sigma)^F$. De plus, on peut choisir $t\in T^F$. En effet, $\mathcal{L}_\sigma(T^F)$ est inclus dans $\mathcal{L}_\sigma(T)^F$, or on a $|\mathcal{L}_\sigma(T^F)|=|T^F|/|(T^F)^\sigma|$ et $|\mathcal{L}_\sigma(T)^F|=|T^F|/|(T^\sigma)^F|$, d'où l'égalité $\mathcal{L}_\sigma(T^F)=\mathcal{L}_\sigma(T)^F$. On a alors

$$ \sigma^{k-1}(t_0)\cdots\sigma(t_0)t_0\in\mathrm{Z}(G)\iff\sigma^k(t)t^{-1}t_1^k\in\mathrm{Z}(G), $$

c'est-à-dire $t_1^k\in\mathrm{Z}(G)$ car σ est d'ordre k. Ainsi pour toute racine $\alpha\in\Pi$, on a $\alpha(t_1^k)=\alpha(t_1)^k=1$, or $\alpha(t_1)\in\overline{\mathbb{F}}_q$ et k est une puissance de la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$; donc $\alpha(t_1)=1$ pour toute racine $\alpha\in\Pi$, c'est-à-dire $t_1\in\mathrm{Z}(G)$ et $t_0\in\mathcal{L}_\sigma(T)\times\mathrm{Z}(G)$. Soit $\phi'={}^{t^{-1}}\phi$; alors

$$ \sigma(\phi')={}^{\sigma(t^{-1})t_0}\phi={}^{\sigma(t^{-1})t^{-1}\sigma(t)t_1}\phi={}^{t^{-1}}\phi=\phi'. $$

On a ainsi montré qu'il existait un caractère régulier ϕ' σ-stable de U^F tel que $\Gamma = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}(\phi')$. □

Définition 5.2. — Pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, l'induit $\mathrm{Ind}_{U^F\cdot\langle\sigma\rangle}^{G^F\cdot\langle\sigma\rangle}({}^t\widetilde{\chi}_1)$ (où on note ${}^t\widetilde{\chi}_1$ l'extension normalisée de ${}^t\chi_1$ à $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$) ne dépend pas du choix de $t \in T^\sigma$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{\widetilde{G}}$ de $\widetilde{G}^F = G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ par $\Gamma_z^{\widetilde{G}} = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot\langle\sigma\rangle}^{G^F\cdot\langle\sigma\rangle}({}^t\widetilde{\chi}_1)$. On définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{G\cdot\sigma}$ de $G^F\cdot\sigma$ par $\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \mathrm{Res}_{G^F\cdot\sigma}^{\widetilde{G}^F}(\Gamma_z^{\widetilde{G}})$.

5.2. Cas où σ est semi-simple. — On suppose que σ est rationnel quasi-central semi-simple. On suppose de plus que σ vérifie l'hypothèse (RS).

On voudrait que toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F soit étendue en au moins une représentation de Gelfand-Graev de $\widetilde{G}^F$. Selon la proposition 5.1, sous l'hypothèse σ unipotent quasi-central, toute représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F est l'induite d'un caractère régulier σ-stable de U^F. La proposition 5.1 n'est plus vraie lorsque l'on supprime l'hypothèse σ unipotent. On ne peut plus se contenter comme lorsque σ est unipotent quasi-central de définir les représentations de Gelfand-Graev de $\widetilde{G}^F$ comme les induites de $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ à $\widetilde{G}^F$ des extensions à $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ des caractères réguliers σ-stables de U^F.

Par ailleurs, lorsque σ est semi-simple, G^σ et T^σ ne sont pas toujours connexes ; donc pour $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, il n'existe plus forcément $t \in T^\sigma$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. Cependant T est connexe, donc l'application de Lang $\mathcal{L}_T : T \to T$ est surjective et comme $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset T$, pour tout $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, il existe $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$. Alors ${}^t\sigma$ est un élément rationnel quasi-central de $\widetilde{G}$; on a $\widetilde{G}^F = G^F\cdot\langle{}^t\sigma\rangle$ et $G^F\cdot\sigma = G^F\cdot{}^t\sigma$ et le caractère régulier ${}^t\chi_1$ est ${}^t\sigma$-stable. De plus, $\Gamma = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F}{}^t\chi_1$ est une représentation de Gelfand-Graev σ-stable de G^F.

Définition 5.3. — Soit $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. Alors $\mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)$ (où ${}^t\widetilde{\chi}_1$ est l'extension normalisée de ${}^t\chi_1$ à $U^F\cdot\langle{}^t\sigma\rangle$) ne dépend pas du choix de $t \in T$ tel que $t^{-1}F(t) \in z$ et on définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{\widetilde{G}}$ de $\widetilde{G}^F = G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ par $\Gamma_z^{\widetilde{G}} = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot\langle{}^t\sigma\rangle}^{\widetilde{G}^F}({}^t\widetilde{\chi}_1)$. On définit la représentation de Gelfand-Graev $\Gamma_z^{G\cdot\sigma}$ de $G^F\cdot\sigma$ par $\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \mathrm{Res}_{G^F\cdot\sigma}^{\widetilde{G}^F}(\Gamma_z^{\widetilde{G}})$.

6. Propriétés des représentations de Gelfand-Graev

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent ou semi-simple.

Proposition 6.1. — (i) *La restriction à G^F d'une représentation de Gelfand-Graev de $\widetilde{G}^F$ est une représentation de Gelfand-Graev de G^F.*

(ii) *Les composantes irréductibles des représentations de Gelfand-Graev de* $\widetilde{G}^F = G^F\cdot\langle\sigma\rangle$ *sont toutes de multiplicité* 1.

Démonstration. — Soit $z \in \mathrm{Z}(G^\sigma)$, alors $\mathrm{Res}^{\widetilde{G}^F}_{G^F}(\Gamma^{\widetilde{G}}_z)$ est un caractère de Gelfand-Graev de G^F car si $t \in T$ est tel que $\mathcal{L}(t) \in z$ (on choisit $t \in T^\sigma$ si σ est unipotent), alors $\mathrm{Res}^{\widetilde{G}^F}_{G^F}(\Gamma^{\widetilde{G}}_z) = \mathrm{Ind}^{G^F}_{U^F}({}^t\chi_1)$.

Or ${}^t\chi_1$ est un caractère régulier de U^F et on retrouve bien un caractère de Gelfand-Graev de G^F. On peut décomposer $\Gamma^{\widetilde{G}}_z$ sous la forme $\Gamma^{\widetilde{G}}_z = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\widetilde{G}^F)} c_\chi\chi$, alors $\Gamma^{\widetilde{G}}_{z\,|G^F} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\widetilde{G}^F)} c_\chi\chi_{|G^F}$. Par le théorème de Clifford, pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(\widetilde{G}^F)$, on a $\chi_{|G^F} = e\sum_{i=1}^t \gamma_i$, où $\gamma_1,\dots,\gamma_t$ sont les conjugués d'un même caractère irréductible γ de G^F dans $\widetilde{G}^F$. Or le fait que $\Gamma^{\widetilde{G}}_{z\,|G^F}$ soit une représentation de Gelfand-Graev de G^F entraîne que ses composantes irréductibles sont de multiplicité 1 (*cf.* [3, th. 14.30]) et donc que pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(\widetilde{G}^F)$, $c_\chi < 2$. Donc les composantes irréductibles de $\Gamma^{\widetilde{G}}_z$ sont de multiplicité 1. □

Soit L un sous-groupe de Levi rationnel et σ-stable contenant T d'un sous-groupe parabolique rationnel σ-stable P de G contenant B.

Lemme 6.2. — *L'inclusion* $\mathrm{Z}(G^\sigma) \subset \mathrm{Z}(L^\sigma)$ *induit une application surjective* $h_{L^\sigma} : \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)) \to \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(L^\sigma))$.

Démonstration. — Lorsque σ est unipotent, G^σ est un groupe réductif connexe et L^σ un sous-groupe de Levi de G^σ, le résultat provient alors du lemme 14.31 de [3]. Supposons maintenant que σ est semi-simple. Soit I le sous-ensemble de Π tel que L soit le sous-groupe de Levi standard L_I. Alors I est σ-stable et

$$\mathrm{Z}(G^\sigma) = \bigcap_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Ker}\alpha_{|T^\sigma} \subset \mathrm{Z}(L^\sigma) = \bigcap_{\alpha\in I} \mathrm{Ker}\alpha_{|T^\sigma}.$$

En fait, on obtient la suite exacte suivante :

$$\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Z}(G^\sigma)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathrm{Z}(L^\sigma)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(\mathrm{Z}(L^\sigma)/\mathrm{Z}(G^\sigma)\big).$$

Donc il suffit de montrer que $\mathrm{Z}(L^\sigma)/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est connexe.

Le groupe $\mathrm{Z}(L^\sigma)/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est le centre de $L^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$; on va montrer que $L^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est un sous-groupe de Levi du groupe réductif connexe de centre trivial $G^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$. Cela nous permettra de conclure car, par le (ii) du lemme 13.14 de [3], si H est un groupe réductif connexe de centre connexe, alors le centre de tout sous-groupe de Lévi de H est encore connexe.

Comme σ est quasi-central, et comme G est un groupe réductif connexe, on a $G^\sigma = (G^\sigma)^0 \times \mathrm{Z}(G^\sigma)$ (théorème 2.3, (iii)), donc $G^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est un groupe réductif connexe de centre trivial. Par ailleurs, si on pose $U_I = \langle U_\alpha ; \alpha \in I\rangle$ et $U_I^- = \langle U_\alpha ; (-\alpha) \in I\rangle$, alors, par les résultats généraux de la section 2, on a $L^\sigma = \langle T^\sigma, (U_I)^\sigma, (U_I^-)^\sigma\rangle$ et $(L^\sigma)^0 = \langle (T^\sigma)^0, (U_I)^\sigma, (U_I^-)^\sigma\rangle$ et comme

$T^\sigma = (T^\sigma)^0 \times \mathrm{Z}(G^\sigma)$, le groupe $L^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est connexe et c'est un sous-groupe de Levi de $G^\sigma/\mathrm{Z}(G^\sigma)$. □

On définit les représentations de Gelfand-Graev de $L^F\cdot\sigma$ comme celles de $G^F\cdot\sigma$ dans la section 5. On pose

$$\phi_1 = \mathrm{Res}^{U^F}_{U^F\cap L^F}(\chi_1)$$

et on définit pour tout $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$, le caractère ${}^t\tilde{\phi}_1$ de $\mathrm{Irr}((L^F\cap U^F)\cdot\langle{}^t\sigma\rangle)$ comme l'extension normalisée de ${}^t\phi_1$ à $(U^F\cap L^F)\cdot\langle{}^t\sigma\rangle$.

Remarque 6.3. — On a $({}^t\widetilde{\chi}_1)|_{(L^F\cap U^F)\,\cdot\,{}^t\sigma} = ({}^t\tilde{\phi}_1)$.

Proposition 6.4. — *Pour tout* $z \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$, *on a*

$$ {}^*\mathrm{R}^{G\,\cdot\,\sigma}_{L\,\cdot\,\sigma}(\Gamma^{G\,\cdot\,\sigma}_z) = \Gamma^{L\,\cdot\,\sigma}_{h_{L^\sigma}(z)},$$

où ${}^*\mathrm{R}^{G\,\cdot\,\sigma}_{L\,\cdot\,\sigma}$ *désigne la restriction de Harish-Chandra généralisée aux groupes non connexes comme dans* [4].

