Bull. Soc. math. France
134 (1), 2006, p. 83–117

INDICE DU NORMALISATEUR DU CENTRALISATEUR D'UN ÉLÉMENT NILPOTENT DANS UNE ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLE

PAR ANNE MOREAU

RÉSUMÉ. —L'indice d'une algèbre de Lie algébrique complexe est la codimension minimale de ses orbites coadjointes. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, son indice, $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, est égal à son rang, $\operatorname{rg}\mathfrak{g}$. Le but de cet article est d'établir une formule générale pour l'indice de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ pour e nilpotent, où $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ est le normalisateur dans $\mathfrak{g}$ du centralisateur $\mathfrak{g}^e$ de e. Plus précisément, on obtient le résultat suivant, conjecturé par D. Panyushev :

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est le centre de $\mathfrak{g}^e$. Panyushev obtient l'inégalité $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ dans [8] et on montre que la maximalité du rang d'une certaine matrice à coefficients dans l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ implique l'autre inégalité. L'article consiste pour une large part en la preuve de la maximalité du rang de cette matrice.

Texte reçu le 19 juillet 2004, révisé le 4 mars 2005, accepté le 15 juin 2005.

ANNE MOREAU, Université Paris 7, Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
E-mail : `moreaua@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22-04, 22E46, 22E60, 17B10, 17B20.

Mots clefs. — Indice, représentation, algèbre de Lie, normalisateur, centralisateur, élément nilpotent.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2006/83/$ 5.00

Abstract (*The index of the normaliser of the centraliser of a nilpotent element in a semisimple Lie algebra*)

The index of a complex Lie algebra is the minimal codimension of its coadjoint orbits. Let us suppose $\mathfrak{g}$ semisimple, then its index, $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, is equal to its rank, $\operatorname{rk}\,\mathfrak{g}$. The goal of this paper is to establish a simple general formula for the index of $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, for e nilpotent, where $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ is the normaliser in $\mathfrak{g}$ of the centraliser $\mathfrak{g}^e$ of e. More precisely, we have to show the following result, conjectured by D. Panyushev [8]:

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rk}\,\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

where $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ is the centre of $\mathfrak{g}^e$. Panyushev [8] obtained the inequality $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ and we show that the maximality of the rank of a certain matrix with entries in the symmetric algebra $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ implies the other inequality. The main part of this paper consists of the proof of the maximality of the rank of this matrix.

Introduction

L'indice d'une algèbre de Lie algébrique complexe est la codimension minimale de ses orbites coadjointes. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, son indice $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ est égal à son rang, $\operatorname{rg}\mathfrak{g}$. Plus généralement, l'indice d'une représentation arbitraire V d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{q}$ est la codimension minimale de ses orbites sous l'action contragrédiente. On le note $\operatorname{ind}(\mathfrak{q}, V)$.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe de groupe adjoint G. On identifie $\mathfrak{g}$ à son image par la représentation adjointe. Pour x dans $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^x$ son centralisateur, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^x)$ le centre de $\mathfrak{g}^x$ et $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^x)$ le normalisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}^x$. Le but de cet article est de donner une expression simple de l'indice de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, pour e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ agit sur le sous-espace $\mathfrak{g}^e$ par la représentation adjointe et on établit en outre une formule pour l'indice, $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e)$, du $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$-module $\mathfrak{g}^e$. Plus précisément, on se propose de montrer les deux résultats suivants [8, conjectures 6.1 et 6.2], conjecturés par D. Panyushev :

Théorème 1. — *Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors*

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Théorème 2. — *Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors*

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Notons que les deux relations précédentes sont indépendantes du choix d'un représentant dans l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. Dans [8], D. Panyushev dresse une liste de cas où ces deux égalités sont satisfaites. Remarquons à ce propos qu'il obtient seulement les relations $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}^e - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}^e - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. La relation $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{rg}\mathfrak{g}$ n'est en effet énoncée dans [8] que sous forme de conjecture (conjecture 3.2 d'Elashvili).

Cette égalité est démontrée depuis en [3, théorème 5.5]. Dans tous ses exemples, D. Panyushev obtient ces relations en montrant que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a une orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$, où $N_{\mathfrak{g}}(e)$ désigne le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$. Cette condition est, comme on aura l'occasion de le voir, suffisante mais ne permet pas de traiter tous les cas.

La première partie regroupe un certain nombre de résultats autour du normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent. On introduit en outre dans cette partie une propriété (P) qui interviendra dans la suite. On montre dans la deuxième partie que le théorème 1 est en fait une conséquence du théorème 2 et qu'obtenir l'identité du théorème 2 équivaut à montrer qu'une certaine matrice à coefficients dans l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal. On consacre les deux parties qui suivent à la démonstration de ce dernier point dans deux cas particuliers : lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple classique (partie 3) et lorsque l'élément e vérifie la propriété (P) (partie 4). La troisième partie utilise des propriétes géométriques des algèbres de Lie classiques tandis que la quatrième partie repose pour une large part sur des résultats exposés dans [3] par J.-Y. Charbonnel. On étudie dans la dernière partie la propriété (P) pour achever la démonstration des théorèmes 1 et 2 dans le cas exceptionnel. La fin de la démonstration s'appuie sur des calculs explicites effectués à l'aide du logiciel GAP4. On trouve les détails de ces calculs dans [7]. Le cas de E_6, relativement simple, est tout de même présenté dans cette dernière partie.

1. Résultats préliminaires

Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Puisque e est nilpotent, le théorème de Jacobson-Morosov assure l'existence de deux éléments h et f dans $\mathfrak{g}$ pour lesquels e, h, f satisfont les relations de $\mathfrak{sl}_2$-triplet :

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

Le normalisateur $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ du centralisateur $\mathfrak{g}^e$ de e est, par définition, l'ensemble des y de $\mathfrak{g}$ tels qu'on ait l'inclusion : $[y, \mathfrak{g}^e] \subset \mathfrak{g}^e$. C'est aussi le normalisateur du centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de $\mathfrak{g}^e$, comme on le vérifie facilement. Le centre et le normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent sont étudiés dans [1] et [9]. La proposition suivante rassemble un certain nombre de propriétés du normalisateur. On en trouve une preuve dans [1], lemme 10.2, corollaire 11 et théorème 18, ou dans [9], proposition 35.4.

Proposition 1.1. — *On a les relations suivantes :*

1) $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \{y \in \mathfrak{g} \mid [y, e] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\}$,
2) $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)]$.

En particulier, $\dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ *et on a* $[\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), e] = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Si $\mathfrak{u}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{u}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{u}$ pour la forme de Killing $\langle .,. \rangle$ de $\mathfrak{g}$. On va décrire l'orthogonal de certains sous-espaces. On a la proposition bien connue suivante dont la démonstration est rappelée en [3], lemme 5.6 :

Proposition 1.2. — *L'orthogonal de $\mathfrak{g}^e$ est le sous-espace $[e, \mathfrak{g}]$ et on a la décomposition $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Puisque ${\mathfrak{g}^f}^\perp = [f, \mathfrak{g}]$, la deuxième relation permet d'identifier le dual de $\mathfrak{g}^e$ à $\mathfrak{g}^f$ via la forme de Killing.

