Bull. Soc. math. France
132 (4), 2004, p. 543–567

SUR LES ORBITES D'UN SOUS-GROUPE SPHÉRIQUE DANS LA VARIÉTÉ DES DRAPEAUX

par Nicolas Ressayre

Résumé. — Soient G un groupe algébrique complexe réductif et connexe, B un sous-groupe de Borel de G et H un sous-groupe sphérique de G.
Soit X un plongement $G \times G$-équivariant de G. Nous savons que $B \times H$ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G ; nous montrons qu'il n'en a qu'un nombre fini dans X. Soit $\overline{V}$ l'adhérence dans X d'une orbite de $B \times H$ dans G et $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence d'une orbite de $G \times G$ dans X. Si X est toroïdal, nous montrons que l'intersection $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$ est propre dans X et la décrivons ensemblistement. Si de plus X est lisse, nous calculons les multiplicités d'intersections qui sont des puissances de 2. Enfin, si X est toroïdal, lisse et complet, nous exprimons la classe de cohomologie de $\overline{V}$ comme une combination linéaire des classes d'adhérence dans X d'orbites de $B \times B$ dans G. Nous utilisons la cohomologie B-équivariante pour obtenir ce dernier résultat.
Soit Y un plongement lisse G-équivariant et toroïdal de G/H et $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence d'une orbite de G dans Y. Soit $\overline{V}$ l'adhérence dans Y d'une orbite de B dans G/H. Dans [4], après la proposition 6, M. Brion demande si chaque composante irréductible de $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$ contient des points lisses de $\overline{V}$: nous répondons négativement à cette question dans la dernière partie.

Texte reçu le 2 décembre 2002, révisé le 3 novembre 2003, accepté le 16 juin 2003

Nicolas Ressayre, Université Montpellier II, Département de Mathématiques, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5 (France)
E-mail : `ressayre@math.univ-montp2.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14M15, 14M17, 14C17, 55N91.

Mots clefs. — Plongement de groupes, variétés sphériques, adhérences d'orbites, variété des drapeaux, cohomologie équivariante .

ABSTRACT (*On the orbits of a spherical subgroup in the flag manifold*)
Let G be a complex reductive algebraic group, B be a Borel subgroup of G and H be a spherical subgroup of G.
Let X be a $G\times G$-equivariant embedding of G. We know that $B\times H$ have finitely many orbits in G ; we show that it has finitely many ones in X. Let $\overline{V}$ be the closure in X of a $(B\times H)$-orbit in G, and $\overline{\mathcal{O}}$ be the closure of a $(G\times G)$-orbit in X. If X is toroïdal, we show that the intersection $\overline{V}\cap\overline{\mathcal{O}}$ is proper in X and we describe this intersection. If in addition X is smooth, we determine the intersection multiplicities of $\overline{V}\cap\overline{\mathcal{O}}$, which are powers of 2. If X is toroïdal, smooth and complete, we write the class of cohomology of $\overline{V}$ as a linear combinaison of the classes of the closures in X of the $(B\times B)$-orbits in G. The proof of this last statement uses B-equivariant cohomology.
Let Y be a smooth G-equivariant embedding of G/H and $\overline{\mathcal{O}}$ be the closure of a G-orbit in Y. Let $\overline{V}$ be the closure in Y of a B-orbit in G/H. In [4], just after Proposition 6, M. Brion asks if each irreducible component of $\overline{V}\cap\overline{\mathcal{O}}$ intersects the set of the smooth points in $\overline{V}$: we give an example which answers 'no' to this question.

1. Introduction

Soient G un groupe algébrique complexe réductif et connexe, et B un sous-groupe de Borel de G. Soit H un sous-groupe fermé de G. On suppose que H est sphérique c'est-à-dire (voir [1]) que l'ensemble $\mathbf{H}(G/B)$ des orbites de H dans G/B est fini. Ces orbites et leurs adhérences jouent un rôle important en théorie des représentations (voir par exemple [20]). Par ailleurs, les classes des adhérences d'orbites de B dans les G-variétés sphériques (c'est-à-dire les variétés normales, munies d'une action de G et ne contenant qu'un nombre fini d'orbites de B) sont des générateurs naturels de la cohomologie de ces variétés, supposées lisses et complètes. Il est donc intéressant de comprendre l'ensemble $\mathbf{B}(G/H)$ des orbites de B dans G/H. Ce dernier est en bijection naturelle avec $\mathbf{H}(G/B)$.

Fixons un tore maximal T de G inclus dans B. Si V est une orbite de B dans G/H, on note $\overline{V}$ son adhérence dans G/H. On construit dans [14], [9] et [4] un graphe orienté $\Gamma(G/H)$ dont les sommets sont les éléments de $\mathbf{B}(G/H)$ et dont les arêtes, qui peuvent être simples ou doubles, sont étiquetées par les racines simples de G. Soit α une racine simple et P_α le sous-groupe parabolique minimal de G et contenant B associé à α. Soit V et V' deux orbites de B dans G/H. Une arête étiquetée par α monte de V à V' si et seulement si $\overline{V}\neq P_\alpha\cdot\overline{V}=\overline{V}'$. Alors, l'application naturelle $P_\alpha\times_B\overline{V}\to\overline{V}'$ est génériquement finie de degré 1 ou 2 ; ceci détermine si l'arête est simple ou double.

Des travaux de M. Brion mais aussi de S. Pin ont montré que ce graphe $\Gamma(G/H)$ apporte des informations sur la lissité, la normalité, la classe de cohomologie des adhérences d'orbites de H dans G/B (voir [3], [4] et [11]). Comprendre les interactions entre les propriétés combinatoires, géométriques et topologiques de l'ensemble $\mathbf{H}(G/B)$ est un sujet vaste auquel cet article apporte une modeste contribution.

On considère l'action de $G \times G$ sur G par multiplication à gauche et à droite. L'ensemble $\mathbf{B}(G/H)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $\mathbf{BH}(G)$ des orbites de $B \times H$ dans G. On utilisera implicitement dans cette introduction les bijections naturelles entre les trois ensembles $\mathbf{H}(G/B)$, $\mathbf{B}(G/H)$ et $\mathbf{BH}(G)$. On s'intéresse aux éléments de $\mathbf{BH}(G)$ et surtout à leurs adhérences dans les plongements $G \times G$-équivariant de G. Soit X un tel plongement. Notre premier résultat (voir le corollaire 4.7) est le

THÉORÈME A. — *L'ensemble des orbites de $B \times H$ dans X est fini.*

Lorsque $H = B$, ce résultat était déjà connu puisque plus généralement, toute variété sphérique ne contient qu'un nombre fini d'orbite d'un sous-groupe de Borel. Simultanément à la rédaction du présent article, T.A. Springer [18] a paramétré les orbites de $B \times B$ dans le plongement canonique de G (supposé semi-simple adjoint). Ici, dans le cas où X est toroïdal (voir le paragraphe 4.1.1 pour une définition précise), nous paramétrons (voir la proposition 4.6) les orbites de $B \times H$ dans X.

Soit V_G dans $\mathbf{BH}(G)$. Notons $\overline{V}_G^X$ l'adhérence de V_G dans X. Nous obtenons des résultats sur les sous-variétés $\overline{V}_G^X$ dès que X est toroïdal. Cependant, par soucis de simplicité, nous supposons dans l'introduction, que G est semi-simple adjoint et que X est le plongement canonique de G (voir [5]). Notons Z l'unique orbite fermée de $G \times G$ dans X. Celle-ci est isomorphe à $G/B \times G/B$, ou encore à $G/B^- \times G/B$ où B^- est le sous-groupe de Borel de G contenant T et opposé à B.

Nous avons encore besoin de notations pour énoncer nos résultats. Soit W le groupe de Weyl de T et U le radical unipotent de B. Pour tout w dans W, on pose $U_w = U \cap wUw^{-1}$ et $B_w = B \cap wBw^{-1}$.

Considérons un chemin γ de $\Gamma(G/H)$ qui monte à partir du sommet correspondant à V_G. Soit $V'_{G/B}$ l'orbite de H dans G/B associée au sommet le plus haut de γ. On note $D(\gamma)$ le nombre d'arêtes doubles le long de γ et $w(\gamma)$ le produit dans W des réflexions simples associées aux étiquettes de γ. Le théorème 4.9 décrit un ouvert de $\overline{V}_G^X$ associé à $w(\gamma)$. Dans le contexte de l'introduction, on obtient le

THÉORÈME B. — *On reprend les notations ci-dessus. Alors, il existe un ouvert $\Omega_{V,w(\gamma)}$ de $\overline{V}_G^X$ stable par $B_{w(\gamma)} \times H$ et une fibration localement triviale $B_{w(\gamma)}$-invariante et H-équivariante $\psi : \Omega_{V,w(\gamma)} \to V'_{G/B}$.*

De plus, il existe une sous-variété $S_{V,w(\gamma)}$ de $\Omega_{V,w(\gamma)}$ stable par T, telle que l'action de $U_{w(\gamma)}$ induise un isomorphisme de $U_{w(\gamma)} \times S_{V,w(\gamma)}$ sur la fibre de ψ.

Enfin, la variété $S_{V,w(\gamma)}$ a $2^{D(\gamma)}$ composantes irréductibles ; chacune est isomorphe à l'espace affine de dimension rang de G et intersecte Z suivant l'unique point fixe de $B^- \times B$ dans Z.

Le théorème 4.10 décrit l'intersection de $\overline{V}_G^X$ et de l'adhérence d'une orbite de $G\times G$ dans X. Dans le cadre de l'introduction, ce dernier implique le

THÉORÈME C. — *Rappelons que Z est canoniquement isomorphe à $G/B^-\times G/B$. On a :*

1) *Les sous-variétés $\overline{V}_G^X$ et Z s'intersectent proprement dans X.*

2) *Les composantes irréductibles de $\overline{V}_G^X\cap Z$ sont les adhérences dans $G/B^-\times G/B$ des orbites de $B\times H$*

$$BwB^-/B^-\times V'_{G/B},$$

telles que w s'écrit $w(\gamma)$ pour un chemin γ dans $\Gamma(G/H)$ qui monte de V_G à une orbite $V'_{G/B}$ de H dans G/B.

3) *La multiplicité de l'intersection $\overline{V}_G^X\cap Z$ le long de $\overline{Bw(\gamma)B^-}/B^-\times\overline{V}'_{G/B}$ est $2^{D(\gamma)}$.*

Sous certaines hypothèses, le théorème 4.13 donne une expression pour la classe $[\overline{V}_G^X]$ de cohomologie $B\times\{1\}$-équivariante (ou $T\times\{1\}$-équivariante) de $\overline{V}_G^X$ à coefficients rationnels. Ici, ceci nous donne le

THÉORÈME D. — *Dans $H^*_{B\times\{1\}}(X)$, on a :*

$$[\overline{V}_G^X]=\sum_{w=w(\gamma)}2^{D(\gamma)}\big[\overline{Bw^{-1}B^{-}}^X\big],$$

où la somme porte sur tous les chemins γ issus de V_G.