Démonstration. — La propriété de l'énoncé est équivalente à : pour toute fonction de σ-classe f de $L^F\cdot\sigma$, on a

$$\big\langle R^{G\,\cdot\,\sigma}_{L\,\cdot\,\sigma}(f), \Gamma^{G\,\cdot\,\sigma}_z\big\rangle_{G^F\,\cdot\,\sigma} = \big\langle f, \Gamma^{L\,\cdot\,\sigma}_{h_{L^\sigma}(z)}\big\rangle_{L^F\,\cdot\,\sigma}.$$

Soit $t\in T$ tel que $\mathcal{L}_T(t)\in z$ (si c'est possible, ce qui est toujours le cas lorsque σ est unipotent, on choisit t dans T^σ ; on a alors ${}^t\sigma = \sigma$). Alors

$$\begin{aligned}\big\langle f, \Gamma^{L\,\cdot\,\sigma}_{h_{L^\sigma}(z)}\big\rangle_{L^F\,\cdot\,\sigma} &= \big\langle f, \mathrm{Ind}^{L^F\,\cdot\,{}^t\sigma}_{(L^F\cap U^F)\,\cdot\,{}^t\sigma}({}^t\tilde{\phi}_1)\big\rangle_{L^F\,\cdot\,\sigma}\\ &= \big\langle \mathrm{Res}^{L^F\,\cdot\,{}^t\sigma}_{(L^F\cap U^F)\,\cdot\,{}^t\sigma}(f), ({}^t\tilde{\phi}_1)\big\rangle_{(L^F\cap U^F)\,\cdot\,{}^t\sigma}.\end{aligned}$$

Donc la propriété de l'énoncé est équivalente à : pour toute fonction de σ-classe de $L^F\cdot\sigma$, on a

$$\big\langle R^{G\,\cdot\,\sigma}_{L\,\cdot\,\sigma}(f), \Gamma^{G\,\cdot\,\sigma}_z\big\rangle_{G^F\,\cdot\,\sigma} = \big\langle f, ({}^t\tilde{\phi}_1)\big\rangle_{(L^F\cap U^F)\,\cdot\,{}^t\sigma}. \tag{1}$$

On définit la fonction $\tilde{f}$ sur $P^F\cdot\sigma$ par $f\times\mathrm{Id}$ dans la décomposition $P^F\cdot\sigma = (L^F\cdot\sigma)V^F$, où V est le radical unipotent de P. Alors on a aussi $\tilde{f} = f\times\mathrm{Id}$ dans la décomposition $P^F\cdot{}^t\sigma = (L^F\cdot{}^t\sigma)V^F$.

Lemme 6.5. — *On a* $R^{G\,\cdot\,\sigma}_{L\,\cdot\,\sigma}(f) = \mathrm{Ind}^{G^F\,\cdot\,{}^t\sigma}_{P^F\,\cdot\,{}^t\sigma}(\tilde{f})$.

Démonstration. — Soit $g \in G^F$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{P^F \cdot {}^t\sigma}^{G^F \cdot {}^t\sigma}(\tilde{f})(g \cdot \sigma) \\
&\quad = 1/|P^F| \sum_{\{x \in G^F \mid (xt\sigma(t^{-1}) \cdot \sigma) g \cdot \sigma (xt\sigma(t^{-1}) \cdot \sigma)^{-1} \in P^F \cdot {}^t\sigma\}} \tilde{f}\big((xt\sigma(t^{-1}) \cdot \sigma) g \cdot \sigma \big(xt\sigma(t^{-1}) \cdot \sigma\big)^{-1}\big) \\
&\quad = 1/|P^F| \sum_{\{y \in G^F \mid y \cdot \sigma g \cdot \sigma (y \cdot \sigma)^{-1} \in P^F \cdot \sigma\}} \tilde{f}\big(y \cdot \sigma g \cdot \sigma (y \cdot \sigma)^{-1}\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{car } t^{-1}\sigma(t) \in T^F \text{ et } P^F \cdot {}^t\sigma = P^F \cdot \sigma) \\
&\quad = \mathrm{Ind}_{P^F \cdot \sigma}^{G^F \cdot \sigma}(\tilde{f})(g \cdot \sigma) \qquad (\text{induction de Harish-Chandra}) \\
&\quad = R_{L \cdot \sigma}^{G \cdot \sigma}(f)(g \cdot \sigma).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 6.5. □

Ainsi, le membre de gauche de l'égalité (1) est égal à

$$\big\langle \mathrm{Ind}_{P^F \cdot {}^t\sigma}^{G^F \cdot {}^t\sigma}(\tilde{f}), \mathrm{Ind}_{U^F \cdot {}^t\sigma}^{G^F \cdot {}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1) \big\rangle_{G^F \cdot {}^t\sigma},$$

c'est-à-dire par la formule de Mackey pour les fonctions de ${}^t\sigma$-classes, à

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in (P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}} &\big\langle \tilde{f}, \mathrm{Ind}_{(P^F \cap {}^g(U^F)) \cdot {}^t\sigma}^{P^F \cdot {}^t\sigma} \circ \mathrm{Res}_{(P^F \cap {}^g(U^F)) \cdot {}^t\sigma}^{{}^g(U^F) \cdot {}^t\sigma} {}^g({}^t\widetilde{\chi}_1) \big\rangle_{P^F \cdot {}^t\sigma} \\
&= \sum_{g \in (P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}} \big\langle \tilde{f}, {}^g({}^t\widetilde{\chi}_1) \big\rangle_{P^F \cdot {}^t\sigma \cap {}^g(U^F) \cdot {}^t\sigma}.
\end{aligned}$$

Si L est le sous-groupe de Levi standard L_I, alors $P \backslash G / U$ est en bijection avec l'ensemble des éléments I-réduits de $W = \mathrm{N}_G(T)/T$ (voir [3, lemme 5.5]). Donc l'ensemble $(P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}$ est en bijection avec l'ensemble des éléments I-réduits ${}^t\sigma$-stables de W^F; par ailleurs, comme ${}^t\sigma$ est quasi-central, tout élément ${}^t\sigma$-stable de $W^F = \mathrm{N}_G(T)^F / T^F$ a un représentant ${}^t\sigma$-stable dans $\mathrm{N}_G(T)^F$. Ainsi $(P^F \backslash G^F / U^F)^{{}^t\sigma}$ est en bijection avec un ensemble de représentants ${}^t\sigma$-stables dans $\mathrm{N}_G(T)^F$ des éléments I-réduits ${}^t\sigma$-stables de W^F. Soit n un tel élément qui relève $w \in W^F$; alors on a

$$P^F \cdot {}^t\sigma \cap {}^nU^F \cdot {}^t\sigma = \big((L^F \cap {}^nU^F) \cdot {}^t\sigma\big) \cdot (V^F \cap {}^nU^F)$$

et la restriction de $\tilde{f}$ à $(P^F \cap {}^nU^F) \cdot {}^t\sigma$ est égale à $\mathrm{Res}_{(L^F \cap {}^nU^F) \cdot {}^t\sigma}^{L^F \cdot {}^t\sigma}(f) \times \mathrm{Id}$ dans cette décomposition. On a donc

$$\begin{aligned}
&\big\langle \tilde{f}, {}^n({}^t\widetilde{\chi}_1) \big\rangle_{(P^F \cap {}^nU^F) \cdot {}^t\sigma} \\
&\qquad = \big\langle \mathrm{Res}_{(L^F \cap {}^nU^F) \cdot {}^t\sigma}^{L^F \cdot {}^t\sigma}(f), {}^n({}^t\widetilde{\chi}_1) \big\rangle_{L^F \cdot {}^t\sigma \cap {}^nU^F \cdot {}^t\sigma} \big\langle \mathrm{Id}, {}^t\chi_1 \big\rangle_{{}^{n^{-1}}V^F \cap U^F}.
\end{aligned}$$

Comme ${}^t\chi_1$ est un caractère régulier ${}^t\sigma$-stable de U^F, $\langle \mathrm{Id}, {}^t\chi_1 \rangle_{{}^{n^{-1}}V^F \cap U^F}$ est non nul et égal à 1 si et seulement si ${}^{n^{-1}}V \cap U$ ne contient aucun U_α pour $\alpha \in \Pi$.

LEMME 6.6. — *${}^{n^{-1}}V\cap U$ ne contient aucun U_α tel que α soit une racine simple si et seulement si $w=w_0^Iw_0$ où w_0^I est l'élément de plus grande longueur de W_I et w_0 l'élément de plus grande longueur de W.*

Démonstration. — On a
$$U=\prod_{\alpha\in\Phi^+}U_\alpha\quad\text{et}\quad V=\prod_{\{\alpha\in\Phi^+-\langle I\rangle^+\}}U_\alpha\ =\prod_{\{\alpha\in\Phi^+\cap{}^{w_0^I}\Phi^+\}}U_\alpha,$$
où w_0^I est le plus grand élément de W_I. Donc
$${}^{n^{-1}}V\cap U=\prod_{\{\alpha\in\Phi^+\cap{}^{w^{-1}}\Phi^+\cap{}^{w^{-1}w_0^I}\Phi^+\}}U_\alpha.$$

Or w est I-réduit, donc, $\ell(w(w_0^I)^{-1})=\ell(w)+\ell((w_0^I)^{-1})$ et
$$\Phi^+\cap{}^{w^{-1}}\Phi^+\cap{}^{w^{-1}w_0^I}\Phi^+=\Phi^+\cap{}^{w^{-1}w_0^I}\Phi^+.$$
Ce qui entraîne que ${}^{n^{-1}}V\cap U={}^{n^{-1}n_0^I}V\cap U$, où n_0^I est un représentant σ-stable de w_0^I dans $\mathrm{N}_G(T)^F$ et ce groupe ne contient aucun U_α où $\alpha\in\Pi$ si et seulement si $(w_0^I)^{-1}w$ envoie toute racine simple positive sur une racine négative, c'est-à-dire si et seulement si $(w_0^I)^{-1}w=w_0$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W. D'où le lemme 6.6. □

En tenant compte du lemme ci-dessus, du fait que w_0 envoie les racines positives sur l'ensemble des racines négatives, du fait que w_0^I change le signe des racines qui sont dans le système de racines de L et seulement le leur et du fait que w_0 et w_0^I sont ${}^t\sigma$-stables (car W et W_I le sont), on a $L\cap{}^nU=L\cap U$. Ainsi
$$\big\langle R_{L\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma}(f),\Gamma_z^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma}=\big\langle \mathrm{Res}_{(L^F\cap U^F)\cdot{}^t\sigma}^{L^F\cdot{}^t\sigma}(f),{}^n({}^t\widetilde{\chi}_1)\big\rangle_{(L^F\cap U^F)\cdot{}^t\sigma}.$$
Par la remarque 6.3, on obtient alors
$$\big\langle R_{L\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma}(f),\Gamma_z^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma}=\big\langle f,{}^n({}^t\tilde{\phi}_1)\big\rangle_{(L^F\cap U^F)\cdot{}^t\sigma}.$$
De plus, si on pose $n=t'w$ avec $t'\in T^F$, alors n agit par conjugaison sur $L^F\cap U^F$ de la même façon que t' et les caractères ${}^n({}^t\tilde{\phi}_1)$ et $({}^t\tilde{\phi}_1)$ sont dans la même $(T^\sigma)^F$-orbite : on en déduit la proposition 6.4. □

7. Relation avec les éléments réguliers

On considère la définition suivante de la dualité introduite par [4] pour les groupes réductifs non connexes :

DÉFINITION 7.1. — Soit (T,B) un couple formé d'un tore maximal de G et d'un sous-groupe de Borel le contenant, tous deux rationnels et σ-stables. Alors le Frobenius agit sur le système de racines de G par rapport à T ; on note τ

cette action. Alors τ préserve la base Π du système de racines de G par rapport à $T \subset B$; de plus, l'opérateur de dualité est défini par

$$\mathrm{D}_{G\cdot\sigma} = \sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|}\mathrm{R}_{L_I\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma} \circ {}^*\mathrm{R}_{L_I\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma},$$

où Π/τ est l'ensemble des orbites de τ dans la base Π et où $\mathcal{P}(\Pi/\tau)$ est l'ensemble des parties de Π/τ.