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}^e$ stable par $\operatorname{ad} h$. Les sous-espaces $\mathfrak{g}^e$ et $[f, \widetilde{\mathfrak{g}}]$ ont une intersection nulle d'après la proposition 1.2 et on s'intéresse au sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \widetilde{\mathfrak{g}}]$ de $\mathfrak{g}$. Son orthogonal est décrit par la proposition suivante :

Proposition 1.3. — *Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}^e$ stable par $\operatorname{ad} h$, alors on a*

$$\big(\mathfrak{g}^e \oplus [f, \widetilde{\mathfrak{g}}]\big)^\perp = [e, \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp].$$

Démonstration. — Il est clair que $\mathfrak{g}^e$ est contenu dans l'orthogonal de $[e, \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]$. Soit u dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$, alors on a

$$\big\langle [f,u], [e, \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp] \big\rangle = \big\langle \big[[f,u], e\big], \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \big\rangle = \big\langle -[h,u], \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \big\rangle = \{0\},$$

car $[h,u]$ appartient à $\widetilde{\mathfrak{g}}$, puisque $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est stable par $\operatorname{ad} h$. On a ainsi montré que le sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \widetilde{\mathfrak{g}}]$ est contenu dans l'orthogonal de $[e, \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]$. Calculons les dimensions des deux sous-espaces :

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathfrak{g}^e \oplus [f, \widetilde{\mathfrak{g}}]\big)^\perp &= \dim \mathfrak{g} - \big(\dim \mathfrak{g}^e + \dim [f, \widetilde{\mathfrak{g}}]\big) \\
&= \dim \mathfrak{g} - \big(\dim \mathfrak{g}^e + \big(\dim \widetilde{\mathfrak{g}} - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f)\big)\big) \\
&= \dim \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp - \big(\dim \mathfrak{g}^e - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f)\big), \\
\dim([e, \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]) &= \dim \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e).
\end{aligned}$$

Il résulte de la démonstration du lemme 5.6 de [3] que l'on a la décomposition $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}} \cap {\mathfrak{g}^e}^\perp \oplus \widetilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\dim(\widetilde{\mathfrak{g}} \cap {\mathfrak{g}^e}^\perp) &= \dim \mathfrak{g} - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp + \mathfrak{g}^e) \\
&= \dim \mathfrak{g} - \big(\dim \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp + \dim \mathfrak{g}^e - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e)\big) \\
&= \dim \widetilde{\mathfrak{g}} - \dim \mathfrak{g}^e + \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e)\cdot
\end{aligned}$$

De cette égalité et de la décompostion précédente, on déduit la relation

$$\dim \widetilde{\mathfrak{g}} = \big(\dim \widetilde{\mathfrak{g}} - \dim \mathfrak{g}^e + \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e)\big) + \dim(\widetilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f),$$

ce qui donne $\dim(\widetilde{\mathfrak{g}}^\perp \cap \mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e - \dim(\widetilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}^f)$. Par suite les deux sous-espaces $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \widetilde{\mathfrak{g}}]$ et $[e, \widetilde{\mathfrak{g}}^\perp]$ sont de même dimension et la proposition s'ensuit. □

À l'aide de la proposition précédente, on retrouve l'orthogonal de sous-espaces connus. Lorsque le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est nul, on retrouve l'orthogonal de $\mathfrak{g}^e$. D'après [8, théorème 2.4], on dispose de la décomposition $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^f] = \mathfrak{g}$. On en déduit que l'orthogonal de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est le sous-espace $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^e]$. La proposition précédente appliquée à $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\xi)$ permet alors de décrire l'orthogonal de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$:

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)^\perp = \big(\mathfrak{g}^e \oplus \big[f, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\big]\big)^\perp = \big[e, [\mathfrak{g}^e, \mathfrak{g}]\big].$$

On a utilisé la proposition 1.1 pour la première égalité. Enfin, la proposition 1.2 et la proposition précédente, appliquées à $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^e$, donnent l'orthogonal du sous-espace $\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e]$. Ce dernier sous-espace interviendra à plusieurs reprises dans la suite. On a

$$\big(\mathfrak{g}^e \oplus [f, \mathfrak{g}^e]\big)^\perp = \big[e, [e, \mathfrak{g}]\big].$$

On termine cette partie par l'introduction d'une propriété (P) :

Définition 1.4. — On note $\mathfrak{z}_{\max}$ le sous-espace propre de la restriction de $\operatorname{ad} h$ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ relativement à sa plus grande valeur propre. On dira que *e vérifie la propriété* (P) si, pour tout élément non nul v de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, le sous-espace $\mathfrak{z}_{\max}$ est contenu dans le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$.

Il est clair que si e vérifie la propriété (P), il en est de même de tous les éléments de l'orbite de e sous l'action du groupe adjoint. On dira qu'une orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$ *vérifie la propriété* (P) si l'un de ses représentants la vérifie.

2. Rappels sur l'indice d'une algèbre de Lie et premières réductions

Soit $\mathfrak{q}$ une algèbre de Lie complexe et ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{q}$. On désigne par $\mathfrak{q}_\phi$ l'ensemble des s de $\mathfrak{q}$ tels que $\phi([\mathfrak{q}, s]) = 0$. Autrement dit,

$$\mathfrak{q}_\phi = \big\{s \in \mathfrak{q} \mid (\operatorname{ad}^* s) \cdot \phi = 0\big\},$$

où $\operatorname{ad}^* : \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{q}$. On rappelle que l'*indice de* $\mathfrak{q}$, noté $\operatorname{ind} \mathfrak{q}$, est défini par

$$\operatorname{ind} \mathfrak{q} = \min_{\phi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\phi.$$

L'indice d'une algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ ainsi défini est un entier lié à la représentation adjointe de $\mathfrak{q}$. Une méthode similaire, appliquée à une représentation de $\mathfrak{q}$ arbitraire, permet de définir l'*indice d'une représentation.* Soit $\rho : \mathfrak{q} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{q}$. On note, de manière abusive, $s \cdot v$ à la place de $\rho(s)v$, pour s dans $\mathfrak{q}$ et v dans V. De même, pour ϕ dans le dual V^* de V et pour s dans $\mathfrak{q}$, on note $s \cdot \phi$ au lieu de $\rho^*(s)\phi$ où ρ^* est la représentation contragrédiente à ρ. L'entier

$$\dim V - \max_{\phi \in V^*} (\dim \mathfrak{q} \cdot \phi)$$

est appelé l'*indice de* V ou *l'indice du* $\mathfrak{q}$*-module* V. On le note $\operatorname{ind}(\rho, V)$ ou $\operatorname{ind}(\mathfrak{q}, V)$ et il est clair que $\operatorname{ind}(\operatorname{ad}, \mathfrak{q}) = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$ au sens précédent.

On considère la forme bilinéaire à valeurs dans V :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V) : \mathfrak{q} \times V \longrightarrow V, \quad (s, v) \longmapsto s \cdot v.$$

En composant cette application avec un élément ϕ de V^*, on obtient une forme bilinéaire à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\phi : \mathfrak{q} \times V \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}.$$

L'application $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\phi$ peut être vue comme un élément de $\mathrm{L}(\mathfrak{q}, V^*)$ et on vérifie facilement l'égalité

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{q}, V) = \dim V - \max_{\phi \in V^*}\big(\operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\phi\big).$$

Soient $n = \dim \mathfrak{q}$ et $m = \dim V$. En choisissant une base sur $\mathfrak{q}$ et V, on peut considérer $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)$ comme une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans V, où V est identifié à la composante de degré 1 de l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(V)$. Ainsi $\operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V) = \max_{\phi \in V^*}(\operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V)_\phi)$ et l'on obtient l'égalité

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{q}, V) = \dim V - \operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V). \tag{1}$$

Pour $V = \mathfrak{q}$, on note $\mathcal{K}(\mathfrak{q})$ au lieu de $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ et il vient

$$\operatorname{ind} \mathfrak{q} = \dim \mathfrak{q} - \operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{q}). \tag{2}$$

On s'intéresse maintenant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ et on commence par examiner l'identité du théorème 1. On choisit une base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathfrak{g}^e$ telle que $e_1, \dots, e_m$ est une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, avec $m \leq n$. Alors la famille $\{e_1, \dots, e_n, [f, e_1], \dots, [f, e_m]\}$ est une base de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ d'après la proposition 1.1. Dans cette base, la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e))$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{D} \\ 0 & \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{D}^t & -\mathfrak{E}^t & \mathfrak{F} \end{bmatrix},$$

où les matrices carrées $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}$ sont respectivement d'ordre m et $n - m$. On reconnait certains blocs de cette matrice. Ainsi

$$\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathfrak{D} \\ 0 & \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(\mathfrak{g}^e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} \end{bmatrix}.$$