Remarquons que la formule du théorème D est valable dans la cohomologie ordinaire $H^*(X)$ de X. En revanche, la démonstration faite en 4.5 utilise fortement la cohomologie équivariante.

Considérons un plongement lisse G-équivariant et toroïdal Y de G/H et $\mathcal{O}$ une orbite de G dans Y. Soit V une orbite de B dans G/H. M. Brion demande dans [4], après la proposition 6, si chaque composante irréductible de $\overline{V}^Y\cap\overline{\mathcal{O}}^Y$ contient des points lisses de $\overline{V}^Y$. Nous répondons à cette question par la négative dans la dernière partie.

En effet, nous considérons l'unique orbite fermée V d'un sous-groupe de Borel B dans l'espace homogène PSL(4)/PSO(4). Soit Y le plongement canonique de PSL(4)/PSO(4) et Z l'unique orbite fermée de PSL(4) dans Y. Le dernier résultat (théorème 5.1 dans le corps du texte) est le

THÉORÈME E. — *Avec les notations ci-dessus, l'intersection $Z\cap\overline{V}^Y$ a une composante irréductible constituée de points singuliers de $\overline{V}^Y$.*

La majeure partie de cet article (les théorèmes A, B, C et D) étudie les adhérences d'orbites de $B\times H$ dans les plongements de G. Ce travail s'inspire de celui de M. Brion [4] sur les adhérences d'orbites de B dans les plongements de G/H. Par exemple, le théorème B (ou le théorème 4.9 ci-dessous) est l'analogue de la proposition 6 de [4]. On peut remarquer que la description de la variété $S_{V,w(\gamma)}$ du théorème B est plus précise que celle de la variété $S_{Y,w}$ de M. Brion. Il est par exemple facile de déterminer le lieu non lisse (ou non normal) de $S_{V,w(\gamma)}$. Le théorème C (ou 4.10) est l'analogue du théorème 1 de [4]. Avec les notations du théorème C, une différence notable est qu'ici tous les chemins dans $\Gamma(G/H)$ issus de V_G interviennent dans la description de $\overline{V}_G^X \cap Z$; alors que, dans la situation étudiée par M. Brion seuls ceux arrivant à l'orbite ouverte comptent.

J'ai montré dans [13] que certains plongements Y de G/H s'obtiennent comme quotient géométriques par H d'ouverts de plongements X de G. Ainsi, sous certaines hypothèses, les adhérences d'orbites de B dans Y sont des quotients géométriques d'ouverts d'adhérences d'orbites de $B \times H$ dans X. Ceci est un lien explicite entre le travail de M. Brion [4] et cet article. Il est donc permis de penser que ce travail peut aider à mieux comprendre les adhérences d'orbites de B dans des plongements de G/H. Ce point de vue m'a conduit à examiner l'exemple de la section 5.

Remerciements. — Je tiens à remercier M. Brion pour ses encouragements et sa lecture attentive de versions préliminaires à cet article. Je voudrais également remercier S. Pin pour nos nombreuses et utiles discussions.

2. Le graphe associé aux orbites de H dans $\mathcal{B}$

2.1. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{B}$ la variété des drapeaux de G. Soit H un sous-groupe algébrique de G qui a une orbite dense dans $\mathcal{B}$; on dit alors que H est *sphérique*. Nous nous intéressons à l'ensemble $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ des orbites de H dans $\mathcal{B}$. En fait, cet ensemble est fini (voir [1], [19] ou [9]).

Rappelons brièvement comment on construit un graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$. Le point de vue choisi ici est différent de celui de l'introduction ou de [4]. Il est cependant facile de voir que ces constructions sont équivalentes.

Considérons l'ensemble Δ des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques non résolubles minimaux de G. Si α appartient à Δ, on note $\mathcal{P}_\alpha$ le G-espace homogène d'isotropie α. Alors, il existe une unique application

$$\phi_\alpha : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}_\alpha$$

qui est G-équivariante. Remarquons que les fibres de ϕ_α sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Soit V_α une orbite de H dans $\mathcal{P}_\alpha$ et v un point de V_α. Chaque orbite de H dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ intersecte $\phi_\alpha^{-1}(v)$ suivant une orbite du stabilisateur H_v de v dans H. Considérons le morphisme

$$\theta : H_v \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\phi_\alpha^{-1}(v)\big) \simeq \mathrm{PSL}(2)$$

induit par l'action de H_v sur $\phi_\alpha^{-1}(v)$. Comme l'ensemble $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ est fini, H_v n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(v)$. Autrement dit, l'image de θ est un sous-groupe sphérique de $\mathrm{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$. Il y a quatre possibilités :

- Type SL : *θ est surjective.*

Alors, $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ est une orbite de H.

- Type T : $\mathrm{Im}\,\theta$ *est un tore maximal de* $\mathrm{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$.

Alors, H a trois orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$: une ouverte et deux de codimension 1.

- Type N : $\mathrm{Im}\,\theta$ *est le normalisateur d'un tore maximal de* $\mathrm{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$.

Alors, H a deux orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$: une ouverte et une de codimension 1.

- Type U : *θ est non surjective et* $\mathrm{Im}\,\theta$ *contient un sous-groupe unipotent non trivial de* $\mathrm{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$.

Alors, H a deux orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$: une ouverte et une de codimension 1.

Soit $V_{\mathcal{B}}$ une orbite de H dans $\mathcal{B}$.

- On dit que α *monte* $V_{\mathcal{B}}$ si $V_{\mathcal{B}}$ est strictement inclus dans $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_{\mathcal{B}}))$; alors $V_{\mathcal{B}}$ est de codimension 1 dans $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_{\mathcal{B}}))$.
- Si $V'_{\mathcal{B}}$ est l'orbite ouverte de H dans $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_{\mathcal{B}}))$, on dit que α *monte* $V_{\mathcal{B}}$ *sur* $V'_{\mathcal{B}}$.

Si α monte $V_{\mathcal{B}}$, la restriction de ϕ_α à $V_{\mathcal{B}}$ est fini. De plus, son degré $d(V_{\mathcal{B}},\alpha)$ vaut 1 pour les types T et U et vaut 2 pour le type N.

2.2. On construit un graphe orienté $\Gamma(G/H)$ comme suit :

DÉFINITION 2.1. — Les sommets de $\Gamma(G/H)$ sont les éléments de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$. Le sommet $V_{\mathcal{B}}$ est l'origine d'une arête indexée par α et d'extrémité $V'_{\mathcal{B}}$ si et seulement si α monte $V_{\mathcal{B}}$ sur $V'_{\mathcal{B}}$. De plus, cette arête est simple (resp. double) si $d(V_{\mathcal{B}},\alpha)$ vaut 1 (resp. 2).

D'après ce qui précède, tout graphe $\Gamma(G/H)$ est construit à partir des quatre « briques élémentaires » de la figure 1. Les sommets de chacune de ces briques sont les orbites de H dans la préimage d'une même orbite de H dans $\mathcal{P}_\alpha$. Nous donnons dans la section 5 un exemple de graphe $\Gamma(G/H)$; M. Brion en donne plusieurs autres dans [4].

2.3. Notons $\mathcal{H}$ le G-espace homogène d'isotropie H. Fixons un sous-groupe de Borel B de G tel que BH est dense dans G (on dira que B est *opposé* à H). Notons que B est unique à conjugaison par un élément de H près. Si $V_{\mathcal{B}}$ appartient à $\mathbf{H}(\mathcal{B})$, on pose :

$$V_{\mathcal{H}} := \{gH/H : g^{-1}B/B \in V_{\mathcal{B}}\}.$$

Alors, $V_{\mathcal{H}}$ est une orbite de B dans $\mathcal{H}$ et l'application $V_{\mathcal{B}} \mapsto V_{\mathcal{H}}$ est une bijection de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ sur l'ensemble $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ des orbites de B dans $\mathcal{H}$.

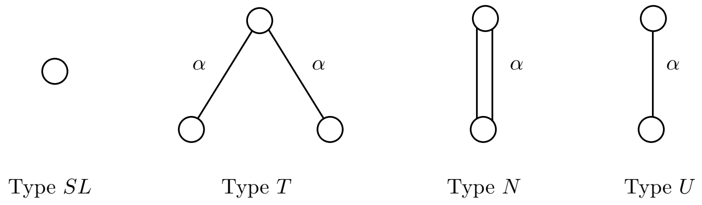

FIGURE 1. Briques élémentaires de $\Gamma(G/H)$.

2.4. Soit T un tore maximal de B et W le groupe de Weyl de T. Tout α dans Δ a un unique représentant P_α contenant B. De plus, il existe un unique s_α dans W tel que $Bs_\alpha B$ soit dense dans P_α ; ce s_α est une réflexion simple de W. Enfin, l'application $\Delta \to W$, $\alpha \mapsto s_\alpha$ est une bijection de Δ sur l'ensemble des réflexions simples de W.

Soient $V_{\mathcal{H}}$ dans $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ et α dans Δ. Le groupe B agit sur $P_\alpha \times V_{\mathcal{H}}$ par $b\cdot(p,v) = (pb^{-1}, bv)$ (avec des notations évidentes). Alors le quotient de $P_\alpha \times V_{\mathcal{H}}$ par B existe et est noté $P_\alpha \times_B V_{\mathcal{H}}$ (voir l'annexe 6). On note $[p:v]$ la classe de (p,v) dans $P_\alpha \times_B V_{\mathcal{H}}$ si $p \in P_\alpha$ et $v \in V_{\mathcal{H}}$. Considérons l'application

$$\pi_\alpha : P_\alpha \times_B V_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad [p:v] \longmapsto pv.$$

Soit $V'_{\mathcal{H}}$ l'orbite ouverte de B dans l'image de π_α. Notons $V_{\mathcal{B}}$ et $V'_{\mathcal{B}}$ les orbites de H dans $\mathcal{B}$ correspondant à $V_{\mathcal{H}}$ et $V'_{\mathcal{H}}$. On montre aisément que α monte $V_{\mathcal{B}}$ sur $V'_{\mathcal{B}}$ si et seulement si π_α est finie sur son image. Dans ce cas, le degré de π_α est $d(V_{\mathcal{B}}, \alpha)$. Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. — Soient $V_{\mathcal{H}}$, $V'_{\mathcal{H}}$ dans $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ et w dans W. On dit que w *monte* $V_{\mathcal{H}}$ *sur* $V'_{\mathcal{H}}$ si l'application (propre)

$$\pi_w : \overline{BwB} \times_B \overline{V}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \overline{V}'_{\mathcal{H}}, \quad [p:v] \longmapsto pv.$$

est surjective et génériquement finie. On note $d(V_{\mathcal{H}}, w)$ le degré de π_w.