D'après [4, cor. 3.12], la dualité est une involution isométrique.

Proposition 7.2. — (i) *Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F\cdot\sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple).*

(ii) *Dans les deux cas, on a*

$$\big\langle \Gamma_z^{G\cdot\sigma}, (-1)^{|\Pi/\tau\times\sigma|}\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma} = \big|\mathrm{Z}\big((G^\sigma)^F\big)\big|\delta_{z,z'}.$$

Démonstration. — (i) En utilisant la proposition 6.4, on obtient

$$\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|}\mathrm{R}_{L_I\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma}\big(\Gamma_{h_{(L_I)^\sigma}(z)}^{L_I\cdot\sigma}\big).$$

Comme $\mathrm{R}_{L_I\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma}$ est une induction de Harish-Chandra, si P_I est le sous-groupe parabolique rationnel σ-stable de G contenant L_I et de radical unipotent V_I, en utilisant le lemme 6.5 et la remarque 6.3, on obtient

$$\mathrm{R}_{L_I\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma}\big(\Gamma_{h_{(L_I)^\sigma}(z)}^{L_I\cdot\sigma}\big) = \mathrm{Ind}_{(P_I)^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\Big[\mathrm{Ind}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{(L_I)^F\cdot{}^t\sigma}\big(\mathrm{Res}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{U^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\big)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\Big],$$

où on a choisi $t\in T$ ($t\in T^\sigma$ quand c'est possible et en particulier quand σ est unipotent) tel que $\mathcal{L}(t)\in z$. Le calcul montre cependant que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{(L_I)^F\cdot{}^t\sigma}&\big(\mathrm{Res}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{U^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\big)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\\ &= \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{(P_I)^F\cdot{}^t\sigma}\big(\mathrm{Res}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{U^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\big).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par la transitivité de l'induction :

$$\mathrm{R}_{L_I\cdot\sigma}^{G\cdot\sigma}(\Gamma_{h_{(L_I)^\sigma}(z)}^{L_I\cdot\sigma}) = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\big(\mathrm{Res}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{U^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\big).$$

Donc

$$\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma}(-1)^{|I/\sigma|}\big(\mathrm{Res}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{U^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\big).$$

On veut montrer que $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}(g\cdot\sigma)$ est nul si $g\cdot\sigma$ n'est pas régulier unipotent rationnel quand σ est unipotent et si $g\cdot\sigma$ n'est pas régulier pseudo-unipotent rationnel quand σ est semi-simple. En fait, il suffit de prouver que

$$\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma}(-1)^{|I/\sigma|}\big(\mathrm{Res}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}^{U^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\big)$$

est nul en dehors des éléments réguliers unipotents (resp. pseudo-unipotents) de $U^F\cdot{}^t\sigma$. Soit $u\cdot{}^t\sigma$ un élément de $U^F\cdot{}^t\sigma$ et soit $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau}u_{\mathcal{O}}$ la projection de u sur $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau}U_{\mathcal{O}}$. On pose $\chi_{\mathcal{O}}={}^t\chi_1|_{U_{\mathcal{O}}^F}$. On a alors

$$({}^t\widetilde{\chi}_1)(u\cdot{}^t\sigma)=\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau}\chi_{\mathcal{O}}(u_{\mathcal{O}}).$$

Ainsi,

$$\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma}(-1)^{|I/\sigma|}\big(\mathrm{Res}^{U^F\cdot{}^t\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\big)(u\cdot{}^t\sigma)=\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma}(-1)^{|I/\sigma|}\prod_{\mathcal{O}\in I}\chi_{\mathcal{O}}(u_{\mathcal{O}}).$$

On note à nouveau $\{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_s\}$, les représentants des σ-orbites de Π/τ.

Remarque 7.3. — Dans le cas où t n'est pas σ-stable, les automorphismes σ et ${}^t\sigma$ agissent de la même façon sur les racines.

Donc $\{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_s\}$ est aussi un ensemble de représentants des ${}^t\sigma$-orbites de Π/τ. Pour tout $k\in\{1,\ldots,s\}$, on note $o(k)$, l'ordre de $\mathcal{O}_k$ sous l'action de ${}^t\sigma$. On a :

$$\sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma}(-1)^{|I/\sigma|}\big(\mathrm{Res}^{U^F\cdot{}^t\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F}\big)(u\cdot{}^t\sigma)=\prod_{k=1}^{s}\Big(1-\prod_{\ell=0}^{o(k)-1}\chi_{{}^t\sigma^\ell(\mathcal{O}_k)}\big(u_{{}^t\sigma^\ell(\mathcal{O}_k)}\big)\Big).$$

Le (i) de la proposition 7.2 se déduit donc de la proposition suivante.

Proposition 7.4. — *Soit σ' un automorphisme quasi-central rationnel unipotent ou semi-simple de G. Soit $u=\prod_{\alpha\in\Phi^+}x_\alpha(k_\alpha)$ un élément de U^F et soit χ un caractère régulier σ'-stable de U^F. Alors, si $u\cdot\sigma'$ n'est pas régulier, il existe une racine α de Π telle que*

$$\chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1}u_{\sigma'^i(\alpha)}\big(k_{\sigma'^i(\alpha)}\big)\Big)=1,$$

où o est le cardinal de la σ'-orbite de la τ-orbite de α et où l'isomorphisme $\lambda\mapsto u_{\sigma'^i(\alpha)}$ est défini par la notation 4.11.

Démonstration. — 1) *Cas où σ' est unipotent.* — Supposons $u\cdot\sigma'$ non régulier. Alors, par le théorème 3.4, il existe $\alpha\in\Pi$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1}c_{\sigma'^i(\alpha)}\cdots c_{\sigma'^{n-1}(\alpha)}k_{\sigma'^i(\alpha)}=0,$$

où n est l'ordre de α sous l'action de σ'. On note $\mathcal{A}$ la σ'-orbite de α et a l'ordre de $\mathcal{A}$ sous l'action de τ. On note $\mathcal{O}$ la τ-orbite de α et o l'ordre de $\mathcal{O}$ sous l'action de σ'.

Pour toute racine $\beta \in \Phi^+$, on a $k_{\tau(\beta)} = k_\beta^q$ car u est rationnel et $c_{\tau(\beta)} = c_\beta^q$ par le lemme 4.5. Donc, pour tout $\ell \in \{1, \dots, a-1\}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_{\sigma'^i(\tau^\ell(\alpha))} \cdots c_{\sigma'^{n-1}(\tau^\ell(\alpha))} k_{\sigma'^i(\tau^\ell(\alpha))} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} c_{\sigma'^i(\alpha)} \cdots c_{\sigma'^{n-1}(\alpha)} k_{\sigma'^i(\alpha)}\Big)^{q^\ell} = 0.$$

On rappelle (lemme 4.7) que $\mathcal{A} \cup \cdots \cup \tau^{a-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{O} \cup \cdots \cup \sigma'^{o-1}(\mathcal{O})$. Ainsi, on peut trouver $u_0 = \prod_{\beta \in \Phi^+} x_\beta(\ell_\beta) \in U^F$ tel que $\ell_\beta = 0$ pour tout $\beta \in \bigcup_{\ell=0}^{a-1} \tau^\ell(\mathcal{A})$ et $v \in U$ tels que $u = v u_0 \sigma'(v)^{-1}$.

Pour toute τ-orbite Ω de Π, on note u_Ω et v_Ω les projections respectives de u et v sur $\prod_{\beta \in \Omega} U_\beta$; alors on a

$$\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\mathcal{O})} = \prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})} \prod_{i=0}^{o-1} \sigma'\big(v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\big)^{-1} \quad \text{dans } U/U^*.$$

Lemme 7.5. — *Si pour $\tilde{u} \in (U_\mathcal{O} \times \cdots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})})^F$ il existe $\tilde{v} \in U_\mathcal{O} \times \cdots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})}$ tel que $\tilde{u} = \tilde{v}\sigma'(\tilde{v})^{-1}$, alors il existe $\tilde{w} \in (U_\mathcal{O} \times \cdots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})})^F$ tel que $\tilde{u} = \tilde{w}\sigma'(\tilde{w})^{-1}$.*

Démonstration. — Soient $\widetilde{U} = U_\mathcal{O} \times \cdots \times U_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})}$ et $\mathcal{U} = \{\tilde{w}\sigma(\tilde{w})^{-1} ; \tilde{w} \in \widetilde{U}\}$. Alors $\mathcal{U}$ est l'orbite de 1 par σ'-conjugaison dans $\widetilde{U}$. Selon Digne & Michel [3, prop. 3.21] :

(i) $\tilde{w}\sigma'(\tilde{w})^{-1}$ est rationnel si et seulement si $\tilde{w}^{-1}F(\tilde{w})$ appartient au stabilisateur de 1 dans $\widetilde{U}$ sous l'action de σ'-conjugaison, c'est-à-dire à $\widetilde{U}^{\sigma'}$;

(ii) les $\widetilde{U}^F$-orbites de σ'-conjugaison de $\mathcal{U}^F$ sont paramétrées par les classes de F-conjugaison de $\widetilde{U}^{\sigma'}$.

Cependant $\widetilde{U}^{\sigma'}$ est un groupe abélien connexe ; donc $\mathrm{H}^1(F, \widetilde{U}^{\sigma'}) = 1$, ce qui permet de conclure qu'il n'y a qu'une $\widetilde{U}^F$-orbite de σ'-conjugaison dans $\mathcal{U}^F$. Ceci prouve le lemme 7.5. □

On a montré que si $u \cdot \sigma'$ est unipotent rationnel non régulier, il existe une τ-orbite $\mathcal{O}$ de Π telle que si o est l'ordre de $\mathcal{O}$ sous l'action de σ', alors on peut écrire

$$u_\mathcal{O} \cdots u_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})} = v_\mathcal{O} \cdots v_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})} \sigma'(v_\mathcal{O} \cdots v_{\sigma'^{o-1}(\mathcal{O})})^{-1},$$

où tous les facteurs du produit de droite sont rationnels. On a alors

$$\begin{aligned}\chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}\big(k_{\sigma'^i(\alpha)}\big)\Big) &= \chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1} u_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\Big)\\ &= \chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\,\sigma\Big(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\Big)^{-1}\Big)\\ &= \chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\Big)\,\chi\Big(\sigma\Big(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\Big)\Big)^{-1}\\ &= \chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\Big)\,\chi\Big(\prod_{i=0}^{o-1} v_{\sigma'^i(\mathcal{O})}\Big)^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition 7.4 lorsque σ' est unipotent.