D'après (2), on a la relation

$$\operatorname{ind} \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) - \operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)).$$

Or la structure de la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e))$ montre que l'on a l'inégalité

$$\operatorname{rang} \mathcal{K}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\big) \leq \operatorname{rang} \mathfrak{C} + 2 \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Par ailleurs, puisque $\mathcal{K}(\mathfrak{g}^e) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} \end{smallmatrix}\right]$, on a l'égalité

$$\operatorname{rang} \mathfrak{C} = \operatorname{rang} \mathcal{K}(\mathfrak{g}^e) = \dim \mathfrak{g}^e - \operatorname{ind} \mathfrak{g}^e.$$

Par suite, il vient :

$$\operatorname{ind} \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) - \dim \mathfrak{g}^e + \operatorname{ind} \mathfrak{g}^e - 2 \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

D'après [3, théorème 5.5], on a la relation $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{rg}\mathfrak{g}$. Par ailleurs, la proposition 1.1, 2) donne $\dim\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim\mathfrak{g}^e + \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. On obtient finalement l'inégalité

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \geq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Voyons maintenant pourquoi le théorème 2 implique le théorème 1. Il s'agit de prouver la proposition suivante :

Proposition 2.1. — *Si l'égalité* $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ *est satisfaite, alors l'égalité* $\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ *est satisfaite.*

Démonstration. — On suppose le théorème 2 démontré. D'après ce qui précède, il suffit d'obtenir l'inégalité

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \leq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Rappelons le résultat suivant, démontré dans [8], Théorème 1.4 :

Lemme 2.2. — *Soit* $\mathfrak{q}$ *un idéal d'une algèbre de Lie* $\widetilde{\mathfrak{q}}$. *Alors*

$$\operatorname{ind}\mathfrak{q} + \operatorname{ind}\widetilde{\mathfrak{q}} \leq \dim(\widetilde{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}) + 2\operatorname{ind}(\widetilde{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}).$$

En appliquant ce lemme à l'idéal $\mathfrak{g}^e$ de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$, on obtient

$$\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e + \operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \leq \dim\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)/\mathfrak{g}^e\big) + 2\operatorname{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big),$$

ce qui donne, en utilisant de nouveau les égalités $\dim\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) = \dim\mathfrak{g}^e + \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{rg}\mathfrak{g}$,

$$\operatorname{ind}\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e) \leq 2\operatorname{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) - \big(\operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\big).$$

Le théorème 2 entraine alors l'inégalité souhaitée. □

On s'intéresse désormais à l'identité du théorème 2. On a la proposition suivante :

Proposition 2.3. — *Le théorème* 2 *est équivalent à l'assertion suivante : la matrice de taille* $n \times m$ *à coefficients dans* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [[f, e_1], e_1] & \cdots & [[f, e_m], e_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f, e_1], e_m] & \cdots & [[f, e_m], e_m] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f, e_1], e_n] & \cdots & [[f, e_m], e_n] \end{bmatrix},$$

est de rang maximal égal à $m = \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Avant de démontrer la proposition, on étend encore un peu la définition de l'indice. Ceci permettra d'interpréter géométriquement la matrice $\left[\begin{smallmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{E} \end{smallmatrix}\right]$. Soient $\mathfrak{q}$ une algèbre de Lie complexe, V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et soit $\rho : \mathfrak{q} \to \mathrm{L}(V, V')$ une application linéaire de $\mathfrak{q}$ dans l'espace des applications linéaires de V dans V'. Pour ϕ dans $(V')^*$, on note

$$\mathfrak{q}_\phi = \big\{ s \in \mathfrak{q} \mid \phi(\rho(s)v) = 0,\ \forall v \in V \big\}$$

le «stabilisateur de ϕ» et $\mathfrak{q} \cdot_\rho \phi$ l'image dans V^* de l'application qui à s dans $\mathfrak{q}$ associe la forme linéaire $v \mapsto -\phi(\rho(s)v)$ définie sur V. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité on omet l'indice ρ. On pose, par analogie avec l'indice,

$$r(\mathfrak{q}, V, V') = \dim V - \max_{\phi \in (V')^*} (\dim \mathfrak{q} \cdot_\rho \phi).$$

Notons que ρ n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie en général ; l'espace $\mathrm{L}(V, V')$ n'est même pas une algèbre de Lie ! En revanche, si $V = V'$ et si ρ est une représentation de $\mathfrak{q}$ dans V, on retrouve l'indice $\mathrm{ind}(\mathfrak{q}, V)$ du $\mathfrak{q}$-module V. On considère, toujours par analogie avec l'indice, la forme bilinéaire à valeurs dans V' :

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V') : \mathfrak{q} \times V \longrightarrow V', \quad (s, v) \longmapsto -\rho(s)v.$$

En composant cette application avec un élément ϕ de $(V')^*$, on obtient une forme bilinéaire à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V')_\phi : \mathfrak{q} \times V \longrightarrow V' \xrightarrow{\ \phi\ } \mathbb{C}.$$

On vérifie facilement l'égalité :

$$r(\mathfrak{q}, V, V') = \dim V - \max_{\phi \in (V')^*} \big(\mathrm{rang}\, \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V')_\phi\big).$$

Cette écriture permet de voir que l'ensemble des formes linéaires ϕ de $(V')^*$ telles que $\dim \mathfrak{q} \cdot_\rho \phi = \dim V - r(\mathfrak{q}, V, V')$ est un ouvert dense de $(V')^*$. En choisissant des bases sur $\mathfrak{q}$ et V, on peut considérer $\mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V')$ comme une matrice de taille $\dim V \times \dim \mathfrak{q}$ à coefficients dans V', où V' est identifié à la composante de degré 1 de l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(V')$. Ainsi, on obtient l'égalité

$$r(\mathfrak{q}, V, V') = \dim V - \mathrm{rang}\, \mathcal{K}(\mathfrak{q}, V, V').$$

Prouvons maintenant la proposition 2.3.

Démonstration de la proposition 2.3. — D'après la relation (1), on a :

$$\mathrm{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) = \dim \mathfrak{g}^e - \mathrm{rang}\, \mathcal{K}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big).$$

Or la structure de la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e)$ montre que l'on a l'inégalité

$$\mathrm{rang}\, \mathcal{K}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) \leq \mathrm{rang}\, \mathfrak{C} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