3. Orbites de $B \times H$ dans G

3.1. On munit G de l'action de $G \times G$ définie par $(g_1, g_2)\cdot g = g_1 g g_2^{-1}$ pour tout g, g_1 et g_2 dans G. On considère la restriction de cette action à $B \times H$ et on note $\mathbf{BH}(G)$ l'ensemble des orbites de $B \times H$ dans G. Si $V_{\mathcal{B}} \in \mathbf{H}(\mathcal{B})$, on pose

$$V_G = \{g \in G : g^{-1}B/B \in V_{\mathcal{B}}\}.$$

Alors, $V_{\mathcal{B}} \mapsto V_G$ est une bijection de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ sur $\mathbf{BH}(G)$.

3.2. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des triplets $(V_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{H}}, V_G) \in \mathbf{H}(\mathcal{B}) \times \mathbf{B}(\mathcal{H}) \times \mathbf{BH}(G)$ dont les trois composantes coïncident via les bijections des paragraphes 2.3 et 3.1. Par exemple, le triplet $V^0 := (H \cdot B/B, B \cdot H/H, BH)$ est dans $\mathcal{V}$; on l'appelle *l'orbite ouverte.* Si V est un élément de $\mathcal{V}$, alors $V_{\mathcal{B}}$ (resp. $V_{\mathcal{H}}$ et V_G) désigne la projection de V sur $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ (resp. $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ et $\mathbf{BH}(G)$). Soit V et V' dans $\mathcal{V}$ et w dans W. Nous dirons que w *monte* V *sur* V' si w monte $V_{\mathcal{H}}$ sur $V'_{\mathcal{H}}$. Dans ce cas on pose $d(V, w) := d(V_{\mathcal{H}}, w)$.

3.3. Si w appartient à W, on pose $B_w := B \cap wBw^{-1}$. Considérons l'application

$$\eta : G \longrightarrow \mathcal{B}, \quad g \longmapsto g^{-1}B/B.$$

Soit V et V' dans $\mathcal{V}$ et w dans W qui monte V sur V'. Fixons un point v dans $V'_{\mathcal{B}}$. Notons wV_G pour $(w, 1).V_G$ et posons

$$\Sigma_{V,w} := wV_G \cap \eta^{-1}(v).$$

Soit H_v le stabilisateur de v dans H. Alors, $B_w \times H_v$ stabilise $\Sigma_{V,w}$. En fait, $B_w \times H_v$ agit transitivement sur $\Sigma_{V,w}$ et on a même le résultat plus précis suivant :

Proposition 3.1. — *On a :*

1) *La variété* $\Sigma_{V,w}$ *possède* $d(V, w)$ *composantes irréductibles* (*ou connexes*). *Chacune est une orbite de* B_w.

2) *Le groupe* H_v *agit transitivement sur l'ensemble des composantes irréductibles de* $\Sigma_{V,w}$.

3) *Le produit fibré* $H \times_{H_v} \Sigma_{V,w}$ *existe* (*voir l'annexe 6*). *De plus, l'application* $H \times_{H_v} \Sigma_{V,w} \longrightarrow wV_G$ *est une immersion ouverte.*

Démonstration. — Il est clair que $B_w \times H_v$ stabilise wV_G et $\eta^{-1}(v)$. Il stabilise alors $\Sigma_{V,w}$. Posons $\Omega = \eta^{-1}(H \cdot v) \cap wV_G$. Alors, Ω est ouvert dans wV_G et la restriction de η à Ω est un morphisme H-équivariant de Ω sur $H \cdot v$. De plus, la fibre au-dessus de v est $\Sigma_{V,w}$. L'assertion 3) découle alors du lemme 6.1 en annexe.

Comme Ω est ouvert dans wV_G, $H \times_{H_v} \Sigma_{V,w}$ est irréductible. On en déduit l'assertion 2).

Considérons l'application naturelle $\pi_w : BwB \times_B V_{\mathcal{H}} \to BwV_{\mathcal{H}}$. Soit g_v dans G tel que $\eta(g_v) = v$. Posons $y = g_vH/H \in V'_{\mathcal{H}} \subset BwV_{\mathcal{H}}$. Alors, $\pi_w^{-1}(y)$ est formé de $d(V, w)$ points. Soit $\widehat{w}$ un représentant de w dans $N(T)$. Considérons l'application

$$\zeta : \Sigma_{V,w} \longrightarrow \pi_w^{-1}(y), \quad g \longmapsto [g_vg^{-1}\widehat{w} : \widehat{w}^{-1}gH/H].$$

Vérifions que ζ est bien définie. Comme $\Sigma_{V,w}$ est inclus dans Bg_v, si g appartient à $\Sigma_{V,w}$ alors g_vg^{-1} appartient à B. Ainsi, $g_vg^{-1}\widehat{w} \in BwB$.

Par ailleurs, $\Sigma_{V,w}$ est inclus dans wV_G ; donc $\widehat{w}^{-1}g \in V_G$. Alors, $\widehat{w}^{-1}gH/H$ appartient à $V_{\mathcal{H}}$. Ainsi, $[g_vg^{-1}\widehat{w} : \widehat{w}^{-1}gH/H]$ a bien un sens dans $BwB \times_B V_{\mathcal{H}}$.

Enfin, $\pi_w([g_v g^{-1}\widehat{w} : \widehat{w}^{-1}gH/H]) = g_v g^{-1}\widehat{w}\widehat{w}^{-1}gH/H = y$. Ainsi, ζ est bien définie.

Montrons que ζ est surjective. Soient b dans B et x dans $V_{\mathcal{H}}$ tels que $\pi_w([b\widehat{w} : x]) = y$. Comme $\widehat{w}x = b^{-1}y$, $b^{-1}g_v$ appartient à wV_G puis à $\Sigma_{V,w}$. Mais alors, $x = \widehat{w}^{-1}b^{-1}y$ implique $[b\widehat{w} : x] = \zeta(b^{-1}g_v)$ et la surjectivité de ζ.

Montrons que les fibres de ζ sont des orbites de B_w. Soient g_1 et g_2 dans $\Sigma_{V,w}$. Si $\zeta(g_1) = \zeta(g_2)$, alors il existe b dans B tel que

$$g_v g_1^{-1}\widehat{w}b = g_v g_2^{-1}\widehat{w}, \tag{1}$$

$$b^{-1}\widehat{w}^{-1}g_1 g_v^{-1}\cdot y = \widehat{w}^{-1}g_2 g_v^{-1}\cdot y. \tag{2}$$

L'égalité (1) montre que $g_1 g_2^{-1} = \widehat{w}b\widehat{w}^{-1}$. Par ailleurs, $\eta(g_1) = \eta(g_2)$. Ainsi, $g_1 g_2^{-1}$ appartient à B_w. Réciproquement, si $g_1 g_2^{-1}$ appartient à B_w alors l'élément $b = \widehat{w}^{-1}g_1 g_2^{-1}\widehat{w}$ de B vérifie les égalités (1) et (2).

On a montré que les fibres de ζ sont les orbites de B_w dans $\Sigma_{V,w}$. Comme B_w est connexe, ceci montre que chaque composante irréductible (ou connexe) de $\Sigma_{V,w}$ est une orbite de B_w. Le fait que $\Sigma_{V,w}$ possède $d(V,w)$ composantes irréductibles découle alors de la surjectivité de ζ. □

4. Orbites de $B \times H$ dans les plongements de G

4.1. Préliminaire sur les plongements du groupe

4.1.1. Soit Y une variété normale munie d'une action algébrique de G. Si Y est de plus munie d'une immersion ouverte et G-équivariante de $\mathcal{H}$ dans Y, on dit que Y est un *plongement* de $\mathcal{H}$. Un plongement Y de $\mathcal{H}$ est dit *toroïdal* si tout diviseur irréductible stable par B de Y qui contient une orbite de G est stable par G. Soit Δ_Y la réunion des diviseurs de Y stables par B et non par G. Soit $P_{\mathcal{H}}$ le stabilisateur dans G de l'orbite ouverte de B dans $\mathcal{H}$ et $P_{\mathcal{H}}^u$ son radical unipotent. Supposons que Y est toroïdal. Alors, il existe un sous-groupe de Levi $L_{\mathcal{H}}$ de $P_{\mathcal{H}}$, ne dépendant que de $\mathcal{H}$, et une sous-variété fermée S de $Y - \Delta_Y$ stable par $L_{\mathcal{H}}$, tels que l'application

$$P_{\mathcal{H}}^u \times S \longrightarrow Y - \Delta_Y, \quad (p,s) \longmapsto ps$$

est un isomorphisme. De plus, le sous-groupe dérivé de $L_{\mathcal{H}}$ agit trivialement sur S, qui est donc une variété torique. Enfin, toute orbite de G dans Y rencontre S suivant une unique orbite de $L_{\mathcal{H}}$.

Le groupe G muni de l'action de $G \times G$ définie en 3.3 est un $G \times G$-espace homogène sphérique (et même symétrique). Les plongements de cet espace homogène seront simplement appelés *plongements du groupe* G. Chacun d'eux ne contient qu'un nombre fini d'orbites de $B \times B$ et donc de $G \times G$.

4.1.2. Nous oublions le sous-groupe sphérique H jusqu'à la fin de cette sous-section pour nous concentrer sur les plongements toroïdaux du groupe G. Soit X un tel plongement. Le premier résultat que nous rappelons décrit la structure locale d'un tel plongement.

Commençons par fixer quelques notations. Soient B et B^- deux sous-groupes de Borel opposés de G. Posons $T = B \cap B^-$. Notons U (resp. U^-) le radical unipotent de B (resp. B^-).

Soit $\mathcal{O}$ une orbite de $G \times G$ dans X. Posons :

$$X_{\mathcal{O}} := \big\{x \in X : \overline{(G \times G) \cdot x}^X \supset \mathcal{O}\big\},$$
$$X_{\mathcal{O},B\times B^-} := \big\{x \in X : \overline{(B \times B^-) \cdot x}^X \supset \mathcal{O}\big\}.$$

Remarquons que $X_{\mathcal{O},B\times B^-}$ contient BB^- et donc T. Considérons l'adhérence $S_{\mathcal{O}}$ de T dans $X_{\mathcal{O},B\times B^-}$. En fait, avec les notations du paragraphe 4.1.1, on a $X_{\mathcal{O},B\times B^-} = X_{\mathcal{O}} - \Delta_{X_{\mathcal{O}}}$ et $S_{\mathcal{O}} = S$ pour $Y = X_{\mathcal{O}}$. Il est montré dans [2] la

PROPOSITION 4.1. — *On a :*

1) $X_{\mathcal{O},B\times B^-}$ *est un ouvert affine de* X.