2) *Cas où σ' est semi-simple.* — Soit us la décomposition de Jordan de $g\cdot\sigma'$; alors u et s sont rationnels, la partie unipotente u est dans U^F et s est un élément semi-simple rationnel de $U\cdot\sigma'$. Donc, d'après le lemme 3.13, on a $s \in \mathrm{Cl}_U(\sigma')^F$, c'est-à-dire $s \in \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma')$ car $U^{\sigma'}$ est connexe. Ainsi, il existe $v \in U^F$ tel que $s = {}^v\sigma'$ et $g = vu'\sigma'(v)^{-1}$, où on a posé $u' = {}^{v^{-1}}u \in (U^{\sigma'})^F$.

Si on pose $u' = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(\ell_\alpha)$, alors, comme χ est σ'-stable, pour toute racine simple α, on a

$$\chi\Big(\prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}\big(k_{\sigma'^i(\alpha)}\big)\Big) = \chi\Big(\prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}\big(\ell_{\sigma'^i(\alpha)}\big)\Big),$$

où $o(\alpha)$ est le cardinal de la σ'-orbite de la τ-orbite de α.

De plus, si $g\cdot\sigma'$ n'est pas régulier dans $G\cdot\sigma'$, alors u' ne l'est pas dans $(G^{\sigma'})^0$, donc il existe une σ'-orbite $\mathcal{A}$ de Π telle que pour toute racine $\alpha \in \mathcal{A}$ on ait $\ell_\alpha = 0$. On choisit $\alpha \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $i \in \{1,\ldots,o(\alpha)-1\}$, où $o(\alpha)$ est le cardinal de la σ'-orbite de la τ-orbite de α, on a $u_{\sigma'^i(\alpha)}(\ell_{\sigma'^i(\alpha)}) = 1$, d'où

$$\chi\Big(\prod_{i=0}^{o(\alpha)-1} u_{\sigma'^i(\alpha)}\big(\ell_{\sigma'^i(\alpha)}\big)\Big) = 1.$$

Ceci termine les démonstrations de la proposition 7.4 et du (i) de la proposition 7.2. □

Nous allons maintenant prouver le (ii) de la proposition 7.2. Soient z et z' deux F-classes de $\mathrm{Z}(G^\sigma)$. Soient t et t' dans T tels que $\mathcal{L}(t) \in z$ et $\mathcal{L}(t') \in z'$ (quand c'est possible, on choisit t et t' dans T^σ). On pose

$$\phi_{z'} = \sum_{I\in\mathcal{P}(\Pi/\tau)^\sigma} (-1)^{|I/\sigma|}\big(\mathrm{Res}^{U^F\cdot\, t'\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F)\,\cdot\, t'\sigma}({}^{t'}\widetilde{\chi}_1)\times \mathrm{Id}_{V_I^F}\big).$$

On a alors,

$$\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F.\,{}^{t'}\sigma}^{G^F.\,{}^{t'}\sigma}\phi_{z'}.$$

Calculons le produit scalaire

$$\begin{aligned}\big\langle\Gamma_z^{G\cdot\sigma}, \mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma} &= \big\langle\mathrm{Ind}_{U^F.\,{}^{t}\sigma}^{G^F.\,{}^{t}\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1), \mathrm{Ind}_{U^F.\,{}^{t'}\sigma}^{G^F.\,{}^{t'}\sigma}(\phi_{z'})\big\rangle_{G^F\cdot\sigma}\\ &= \big\langle\mathrm{Res}_{U^F.\,{}^{t'}\sigma}^{G^F.\,{}^{t'}\sigma}\mathrm{Ind}_{U^F.\,{}^{t}\sigma}^{G^F.\,{}^{t}\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1), \phi_{z'}\big\rangle_{U^F.\,{}^{t'}\sigma}.\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord qu'il existe $t'' \in T^\sigma$ tel que $\mathcal{L}(t'') \in z^{-1}z'$ (c'est toujours vrai lorsque σ est unipotent). Alors on peut supposer qu'on a choisi $t \in \mathcal{L}_T^{-1}(z)$ et $t' \in \mathcal{L}_T^{-1}(z')$ tels que $t^{-1}t' \in T^\sigma$. On a ${}^{t'}\sigma = {}^t\sigma$, d'où

$$\big\langle\Gamma_z^{G\cdot\sigma}, \mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F.\sigma} = \big\langle\mathrm{Res}_{U^F.\,{}^{t}\sigma}^{G^F.\,{}^{t}\sigma}\mathrm{Ind}_{U^F.\,{}^{t}\sigma}^{G^F.\,{}^{t}\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1), \phi_{z'}\big\rangle_{U^F.\,{}^{t}\sigma}.$$

Par la formule de Mackey pour les fonctions de ${}^t\sigma$-classes et en utilisant la bijection entre $U^F\backslash G^F/U^F$ et $\mathrm{N}_G(T)^F$, on obtient

$$\big\langle\Gamma_z^{G\cdot\sigma}, \mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma} = \sum_{n\in(\mathrm{N}_G(T)^F)^{{}^t\sigma}}\big\langle{}^n({}^t\widetilde{\chi}_1), \phi_{z'}\big\rangle_{(U^F\cap{}^nU^F)\cdot\,{}^t\sigma}.$$

Lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple), le fait qu'un élément régulier unipotent (resp. pseudo-unipotent) ne normalise qu'un seul sous-groupe de Borel (propositions 3.3 et 3.16) et le fait que n soit ${}^t\sigma$-stable entraînent que $(U^F\cap{}^nU^F)\cdot{}^t\sigma$ ne contient pas d'éléments réguliers si n n'est pas dans $(T^{{}^t\sigma})^F$.

Par ailleurs, $\langle({}^t\widetilde{\chi}_1), \mathrm{Res}^{U^F.\,{}^t\sigma}_{(U^F\cap(L_I)^F)\cdot\,{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)\times\mathrm{Id}_{V_I^F})\rangle_{U^F.\,{}^t\sigma}$ est nul si $I\neq\Pi/\tau$ (car $\langle({}^t\widetilde{\chi}_1), \mathrm{Id}_{V_I^F}\rangle_{V_I^F}$ est nul si $V_I^F\neq\{1\}$). On a donc

$$\big\langle\Gamma_z^{G\cdot\sigma}, \mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma} = (-1)^{|\Pi/\tau\times\sigma|}\sum_{t''\in(T^{{}^t\sigma})^F}\langle{}^{t''t}\chi_1, {}^{t'}\chi_1\rangle_{U^F}.$$

Cependant, comme $t^{-1}t'$ est σ-stable, les caractères ${}^{t''t}\chi_1$ et ${}^{t'}\chi_1$ ne peuvent être égaux que si $t^{-1}t'\in(T^\sigma)^F$ (c'est-à-dire si $z=z'$), et si $t''\in t^{-1}t'\mathrm{Z}(G^\sigma)^F$.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de t'' dans T^σ tel que $\mathcal{L}(t'')\in z^{-1}z'$.

Lemme 7.6. — *Sous l'hypothèse précédente, pour tout $u\in U^F$ tel que $u\cdot{}^{t'}\sigma$ soit régulier, on a $\mathrm{Ind}_{U^F.\,{}^t\sigma}^{G^F.\,{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)(u\cdot{}^{t'}\sigma)=0$.*

Démonstration. — On pose $t_0 = t^{-1}t'$. On a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)(u\cdot{}^{t'}\sigma)\\
&\quad= 1/|U^F| \sum_{\{x\in G^F \mid (x\cdot{}^t\sigma)(u\cdot{}^{t'}\sigma)(x\cdot{}^t\sigma)^{-1}\in U^F\cdot{}^t\sigma\}} ({}^t\widetilde{\chi}_1)\big((x\cdot{}^t\sigma)(u\cdot{}^{t'}\sigma)(x\cdot{}^t\sigma)^{-1}\big)\\
&\quad= 1/|U^F| \sum_{\{x\in G^F \mid x({}^t\sigma)ut_0\sigma(t_0)^{-1}x^{-1}\in U^F\cdot{}^t\sigma\}} ({}^t\widetilde{\chi}_1)\big(x({}^t\sigma)ut_0\sigma(t_0)^{-1}x^{-1}\big)\\
&\quad= 1/|U^F| \sum_{\{x\in G^F \mid (x\sigma(t_0))^t\sigma({}^{t_0^{-1}}u)^t\sigma(x\sigma(t_0))^{-1}\in U^F\}} ({}^t\widetilde{\chi}_1)\big((x\sigma(t_0))^t\sigma({}^{t_0^{-1}}u\cdot{}^t\sigma)(x\sigma(t_0))^{-1}\big)\\
&\quad= 1/|U^F| \sum_{\{y\in G^F \mid (yt_0)({}^{t_0^{-1}}u\cdot{}^t\sigma)(yt_0)^{-1}\in U^F\cdot{}^t\sigma\}} ({}^t\widetilde{\chi}_1)\big((yt_0)(({}^{t_0^{-1}}u)\cdot{}^t\sigma)(yt_0)^{-1}\big).
\end{aligned}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \big\{y\in G^F\,;(yt_0)(({}^{t_0^{-1}}u)\cdot{}^t\sigma)(yt_0)^{-1}\in U^F\cdot{}^t\sigma\big\}.$$

Pour montrer que $\operatorname{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)(u\cdot{}^{t'}\sigma)=0$, il suffit de montrer que $\mathcal{E}$ est vide. Le fait que $u\cdot{}^{t'}\sigma$ soit régulier entraîne que ${}^{t_0^{-1}}u\cdot{}^t\sigma$ est régulier aussi. Soit $y\in\mathcal{E}$, alors ${}^{yt_0}({}^{t_0^{-1}}u\cdot{}^t\sigma)\in \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$, donc ${}^{t_0^{-1}}u\cdot{}^t\sigma\in \mathrm{N}_{\widetilde{G}}({}^{t_0^{-1}y^{-1}}B)$, ce qui entraîne que $yt_0\in B$ car $({}^{t_0^{-1}}u)\cdot{}^t\sigma$ est régulier et donc d'après les propositions 3.3 et 3.16, ne normalise qu'un seul sous-groupe de Borel de G. On pose $y = vt_1$ avec $v\in U$ et $t_1\in T$; alors il existe $t_2\in T^\sigma$ tel que $t_1 = t_2t_0$ et $t_1\in T^F$. Ainsi $t_2F(t_2)^{-1} = t_0^{-1}F(t_0)\in z^{-1}z'$, donc $z^{-1}z'\cap\mathcal{L}_{T^\sigma}(T^\sigma)$ n'est pas vide ce qui contredit l'hypothèse faite sur $z^{-1}z'$. Donc $\mathcal{E}$ est vide et on obtient le résultat du lemme 7.6. □

D'après le lemme précédent, on a $\operatorname{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)(u\cdot{}^{t'}\sigma)=0$ pour tout $u\in U^F$ tel que $u\cdot{}^{t'}\sigma$ soit régulier, et d'après la démonstration du (i), $\phi_{z'}(u\cdot{}^{t'}\sigma)=0$ pour tout $u\in U^F$ tel que $u\cdot{}^{t'}\sigma$ ne soit pas régulier. Donc, lorsqu'il n'existe pas de $t''\in T^\sigma$ tel que $\mathcal{L}(t'')\in z^{-1}z'$, on a bien $\langle\Gamma_z^{G\cdot\sigma},\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\rangle_{G^F\cdot\sigma}=0$, ce qui termine la preuve de la proposition 7.2. □

8. Valeurs des fonctions de σ-classes sur les éléments réguliers unipotents ou pseudo-unipotents

On suppose que σ est rationnel quasi-central unipotent ou semi-simple. On choisit $u_0\in U^F$ tel que $u_0\cdot\sigma$ soit régulier. Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des éléments z de $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tels qu'il existe $t\in T^\sigma$ pour lequel $t^{-1}F(t)\in z$. Si σ est unipotent, on a $\mathcal{Z}=\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Pour tout $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$, soit $t\in T$ tel que $t^{-1}F(t)\in z$. On définit l'ensemble $\mathcal{U}_z = \big\{x\cdot\sigma\in G^F\cdot\sigma\,;\,x\cdot\sigma\sim_{G^F}{}^t(u_0U^*\cdot\sigma)\big\}$, définition qui est indépendante du choix de t.