En utilisant la relation, déjà vue, $\mathrm{rang}\, \mathfrak{C} = \dim \mathfrak{g}^e - \mathrm{ind}\, \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g}^e - \mathrm{rg}\, \mathfrak{g}$, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) \geq \mathrm{rg}\, \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Il y a égalité dans la relation précédente si, et seulement si, la condition $\mathrm{rang}\, \mathcal{K}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \mathrm{rang}\, \mathfrak{C} + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est satisfaite, autrement dit si, et seulement si, le rang de la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{smallmatrix}\right]$, à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$, est égal à rang $\mathfrak{C}$ + $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Par suite, si l'égalité du théorème 2 est satisfaite, nécessairement la matrice $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{smallmatrix}\right]$ est de rang maximal égal à $m = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Réciproquement, supposons que le rang de la matrice $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{smallmatrix}\right]$ soit maximal, égal à $m = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, et montrons la relation du théorème 2. Soit ρ l'application linéaire de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ dans $\mathrm{L}([f,\mathfrak{g}^e],\mathfrak{g}^e)$ donnée par la relation

$$\rho(s)v = [s,v] \in \mathfrak{g}^e,$$

pour s dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et v dans $[f,\mathfrak{g}^e]$. Puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\mathfrak{g}^f$ ont une intersection nulle, il existe un supplémentaire $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}^e$ contenant $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Posons $r = \dim \mathfrak{r}$; on a $m \leq r \leq n$. On peut supposer que les éléments $e_1,\dots,e_r$ forment une base de $\mathfrak{r}$ et que les éléments $e_{r+1},\dots,e_n$ forment une base de $\mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e$. La famille $\{[f,e_1],\dots,[f,e_r]\}$ est libre dans $[f,\mathfrak{g}^e]$ et de cardinal $r = \dim \mathfrak{g}^e - \dim \mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}^e = \dim([f,\mathfrak{g}^e])$; c'est donc une base de $[f,\mathfrak{g}^e]$. Dans les bases $\{e_1,\dots,e_m\}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\{[f,e_1],\dots,[f,e_r]\}$ de $[f,\mathfrak{g}^e]$, la matrice $\mathcal{K}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),[f,\mathfrak{g}^e],\mathfrak{g}^e)$ à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ est donnée par

$$\mathcal{K}\big(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),[f,\mathfrak{g}^e],\mathfrak{g}^e\big) = \begin{bmatrix} [e_1,[f,e_1]] & \cdots & [e_m,[f,e_1]] \\ \vdots & & \vdots \\ [e_1,[f,e_m]] & \cdots & [e_m,[f,e_m]] \\ [e_1,[f,e_{m+1}]] & \cdots & [e_m,[f,e_{m+1}]] \\ \vdots & & \vdots \\ [e_1,[f,e_r]] & \cdots & [e_m,[f,e_r]] \end{bmatrix}.$$

On dispose des relations

$$\big[[f,e_j],e_i\big] = \big[[f,e_i],e_j\big] = -\big[e_j,[f,e_i]\big],$$

pour $i = 1,\dots,n$ et $j = 1,\dots,m$. Puisque les vecteurs $e_{r+1},\dots,e_n$ sont dans le centralisateur $\mathfrak{g}^f$ de f, les crochets $[[f,e_j],e_i]$ sont nuls, pour $i = r+1,\dots,n$ et $j = 1,\dots,m$, et la matrice $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{smallmatrix}\right]$ de la proposition est donnée par

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [[f,e_1],e_1] & \cdots & [[f,e_m],e_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f,e_1],e_m] & \cdots & [[f,e_m],e_m] \\ [[f,e_1],e_{m+1}] & \cdots & [[f,e_m],e_{m+1}] \\ \vdots & & \vdots \\ [[f,e_1],e_r] & \cdots & [[f,e_m],e_r] \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite les matrices $\mathcal{K}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),[f,\mathfrak{g}^e],\mathfrak{g}^e)$ et $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{C}\end{smallmatrix}\right]$ ont le même rang. D'après l'hypothèse sur le rang de $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{C}\end{smallmatrix}\right]$, on en déduit que l'entier $\max_{\phi\in(\mathfrak{g}^e)^*}\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\phi$ est égal à $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. L'ensemble

$$\Omega' = \big\{\phi\in(\mathfrak{g}^e)^* \mid \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\phi = \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\big\}$$

est donc un ouvert dense de $(\mathfrak{g}^e)^*$. Par ailleurs, il résulte de l'égalité $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{rg}\mathfrak{g}$ que l'ensemble

$$\Omega = \big\{\phi\in(\mathfrak{g}^e)^* \mid \dim\mathfrak{g}^e\cdot\phi = \dim\mathfrak{g}^e - \operatorname{rg}\mathfrak{g}\big\}$$

est un ouvert dense de $(\mathfrak{g}^e)^*$, où $\mathfrak{g}^e\cdot\phi$ désigne l'orbite coadjointe de ϕ. L'intersection $\Omega\cap\Omega'$ est donc un ouvert non vide de $(\mathfrak{g}^e)^*$. Soit λ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}^e$ appartenant à cette intersection. On considère l'orbite $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\lambda$ de λ sous l'action naturelle de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ dans $(\mathfrak{g}^e)^*$. Autrement dit,

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\lambda = \big\{v\in\mathfrak{g}^e\mapsto -\lambda([s,v]) \mid s\in\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\big\}.$$

Les sous-espaces $\mathfrak{g}^e$ et $[f,\mathfrak{g}^e]$ ont une intersection nulle d'après la proposition 1.2 et on pose $E=\mathfrak{g}^e\oplus[f,\mathfrak{g}^e]$. En identifiant $(\mathfrak{g}^e)^*$, respectivement $([f,\mathfrak{g}^e])^*$, au sous-espace de E^* formé des formes linéaires nulles sur $[f,\mathfrak{g}^e]$, respectivement $\mathfrak{g}^e$, on obtient la décomposition suivante :

$$E^* = (\mathfrak{g}^e)^*\oplus\big([f,\mathfrak{g}^e]\big)^*.$$

Par suite, les ensembles $\mathfrak{g}^e\cdot\lambda$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\lambda$ peuvent être vus comme deux sous-espaces de E^* dont l'intersection est nulle. En effet, le premier est contenu dans $(\mathfrak{g}^e)^*$ et le deuxième dans $([f,\mathfrak{g}^e])^*$. On va montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\lambda$ et $\mathfrak{g}^e\cdot\lambda\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\lambda$. Soit s un élément de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$. Selon la décomposition 2) de la proposition 1.1, il s'écrit de manière unique $s=s_1+[f,s_2]$, avec s_1 dans $\mathfrak{g}^e$ et s_2 dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. On pose :

$$\Phi(s\cdot\lambda) = s_1\cdot\lambda + s_2\cdot_\rho\lambda.$$

L'application Φ définit ainsi une application linéaire de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\lambda$ dans $\mathfrak{g}^e\cdot\lambda\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\lambda$. C'est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels, dont l'inverse est donné par

$$s_1\cdot\lambda + s_2\cdot_\rho\lambda \longmapsto \big(s_1+[f,s_2]\big)\cdot\lambda.$$

On déduit de cet isomorphisme une égalité sur les dimensions,

$$\dim\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\lambda = \dim\mathfrak{g}^e\cdot\lambda + \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\lambda,$$

car les deux sous-espaces $\mathfrak{g}^e\cdot\lambda$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\cdot_\rho\lambda$ ont une intersection nulle. D'où, puisque λ appartient à l'intersection $\Omega\cap\Omega'$,

$$\dim\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\lambda = (\dim\mathfrak{g}^e - \operatorname{rg}\mathfrak{g}) + \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Par suite, on obtient l'inégalité

$$\max_{\phi\in(\mathfrak{g}^e)^*}\big(\dim\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)\cdot\phi\big) \geq \dim\mathfrak{g}^e - \operatorname{rg}\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e),$$

ce qui donne encore $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e),\mathfrak{g}^e) \leq \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

L'autre inégalité étant déjà connue, on en déduit le théorème 2. L'équivalence de la proposition est ainsi démontrée. □

Notons tout d'abord que la condition de la proposition précédente est en particulier vérifiée si la matrice $\mathfrak{D}$ est non singulière. Dire que la matrice $\mathfrak{D}$ est non singulière signifie que l'indice $\mathrm{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$ du $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$-module $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est nul, ce qui se traduit encore en disant que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a une orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$. On retrouve ainsi la condition de D. Panyushev vue en introduction qui lui permet de conclure dans un certain nombre de cas. Précisément, celui-ci prouve en [8] que la matrice $\mathfrak{D}$ est non singulière dans les cas suivants :

1) si $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'une des algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_{2n+1}$ ou $\mathfrak{sp}_n$ (théorème 4.7 (i)),
2) pour certains éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}_{2n}$ (théorème 4.7 (ii)),
3) si $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \leq 2$ (théorème 4.7 (iii)),
4) si e est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$ (corollaire 5.6).