2) *L'application*

$$U \times U^- \times S_{\mathcal{O}} \longrightarrow X_{\mathcal{O},B\times B^-}, \quad (u,u^-,s) \longmapsto (u,u^-).s$$

est un isomorphisme $B \times B^-$*-équivariant.*

3) *Pour toute orbite* $\mathcal{O}'$ *de* $G \times G$ *dans* $X_{\mathcal{O}}$*,* $\mathcal{O}' \cap S_{\mathcal{O}}$ *est une orbite de* $T \times T$*.*

4.1.3. On va maintenant décrire les isotropies dans $G \times G$ des points de $S_{\mathcal{O}}$. On note $\mathcal{X}_*(T)$ le groupe constitué des sous-groupes à un paramètre de T. Si $\lambda \in \mathcal{X}_*(T)$, on pose

$$P(\lambda) := \big\{g \in G : \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t^{-1}) \text{ existe dans } G\big\}.$$

D'après [10], $P(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique de G dont le radical unipotent est

$$P^u(\lambda) = \big\{g \in G : \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t^{-1}) = 1\big\}.$$

De plus, $P(-\lambda)$ est opposé à $P(\lambda)$ et leur sous-groupe de Levi commun est le centralisateur $L(\lambda)$ de l'image de λ. Enfin, on pose

$$\Delta L(\lambda) = \big\{(\ell,\ell) \in G \times G : \ell \in L(\lambda)\big\}$$

et on note $C(\lambda)$ le centre connexe de $L(\lambda)$.

Remarquons que (d'après la proposition 4.1) $S_{\mathcal{O}}$ est un plongement affine et $T \times T$-équivariant de T dont l'orbite fermée est $S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. Alors, il existe un sous-groupe à un paramètre λ de T tel que $z := \lim_{t\to 0} \lambda(t)$ existe et appartient à $S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. De plus, z ne dépend que de T, B et $\mathcal{O}$; il est appelé *le point base de* $\mathcal{O}$.

PROPOSITION 4.2. — *On a :*

1) $P(-\lambda)$ *contient* B,

2) *l'isotropie de z dans $G \times G$ est le produit semi-direct de $P^u(\lambda) \times P^u(-\lambda)$ et de $\Delta L(\lambda) \cdot (C(\lambda) \times \{1\})_z$.*

En particulier, $P(-\lambda)$ ne dépend que de $\mathcal{O}$ et de B.

La proposition A1 de [3] implique la proposition précédente sous des hypothèses sensiblement plus fortes. Cependant, la démonstration de [3] s'applique sans changement ici.

4.1.4. Posons

$$X_{\mathcal{O},B\times G} := \big(\{1\} \times G\big) \cdot X_{\mathcal{O},B\times B^-}.$$

D'après la proposition 4.1, $X_{\mathcal{O},B\times G}$ rencontre chaque orbite de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$ suivant une orbite de $B \times G$. On a alors la

Proposition 4.3. — *Il existe une application $B \times G$-équivariante*

$$\psi : X_{\mathcal{O},B\times G} \longrightarrow \mathcal{B} = (B \times G)/(B \times B).$$

De plus, la fibre au-dessus de $(B/B, B/B)$ est $U \times S_{\mathcal{O}}$. Enfin, si $\mathcal{O}'$ est une orbite de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$, chaque fibre de ψ intersecte $\mathcal{O}'$ suivant une orbite de $B \times \{1\}$.

Remarque 4.4. — Comme l'application naturelle $G \to G/B$ est une fibration localement triviale, celle de la proposition l'est aussi.

Démonstration. — Rappelons que η est l'application $\eta : G \to \mathcal{B}$, $g \mapsto g^{-1}B/B$. Il est clair que η s'étend en une application rationnelle de X sur $\mathcal{B}$, $B \times \{1\}$-invariante et $\{1\} \times G$-équivariante. De plus, d'après la proposition 4.1, la restriction de η à $X_{\mathcal{O},B\times B^-}$ est régulière. On a même le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_{\mathcal{O},B\times B^-} \arrow[d, "\eta"'] & U \times U^- \times S_{\mathcal{O}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "{(u,u^-,s)\mapsto u^-}"] \\ \mathcal{B} & U^- \arrow[l, "u^-B/B \leftarrow\!\shortmid u^-"] \end{tikzcd}$$

Alors, η s'étend par $\{1\} \times G$-équivariance en une fibration ψ localement triviale de fibre $U \times S_{\mathcal{O}}$.

Soit $\mathcal{O}'$ une orbite de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$. Alors, $\psi^{-1}(B/B) \cap \mathcal{O}'$ qui vaut $((U \times \{1\}) \cdot S_{\mathcal{O}}) \cap \mathcal{O}'$ ou encore $(U \times \{1\}) \cdot (S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}')$ est une orbite de $B \times \{1\}$ d'après la proposition 4.1. Soit $x \in \mathcal{B}$ et $g \in G$ tels que $g \cdot x = B/B$. Alors, $\psi^{-1}(x) \cap \mathcal{O}'$ qui vaut $(1, g) \cdot (\psi^{-1}(B/B) \cap \mathcal{O}')$ est une orbite de $B \times \{1\}$. $\square$

4.2. Orbites de $B \times H$ dans une orbite de $G \times G$ dans X

4.2.1. Considérons à nouveau un sous-groupe sphérique H de G et un sous-groupe de Borel B opposé à H. Conservons les notations des propositions 4.1 et 4.2. Posons de plus

$$P := P(-\lambda), \quad Q := Q(\lambda), \quad L := L(\lambda), \quad C := C(\lambda).$$

Nous allons décrire l'ensemble $\mathbf{BH}(\mathcal{O})$ des orbites de $B \times H$ dans $\mathcal{O}$. Nous nous intéressons d'abord à l'ensemble $\mathbf{B}(G/P)$ des orbites de B dans G/P.

Remarquons que T est un tore maximal de $B \cap L$. Notons Φ_L l'ensemble des racines de (L, T), Φ_L^+ celles de $(B \cap L, T)$ et Φ^+ celles de (B, T). Posons

$$W^L = \{w \in W : w \cdot \Phi_L^+ \subseteq \Phi^+\}.$$

La décomposition de Bruhat (voir [7] ou [17]) affirme alors que :

$$G/P = \coprod_{w \in W^L} BwP/P.$$

On identifie ainsi W^L à $\mathbf{B}(G/P)$ par $w \mapsto BwP/P$.

Le groupe de Weyl W est engendré par les réflexions simples associées aux racines simples de (B, T). Si w appartient à W, on note $\ell(w)$ et on appelle *longueur de* w le nombre minimal de réflexions simples nécessaires pour écrire w comme leur produit. L'interprétation géométrique de cette longueur est :

$$\ell(w) = \dim(BwP/P), \quad \text{si } w \in W^L.$$

Considérons l'application canonique $q_{P^u} : P \to P/P^u$. Remarquons que q_{P^u} induit un isomorphisme de groupes de L sur P/P^u. Nous utiliserons le

LEMME 4.5. — *Soit w dans W^L.*

1) *Le sous-groupe $w^{-1}Bw$ contient $B \cap L$.*
2) *On a : $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw) = q_{P^u}(B \cap L)$.*

Démonstration. — 1) Le tore T est inclus dans $B \cap L$ et dans $w^{-1}Bw$. Mais alors, comme $\Phi_L^+ \subseteq w^{-1}\Phi^+$, l'algèbre de Lie de $B \cap L$ est incluse dans celle de $w^{-1}Bw$. Or $B \cap L$ est connexe donc $w^{-1}Bw$ contient $B \cap L$.

2) Le groupe $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw)$ est résoluble puisque $P \cap w^{-1}Bw$ l'est. Or la première assertion montre que $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw)$ contient l'image par q_{P^u} de $B \cap L$. Comme la restriction de q_{P^u} à L est un isomorphisme, $q_{P^u}(B \cap L)$ est un sous-groupe de Borel de P/P^u et la deuxième assertion suit. $\square$

4.2.2. L'inclusion de $(G \times G)_z$ dans $P \times G$ induit un morphisme $G \times G$-équivariant

$$p : \mathcal{O} = G \times G/(G \times G)_z \longrightarrow G/P = (G \times G)/(P \times G).$$

On vérifie aisément que l'application

$$q : p^{-1}(P/P) \longrightarrow \mathcal{B}, \quad (\ell p^u, g) \cdot z \longmapsto g\ell^{-1}B/B,$$

(où $p^u \in P^u$, $\ell \in L$ et $g \in G$) définit un morphisme $\{1\} \times G$-équivariant de $p^{-1}(P/P)$ sur $\mathcal{B}$.

PROPOSITION 4.6. — *On a :*

1) *Soit* $V_{\mathcal{O}} \in \mathbf{BH}(\mathcal{O})$. *Alors, il existe un unique couple* $(w, V') \in W^L \times \mathcal{V}$ *tel que*

$$p(V_{\mathcal{O}}) = BwP/P \quad \text{et} \quad w^{-1}V_{\mathcal{O}} \cap p^{-1}(P/P) = q^{-1}(V'_{\mathcal{B}}).$$

2) *L'application* $\mathbf{BH}(\mathcal{O}) \to W^L \times \mathcal{V}$, $V_{\mathcal{O}} \mapsto (w, V')$ *définie par l'assertion* 1) *est une bijection. On notera* $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ *la préimage de* (w, V').

Démonstration. — Soit $V_{\mathcal{O}} \in \mathbf{BH}(\mathcal{O})$. L'image de $V_{\mathcal{O}}$ par p est une orbite de B dans G/P. Ceci implique l'existence et l'unicité de $w \in W^L$ tel que $p(V_{\mathcal{O}}) = BwP/P$.

De plus, $p^{-1}(P/P) \cap w^{-1}V_{\mathcal{O}}$ est une orbite de $(w^{-1}Bw \cap P) \times H$. Mais alors, l'assertion 2) du lemme 4.5 implique que $p^{-1}(P/P) \cap w^{-1}V_{\mathcal{O}}$ est une orbite de $(B \cap L) \times H$ dans $p^{-1}(P/P) \simeq (P \times G)/(P^u \times Q^u) \cdot \Delta L \cdot C_z$. L'assertion 1) suit aisément.