PROPOSITION 8.1. — (i) *Les ensembles* $\mathcal{U}_z$ *sont disjoints.*

(ii) *La réunion des* $\mathcal{U}_z$ *est l'ensemble des éléments réguliers unipotents* (*resp. pseudo-unipotents*) *de* $G^F\cdot\sigma$ *lorsque* σ *est unipotent* (*resp. semi-simple*).

(iii) *Si* σ *est semi-simple et si la caractéristique est bonne pour* $(G^\sigma)^0$*, alors chaque* $\mathcal{U}_z$ *est une classe de conjugaison sous* G^F.

Démonstration. — (i) Soient z et z' dans $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ et $t\in T$ tel que $\mathcal{L}(t)$ soit un représentant de z. Alors, on a $t\mathcal{U}_{z'}t^{-1}=\mathcal{U}_{zz'}$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{U}_z\cap\mathcal{U}_1$ est vide pour tout $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Soit $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tel que $\mathcal{U}_z\cap\mathcal{U}_1$ soit non vide. Soient $t\in\mathcal{L}_T^{-1}(z)$, $x\in G^F$ et $u^*,\ v^*\in((U^\sigma)^*)^F$ tels que

$$ {}^t(u_0u^*\cdot\sigma) = {}^x(u_0v^*\cdot\sigma) \tag{2} $$

Comme $u_0u^*\cdot\sigma$ et $u_0v^*\cdot\sigma$ sont réguliers, ils ne normalisent qu'un seul sous-groupe de Borel qui est B (propositions 3.3 et 3.16) ; donc ${}^t(u_0u^*\cdot\sigma)$ et ${}^x(u_0v^*\cdot\sigma)$ normalisent le même sous-groupe de Borel qui est encore B, ce qui entraîne que $x\in B^F$. On a donc $x=su_x$ avec $s\in T^F$ et $u_x\in U^F$. L'équation (2) entraîne que ${}^{t^{-1}s}(u_0u^*\cdot\sigma)\in U^F\cdot\sigma$, donc que $(t^{-1}s)^{-1}\sigma(t^{-1}s)=1$, donc l'existence de $t_0\in T^\sigma$ tel que $s=tt_0$. Ainsi $t_0F(t_0)^{-1}=t^{-1}F(t)\in z$ et comme $t_0\in T^\sigma$, on a $z\in\mathcal{Z}$. Donc on peut supposer que $t\in T^\sigma$, s est aussi σ-stable. Donc d'après (2), on obtient ${}^{s^{-1}t}u_0u_1^*=u_xu_0\sigma(u_x)^{-1}u_2^*$ avec $u_i^*\in U^*$. On note $\widetilde{B}=B/U^*$. Si on note respectivement $\tilde{u}_x$ et $\tilde{u}_0$ les projections de u_x et u_0 dans $\widetilde{B}$, alors on obtient $(\tilde{u}_xst^{-1})\tilde{u}_0\sigma(\tilde{u}_xst^{-1})^{-1}=\tilde{u}_0$ dans $\widetilde{B}$. Ce qui entraîne que $st^{-1}\in\mathrm{Z}(G^\sigma)$: c'est clair d'après le lemme 3.11 lorsque σ est unipotent, c'est encore vrai lorsque σ est semi-simple car dans ce cas $u_0\cdot\sigma$ est une décomposition de Jordan et u_0 est régulier dans $(G^\sigma)^0$ ce qui entraîne que $\mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma)=\mathrm{Z}(G^\sigma)\times\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$. Donc il existe $\tau\in\mathrm{Z}(G^\sigma)$ tel que $\tau^{-1}F(\tau)=t^{-1}F(t)\in z$ et on a $z=1$.

(ii) *Cas unipotent.* — Soit $x\cdot\sigma$ un élément unipotent régulier rationnel, alors $x\cdot\sigma$ normalise un unique sous-groupe de Borel B'. Par ailleurs, ${}^{x\cdot\sigma}F(B')=F({}^{x\cdot\sigma}B')=F(B')$, donc $x\cdot\sigma$ normalise $F(B')$, ce qui signifie que B' est rationnel. Ainsi, il existe $g\in G^F$ tel que $B'={}^gB$ et $g^{-1}x\sigma(g)\cdot\sigma=b\cdot\sigma$ est un élément unipotent régulier de $B\cdot\sigma$.

Or, d'après le lemme 3.5, $b\cdot\sigma$ est régulier si et seulement si son image $\tilde{b}$ par la projection $B\to\widetilde{B}$ est σ-conjugué sous $\widetilde{B}$ à $\tilde{u}_0$. On note $\mathcal{U}$ la classe de σ-conjugaison de $\tilde{u}_0$ sous $\widetilde{B}$. Les classes de σ-conjugaison de $\mathcal{U}^F$ dans $\widetilde{B}^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$. Donc, si $\tilde{b}\in\mathcal{U}^F$, il existe $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$ et t dans $\mathcal{L}_{T^\sigma}^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$, un représentant de z, tels que $\tilde{b}$ soit dans la classe de σ-conjugaison sous $\widetilde{B}^F$ de ${}^t\tilde{u}_0$. Soit $\tilde{w}\in\widetilde{B}^F$ tel que $\tilde{b}=\tilde{w}{}^t\tilde{u}_0\sigma(\tilde{w})^{-1}$. Soit $w\in B^F$ qui ait pour image $\tilde{w}$ dans $\widetilde{B}^F$. Alors il existe $u^*\in(U^*)^F$ tel que $b=w{}^t(u_0u^*)\sigma(w)^{-1}$. Donc $b\cdot\sigma$ et par conséquent $x\cdot\sigma$ sont dans $\mathcal{U}_z$.

Cas semi-simple. — Soit $x\cdot\sigma$ un élément pseudo-unipotent régulier rationnel ; alors, par définition, il existe $g \in G$ tel que $x\cdot\sigma = {}^g(u_0\cdot\sigma)$ et tel que $g^{-1}F(g) \in \mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma)$; on a $\mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma) = \mathrm{Z}(G^\sigma)\times \mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$. Comme T et U^σ sont connexes, $\mathcal{L}_T$ et $\mathcal{L}_{U^\sigma}$ sont surjectives. Donc il existe $t \in T$, $u \in U^\sigma$ et $h \in G^F$ tels que $g = htu$. Ainsi $x\cdot\sigma = {}^h({}^t(u_0[u_0^{-1},u]\cdot\sigma))$ et $[u_0^{-1},u] \in (U^\sigma)^*$, donc $x\cdot\sigma \in \mathcal{U}_z$, où z est tel que $t^{-1}F(t) \in z$.

La réciproque est claire car pour tout $u^* \in (U^\sigma)^*$, u_0u^* est régulier dans $(G^\sigma)^0$ (voir [3, prop. 14.14]), et comme dans $(G^\sigma)^0$ tous les éléments unipotents réguliers sont conjugués (voir [3, prop. 14.16]), il existe $g \in (G^\sigma)^0$ tel que $u_0u^* = {}^gu_0$. Ainsi $u_0u^*\cdot\sigma = {}^g(u_0\cdot\sigma)$, donc $u_0u^*\cdot\sigma$ est régulier pseudo-unipotent.

(iii) D'après la proposition 3.15, les éléments pseudo-unipotents réguliers sont les conjugués sous G de $u_0\cdot\sigma$. Ainsi les G^F-classes d'éléments pseudo-unipotents réguliers rationnels sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, A(u_0\cdot\sigma))$, où on note $A(u_0\cdot\sigma) = \mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma)/\mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma)^0$. On rappelle que, comme σ est semi-simple, on a $\mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma) = \mathrm{Z}(G^\sigma)\times\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$. De plus, si la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, alors $\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$ est connexe (voir [3, prop. 14.18]). Ainsi $\mathrm{H}^1(F, A(u_0\cdot\sigma)) = \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$. Le nombre de classes pseudo-unipotentes régulières dans G^F est donc $|\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))|$. Comme les $\mathcal{U}_z$ sont des réunions de telles classes et qu'ils sont disjoints, on en déduit le résultat. □

DÉFINITION 8.2. — Soit c une réunion de classes de conjugaison de $G^F\cdot\sigma$; la fonction de classe γ_c est définie sur $G^F\cdot\sigma$ par

$$\gamma_c(x) = \begin{cases} |G^F|/|c| & \text{si } x\in c,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

DÉFINITION 8.3. — Pour tout $z \in \mathcal{Z}$, on note Φ_z la $(T^\sigma)^F$-orbite de ${}^t\chi_1$, où $t \in T^\sigma$ est tel que $t^{-1}F(t)\in z$ et on pose

$$\sigma_z = \sum_{\chi\in\Phi_z} \widetilde{\chi}(u_0\cdot\sigma).$$

La définition ci-dessus généralise celle des coefficients σ_z qui ont été définis dans [2, déf. 3.4] et dans [3, déf. 14.34] dans le cadre des groupes réductifs connexes. Les coefficients σ_z de $G\cdot\sigma$ peuvent s'exprimer en fonction des coefficients σ_z analogues pour le groupe réductif connexe $(G^\sigma)^0$.

THÉORÈME 8.4. — (i) *Soit $\widetilde{\chi}$ un caractère de $\widetilde{G}^F$ dont la restriction à G^F est irréductible et soit $z\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$; alors, avec les notations ci-dessus,*

$$\frac{1}{|\mathcal{U}_z|}\sum_{u\cdot\sigma\in\mathcal{U}_z}\widetilde{\chi}(u\cdot\sigma) = (-1)^{|(\Pi/\sigma)/\tau|}\sum_{\{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))\,;\,z^{-1}z'\in\mathcal{Z}\}}\sigma_{z^{-1}z'}\big\langle \mathrm{D}_{G\cdot\sigma}(\widetilde{\chi}),\Gamma^{G\cdot\sigma}_{z'}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma}.$$

(ii) *On a* $\langle\sum_z \Gamma_z^{G\cdot\sigma};\sum_z \Gamma_z^{G\cdot\sigma}\rangle_{G^F\cdot\sigma} = |\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))|\cdot|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|q^\ell$, *où* ℓ *est le rang semi-simple de* $(G^\sigma)^0$ *et* z *parcourt* $\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$.