Notons que dans les trois premiers cas, D. Panyushev montre une propriété plus forte que celle de l'orbite ouverte, à savoir : le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ a un nombre fini d'orbites dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Remarquons enfin qu'il existe des cas où la matrice $\mathfrak{D}$ est singulière ; par exemple, si e est un élément nilpotent sous-régulier de $\mathfrak{so}_8$, on peut montrer (voir [8], partie 4) que le groupe $N_{\mathfrak{g}}(e)$ n'a pas d'orbite ouverte dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$.

Soit e un élément nilpotent non distingué de $\mathfrak{g}$. En raisonnant comme dans [9, preuve de la proposition 35.3.9], on montre qu'il existe une sous-algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$, contenant e, et telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

1) $\mathfrak{t}$ est l'algèbre dérivée du centralisateur d'un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$,
2) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e) \subset \mathfrak{t}^e \subset \mathfrak{g}^e$,
3) e est distingué dans $\mathfrak{t}$.

Proposition 2.4. — *On suppose que la relation*

$$\mathrm{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{t}^e), \mathfrak{t}^e\big) = \mathrm{rg}\, \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$$

est satisfaite. Alors la relation

$$\mathrm{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) = \mathrm{rg}\, \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$$

est satisfaite.

Démonstration. — Soit $\{e, h', f'\}$ un $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans $\mathfrak{t}$ contenant e. On construit une base $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathfrak{g}^e$ telle que $e_1, \ldots, e_m$ soit une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, $e_1, \ldots, e_{m'}$ une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$ et $e_1, \ldots, e_{n'}$ une base de $\mathfrak{t}^e$, avec $m \leq m' \leq n' \leq n$. Comme la relation $\mathrm{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{t}^e), \mathfrak{t}^e) = \mathrm{rg}\, \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$ est satisfaite, la proposition 2.3 assure qu'il existe un vecteur v de $\mathfrak{t}^f$ tel que la matrice $(\langle v, [[f', e_i], e_j]\rangle)_{1\le i\le n',\, 1\le j\le m'}$ est de rang maximal, car $\mathfrak{t}^f$ s'identifie au dual de $\mathfrak{t}^e$ via la forme de Killing. On suppose par l'absurde que la matrice $(\langle v, [[f', e_i], e_j]\rangle)_{1\le i\le n,\, 1\le j\le m}$ n'est pas de rang maximal. Alors il existe des complexes $a_1, \ldots, a_m$ non tous nuls qui satisfont l'égalité

$$\Big\langle v, \Big[[f', e_i], \sum_{j=1}^{m} a_j e_j\Big]\Big\rangle = 0,$$

pour $i = 1, \ldots, n$. On a donc aussi la relation $\big\langle v, \big[[f', e_i], \sum_{j=1}^{m} a_j e_j\big]\big\rangle = 0$, pour $i = 1, \ldots, n'$, car $n' \le n$. En posant $a_j = 0$ pour $j = m+1, \ldots, m'$, on obtient encore $\big\langle v, \big[[f', e_i], \sum_{j=1}^{m'} a_j e_j\big]\big\rangle = 0$, pour $i = 1, \ldots, n'$. Ceci contredit le fait que la matrice

$$\big(\big\langle v, \big[[f', e_i], e_j\big]\big\rangle\big)_{\substack{1\le i\le n'\\ 1\le j\le m'}}$$

est de rang maximal. Par suite, la proposition 2.3 donne la relation $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, car cette dernière ne dépend pas du choix d'un $\mathfrak{sl}_2$-triplet $\{e, h, f\}$ dans $\mathfrak{g}$ contenant e. □

Effectuons enfin une dernière réduction. Une algèbre de Lie complexe semi-simple est somme directe d'idéaux simples et il est clair qu'il suffit de démontrer les théorèmes 1 et 2 pour chaque composante simple de $\mathfrak{g}$. On peut supposer désormais que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe simple.

3. Démonstration des théorèmes 1 et 2 dans le cas classique

On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple classique, c'est-à-dire on suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_{2n+1}$, $\mathfrak{sp}_{2n}$ ou $\mathfrak{so}_{2n}$. Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ et soit $\{e, h, f\}$ un $\mathfrak{sl}_2$-triplet contenant e. On considère le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{z}}$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les puissances de e. Autrement dit, on a :

$$\widetilde{\mathfrak{z}} = \big\{\text{polynômes en } e\big\} \cap \mathfrak{g}.$$

Alors clairement $\widetilde{\mathfrak{z}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ stable par $\operatorname{ad} h$ et on dispose, d'après [6], preuve de la proposition 3.2 et proposition 3.3, des résultats suivants :

Lemme 3.1. — *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{z}}$ est engendré par les puissances de e. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ ou $\mathfrak{sp}_{2n}$, le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{z}}$ est engendré par les puissances impaires de e. De plus, on a $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ sauf dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ et où la partition de $2n$ associée à e ne contient que deux parties. Dans ce cas, le sous-espace $\widetilde{\mathfrak{z}}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.*

On va montrer «directement», à l'aide de calculs explicites, que la matrice $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{smallmatrix}\right]$ introduite dans la partie précédente est de rang maximal. Dans le cas où $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, la proposition 3.2 donne un résultat plus fort. Commençons par quelques calculs préliminaires. On dispose des relations suivantes :

$$[e^k, f] = e^k f - f e^k = \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^\alpha h e^\beta \quad \text{et} \quad [h, e^i] = 2i \cdot e^i, \tag{3}$$

$$\big[[e^k, f], e^i\big] = \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^\alpha h e^{\beta+i} - \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^{\alpha+i} h e^\beta \tag{4}$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=k-1} e^\alpha [h, e^i] e^\beta = 2ki \cdot e^{k+i-1}. \tag{5}$$

L'algèbre $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ agit sur le sous-espace $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ par la représentation adjointe et l'on dispose de la proposition suivante :

Proposition 3.2. — *On suppose* $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. *Alors l'indice* $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$ *est nul. En particulier, la relation*

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{g}^e\big) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$$

est satisfaite.

Démonstration. — Notons d le degré du polynôme minimal de e. On suppose tout d'abord $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Posons $e_i = e^i$, pour $i = 1, \ldots, d-1$, alors les éléments $e_1, \ldots, e_{d-1}$ forment une base de $\widetilde{\mathfrak{z}}$. Notons $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{ij})_{1\leq i,j\leq d-1}$ la matrice carrée d'ordre $d-1$ donnée par

$$\mathfrak{D}_{ij} = \big[[f, e_j], e_i\big],$$

pour i et j dans $\{1, \ldots, d-1\}$. D'après la relation (5), on a :

$$\mathfrak{D}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j > d, \\ -2ij e^{i+j-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier on connait $\mathfrak{D}$ sur l'anti-diagonale : on a $\mathfrak{D}_{ij} = -2ije^{d-1}$ si $i+j = d$. Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. De ce qui précède, il résulte que le déterminant de la matrice $\mathfrak{D}$ évalué en ϕ vaut, au signe près :

$$2^{d-1} \times (d-1)!^2 \times \big(\phi(e^{d-1})\big)^{d-1}.$$

C'est donc un élément non nul de $\mathcal{S}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$; il suffit en effet de l'évaluer en une forme linéaire qui ne s'annule pas en e^{d-1}. Par suite, la matrice $\mathfrak{D}$ est non singulière.