L'assertion 2) est alors banale. □

COROLLAIRE 4.7. — *Soit* X *un plongement du groupe* G. *Alors,* $B \times H$ *n'a qu'un nombre fini d'orbites dans* X.

Démonstration. — Il est montré dans [2] l'existence d'un plongement toroïdal $\widetilde{X}$ de G et d'un morphisme surjectif et $G \times G$-équivariant de $\widetilde{X}$ sur X. Donc, il suffit de montrer le corollaire pour $\widetilde{X}$. Or, la proposition 4.6 s'applique à chaque orbite de $G \times G$ dans $\widetilde{X}$: le corollaire est démontré. □

4.3. Description d'ouverts de $\overline{V}_G^X$

4.3.1. — On se donne deux éléments V, V' de $\mathcal{V}$ et $w \in W$ qui monte V sur V'. Rappelons que $\overline{V}_G^X$ désigne l'adhérence de V_G dans X.

Reprenons les notations du paragraphe 3.3 ; en particulier, v est un point de $V'_{\mathcal{B}}$. Considérons l'adhérence $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ de $\Sigma_{V,w}$ dans $X_{\mathcal{O},B\times G}$. D'après la proposition 3.1, H_v agit sur $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$. Alors, on a le

LEMME 4.8. — *Reprenons les notations de la proposition* 4.3. *Alors, le produit fibré* $H \times_{H_v} \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ *existe. De plus, l'application naturelle* $H \times_{H_v} \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}} \to w\overline{V}_G^X$ *est une immersion ouverte.*

Démonstration. — Le lemme 6.1 de l'annexe montre ici que $w\overline{V}_G^X \cap \psi^{-1}(V'_{\mathcal{B}})$ est isomorphe à $H \times_{H_v} (w\overline{V}_G^X \cap \psi^{-1}(v))$. Il reste à montrer l'égalité

$$w\overline{V}_G^X \cap \psi^{-1}(v) = \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}.$$

L'inclusion de $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ dans le membre de gauche de l'égalité est évidente. Soit C une composante irréductible de $w\overline{V}_G^X \cap \psi^{-1}(v)$. Alors, $(\{1\} \times H) \cdot C$ est une composante irréductible de $w\overline{V}_G^X \cap \psi^{-1}(V'_{\mathcal{B}})$. Comme $\psi(w\overline{V}_G^X)$ est inclus dans l'adhérence de $V'_{\mathcal{B}}$, $\psi^{-1}(V'_{\mathcal{B}}) \cap w\overline{V}_G^X$ est ouvert dans $w\overline{V}_G^X$. En particulier, toutes les composantes irréductibles de $\psi^{-1}(V'_{\mathcal{B}}) \cap w\overline{V}_G^X$ rencontrent l'orbite ouverte G. Donc $(\{1\} \times H) \cdot C$ rencontre G. Mais alors, C rencontre $G \cap \psi^{-1}(v)$. On en déduit que C est inclus dans $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$. ☐

4.3.2. — On veut maintenant décrire plus en détail la géométrie de $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$. Rappelons que U_w désigne le groupe $U \cap wUw^{-1}$.

Soit g dans G tel que $g \cdot B/B = v$. Rappelons que la multiplication induit un isomorphisme T-équivariant du produit $U_w \times (U \cap wU^-w^{-1})$ sur U. Alors, la proposition 4.3 montre que l'application

$$\Theta : U_w \times (U \cap wU^-w^{-1}) \times S_{\mathcal{O}} \longrightarrow \psi^{-1}(v), \quad (u_1, u_2, s) \longmapsto (u_1u_2, g) \cdot s,$$

est un isomorphisme $T \times \{1\}$-équivariant. Posons

$$S_{V,w,\mathcal{O}} := \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}} \cap \big((U \cap wU^-w^{-1}, g) \cdot S_{\mathcal{O}}\big).$$

Il est clair que l'action de B_w sur $\Sigma_{V,w}$ induit une action de T sur $S_{V,w,\mathcal{O}}$. Notons $\phi_{V,w} : \psi^{-1}(v) \to S_{\mathcal{O}}$ l'application T-équivariante définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U_w \times (U \cap wU^-w^{-1}) \times S_{\mathcal{O}} \arrow[r, "(u_1,u_2,s)\longmapsto s"] \arrow[d, "\Theta"'] & S_{\mathcal{O}} \\ \psi^{-1}(v) \arrow[ur, "\phi_{V,w}"'] & \end{tikzcd}$$

Théorème 4.9. — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

1) $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ *est isomorphe comme* B_w*-variété à* $U_w \times S_{V,w,\mathcal{O}}$*. En particulier,* $S_{V,w,\mathcal{O}}$ *possède* $d(V,w)$ *composantes irréductibles.*

2) *Si* w^{-1} *appartient à* W^L (*avec les notations du paragraphe* 4.2.1), *alors* $S_{V,w,\mathcal{O}} \cap \mathcal{O} = S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$*. En particulier,* $S_{V,w,\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$ *est irréductible.*

3) *La restriction de* $\phi_{V,w}$ *à toute composante irréductible de* $S_{V,w,\mathcal{O}}$ *est un isomorphisme* T*-équivariant sur* $S_{\mathcal{O}}$*.*

Démonstration. — La première assertion résulte immédiatement de l'invariance par B_w de $\Sigma_{V,w}$.

Soit $S^1_{V,w,\mathcal{O}}$ une composante irréductible de $S_{V,w,\mathcal{O}}$. Toute composante irréductible de $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ est l'adhérence d'une orbite de B_w dans G. Mais alors, l'assertion 1) montre que $S^1_{V,w,\mathcal{O}}$ est l'adhérence dans $S_{V,w,\mathcal{O}}$ d'une orbite de T dans G. On en déduit qu'il existe u dans $U \cap wU^-w^{-1}$ tel que $(T \times \{1\}) \cdot (u, g)$ soit dense dans $S^1_{V,w,\mathcal{O}}$ (où g est l'élément de G utilisé dans la définition de Θ). Fixons un tel u.

L'intersection $S^1_{V,w,\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$ est incluse dans $U_w \cdot (S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O})$. On en déduit que tout point de $S^1_{V,w,\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$ est de la forme $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot u$, pour un sous-groupe à un paramètre λ de T tel que $\lim_{t\to 0}\lambda(t)$ existe et appartient à $S_{\mathcal{O}}\cap\mathcal{O}$. Alors, L est le centralisateur de l'image de λ (voir la proposition 4.2).

Supposons que w^{-1} appartient à W^L. Alors, Φ_L^+ est inclus dans $w\cdot\Phi^+$. Donc, si α appartient à Φ_L^+ alors $w^{-1}\alpha$ n'appartient pas à Φ^-. Ainsi, $\Phi^+\cap w\Phi^-$ est inclus dans Φ^+ et ne rencontre pas Φ_L^+. On en déduit que U_w est inclus dans le radical unipotent $Q^u(\lambda)$ de $Q(\lambda)$. Or on a

$$Q^u(\lambda)=\big\{g\in G:\lim_{t\to 0}\lambda(t)g\lambda(t^{-1})=1\big\}.$$

On en déduit que $\lim_{t\to 0}\lambda(t)\cdot u=\lim_{t\to 0}\lambda(t)$ appartient à $S_{\mathcal{O}}\cap\mathcal{O}$. L'assertion 2) est démontrée.

D'après la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques (voir [8] ou [2]), il existe un plongement toroïdal X' de G contenant $X_{\mathcal{O}}$ et dont l'unique orbite fermée Z est projective. Il suffit alors de montrer l'assertion 3) lorsque $\mathcal{O}=Z$ est projective.

Considérons à nouveau une composante irréductible $S^1_{V,w,\mathcal{O}}$ de $S_{V,w,\mathcal{O}}$ et la restriction $\overline{\phi}_{V,w}:S^1_{V,w,\mathcal{O}}\to S_{\mathcal{O}}$ de $\phi_{V,w}$. L'application $\overline{\phi}_{V,w}$ est T-équivariante et dominante. De plus, comme $S^1_{V,w,\mathcal{O}}$ rencontre G, $S^1_{V,w,\mathcal{O}}$ contient un ouvert isomorphe à T et $\overline{\phi}_{V,w}$ est birationnelle.

Considérons l'unique point z_0 de $S_{\mathcal{O}}\cap Z$. Alors, $\overline{\phi}^{-1}_{V,w}(z_0)$ est inclus dans $S^1_{V,w,\mathcal{O}}\cap Z$. Mais alors, l'assertion 2) montre que $\overline{\phi}^{-1}_{V,w}(z_0)=\{z_0\}$. On en déduit que $\overline{\phi}_{V,w}:S^1_{V,w,\mathcal{O}}\to S_{\mathcal{O}}$ est un isomorphisme. □

4.4. Intersection de $\overline{V}_G^X$ et d'une orbite de $G\times G$ dans X

On conserve les notations de la sous-section précédente. On note $\overline{\mathcal{O}}^X$ l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans X. Dans cette sous-section, nous déterminons l'intersection $\overline{\mathcal{O}}^X\cap\overline{V}_G^X$. Nous utilisons la notation $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')$ de la proposition 4.6.

THÉORÈME 4.10. — *L'intersection $\overline{\mathcal{O}}^X\cap\overline{V}_G^X$ est propre (i.e. sa codimension dans X est la somme de celles de $\mathcal{O}$ et de V_G). De plus, on a*

$$\overline{\mathcal{O}}^X\cap\overline{V}_G^X=\bigcup\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')}^X,$$

où la réunion porte sur les couples $(w,V')\in W^L\times\mathcal{V}$ tels que w^{-1} monte V sur V'. Si de plus X est lisse, la multiplicité d'intersection de $\overline{\mathcal{O}}^X\cap\overline{V}^X$ le long de $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')}^X$ est $d(V,w^{-1})$.

Démonstration. — Soit C une composante irréductible de $\overline{V}_G^X\cap\overline{\mathcal{O}}^X$ qui rencontre $\mathcal{O}$. Comme C est stable par $B\times H$, la proposition 4.6 montre qu'il existe w dans W^L et V' dans $\mathcal{V}$ tels que C soit l'adhérence de $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')$ dans X.

Considérons la fibration $\psi : X_{\mathcal{O},B\times G} \to \mathcal{B}$ définie par la proposition 4.3. Il est clair que $\overline{\psi(w^{-1}\overline{V}_G^X)}$ est inclus dans $\overline{V_G^{-1}wB/B}$. Mais alors, $V'_{\mathcal{B}}$ est inclus dans $\overline{V_G^{-1}wB/B}$.