Démonstration. — (i) Soit $t\in\mathcal{L}_T^{-1}(z)$ (si c'est possible et en particulier lorsque σ est unipotent, on choisit $t\in T^\sigma$). On a vu dans la démonstration de la proposition 7.2 que $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\phi_z$, où ϕ_z est une fonction de classe de $U^F\cdot{}^t\sigma$ nulle en dehors des éléments réguliers. Plus précisément, on a vu que si $u\cdot{}^t\sigma\in U^F\cdot{}^t\sigma$ est régulier, si on note $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau}u_{\mathcal{O}}$ la projection de u sur $\prod_{\mathcal{O}\in\Pi/\tau}U_{\mathcal{O}}$ et si on note $\{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_s\}$, les représentants des σ-orbites de Π/τ et pour tout $k\in\{1,\ldots,s\}$, $o(k)$, l'ordre de $\mathcal{O}_k$ sous l'action de σ (rappelons que ${}^t\sigma$ et σ agissent de la même façon sur les racines), alors

$$\phi_z(u\cdot{}^t\sigma) = \prod_{k=1}^{s-1}\Big(1-\prod_{\ell=0}^{o(k)-1}\chi_{\sigma^\ell(\mathcal{O}_k)}\big(u_{\sigma^\ell(\mathcal{O}_k)}\big)\Big).$$

Ainsi, ϕ_z est l'extension normalisée à $U^F\cdot\langle{}^t\sigma\rangle$ d'une fonction de classe ${}^t\sigma$-stable sur U^F, triviale sur $(U^*)^F$. Nous allons montrer que cette propriété de ϕ_z entraîne que $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\phi_z$ est constante sur chaque $\mathcal{U}_{z'}$.

Soit $z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$, soit $t'\in\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ un représentant de z', soient $x\cdot\sigma$ et $x'\cdot\sigma$ dans $\mathcal{U}_{z'}$. Alors il existe u_* et u'_* dans $((U^\sigma)^*)^F$ tels que $x\cdot\sigma$ et $x'\cdot\sigma$ soient conjugués sous G^F respectivement à ${}^{t'}(u_0u_*\cdot\sigma)$ et ${}^{t'}(u_0u'_*\cdot\sigma)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}(x'\cdot\sigma) &= \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\phi_z\big({}^{t'}(u_0u'_*\cdot\sigma)\big)\\ &= \frac{1}{|U^F|}\sum_{x\in\mathcal{E}}\phi_z\big(x{}^t\sigma t't^{-1}\big({}^t(u_0u'_*)\cdot{}^t\sigma\big)(x{}^t\sigma t't^{-1})^{-1}\big),\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}$ est défini par $\mathcal{E}=\{x\in G^F\,;\,x{}^t\sigma t't^{-1}({}^t(u_0u'_*)\cdot{}^t\sigma)(x{}^t\sigma t't^{-1})^{-1}\in U^F\cdot{}^t\sigma\}$. Cependant ${}^t(u_0u'_*)\cdot{}^t\sigma$ est un élément régulier du quasi-borel $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$ et $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$ est l'unique quasi-borel qui le contient. Si x est un élément de $\mathcal{E}$, on a

$$x{}^t\sigma t't^{-1}\big({}^t(u_0u'_*)\cdot{}^t\sigma\big)(x{}^t\sigma t't^{-1})^{-1}\in\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B).$$

Cela entraîne que $x{}^t\sigma t't^{-1}$ est aussi dans $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$ et que $x\in B^F$. On peut ainsi écrire $x{}^t\sigma t't^{-1}=vy$ avec $v\in U^F$ et $y\in T^{{}^t\sigma}\cdot{}^t\sigma$. On obtient alors

$$vy\big({}^t(u_0u'_*)\cdot{}^t\sigma\big)(vy)^{-1} = vy{}^tuy^{-1}{}^t\sigma(v)^{-1}w\cdot{}^t\sigma$$

avec $w\in U^*$. Mais comme ϕ_z est une extension à $U^F\cdot\langle\sigma\rangle$ d'une fonction de classe ${}^t\sigma$-stable de U^F triviale sur $(U^*)^F$, $\phi_z(vy{}^tuy^{-1}{}^t\sigma(v)^{-1}w\cdot{}^t\sigma)$ ne dépend pas de w et $\phi_z(x{}^t\sigma t't^{-1}({}^t(u_0u'_*)\cdot{}^t\sigma)(x{}^t\sigma t't^{-1})^{-1})$ ne dépend pas de u'_*. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}(x'\cdot\sigma) &= \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\phi_z\big({}^{t'}(u_0u'_*\cdot\sigma)\big)\\ &= \mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}\phi_z\big({}^{t'}(u_0u_*\cdot\sigma)\big) = \mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}(x\cdot\sigma).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}$ est constant sur $\mathcal{U}_{z'}$ pour tout $z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$. On sait, d'après la proposition 8.1, que lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple), l'ensemble des éléments réguliers unipotents (resp. pseudo-unipotents) de $G^F\cdot\sigma$ est la réunion des $\mathcal{U}_{z'}$; on en conclut grâce au (i) de la proposition 7.2 que $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}$ est nul en dehors des $\mathcal{U}_{z'}$. Ainsi, en utilisant la notation $\gamma_{z'}$ pour $\gamma_{\mathcal{U}_{z'}}$, on peut écrire

$$\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}=\sum_{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))}c_{z,z'}\gamma_{z'}$$

pour une matrice de coefficients $(c_{z,z'})$.

D'après le (ii) de la proposition 7.2, on a

$$\big\langle\Gamma_{z''}^{G\cdot\sigma},(-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma}=\big|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F\big|\,\delta_{z,z''}.$$

On obtient les relations suivantes sur les coefficents $c_{z,z'}$:

$$\sum_{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))}c_{z,z'}\big((-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}/|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|\big)\big\langle\Gamma_{z''}^{G\cdot\sigma},\gamma_{z'}\big\rangle_{G^F\cdot\sigma}=\delta_{z,z''}.$$

Ce qui entraîne que $(c_{z,z'})$ est inversible et a pour inverse la matrice $(d_{z,z'})$ définie par

$$d_{z,z'}=\big((-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}/|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|\big)\langle\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},\gamma_z\rangle_{G^F\cdot\sigma}.$$

Nous allons maintenant expliciter $\langle\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},\gamma_z\rangle_{G^F\cdot\sigma}$.

Par définition, $\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}=\mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}({}^t\widetilde{\chi}_1)$, où $({}^t\widetilde{\chi}_1)$ est l'extension normalisée à $U^F\cdot\langle{}^t\sigma\rangle$ d'un caractère régulier ${}^t\sigma$-stable de U^F qui se factorise à travers $U^F/(U^*)^F$. Ainsi, comme ci-dessus, on peut montrer que $\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}$ est constant sur les ensembles $\mathcal{U}_{z''}$.

Cependant $\langle\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},\gamma_z\rangle_{G^F\cdot\sigma}$ est la valeur moyenne de $\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}$ sur $\mathcal{U}_z$. Par définition de t, l'élément ${}^t(u_0\cdot\sigma)$ appartient à $\mathcal{U}_z$, ce qui entraîne immédiatement que $\langle\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},\gamma_z\rangle_{G^F\cdot\sigma}=\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}({}^t(u_0\cdot\sigma))$.

Calculons donc $\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}({}^t(u_0\cdot\sigma))$. Supposons tout d'abord que $z^{-1}z'$ ne soit pas dans $\mathcal{Z}$; alors, d'après le lemme 7.6,

$$\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big({}^t(u_0\cdot\sigma)\big)=\mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^{t'}\sigma}^{G^F\cdot{}^{t'}\sigma}({}^{t'}\widetilde{\chi}_1)({}^tu_0\cdot{}^t\sigma)=0.$$

Maintenant, supposons $z^{-1}z'$ dans $\mathcal{Z}$. Il existe $t_0\in T^\sigma$ tel que $\mathcal{L}(t_0)\in z^{-1}z'$. Alors $t'=t_0t$ est un représentant de z', ${}^{t'}\sigma={}^t\sigma$ et ${}^{t'}\chi_1$ est ${}^t\sigma$-stable.

$$\begin{aligned}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big({}^t(u_0\cdot\sigma)\big)&=\mathrm{Ind}_{U^F\cdot{}^t\sigma}^{G^F\cdot{}^t\sigma}({}^{t'}\widetilde{\chi}_1)\big({}^t(u_0\cdot\sigma)\big)\\&=1/|U^F|\sum_{\{g\in G^F\,;\,g({}^tu_0)({}^t\sigma)(g)^{-1}\in U^F\}}({}^{t'}\widetilde{\chi}_1)\big(g({}^tu_0\cdot{}^t\sigma)g^{-1}\big).\end{aligned}$$

Lemme 8.5. — *Soit $g\in G^F$ tel que $g({}^tu_0\cdot{}^t\sigma)g^{-1}\in U\cdot{}^t\sigma$, alors $g\in(T^\sigma)^FU^F$.*

Démonstration. — Soit $g \in G^F$. On suppose que l'on a $(g({}^tu_0 \cdot {}^t\sigma)g^{-1} \in U \cdot {}^t\sigma)$. Comme B est un sous-groupe de Borel σ-stable, B est aussi ${}^t\sigma$-stable et on a $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B) = B \cdot \langle {}^t\sigma\rangle$. Donc on a $g({}^tu_0 \cdot {}^t\sigma)g^{-1} \in \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(B)$, ce qui entraîne que ${}^tu_0 \cdot {}^t\sigma$ normalise le sous-groupe de Borel ${}^{g^{-1}}B$. Cependant, comme ${}^tu_0 \cdot {}^t\sigma$ est régulier, il ne normalise qu'un seul sous-groupe de Borel. Ainsi on a ${}^{g^{-1}}B = B$ et $g \in B^F$.

On pose $g = \tau v$ avec $\tau \in T^F$ et $v \in U^F$. Un calcul rapide montre que si on a $\tau v({}^tu_0 \cdot {}^t\sigma)(\tau v)^{-1} \in U \cdot {}^t\sigma$, alors $\tau \in (T^\sigma)^F$. D'où le lemme 8.5 $\square$

D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma}\big({}^t(u_0\cdot\sigma)\big) &= 1/|U^F| \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F,\ u\in U^F} ({}^{t'}\widetilde{\chi}_1)\big(u({}^{\tau t}u_0\cdot{}^t\sigma)u^{-1}\big)\\ &= \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} ({}^{t'}\widetilde{\chi}_1)({}^{\tau t}u_0\cdot{}^t\sigma)\\ &= \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} {}^{t'}\chi_1({}^{\tau t}u_0) \quad \text{car } {}^t\sigma = {}^{t'}\sigma\\ &= \sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} {}^{\tau t_0}\chi_1(u_0) = |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|\sigma_{z^{-1}z'}.\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du lemme suivant :

LEMME 8.6. — *Soit $z_0 \in \mathcal{Z}$ et soit $t_0 \in T^\sigma$ tel que $t_0^{-1}F(t_0) \in z_0$, alors on a $\sigma_z = |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|^{-1}\sum_{\tau\in(T^\sigma)^F} {}^{\tau t_0}\chi_1(u_0)$.*