On suppose maintenant $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, $\mathfrak{so}_{2n+1}$ ou $\mathfrak{so}_{2n}$. Posons $r = \big[\frac{1}{2}d\big]$. On procède de la même façon ; on pose $e_i = e^{2i-1}$, pour $i = 1, \ldots, r$. D'après le lemme 3.1, les éléments $e_1, \ldots, e_r$ forment une base de $\widetilde{\mathfrak{z}}$. Notons $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ la matrice carrée d'ordre r donnée par

$$\mathfrak{D}_{ij} = \big[[f, e_j], e_i\big],$$

pour i et j dans $\{1,\dots,r\}$. D'après la relation (5), on a

$$\mathfrak{D}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j > r+1, \\ -2(2i-1)(2j-1)e^{2i+2j-3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, on connait $\mathfrak{D}$ sur l'anti-diagonale : on a

$$\mathfrak{D}_{ij} = -2(2i-1)(2j-1)e^{2r-1}$$

si $i+j=r+1$. Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. De ce qui précède, il résulte que le déterminant de la matrice $\mathfrak{D}$ évalué en ϕ vaut, au signe près :

$$2^r \times \big((2s-1)\times(2s-3)\times\cdots\times 1\big)^2 \times \big(\phi(e^{2r-1})\big)^r.$$

C'est donc un élément non nul de $\mathcal{S}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$; il suffit en effet de l'évaluer en une forme linéaire qui ne s'annule pas en e^{2r-1}. Par suite, la matrice $\mathfrak{D}$ est non singulière.

Dans tous les cas, on obtient que la matrice $\mathfrak{D}$ est non singulière. Notons que l'on n'a pas encore utilisé l'hypothèse $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Puisque $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, on pose $m = \dim\widetilde{\mathfrak{z}} = \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, d'où $m = d-1$ dans le cas $\mathfrak{sl}_n$, et $m=r$ sinon. On complète la base $\{e_1,\dots,e_m\}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ en une base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de $\mathfrak{g}^e$. Alors, dans les bases $\{e_1,\dots,e_n,[f,e_1],\dots,[f,e_m]\}$ de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ et $\{e_1,\dots,e_m\}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, on a :

$$\mathcal{K}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e),\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\big) = [\,0\ 0\ \mathfrak{D}\,].$$

Puisque $\mathfrak{D}$ est non singulière, la rang de la matrice précédente est égal à $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et l'indice $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e),\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e))$ est nul. L'autre assertion résulte des remarques qui suivent la démonstration de la proposition 2.3. □

Remarque 3.3. — La preuve précédente permet en outre de voir que les formes linéaires régulières de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)^*$ pour l'action naturelle de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e)$ dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ sont exactement celles qui ne s'annulent pas sur le vecteur de plus haut poids pour l'action de $\operatorname{ad} h$.

On déduit de cette proposition le théorème 2 pour tous les éléments nilpotents de $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_{2n}$ et $\mathfrak{so}_{2n+1}$ et pour les éléments nilpotents de $\mathfrak{so}_{2n}$ dont la partition associée possède au moins trois parties. En effet dans chacune de ces situations les sous-espaces $\widetilde{\mathfrak{z}}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ coïncident d'après le lemme 3.1. Remarquons que jusqu'ici, on a rien obtenu de nouveau par rapport à ce qui a déjà été fait par D. Panyushev dans [8], si ce n'est que l'on a utilisé la relation $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{rg}\mathfrak{g}$. D'ailleurs, la preuve précédente est, à quelques modifications près, celle de D. Panyushev ; elle m'a été suggérée par M. Raïs.

On consacre la fin de cette partie à la preuve du théorème 2 pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$.

Proposition 3.4. — *On suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$. Alors on a la relation*

$$\operatorname{ind}\big(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e),\mathfrak{g}^e\big) = \operatorname{rg}\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e).$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le rang n de $\mathfrak{g}$. Pour $n=1$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ et le résultat est connu. Soit $n \geq 2$. On suppose la proposition démontrée pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2k}$, avec k dans $\{1,\dots,n-1\}$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence et de ce qui précède que la relation $\operatorname{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{t}^e),\mathfrak{t}^e) = \operatorname{rg}\mathfrak{t} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{t}^e)$ est satisfaite pour $\mathfrak{t}$ et e satisfaisant les conditions 1), 2) et 3) qui précèdent la proposition 2.4 et pour $\mathfrak{t}$ strictement contenue dans $\mathfrak{g}$, car alors $\mathfrak{t}$ est produit direct d'algèbres de Lie simples classiques de rang strictement inférieur à celui de $\mathfrak{g}$. D'après la proposition 2.4, il suffit donc de prouver le résultat pour les éléments nilpotents distingués de $\mathfrak{g}$. On peut supposer en outre que e n'est pas un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$, d'après les remarques qui précèdent la proposition 2.4. On suppose désormais que e est un élément nilpotent distingué non régulier de $\mathfrak{g}$.

D'après [4, théorème 8.2.14], les orbites nilpotentes distinguées de $\mathfrak{so}_{2n}$ sous l'action du groupe adjoint sont les orbites nilpotentes dont la partition associée n'a que des parties impaires n'apparaissant qu'une seule fois. D'autre part, toujours d'après [4, proposition 5.4.1, (iv)], l'orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{so}_{2n}$ est donnée par la partition $[2n-1,1]$. Or, d'après la proposition 3.2 et le lemme 3.1, il reste seulement à traiter le cas où la partition associée à e ne possède que deux parties. En résumé, il suffit de prouver la proposition pour les orbites nilpotentes associées aux partitions de la forme $[2s+1,2t+1]$, avec $1 \leq t < s \leq n-2$.

On fixe un élément nilpotent e dans $\mathfrak{so}_{2n}$ associé à une partition de $2n$ de la forme $[2s+1,2t+1]$, avec $1 \leq t < s \leq n-2$. Le polynôme minimal de e est de degré $2s+1$. La dimension de $\widetilde{\mathfrak{z}}$ est donc égale à $\left[\frac{1}{2}(2s+1)\right] = s$ et la dimension de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est $s+1$, d'après le lemme 3.1. Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{C}$. On réalise $\mathfrak{g}$ comme l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $V = \mathbb{C}^{2n}$ relativement à la forme b. Comme $2s+1$ est différent de $2t+1$, il résulte de la preuve du lemme 5.1.17 de [4] qu'il existe deux sous-espaces orthogonaux V' et V'', stables par e, et de dimensions respectives $2s+1$ et $2t+1$. La restriction e' de e à V' est un élément nilpotent régulier dans $\mathfrak{so}_{2s+1}$. De même, la restriction e'' de e à V'' est un élément nilpotent régulier dans $\mathfrak{so}_{2t+1}$. Il existe alors deux $\mathfrak{sl}_2$-triplets $\{e',h',f'\}$ et $\{e'',h'',f''\}$ dans $\mathfrak{so}_{2s+1}$ et $\mathfrak{so}_{2t+1}$ contenant e' et e'' respectivement. On note encore, de manière abusive, e' l'élément de $\mathfrak{g}$ qui coïncide avec e' sur V' et qui est nul sur V''. On adopte la même convention pour h', f', e'', h'' et f''. On pose $h = h' \oplus h'$ et $f = f' \oplus f''$. Le triplet $\{e,h,f\}$ forme ainsi un $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans $\mathfrak{g}$. Soient $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases orthonormées de V' et V'' et soit $\mathcal{B}$ la base orthonormée de V obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. On note E (resp. E',H',F' et E'',H'',F'') la matrice de e (resp. e',h',f' et e'',h'',f'') dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$). Ainsi,

$$E = \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & E'' \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H' & 0 \\ 0 & H'' \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F' & 0 \\ 0 & F'' \end{bmatrix}.$$

Soit S une matrice non nulle de taille $(2s+1)\times(2t+1)$ vérifiant les relations $E'S = 0$ et $SE'' = 0$. On vérifie aisément qu'une telle matrice existe. C'est nécessairement une matrice de rang 1. En effet, commme E' et E'' sont des matrices nilpotentes régulières, leur noyau est de dimension 1. On note z l'élément de $\mathfrak{g}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S^t & 0 \end{bmatrix}.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 3.5. — *L'élément z appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et c'est un vecteur propre pour* $\operatorname{ad} h$.