Par ailleurs, la codimension de C dans $\mathcal{O}$ est égale à la somme de la longueur de w et de la codimension de $V'_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$. Comme C est une composante irréductible de $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$, cette codimension est inférieure ou égale à celle de V_G dans G, c'est-à-dire celle de $V_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$. On en déduit que $V'_{\mathcal{B}}$ est l'orbite ouverte de H dans $V_G^{-1}wB/B$ et que w^{-1} monte V sur V'. De plus, on a :

$$\dim(\overline{\mathcal{O}}^X) - \dim(C) = \dim(X) - \dim(\overline{V}_G^X). \tag{3}$$

Soit C' une composante irréductible quelconque de $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$. Alors, il existe une orbite $\mathcal{O}'$ de $G\times G$ dans $\overline{\mathcal{O}}^X$ telle que $C'\cap\mathcal{O}'$ soit un ouvert non vide de C'. L'égalité (3) appliquée à $\mathcal{O}'$ et C' montre que $\mathcal{O}=\mathcal{O}'$.

Ainsi, on a montré que l'intersection $\overline{V}_G^X\cap\overline{\mathcal{O}}^X$ est propre et que toute composante irréductible de cette intersection est l'adhérence dans X de $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')$ pour un élément w dans W^L qui monte V sur V'.

Réciproquement, soit $w \in W^L$ et V' dans $\mathcal{V}$ tels que w monte V sur V'. Notons $\mathcal{O}_{B\times G}$ l'orbite ouverte de $B\times G$ dans $\mathcal{O}$. Considérons l'application $p : \mathcal{O} \to G/P$ définie au paragraphe 4.2.2. Montrons que $p(\mathcal{O}_{B\times G} \cap w^{-1}\overline{V}_G^X)$ et $w^{-1}BwP/P$ ont la même adhérence dans G/P.

Comme $(\{1\}\times H)\cdot\Sigma_{V,w^{-1}}$ est ouvert dans $w^{-1}V_G$ et p est $\{1\}\times G$-invariante, les adhérences de $p(w^{-1}\overline{V}_G^X \cap \mathcal{O}_{B\times G})$ et de $p(\overline{\Sigma_{V,w^{-1},\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O}_{B\times G})$ dans G/P coïncident. Or, $p(\overline{\Sigma_{V,w^{-1},\mathcal{O}}}\cap\mathcal{O}_{B\times G})$ est égal à $(U\cap w^{-1}Uw)\cdot p(S_{V,w^{-1},\mathcal{O}}\cap\mathcal{O}_{B\times G})$ qui est égal à $(U\cap w^{-1}Uw)\cdot p(S_{\mathcal{O}}\cap\mathcal{O}_{B\times G})$ d'après l'assertion 3) du théorème 4.9. On en déduit que

$$\overline{p(w^{-1}\overline{V}_G^X \cap \mathcal{O}_{B\times G})} = w^{-1}\overline{BwP/P}.$$

La proposition 4.6 montre alors qu'il existe une composante irréductible C de $\overline{V}_G^X\cap\overline{\mathcal{O}}^X$ de la forme $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V'')}^X$, pour V'' dans $\mathcal{V}$. Mais alors, le début de la démonstration montre que $V''=V'$. Ainsi, $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')}^X$ est une composante irréductible de $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$.

De plus, au voisinage de $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')$, l'application ψ induit un isomorphisme d'un ouvert de $w^{-1}\overline{V}_G^X$ sur un produit fibré dont la fibre est $\overline{\Sigma_{V,w^{-1},\mathcal{O}}}$. Mais alors, la multiplicité de $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ le long de $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w,V')}^X$ est égale à celle de $\overline{\Sigma_{V,w^{-1},\mathcal{O}}}\cap\overline{\mathcal{O}}^X$. D'après le théorème 4.9 (assertions 2 et 3), cette multiplicité est celle de $S_{V,w^{-1},\mathcal{O}}\cap\overline{\mathcal{O}}^X$ le long de $S_{\mathcal{O}}\cap\overline{\mathcal{O}}^X$. Si de plus X est lisse, la proposition 4.1 montre que $S_{\mathcal{O}}$ est lisse. Mais alors, le théorème 4.9 montre que chacune des $d(V,w^{-1})$ composantes irréductibles de $S_{V,w^{-1},\mathcal{O}}$ est lisse. On en déduit que la multiplicité de $S_{V,w^{-1},\mathcal{O}}\cap\overline{\mathcal{O}}^X$ le long de $S_{\mathcal{O}}\cap\overline{\mathcal{O}}^X$ est $d(V,w^{-1})$ puis le théorème. $\square$

Corollaire 4.11. — *Supposons que X est lisse et toroïdal. Soit C une composante irréductible de $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$. Alors, se valent :*

1) *L'ouvert des points lisses de $\overline{V}_G^X$ rencontre C.*
2) *L'intersection $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ est transverse le long de C.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que si la multiplicité de l'intersection $\overline{V}_G^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ le long de C est supérieure ou égale à 2, alors C est constitué de points singuliers de $\overline{V}_G^X$. Soit w dans W et V' dans $\mathcal{V}$ tels que l'orbite $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ est ouverte dans C. Alors, la variété $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ a au moins deux composantes irréductibles qui se rencontrent dans C. Mais alors, le corollaire découle du lemme 4.8. □

4.5. Classe de cohomologie $B \times \{1\}$-équivariante de $\overline{V}_G^X$

4.5.1. — Dans cette sous-section, nous fixons un plongement X toroïdal complet et lisse de G. Rappelons que B est un sous-groupe de Borel de G opposé à H, que B^- est un sous-groupe de Borel de G opposé à B, que T égale $B \cap B^-$ et enfin que V appartient à $\mathcal{V}$. Le théorème 4.13 ci-dessous donne une expression pour la classe de cohomologie $B \times \{1\}$-équivariante de $\overline{V}_G^X$.

Si Y est une variété munie d'une action de B, on note $\mathrm{H}_B^*(Y)$ (resp. $\mathrm{H}_T^*(Y)$) l'algèbre de cohomologie B-équivariante (resp. T-équivariante) de Y à coefficients rationnels (voir [6] pour une définition). Comme l'application $B \to B/T$ est une fibration triviale dont la fibre est un espace affine, $\mathrm{H}_B^*(Y)$ et $\mathrm{H}_T^*(Y)$ sont canoniquement isomorphes. Dans la suite de cette section nous travaillerons avec la cohomologie T-équivariante.

La proposition 4.2 montre que les orbites fermées de $G \times G$ dans X sont isomorphes à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Elle implique aussi que les points fixes de $T \times \{1\}$ dans X appartiennent tous à des orbites fermées de $G \times G$ dans X. Ces deux propriétés de X et le théorème de localisation en cohomologie T-équivariante (voir [6]) sont les ingrédients essentiels de la preuve du théorème 4.13 ci-dessous.

D'après la formule de Künneth, on a

$$\mathrm{H}_{T\times\{1\}}^*(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) = \mathrm{H}_T^*(\mathcal{B}) \otimes \mathrm{H}^*(\mathcal{B}).$$

Nous utiliserons également le fait que $\mathrm{H}_T^*(\mathcal{B})$ est un $\mathrm{H}_T^*(\mathrm{pt})$-module libre (voir [6]).

Rappelons que $V^0 = (H \cdot B/B, B \cdot H/H, BH) \in \mathcal{V}$ désigne l'orbite ouverte.

4.5.2. — Avec les notations ci-dessus, on a le

Lemme 4.12. — *Soit Z une orbite fermée de $G \times G$ dans X. Posons*

$$c = \sum_{\substack{w \in W \\ w \text{ monte } V \text{ sur } V^0}} d(V, w)\big[\overline{Bw^{-1}B^{-}}^X\big],$$

dans $\mathrm{H}_{T\times\{1\}}^*(X)$. Alors, dans $\mathrm{H}_{T\times\{1\}}^*(X)$, on a $[\overline{V}_G^X] \cup [Z] = c \cup [Z]$.

Démonstration. — Avec les notations de la proposition 4.1, $S_Z \cap Z$ est réduit à un point z pour $\mathcal{O} = Z$. Alors, le couple (Z, z) s'identifie à $(\mathcal{B} \times \mathcal{B}, (B^-/B^-, B/B))$. Avec cette identification, le théorème 4.10 montre que dans $\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(X)$, on a

$$[\overline{V}_G^X] \cup [Z] = \sum_{\substack{w \in W \\ w \text{ monte } V \text{ sur } V'}} d(V,w)\big[\overline{Bw^{-1}B^-}/B^- \times V'_{\mathcal{B}}\big].$$

Or, d'après [3], dans $\mathrm{H}^*(\mathcal{B})$ on a

$$[V'_{\mathcal{B}}] = \sum_{\substack{w \in W \\ w \text{ monte } V \text{ sur } V^0}} d(V',\tau)\big[\overline{B^-\tau B}/B\big].$$

Alors, on obtient

$$[\overline{V}_G^X] \cup [Z] = \sum d(V,w)d(V',\tau)\big[\overline{Bw^{-1}B^-}/B^- \times \overline{B^-\tau B}/B\big], \tag{4}$$

où la somme porte sur les couples $(w,\tau) \in W \times W$ tels que w monte V sur V' et τ monte V' sur V^0.

On associe à tout couple (w,τ) apparaissant dans cette somme le couple $(w_1,\tau_1) \in W \times W$ défini par

$$w_1 = \tau w,\ \tau_1 = w, \quad w = \tau_1,\ \tau = w_1\tau_1^{-1}. \tag{5}$$

Alors, w_1 monte V sur V^0 et $\ell(\tau_1) + \ell(w_1\tau_1^{-1}) = \ell(w_1)$. Réciproquement, à tout couple (w_1,τ_1) satisfaisant ces deux conditions on peut associer par les formules (5) un couple (w,τ) apparaissant dans la somme (4). De plus, la condition « $\ell(\tau_1) + \ell(w_1\tau_1^{-1}) = \ell(w_1)$ » est équivalente à « τ_1 monte $Bw_1^{-1}B^-/B^-$ dans $\Gamma(G/B^-)$ ». On en déduit que

$$[\overline{V}_G^X] \cup [Z] = \sum_{\substack{w_1 \text{ monte } V \text{ sur } V^0 \\ \tau_1 \text{ monte } Bw_1^{-1}B^-/B^-}} d(V,w_1)\big[\overline{B\tau_1^{-1}B^-}/B^- \times \overline{B^-w_1\tau_1^{-1}B}/B\big].$$

Par ailleurs, on a :

$$c \cup [Z] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } V^0} d(V,w)[\overline{Bw^{-1}B^-}] \cup [Z].$$

On applique alors le théorème 4.10 avec $H = B^-$ à chaque $[\overline{Bw^{-1}B^-}] \cup [Z]$. On obtient :

$$c \cup [Z] = \sum_{\substack{w \text{ monte } V \text{ sur } V^0 \\ \tau \text{ monte } \overline{Bw^{-1}B^-}/B^-}} d(V,w)\big[\overline{B\tau^{-1}B^-}/B^- \times \overline{B^-w\tau^{-1}B}/B\big].$$

Le lemme est démontré. □

4.5.3. Au cours de la preuve du lemme 4.12, nous avons utilisé une expression de la classe de $[V_{\mathcal{B}}]$ dans $\mathrm{H}^*(\mathcal{B})$ démontrée dans [3]. Cette dernière nous dit que dans $\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(G) \simeq \mathrm{H}^*(G/T) \simeq \mathrm{H}^*(\mathcal{B})$, on a :

$$[\overline{V}_G^G] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } V^0} d(V,w)\big[\overline{Bw^{-1}B^{-}}^G\big].$$

Le théorème suivant montre que cette expression est encore valable dans un plongement toroïdal complet et lisse de G.