Démonstration. — Par définition, on a $\sigma_{z_0} = \sum_{\chi\in\Phi_{z_0}} \widetilde{\chi}(u_0\cdot\sigma)$, ce que l'on peut écrire $\sigma_{z_0} = \sum_{\chi\in\Phi_{z_0}} \chi(u_0)$ car tous les caractères de Φ_{z_0} sont σ-stables. Comme Φ_{z_0} est la $(T^\sigma)^F$-orbite de ${}^{t_0}\chi_1$, il suffit de montrer que pour $\tau \in (T^\sigma)^F$, on a ${}^{\tau t_0}\chi_1(u_0) = {}^{t_0}\chi_1(u_0)$ si et seulement si $\tau \in \mathrm{Z}(G^\sigma)^F$. Mais ${}^{\tau t_0}\chi_1(u_0) = {}^{t_0}\chi_1(u_0)$ signifie que ${}^{\tau^{-1}}u_0 = u_0$, c'est-à-dire, comme τ est σ-stable que τ appartient au centralisateur dans G de $u_0\cdot\sigma$. Mais comme $u_0\cdot\sigma$ est régulier, on a $\mathrm{C}_G(u_0\cdot\sigma) \cap (T^\sigma)^F = \mathrm{Z}(G^\sigma)^F$, d'où le résultat. $\square$

L'inverse $(d_{z,z'})$ de la matrice $(c_{z,z'})$ est donc défini par

$$d_{z,z'} = \begin{cases} (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}\sigma_{z^{-1}z'} & \text{si } z^{-1}z' \in \mathcal{Z};\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

La relation $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma} = \sum_{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))} c_{z,z'}\gamma_{z'}$ peut être inversée et on obtient

$$\gamma_z = (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|} \sum_{\{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))\,;\,z^{-1}z'\in\mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'}\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},$$

ce qui entraîne que

$$\langle\gamma_z,\widetilde{\chi}\rangle_{G^F\cdot\sigma} = (-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|} \sum_{\{z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))\,;\,z^{-1}z'\in\mathcal{Z}\}} \sigma_{z^{-1}z'}\langle\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},\widetilde{\chi}\rangle_{G^F\cdot\sigma}.$$

On obtient alors le (i) du théorème 8.4 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathcal{U}_z|}&\sum_{u\cdot\sigma\in\mathcal{U}_z}\widetilde{\chi}(u\cdot\sigma)\\ &=(-1)^{|(\Pi/\tau)/\sigma|}\sum_{\{z'\in \mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))\,|\,z^{-1}z'\in\mathcal{Z}\}}\sigma_{z^{-1}z'}\langle\Gamma_{z'}^{G\cdot\sigma},\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\widetilde{\chi}\rangle_{G^F\cdot\sigma}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer le (ii) du théorème 8.4 :

$$\begin{aligned}\Big\langle\sum_z\Gamma_z^{G\cdot\sigma},\sum_z\Gamma_z^{G\cdot\sigma}\Big\rangle_{G^F\cdot\sigma}&=\Big\langle\sum_z\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma},\sum_z\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_z^{G\cdot\sigma}\Big\rangle_{G^F\cdot\sigma}\\ &=\Big\langle\sum_{z,z'}c_{z,z'}\gamma_{z'},\sum_{z,z'}c_{z,z'}\gamma_{z'}\Big\rangle_{G^F\cdot\sigma}\\ &\qquad\text{(en reprenant les notations du (i))}\\ &=\sum_{z'}\Big\langle\sum_z c_{z,z'}\gamma_{z'},\sum_z c_{z,z'}\gamma_{z'}\Big\rangle_{G^F\cdot\sigma}\\ &\text{(car } \langle\gamma_z,\gamma_{z'}\rangle_{G^F\cdot\sigma}=0 \text{ si } z\neq z',\ \text{les } \mathcal{U}_z \text{ étant disjoints).}\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\sum_z c_{z,z'}=1$ en utilisant les lemmes 8.7 à 8.10 ; cela revient à montrer que $\sum_{z'}c_{1,z'}=1$ car on a $c_{z,z'}=c_{1,z^{-1}z'}$ (la matrice $(d_{z,z'})$ vérifie en effet $d_{z,z'}=d_{1,z^{-1}z'}$ pour tout $z,z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma))$; c'est donc encore vrai pour la matrice inverse $(c_{z,z'})$).

Dans [4], le caractère de Steinberg de $\widetilde{G}^F$ est défini comme le dual de l'identité, comme dans le cas connexe. On note alors $\mathrm{St}_{G\cdot\sigma}=\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\mathrm{Id}_{G\cdot\sigma}$, la restriction du caractère de Steinberg à $G^F\cdot\sigma$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{z'}c_{1,z'}&=\langle\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma_1^{G\cdot\sigma},\mathrm{Id}_{G\cdot\sigma}\rangle=\langle\Gamma_1^{G\cdot\sigma},\mathrm{St}_{G\cdot\sigma}\rangle\\ &=\frac{1}{|G^F|}\sum_{g\in G^F}\Gamma_1^{G\cdot\sigma}(g\cdot\sigma)\,\overline{\mathrm{St}_{G\cdot\sigma}(g\cdot\sigma)}.\end{aligned}$$

Or $\Gamma_1^{G\cdot\sigma}(g\cdot\sigma)=\mathrm{Ind}_{U^F\cdot\sigma}^{G^F\cdot\sigma}\widetilde{\chi}_1$ est nul si $g\cdot\sigma$ n'est pas conjugué sous G^F à un élément de $U^F\cdot\sigma$. Par ailleurs, $\mathrm{St}_{G\cdot\sigma}(g\cdot\sigma)=0$ si $g\cdot\sigma$ n'est pas quasi-semi-simple (voir [4, prop. 3.18]).

LEMME 8.7. — *Lorsque σ est unipotent (resp. semi-simple), si $g\cdot\sigma$ est à la fois unipotent (resp. pseudo-unipotent) et quasi-semi-simple, alors $g\cdot\sigma$ est conjugué sous G à σ.*

Démonstration. — Le cas unipotent est traité par [7, prop. II.2.21]. Considérons le cas où σ est semi-simple. D'après le corollaire 3.12, comme $g\cdot\sigma$ est pseudo-unipotent, il existe $x\in G$ et $u\in U^\sigma$ tels que $g\cdot\sigma={}^x(u\cdot\sigma)$. Alors $u\cdot\sigma$ est quasi-semi-simple et il existe un couple $T'\subset B'$ formé d'un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel de G stables par conjugaison par $u\cdot\sigma$. Comme u est unipotent, σ est semi-simple et comme u et σ commutent, u est la partie unipotente et σ la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $u\cdot\sigma$. Ainsi, le fait que $u\cdot\sigma\in \mathrm{N}_G(B')$ (resp. $\mathrm{N}_G(T',B')$) entraîne que u et σ sont dans $\mathrm{N}_G(B')$ (resp. $\mathrm{N}_G(T',B')$). Donc, B' et T' sont σ-stables et $u\in T'$. Ainsi u est à la fois unipotent et semi-simple, ce qui entraîne que $u=1$. □

D'après la proposition 3.21 de [3], si $h\in G$, alors $g\cdot\sigma={}^h\sigma$ est rationnel si et seulement si $h^{-1}F(h)\in G^\sigma$ et les G^F-classes de conjugaison de $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F,G^\sigma/(G^\sigma)^0)=\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ (théorème 2.3, (ii)). Pour toute F-classe $z'\in\mathrm{H}^1(F,\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$, on choisit un élément t' dans $\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tel que l'image de $\mathcal{L}_T(t')=t'^{-1}F(t')$ dans $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$ soit dans z'. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces représentants et on obtient

$$\sum_{z'} c_{1,z'}=\frac{1}{|G^F|}\sum_{t'\in\mathcal{E}}\big|\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)\big|\,\Gamma_1^{G\cdot\sigma}({}^{t'}\sigma)\,\overline{\mathrm{St}_{G\cdot\sigma}({}^{t'}\sigma)},$$

c'est-à-dire, d'après [4, prop. 3.18],

$$\sum_{z'} c_{1,z'}=\frac{1}{|G^F|}\sum_{t'\in\mathcal{E}}\big|\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)\big|\,\Gamma_1^{G\cdot\sigma}({}^{t'}\sigma)\,\big|\big((G^{{}^{t'}\sigma})^0\big)^F\big|_p.$$

(Lorsque σ est unipotent, G^σ est connexe et $\mathcal{E}=\{1\}$.)

LEMME 8.8. — *Soit $t'\in\mathcal{L}_T^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ tel que l'image de $\mathcal{L}_T(t')=t'^{-1}F(t')$ dans $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$ ne soit pas dans la F-classe triviale de $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$. Alors on a $\Gamma_1^{G\cdot\sigma}({}^{t'}\sigma)=0$.*

Démonstration. — On a

$$\Gamma_1^{G\cdot\sigma}({}^{t'}\sigma)=\mathrm{Ind}_{U^F\cdot\sigma}^{G^F\cdot\sigma}\widetilde{\chi}_1({}^{t'}\sigma)=\frac{1}{|U^F|}\sum_{\{x\in G^F\,;\,x{}^{t'}\sigma x^{-1}\in U^F\cdot\sigma\}}\widetilde{\chi}_1(x{}^{t'}\sigma x^{-1}).$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)\cap U\cdot\sigma$ est vide. Or :

LEMME 8.9. — *Si σ est un élément quasi-central rationnel du quasi-tore $\mathrm{N}_G(T,B)$, alors $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F\cap U\cdot\sigma=\mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$.*

Démonstration. — On va d'abord montrer que $\mathrm{Cl}_G(\sigma)\cap B\cdot\sigma=\mathrm{Cl}_B(\sigma)$.

Soit $x\in G$ tel que $x\cdot\sigma x^{-1}\in B\cdot\sigma$. Alors le sous-groupe de Borel ${}^{x^{-1}}B$ est σ-stable. Le sous-groupe de ${}^{x^{-1}}B$ contient un tore maximal σ-stable T' (*cf.* [4, prop. 1.11 (i)]) et les couples $T\subset B$ et $T'\subset{}^{x^{-1}}B$ sont conjugués sous G^σ (*cf.* [4, prop. 1.21]). Donc il existe $g\in G^\sigma$ tel que ${}^{x^{-1}}B={}^gB$, c'est-à-dire tel que $xg\in B$ et si on pose $b=xg$, alors $x\sigma x^{-1}=b\sigma b^{-1}$. D'où l'égalité $\mathrm{Cl}_G(\sigma)\cap B\cdot\sigma=\mathrm{Cl}_B(\sigma)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Cl}_B(\sigma) \cap U\cdot\sigma = \mathrm{Cl}_U(\sigma)$. Soit $b \in B$ tel que $b\sigma b^{-1} = u\cdot\sigma \in U\cdot\sigma$. On peut écrire de façon unique $b = tv$ avec $t \in t$ et $v \in U$. Un calcul rapide montre que si $b\sigma b^{-1} = u\cdot\sigma$, alors on a $b\sigma b^{-1} \in \mathrm{Cl}_U(\sigma)$.