Démonstration. — Prouvons d'abord la première assertion. On montre sans difficulté que les éléments de $\mathfrak{g}$ qui commutent avec e sont les endomorphismes de $\mathfrak{g}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} E'^{\,2k+1} & R \\ -R^t & E''^{\,2\ell+1} \end{bmatrix},$$

avec k et ℓ deux entiers et R une matrice de taille $(2s+1)\times(2t+1)$ vérifiant la relation $E'R - RE'' = 0$. Il est immédiat que la matrice Z commute avec les puissances de E' et de E''. Il reste à montrer que Z commute avec les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -R^t & 0 \end{bmatrix},$$

où R est une matrice de taille $(2s+1)\times(2t+1)$ vérifiant $E'R - RE'' = 0$. Soit Z' une telle matrice. Prouvons que le crochet $[Z, Z'] = ZZ' - Z'Z$ est nul. Il s'agit de montrer que les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$SR^t = RS^t \quad \text{et} \quad S^tR = R^tS.$$

Montrons d'abord la première égalité. Ceci revient à montrer que la matrice carrée SR^t d'ordre $2s+1$ est symétrique. Si cette matrice est nulle, le résultat est clair. On suppose que la matrice SR^t n'est pas nulle, alors il en est de même de sa transposée RS^t. De la relation $E'S = 0$, on tire $E'(SR^t) = 0$ et des relations $E'R = RE''$ et $E''S^t = 0$, on tire $E'(RS^t) = RE''S^t = 0$. Les images des deux matrices SR^t et RS^t sont donc contenues dans le noyau de la matrice E', qui est de dimension 1. Par suite, les deux matrices SR^t et RS^t sont de rang 1 et ont la même image. On note u l'endomorphisme de $\mathfrak{gl}_{2s+1}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est SR^t. Comme RS^t est la transposée de SR^t, la matrice RS^t représente l'endomorphisme adjoint u^* de u dans la base orthonormée $\mathcal{B}'$. De ce qui précède, il resulte que les endomorphismes u et u^* s'écrivent sous la forme $u = \phi v$ et $u^* = \psi v$, avec v un vecteur non nul de V' et ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles sur V'. Pour tout x dans V', on a l'égalité $b(u(x), x) = b(\phi(x)v, x) = \phi(x)b(v, x)$. Or, par définition de l'adjoint, on a la relation $b(u(x), x) = b(x, u^*(x)) = \psi(x)b(v, x)$.

Ainsi, pour tout x non orthogonal à v, on a $\phi(x) = \psi(x)$. Comme l'ensemble des vecteurs x de V' vérifiant la relation $b(x,v) \neq 0$ est un ouvert non vide de V', les formes linéaires ϕ et ψ sont égales. On a obtenu l'égalité souhaitée : $SR^t = RS^t$. Un raisonnement similaire permet d'obtenir la deuxième relation.

On en déduit la deuxième assertion. L'élément z appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de $\mathfrak{g}^e$ d'après ce qui précède et il est clair que ce n'est pas un polynôme en e. Par suite, il résulte du lemme 3.1 que les éléments $e, e^3, \ldots, e^{2s-1}, z$ forment une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Montrons que le crochet $[H,Z]$ est colinéaire à Z. On a :

$$[H,Z] = \begin{bmatrix} 0 & H'S - SH'' \\ -H''S^t + S^tH' & 0 \end{bmatrix}.$$

Le crochet $[H,Z]$ est un élément du centre et ses coordonnées en les puissances de E sont nulles. Il est donc colinéaire à Z et le lemme s'ensuit. $\square$

On note λ la valeur propre associée à z.

Lemme 3.6. — (i) *On a* $[[f,z],e^{2i-1}] = \begin{cases} -\lambda z & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i = 2, \ldots, s. \end{cases}$

(ii) *L'élément* $[[f,z],e'']$ *est non nul dans* $\mathfrak{g}^e$. *On note* z' *cet élément.*

(iii) *Le crochet* $[[f,e^{2s-1}],e'']$ *est nul.*

Démonstration. — (i) Si $i = 1$, on a $[[f,z],e^{2i-1}] = [[f,e],z] = -[h,z] = -\lambda z$. On suppose $i > 1$. En utilisant la relation (3), on montre sans peine que le crochet $[[f,z],e^{2i-1}]$ est donné par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & T \\ -T^t & 0 \end{bmatrix},$$

où T est la matrice

$$-\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E'^{\alpha}H'E'^{\beta}S + S\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E''^{\alpha}H''E''^{\beta}.$$

Dans la somme $\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E'^{\alpha}H'E'^{\beta}S$, les termes pour lesquel β est strictement positif sont nuls, puisqu'on a la relation $E'S = 0$; il reste le terme $E'^{2i-2}H'S$. Comme z est un vecteur propre de $\mathrm{ad}\, h$ relativement à la valeur propre λ, on a la relation $H'S = SH'' + \lambda S$. D'où

$$E'^{2i-2}H'S = E'^{2i-2}SH'' + \lambda E'^{2i-2}S = 0,$$

car $E'S = 0$ et $i > 1$. Par suite, on a $\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E'^{\alpha}H'E'^{\beta}S = 0$. De même, la relation $SE'' = 0$ entraine la relation $S\sum_{\alpha+\beta=2i-2} E''^{\alpha}H''E''^{\beta} = 0$. Par suite, la matrice T est nulle et le crochet $[[f,z],e^{2i-1}]$ est nul pour $i > 1$, d'où (i).

(ii) On a la relation $z' = [[f,z],e''] = [[f,e''],z] = -[h'',z]$. On suppose par l'absurde que $[h'',z]$ est nul. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. De la relation $SE'' = 0$, on tire la relation $[e'',z] = 0$. Comme le triplet $\{e'',h'',f''\}$ forme un $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans $\mathfrak{g}$, on déduit des égalités $[h'',z] = 0$ et $[e'',z] = 0$ la relation $[f'',z] = 0$, d'où il vient $SF'' = 0$. Ainsi, on a $E''S^t = 0$ et $F''S^t = 0$, donc l'image de la matrice S^t est contenue dans l'intersection des noyaux de E'' et F''. Comme E'' est une matrice nilpotente réguliere, cette intersection est nulle d'après la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2$. D'où la contradiction car S n'est pas nulle.

(iii) Puisque s est strictement plus grand que t, l'élément ${e''}^{2s-1}$ est nul et le crochet $[f,e^{2s-1}]$ est donné par la matrice
$$\begin{bmatrix} -\sum_{\alpha+\beta=2s-2} E'^{\alpha}H'E''^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Par suite le crochet $[[f,e^{2s-1}],e'']$ est nul. □

On pose $e_i = e^{2i-1}$, pour $i = 1,\ldots,s$, $e_{s+1} = z$ et $e_{s+2} = e''$. Comme e'' n'appartient pas au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, la famille $\{e_1,\ldots,e_{s+2}\}$ est libre dans $\mathfrak{g}^e$. On la complète en une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $\mathfrak{g}^e$ et on note $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_{ij})_{1\le i\le n,\,1\le j\le s+1}$ la matrice de taille $n\times(s+1)$, à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$, donnée par
$$\mathfrak{M}_{ij} = \big[[f,e_j],e_i\big],$$
pour $i = 1,\ldots,n$ et $j = 1,\ldots,s+1$. On considère la sous-matrice carrée $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$ d'ordre $s+1$ dont les lignes correspondent aux éléments $e_1,\ldots,e_s$ et e_{s+2} et dont les colonnes correspondent aux éléments $e_1,\ldots,e_{s+1}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.