THÉORÈME 4.13. — *Soit X un plongement toroïdal complet et lisse de G. Soit V dans $\mathcal{V}$. Alors, dans $\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(X)$, on a :*

$$[\overline{V}_G^X] = \sum_{\substack{w\in W\\ w \text{ monte } V \text{ sur } V^0}} d(V,w)\big[\overline{Bw^{-1}B^{-}}^X\big].$$

Démonstration. — Comme au lemme 4.12, notons c le membre de droite de l'égalité du théorème. Soit $Z_1,\dots,Z_k$ les orbites fermées de $G\times G$ dans X. Considérons pour tout $i = 1,\dots,k$ le morphisme de restriction $\iota_i : \mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(X) \to \mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z_i)$ et le morphisme

$$I : \mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(X) \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} \mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z_i), \quad \delta \longmapsto \big(\iota_i(\delta)\big)_{i=1,\dots,k}.$$

D'après la proposition 4.2, seules les orbites fermées de $G\times G$ dans X contiennent des point fixes de $T\times\{1\}$. Mais le théorème de localisation (voir [6]) montre que I est injective. Il suffit alors de montrer que $I([\overline{V}_G^X]) = I(c)$. Or d'après le lemme 4.12, on a

$$I\big([\overline{V}_G^X]\big) \cup I\big([Z_i]\big) = I(c) \cup I\big([Z_i]\big), \quad \forall\, i = 1,\dots,k.$$

Il suffit alors de montrer que pour tout $i = 1,\dots,k$, l'application

$$\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z_i) \longrightarrow \mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z_i), \quad d \longmapsto \iota_i\big([Z_i]\big) \cup d$$

est injective. Jusqu'à la fin de la démonstration, on fixe un indice i entre 1 et k. Posons pour alléger les notations $Z := Z_i$ et $\iota := \iota_i$.

Considérons le fibré $\mathcal{N}_{Z,X}$ normal à Z dans X. Remarquons que $\mathcal{N}_{Z,X}$ est naturellement muni d'une $G\times G$-linéarisation. De plus, $\iota(Z)$ est la classe de Chern de degré maximal et $T\times\{1\}$-équivariante de $\mathcal{N}_{Z,X}$. Si $\mathcal{M}$ est un fibré vectoriel T-linéarisé sur une T-variété, on note $c^{\max}(\mathcal{M})$ la classe de Chern de degré maximal de $\mathcal{M}$ et $c_T^{\max}(\mathcal{M})$ sa classe T-équivariante. Si $\mathcal{M}$ est un fibré en droites, nous omettrons le max en exposant.

Si γ est un caractère de B, on note $\mathcal{L}_\gamma$ le produit fibré $G\times_B \mathbb{C}$, où B agit sur $\mathbb{C}$ par le caractère γ. Alors, $\mathcal{L}_\gamma$ est un fibré en droites G-linéarisé sur $\mathcal{B}$. On identifie Z à $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ comme dans la preuve du lemme 4.12. Si α et β sont des caractères de B, on note $\mathcal{L}_\alpha \boxtimes \mathcal{L}_\beta$ le produit fibré $(G\times G)\times_{B\times B}\mathbb{C}$, où $B\times B$

agit sur $\mathbb{C}$ par le caractère (α,β). Alors, $\mathcal{L}_\alpha \boxtimes \mathcal{L}_\beta$ est un fibré en droites $G\times G$-linéarisé sur Z.

Reprenons les notations de la proposition 4.1 pour $\mathcal{O}=Z$. Comme S_Z est un plongement affine lisse et $T\times T$-équivariant de T, la proposition 4.1 montre qu'il existe des caractères $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ de B tels que $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_j}\boxtimes\mathcal{L}_{-\alpha_j}$ coïncide avec $\mathcal{N}_{Z,X}$ sur l'orbite ouverte de $B\times B^-$ dans Z. Comme ces deux fibrés sont $G\times G$-linéarisés et Z est une orbite de $G\times G$, on en déduit que $\mathcal{N}_{Z,X}$ est isomorphe à $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_j}\boxtimes\mathcal{L}_{-\alpha_j}$ en tant que fibré vectoriel $G\times G$-linéarisé.

On peut maintenant calculer $\iota(Z)$:

$$\begin{aligned}\iota(Z) &= c^{\max}_{T\times\{1\}}(\mathcal{N}_{Z,X}) = c^{\max}_{T\times\{1\}}\big(\textstyle\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_j}\boxtimes\mathcal{L}_{-\alpha_j}\big)\\ &= \textstyle\prod_{j=1}^r c_{T\times\{1\}}(\mathcal{L}_{\alpha_j}\boxtimes\mathcal{L}_{-\alpha_j})\\ &= \textstyle\prod_{j=1}^r c_{T\times\{1\}}((\mathcal{L}_{\alpha_j}\boxtimes\mathcal{L}_0)\otimes(\mathcal{L}_0\boxtimes\mathcal{L}_{-\alpha_j}))\\ &= \textstyle\prod_{j=1}^r \big(c_T(\mathcal{L}_{\alpha_j})\otimes 1 + 1\otimes c(\mathcal{L}_{-\alpha_j})\big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{H}^*_T(\mathcal{B})$ est un $\mathrm{H}^*_T(pt)$-module libre. En particulier, $c_T(\mathcal{L}_{\alpha_j})\otimes 1$ n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau $\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z)$. Par ailleurs, $1\otimes c(\mathcal{L}_{-\alpha_j})$, qui appartient à $\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z)$, est nilpotent. Mais alors, $c_T(\mathcal{L}_{\alpha_j})\otimes 1 + 1\otimes c(\mathcal{L}_{-\alpha_j})$ n'est pas diviseur de zéro. On en déduit que $\iota(Z)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathrm{H}^*_{T\times\{1\}}(Z)$. Le théorème suit. □

Remarque. — Il peut être étonnant de remarquer que la classe $[\overline{V}_G^X]$ est une combinaison linéaire de classes d'adhérences d'orbites de $B\times B^-$ qui rencontrent G, bien que ces adhérences n'engendrent pas la cohomologie $T\times\{1\}$-équivariante de X.

5. Un exemple d'adhérence d'orbite de B dans un plongement de $\mathcal{H}$

Nous donnons ici un exemple qui répond par la négative à une question posée par M. Brion (voir [4] ; après la prop. 6) à propos du lieu singulier des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans un plongement lisse de $\mathcal{H}$.

Soient $G=\mathrm{SL}(4)$ et $V\simeq\mathbb{C}^4$ le G-module standard. Alors G agit par changement de variable sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[V]_2$ des polynômes homogènes de degré 2 sur V. Notons $(e_1,\dots,e_4)$ la base canonique de V et $(x_1,\dots,x_4)$ sa base duale. Posons $q_0=x_1^2+\cdots+x_4^2\in\mathbb{C}[V]_2$. Soit H le stabilisateur dans G de $[q_0]\in\mathbb{P}(\mathbb{C}[V]_2)$. Alors, $\mathcal{H}=G\cdot[q_0]$ est l'ensemble des quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}^3$.

Soit B le sous-groupe de Borel de G constituée des matrices triangulaires supérieures. Alors, B est opposé à H (en particulier, H est sphérique). Les représentants contenant B des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques minimaux de G sont :

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} * & * \\ 0 & * \end{matrix} \end{array}\right), \quad P_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix} & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right), \quad P_3 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} * & * \\ 0 & * \end{matrix} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix} \end{array}\right).$$

D'après [11], le graphe $\Gamma(G/H)$ est représenté par la figure 2.

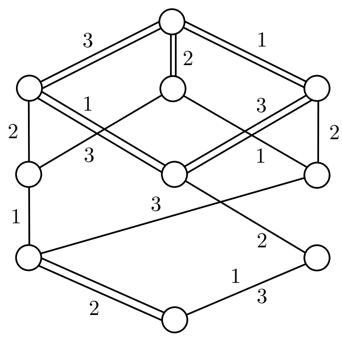

FIGURE 2. Le graphe $\Gamma(G/H)$

L'orbite fermée $V_{\mathcal{H}}$ de B dans $\mathcal{H}$ est :

$$\big\{[q] \in \mathcal{H} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}[V]_2) : q(e_1, e_i) = 0,\ i = 1, 2, 3,\ q(e_2, e_2) = 0\big\}.$$

En fait, $\mathcal{H}$ est un PSL(4)-espace homogène symétrique. Considérons le plongement magnifique Y de $\mathcal{H}$ construit par De Concini et Procesi dans [5]. On peut montrer que Y est l'unique plongement toroïdal complet de $\mathcal{H}$ et contenant une unique orbite fermée Z. De plus, De Concini et Procesi ont montré que Y était lisse. Considérons l'adhérence $\overline{V}_{\mathcal{H}}^{Y}$ de $V_{\mathcal{H}}$ dans Y. On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 5.1. — *Avec les notations ci-dessus, $\overline{V}_{\mathcal{H}}^{Y} \cap Z$ a une composante irréductible constituée de points singuliers de $\overline{V}_{\mathcal{H}}^{Y}$.*

Démonstration. — Soit T le tore maximal de G constitué des matrices diagonales. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les racines simples de (B, T). Posons :

$$Y_{Z,B} := \big\{y \in Y : \overline{B \cdot y} \supset Z\big\}.$$

Notons S l'adhérence de $T \cdot [q_0]$ dans $Y_{Z,B}$. Il est montré dans [5] que la T-variété S est isomorphe à $\mathbb{A}^3$ sur lequel T agit linéairement par les poids $2\alpha_1, 2\alpha_2$ et $2\alpha_3$. Fixons un tel isomorphisme $\xi : \mathbb{A}^3 \to S$. Soit U le radical unipotent de B. Alors (voir [5]) l'application

$$\Theta : U \times \mathbb{A}^3 \longrightarrow Y_{Z,B}, \quad (u, \tau) \longmapsto u \cdot \xi(\tau)$$

est un isomorphisme. De plus, $\Theta^{-1}(Y_{Z,B} \cap Z) = U \times \{0\}$.