On a donc $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U\cdot\sigma = \mathrm{Cl}_U(\sigma)^F$. Or, d'après [3, prop. 3.21], les U^F-classes de conjugaisons de $\mathrm{Cl}_U(\sigma)^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, U^\sigma)$ et comme U^σ est connexe, on a $\mathrm{Cl}_U(\sigma)^F = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$. D'où $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U\cdot\sigma = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$. □

D'après le lemme 8.9 ci-dessus, on a $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F \cap U\cdot\sigma = \mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma) \cap U\cdot\sigma$. Donc $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma) \cap U\cdot\sigma \subset \mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)$; or on a vu plus haut que les G^F-classes de conjugaison de $\mathrm{Cl}_G(\sigma)^F$ sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, G^\sigma/(G^\sigma)^0) = \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$. En particulier, la classe $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma)$ est la G^F-classe paramétrée par la F-classe z' de l'image de $t'^{-1}F(t')$ dans $\mathrm{Z}(G^\sigma)/\mathrm{Z}((G^\sigma)^0)$; elle est distincte de $\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)$, car z' n'est pas triviale. Donc $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{t'}\sigma) \cap U\cdot\sigma$ est vide. On en déduit le lemme 8.8. □

Revenons à la démonstration du (ii) du théorème 8.4. Le lemme 8.8 permet d'écrire que

$$\sum_{z'} c_{1,z'} = \frac{1}{|G^F|}\left|\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)\right| \cdot \Gamma_1^{G\cdot\sigma}(\sigma) \cdot \left|((G^\sigma)^0)^F\right|_p.$$

(Le résultat est évident lorsque σ est unipotent et le lemme 8.8 est alors inutile.) Nous allons calculer $\Gamma_1^{G\cdot\sigma}(\sigma)$:

$$\Gamma_1^{G\cdot\sigma}(\sigma) = \mathrm{Ind}_{U^F\cdot\sigma}^{G^F\cdot\sigma}\widetilde{\chi}_1(\sigma) = \frac{1}{|U^F|}\sum_{\{x\in G^F\,;\,x\sigma x^{-1}\in U^F\cdot\sigma\}} \widetilde{\chi}_1(x\sigma x^{-1}).$$

LEMME 8.10. — *Soit $x \in G^F$; alors on a $x\sigma(x)^{-1} \in U^F$ si et seulement si $x \in U^F(G^\sigma)^F$.*

Démonstration. — D'après le lemme 8.9, on a $\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma) \cap U\cdot\sigma = \mathrm{Cl}_{U^F}(\sigma)$. Ainsi, si $x \in G^F$ est tel que $x\sigma(x)^{-1} \in U^F$, alors il existe $v \in U^F$ tel que $x\sigma x^{-1} = v\sigma v^{-1}$, c'est-à-dire tel que $xv^{-1} \in G^\sigma$. La réciproque est évidente. □

Ainsi, $\Gamma_1^{G\cdot\sigma}(\sigma) = |U^F|^{-1}\cdot|U^F|\cdot|(G^\sigma)^F|\cdot|(U^\sigma)^F|^{-1} = |(G^\sigma)^F|\cdot|(U^\sigma)^F|^{-1}$. Et l'on obtient comme annoncé

$$\sum_{z'} c_{1,z'} = \frac{1}{|G^F|}\cdot|\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)|\cdot|(G^\sigma)^F|\cdot\left|(U^\sigma)^F\right|^{-1}\cdot\left|((G^\sigma)^0)^F\right|_p = 1.$$

La dernière égalité vient du fait que $|G^F| = |\mathrm{Cl}_{G^F}(\sigma)|\cdot|(G^F)^\sigma|$ et du fait que $|((G^\sigma)^0)^F|_p = |(U^\sigma)^F|$, ce dernier résultat étant de [3, prop. 3.19].

Terminons maintenant la démonstration de 8.4 (ii). On a :

$$\Big\langle \sum_z \Gamma_z^{G\cdot\sigma}, \sum_z \Gamma_z^{G\cdot\sigma}\Big\rangle_{G^F\cdot\sigma} = \sum_{z'} \langle\gamma_{z'}, \gamma_{z'}\rangle_{G^F\cdot\sigma} = \sum_{z'} |G^F|/|\mathcal{U}_{z'}|.$$

Or, si z et z' sont deux éléments de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$ et si t et t' sont respectivement des représentants dans $\mathcal{L}_{T^\sigma}^{-1}(\mathrm{Z}(G^\sigma))$ de z et z', alors $\mathcal{U}_{z'} = {}^{t't^{-1}}\mathcal{U}_z$. Donc les $\mathcal{U}_z$ ont tous le même cardinal.

Calculons tout d'abord le cardinal de $\mathcal{U}_z$ lorsque σ est unipotent. Selon le (ii) de la proposition 8.1, l'ensemble des éléments réguliers unipotents de $G^F\cdot\sigma$ est la réunion des $\mathcal{U}_z$, donc le cardinal de n'importe quel $\mathcal{U}_z$ est égal au nombre d'éléments réguliers unipotents de $G^F\cdot\sigma$ divisé par le cardinal de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))$. Ainsi, par le théorème 3.6, on a

$$|\mathcal{U}_z| = |G^F|/(|(\mathrm{Z}(G^\sigma)^0)^F| \times q^\ell \times |\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))|)$$

où ℓ est le rang-semi-simple de G^σ. On peut alors simplifier l'expression de $|\mathcal{U}_z|$ en utilisant le fait que $|\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}(G^\sigma))| = |\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|/|(\mathrm{Z}(G^\sigma)^0)^F|$; on obtient alors

$$|\mathcal{U}_z| = |G^F|/(|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F| \times q^\ell).$$

Considérons finalement le cas semi-simple. Il existe $t \in (T^\sigma)^0$ tel que

$$\mathcal{U}_z = \big\{x\cdot\sigma \in G^F\cdot\sigma\,;\, x\cdot\sigma \sim_{G^F} {}^t(u_0(U^\sigma)^*)\cdot\sigma\big\}.$$

Par ailleurs, $\mathcal{U}_z$ est une réunion de G^F-classes unipotentes qui sont paramétrées par $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0))$. Pour toute F-classe de $\mathrm{C}_{U^\sigma}(u_0)$, on peut choisir un représentant dans U^σ ; soit $\{u_1, \dots, u_r\}$ un ensemble de tels représentants. Alors $\mathcal{U}_z$ est la réunion disjointe des classes $\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{tu_i}u_0\cdot\sigma)$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{U}_z| &= \sum_i \big|\mathrm{Cl}_{G^F}({}^{tu_i}u_0\cdot\sigma)\big| \\
&= \sum_i |G^F|/|\mathrm{C}_{G^F}({}^{tu_i}u_0\cdot\sigma)| = \sum_i |G^F|/|\mathrm{C}_{(G^\sigma)^F}({}^{tu_i}u_0)| \\
&= \sum_i \big(|G^F|/|\mathrm{C}_{(G^\sigma)^{0F}}({}^{tu_i}u_0)|\big) \times \big(|Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z(G^\sigma)^F|\big) \\
&= \big(|G^F|/|(G^\sigma)^{0F}|\big) \times (|Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z(G^\sigma)^F|\big) \sum_i \big|\mathrm{Cl}_{(G^\sigma)^{0F}}({}^{tu_i}u_0)\big| \\
&= \big(|G^F|/|(G^\sigma)^{0F}|\big) \times \big(|Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z(G^\sigma)^F|\big) \times |\mathcal{U}'_{z'}|
\end{aligned}$$

où $\mathcal{U}'_{z'}$ est le sous-ensemble de $(G^\sigma)^0$ défini par

$$\mathcal{U}'_{z'} = \big\{x\cdot\sigma \in (G^\sigma)^{0F}\,;\, x \sim_{(G^\sigma)^{0F}} {}^t(u_0(U^\sigma)^*)\big\}$$

et $z' \in \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Z}((G^\sigma)^0))$ est tel que $t^{-1}F(t) \in z'$. Alors la réunion disjointe des $\mathcal{U}'_z$, pour $z \in \mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))$ est l'ensemble des éléments réguliers unipotents de $(G^\sigma)^{0F}$ (voir [2, prop. 3.2]). Par ailleurs, les $\mathcal{U}'_z$ sont géométriquement conjugués et sont donc tous de même cardinal qui est égal au nombre des unipotents réguliers de $(G^\sigma)^{0F}$ divisé par $|\mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))|$, c'est-à-dire

$$\big|(G^\sigma)^{0F}\big|/\big(|\mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))| \times |Z((G^\sigma)^0)^{0F}|q^\ell\big),$$

où ℓ est le rang semi-simple de $(G^\sigma)^0$ (voir [3, prop. 14.23]).

En utilisant le fait que $|\mathrm{H}^1(F, Z((G^\sigma)^0))| = |Z((G^\sigma)^0)^F|/|Z((G^\sigma)^0)^{0F}|$, on en déduit le cardinal de $\mathcal{U}_z$ lorsque σ est semi-simple et on retrouve la même formule que dans le cas unipotent :

$$|\mathcal{U}_z| = |G^F|/(|Z(G^\sigma)^F|q^\ell).$$

Remarque 8.11. — Les calculs ci-dessus montrent que le nombre d'éléments pseudo-unipotents réguliers rationnels de $G^F\cdot\sigma$ est égal à $|\mathrm{H}^1(F, Z(G^\sigma))|$ multiplié par le cardinal de $\mathcal{U}_z$, on retrouve la formule du théorème 3.6 :

$$|G^F|/(|Z((G^\sigma)^0)^F|q^\ell)$$

On peut maintenant terminer les calculs du théorème 8.4

$$\begin{aligned}\Big\langle \sum_z \Gamma_z^{G\cdot\sigma}, \sum_z \Gamma_z^{G\cdot\sigma}\Big\rangle_{G^F\cdot\sigma} &= \sum_{z'} |G^F|/|\mathcal{U}_{z'}| \\ &= \big|\mathrm{H}^1\big(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)\big)\big| \times \big(|G^F|/|\mathcal{U}_z|\big) \\ &\qquad \text{où } z \in \mathrm{H}^1\big(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)\big) \text{ est quelconque} \\ &= \big|\mathrm{H}^1\big(F, \mathrm{Z}(G^\sigma)\big)\big| \times \big|Z(G^\sigma)^F\big|q^\ell. \end{aligned}$$ □

Nous allons appliquer les résultats précédents au cas où $\mathrm{Z}(G^\sigma)$ est connexe.

Corollaire 8.12. — *Supposons $\mathrm{Z}(G^\sigma)$ connexe. Alors on a une unique représentation de Gelfand-Graev de $G\cdot\sigma$ que l'on note Γ et $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma$ est égal à $|\mathrm{Z}(G^\sigma)^F|q^\ell$ sur les éléments réguliers unipotents lorsque σ est unipotent et pseudo-unipotents lorsque σ est semi-simple* (*et à zéro ailleurs*).

Démonstration. — C'est clair, car dans ce cas $\mathcal{U}_1$ est l'ensemble de tous les unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers et on a $\mathrm{D}_{G\cdot\sigma}\Gamma = \gamma_{\mathcal{U}_1}$ en prenant pour $\gamma_{\mathcal{U}_1}$ la définition 8.2. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carter (R.W.) – *Finite groups of Lie type*, Wiley-Interscience, 1985.

[2] Digne (F.), Lehrer (G.I.) & Michel (J.) – *The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre*, J. reine angew. Math., t. **425** (1992), pp. 155–192.

[3] Digne (F.) & Michel (J.) – *Representations of Finite Groups of Lie Type*, London Math. Soc. Student Texts, vol. 21, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[4] ——, *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **27** (1994), pp. 345–406.

[5] ——, *Points fixes des automorphismes quasi-semi-simples*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, t. **334** (2002), pp. 1055–1060.

[6] Malle (G.) – *Generalized Deligne-Lusztig characters*, J. Alg., t. **159** (1993), no. 1, pp. 64–97.

[7] Spaltenstein (N.) – *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Lectures Notes in Math., vol. 946, Springer, 1982.

[8] Steinberg (R.) – *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 80, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.