Soit s_1, s_2 et s_3 les réflexions simples du groupe de Weyl W de T associées respectivement à P_1, P_2 et P_3. Considérons l'élément $w = s_2 s_1 s_3 s_2$ de W et fixons le représentant $\tilde{w}$ de w suivant :

$$\tilde{w} = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 1 & & \end{array}\right).$$

Posons $\Omega := w\overline{V}_{\mathcal{H}}^Y \cap Y_{Z,B}$. Alors, Ω est un ouvert de $w\overline{V}_{\mathcal{H}}^Y$ stable par B_w. Comme Θ est un isomorphisme, on a

$$\Omega = B_w \cdot \left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$*$}} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot [q_0] \cap \tilde{w}V_{\mathcal{H}} \right).$$

Soit $b = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 & u_4 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} b \cdot [q_0] \in \tilde{w}V_{\mathcal{H}} &\iff \tilde{w}^{-1} b[q_0] \in V_{\mathcal{H}} \\ &\iff [(1+u_3^2+u_1^2)\,x_1^2 + 2(u_3\,u_4 + u_1\,u_2)\,x_1\,x_2 - 2\,u_1\,x_1\,x_3 \\ &\qquad -2\,u_3\,x_1\,x_4 + (1+u_2^2+u_4^2)\,x_2^2 - 2\,u_2\,x_2\,x_3 \\ &\qquad\quad -2\,u_4\,x_2\,x_4 + x_3^2 + x_4^2] \in V_{\mathcal{H}} \\ &\iff \begin{cases} 1+u_3^2+u_1^2 = 0, \\ u_3u_4 + u_1u_2 = 0, \\ u_1 = 0,\ 1+u_2^2+u_4^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = u_4 = 0, \\ u_2 = \pm i, \\ u_3 = \pm i. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $y = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot [q_0]$, on en déduit que $wV_{\mathcal{H}} \cap Y_{Z,B} = U_w \cdot T \cdot y$.

Comme Θ est un isomorphisme, on a

$$\Omega = w\overline{V}_{\mathcal{H}}^Y \cap Y_{Z,B} = U_w \cdot \overline{T \cdot y}^{Y_{Z,B}}.$$

Muni de l'action de T, $Y_{Z,B}$ est isomorphe à un T-module. De plus, les poids de $y \in Y_{Z,B}$ pour l'action de T sont

$$2\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ 2\alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.$$

Comme cette famille de $\mathcal{X}^*(T)$ ne contient pas de sous-famille libre qui engendre le même sous-groupe de $\mathcal{X}^*(T)$, l'adhérence $\overline{T \cdot y}^{Y_{Z,B}}$ n'est pas lisse. En particulier, $\xi(0)$ est un point singulier de $\overline{T \cdot y}^{Y_{Z,B}}$. Par ailleurs, comme $\Theta^{-1}(Y_{Z,B} \cap Z) = U \times \{0\}$, on a $w\overline{V}_{\mathcal{H}}^Y \cap Y_{Z,B} \cap Z = U_w \cdot \xi(0)$. Le théorème suit aisément. □

6. Appendice : espaces fibrés algébriques

N'ayant pas trouvé de référence satisfaisante dans la littérature, je démontre dans cette appendice un lemme sur les espaces fibrés algébriques au sens de J.-P. Serre [16] (voir aussi [12, §4.8]).

Soit H un groupe algébrique affine. Soient P une H-variété et $\pi : P \to X$ un morphisme H-invariant de P dans une variété X. Le triplet (H, P, X) est appelé un *système fibré*. On appelle *espace fibré principal de base X et de groupe H* un système fibré (H, P, X) qui est localement trivial dans la topologie étale. Dans [16], J.-P. Serre dit que (H, P, X) est *localement isotrivial*.

Soient G un groupe algébrique affine et H un sous-groupe fermé de G. Soit F une H-variété. Considérons sur $G \times F$ l'action de H donnée par la formule $h{\cdot}(g, f) = (gh^{-1}, hf)$. S'il existe une variété X et un morphisme $\pi : G \times F \to X$ tels que $(H, G \times F, X)$ soit un espace fibré principal, cette variété et ce morphisme sont uniques (voir [16, preuve de la prop. 4]) On appelle alors X le produit fibré de G par F au-dessus de H et on le note $G \times_H F$.

Dans le cas où le système fibré $(H, G, G/H)$ est localement trivial dans la topologie de Zariski, il est facile de voir que $G \times_H F$ existe. Ceci s'applique par exemple lorsque H est résoluble et connexe (voir [15]).

Dans une autre direction, les propositions 3 et 4 de [16] (ou le théorème 4.19 de [12]) montrent que $G \times_H F$ existe si F est quasiprojective.

Si le produit fibré $G \times_H F$ existe, l'action de G sur $G \times F$ par multiplication à gauche sur le premier facteur induit une action algébrique de G sur $G \times_H F$. De plus, la projection de $G \times F$ sur G induit un morphisme G-équivariant $G \times_H F \to G/H$. Le lemme suivant montre que $G \times_H F$ est l'unique G-variété qui soit munie d'un morphisme G-équivariant sur G/H dont la fibre au-dessus de H/H soit F.

LEMME 6.1. — *Soit X une G-variété et $\phi : X \to G/H$ un morphisme G-équivariant. Posons $F = \phi^{-1}(H/H)$ et considérons $\pi : G \times F \to X$ définie par $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Alors, le triplet $(H, G \times F, X)$ est un espace fibré principal de base X et de groupe H. Autrement dit, $G \times_H F$ existe et est isomorphe à X.*

Démonstration. — Il est évident que $(H, G\times F, X)$ est un système fibré. Il suffit donc de montrer qu'il est localement trivial dans la topologie étale. D'après [16, prop. 2], il suffit de montrer les propriétés (FP) et (SL) ci-après :

(FP) *Si (g, x) et (g', x') sont deux éléments de $G\times F$ tels que $g{\cdot}x = g'{\cdot}x'$ alors il existe un unique $h \in H$ tel que $(g', x') = h \cdot (g, x)$. De plus, l'application qui, à un tel couple $((g, x), (g', x'))$ fait correspondre l'élément h est un morphisme de la sous-variété T de $(G \times F) \times (G \times F)$ où elle est définie dans le groupe H.*

(SL) *Pour tout $x \in X$, il existe un revêtement non ramifié $f : U' \to U$ d'un voisinage ouvert U de x, et un morphisme $s : U' \to P$ tels que $\pi \circ s = f$ sur U'.*

La condition (FP) se vérifie immédiatement (on a $h = g'^{-1}g$).

Soit $x \in X$. Notons $p : G \to G/H$ la projection canonique. D'après [16, prop. 3], le triplet $(H, G, G/H)$ est un espace fibré principal. En particulier, il existe un revêtement non ramifié $\psi : \Omega' \to \Omega$ d'un voisinage ouvert Ω de $\phi(x)$ et $\sigma : \Omega' \to G$ tels que $\psi = p \circ \sigma$. Posons

$$U' = \big\{(\omega, x) \in \Omega' \times X : \psi(\omega) = \phi(x)\big\}.$$

Alors, par [16, 1.3.d], la projection de $\Omega' \times X$ sur X induit un revêtement non ramifié $f : U' \to \phi^{-1}(\Omega)$. Posons

$$s : U' \longrightarrow G \times F, \quad (\omega, x) \longmapsto \big(\sigma(\omega), \sigma(\omega)^{-1} \cdot x\big).$$

On vérifie que $\pi \circ s = f$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brion (M.) – *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math., t. **55** (1986), no. 2, pp. 191–198.

[2] ———, *Variétés sphériques*, Notes de la session de la SMF *Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques*, Grenoble ; `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps`, 1997.

[3] ———, *The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition*, Comment. Math. Helv., t. **73** (1998), no. 1, pp. 137–174.

[4] ———, *On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties*, Comment. Math. Helv., t. **76** (2001), no. 2, pp. 263–299.

[5] De Concini (C.) & Procesi (C.) – *Complete symmetric varieties*, in *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, Springer, Berlin, 1983, pp. 1–44.

[6] Hsiang (W.) – *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[7] Humphreys (J.E.) – *Linear algebraic groups*, Springer Verlag, New York, 1975.

[8] Knop (F.) – *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, in *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, Manoj Prakashan, Madras, 1991, pp. 225–249.

[9] ———, *On the set of orbits for a Borel subgroup*, Comment. Math. Helv., t. **70** (1995), no. 2, pp. 285–309.

[10] Mumford (D.), Fogarty (J.) & Kirwan (F.) – *Geometric invariant theory*, 3e éd., Springer Verlag, New York, 1994.

[11] Pin (S.) – *Sur les singularités des orbites d'un sous-groupe de Borel dans les espaces symétriques*, Thèse, Université Grenoble I, 2001, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/these\_daterev.html`.

[12] Popov (V. L.) & Vinberg (È.B.) – *Invariant Theory*, in *Algebraic Geometry IV* (Parshin (A.N.) & Shafarevich (I.R.), éds.), Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer-Verlag, 1991, pp. 123–284.

[13] RESSAYRE (N.) – *Quotients of group completions by spherical subgroups*, J. Algebra, t. **265** (2003), no. 1, pp. 1–44.

[14] RICHARDSON (R.W.) & SPRINGER (T.A.) – *The Bruhat order on symmetric varieties*, Geom. Dedicata, t. **35** (1990), no. 1-3, pp. 389–436.

[15] ROSENLICHT (MAXWELL) – *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math., t. **78** (1956), pp. 401–443.

[16] SERRE (J.-P.) – *Espaces fibrés algébriques*, in *Séminaire C. Chevalley ; 2e année : 1958. Anneaux de Chow et applications*, Secrétariat mathématique, E. N. S. Paris, 1958, Exp. nº 1, pp. 1–37.

[17] SPRINGER (T.A.) – *Linear algebraic groups*, 2e éd., Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.

[18] ———, *Intersection cohomology of $B \times B$-orbit closures in group compactifications*, J. Algebra, t. **258** (2002), no. 1, pp. 71–111.

[19] VINBERG (È.B.) – *Complexity of actions of reductive groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., t. **20** (1986), no. 1, pp. 1–13, 96.

[20] WOLF (J.A.) – *Admissible representations and geometry of flag manifolds*, in *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory (South Hadley, MA, 1992)*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, pp. 21–45.