Grâce au lemme 3.6 et aux calculs effectués dans la preuve de la proposition 3.2, on obtient la structure de la matrice $\mathfrak{M}'$:
$$\mathfrak{M}' = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \lambda_1 e^{2s-1} & -\lambda z \\ * & \cdots & \lambda_2 e^{2s-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_s e^{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & z' \end{bmatrix},$$
où $\lambda_i = -2\times(2s-(2i-1))\times(2i-1)$, pour $i = 1,\ldots,s$. Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}^e$. D'après la structure de la matrice $\mathfrak{M}'$, l'évaluation en ϕ du déterminant de $\mathfrak{M}'$ vaut, au signe près,
$$2^s\times\big((2s-1)\times(2s-3)\times\cdots\times 1\big)^2\times\phi(z')\times\big(\phi(e^{2s-1})\big)^s.$$
Si ϕ ne s'annule ni en z', ni en e^{2s-1}, ce déterminant est non nul. Donc la matrice $\mathfrak{M}'$ est non singulière. Avec les notations de la proposition 2.3, la matrice $\mathfrak{M}$ est la matrice $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{smallmatrix}\right]$. Cette dernière est donc de rang

maximal égal à $s + 1 = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$, car la sous-matrice carrée $\mathfrak{M}'$ d'ordre $s + 1$ est non singulière. La proposition résulte alors de la proposition 2.3. □

REMARQUE 3.7. — Les calculs de la preuve précédente permettent de donner la structure de la matrice $\mathfrak{D}$ dans le cas où e est associé à une partition de la forme $[2s+1, 2t+1]$, avec $1 \leq t < s \leq n-2$. On a :

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \lambda_1 e^{2s-1} & -\lambda z \\ * & \cdots & \lambda_2 e^{2s-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots & \vdots \\ \lambda_s e^{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda z & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathfrak{D}$ est donc singulière dans ce cas et la relation $\mathrm{ind}(\mathfrak{n}(\mathfrak{g}^e), \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)) = 0$ n'a pas lieu.

4. Démonstration du théorème 2 sous l'hypothèse que *e* vérifie la propriété (*P*)

On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe simple et que e est un élément nilpotent non régulier de $\mathfrak{g}$. On fixe un $\mathfrak{sl}_2$-triplet $\{e, h, f\}$ dans $\mathfrak{g}$ contenant e. On note $\mathfrak{z}_{\max}$ le sous-espace propre de la restriction de $\mathrm{ad}\, h$ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ associé à la plus grande valeur propre et on suppose que e vérifie la propriété (P) de la définition 1.4. Le but de cette partie est d'obtenir le corollaire 4.5 qui servira au cas exceptionnel dans la partie suivante.

On va utiliser un certain nombre de notations et de résultats de [3]. On note π_e l'application $(g, x) \mapsto g(x)$ de $G \times (e + \mathfrak{g}^f)$ dans $\mathfrak{g}$. D'après [3, corollaire 5.7], il existe un voisinage ouvert W de e dans $e + \mathfrak{g}^f$ tel que la restriction de π_e à $G \times W$ soit un morphisme lisse de $G \times W$ sur un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$ qui contient e. On note X l'éclatement en e de W et σ le morphisme d'éclatement. Ce qui précède montre que l'ouvert non vide $\pi_e(G \times W)$ rencontre l'ouvert dense de $\mathfrak{g}$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$. Par suite, le sous-ensemble de X des points x de X pour lesquels $\sigma(x)$ est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ est un ouvert non vide de X. On note X_r cet ouvert. En particulier, $\sigma^{-1}(\{e\})$ est une hypersurface de X, contenue dans $X \setminus X_r$, car l'élément e n'est pas un élément régulier de $\mathfrak{g}$. On note enfin X_* le plus grand ouvert de X sur lequel l'application $x \mapsto \mathfrak{g}^{\sigma(x)}$ de X_r dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{rg}\,\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ a un prolongement régulier noté α. D'après [3, lemme 2.3], il existe un ouvert affine Y de X qui rencontre $\sigma^{-1}(\{e\})$ et qui satisfait les conditions suivantes :

1) Y est contenu dans X_*,

2) $Y \setminus X_r$ est une hypersurface lisse, irréductible, contenue dans $\sigma^{-1}(\{e\})$ et dont l'idéal de définition dans $\mathbb{C}[Y]$ est engendré par un élément q,

3) il existe un sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ qui est un supplémentaire de $\alpha(x)$ dans $\mathfrak{g}$ pour tout x dans Y et qui contient un supplémentaire $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}$.

Par définition de α, on a l'inclusion $\alpha(x) \subset \mathfrak{g}^{\sigma(x)}$, pour tout x dans Y. En particulier, on a l'inclusion $\alpha(x) \subset \mathfrak{g}^e$, pour tout x dans $Y \setminus X_r$, car $Y \setminus X_r$ est contenu dans $\sigma^{-1}(\{e\})$. On dispose alors du lemme suivant :

LEMME 4.1. — *Soit x_0 un point de $Y \setminus X_r$ et soit $\{v_1, \dots, v_s\}$ une base d'un supplémentaire $\mathfrak{n}$ de $\alpha(x_0)$ dans $\mathfrak{g}^e$. Alors l'élément* $\det([v_i, v_j])_{1\le i,j\le s}$ *est un élément non nul de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.2, $[f, \mathfrak{g}]$ est un supplémentaire de $\mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}$. Par suite, on a les décompositions suivantes :

$$\alpha(x_0) \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}^e \quad \text{et} \quad \alpha(x_0) \oplus \mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}.$$

On en déduit qu'il existe un ouvert non vide Y' de Y contenant x_0 tel que, pour tout x' dans Y', on ait la décomposition

$$\alpha(x') \oplus \mathfrak{n} \oplus [f, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}.$$

Puisque $\alpha(x')$ est contenu dans $\mathfrak{g}^e$ pour tout x' dans $Y' \setminus X_r$, on obtient de plus

$$\alpha(x') \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}^e,$$

pour tout x' dans $Y' \setminus X_r$.

Soit $w_1, \dots, w_t$ une base de $[f, \mathfrak{g}]$. Il suffit de montrer que l'élément

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} [v_1,v_1] & \dots & [v_1,v_s] & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ [v_s,v_1] & \dots & [v_s,v_s] & & & \\ [w_1,v_1] & \dots & [w_1,v_s] & [w_1,w_1] & \dots & [w_1,w_t] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [w_t,v_1] & \dots & [w_t,v_s] & [w_t,w_1] & \dots & [w_t,w_t] \end{bmatrix}$$

de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ est non nul pour obtenir le lemme.

Soit i dans $\{1, \dots, s\}$. L'application qui à x dans Y associe $[\sigma(x), v_i]$ est nulle en tout point de $Y \setminus X_r$ car $Y \setminus X_r$ est inclus dans $\sigma^{-1}(\{e\})$ et $\mathfrak{g}^e$ contient v_i. Puisque q engendre l'idéal de définition de $Y \setminus X_r$, on en déduit qu'il existe une application régulière μ_i de Y dans $\mathfrak{g}$ non identiquement nulle sur $Y \setminus X_r$ et un entier $m_i \ge 1$ qui satisfont l'égalité $[\sigma(x), v_i] = q(x)^{m_i}\mu_i(x)$, pour tout x de Y. Montrons que l'entier m_i est égal à 1 pour tout i dans $\{1, \dots, s\}$. On suppose par l'absurde que $m_i > 1$ pour un certain i dans $\{1, \dots, s\}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction.

Soit T une indéterminée, τ et τ_0 les images respectives de T par les applications canoniques de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[T]$ dans les quotients de $\mathbb{C}[T]$ par les idéaux $T^{m_i+1}\mathbb{C}[T]$ et $T^2\mathbb{C}[T]$. Pour ν un $\mathbb{C}[\tau]$-point de X, on note γ_ν l'évaluation en ν de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ où x est l'image de ν par la projection canonique de l'ensemble des $\mathbb{C}[\tau]$-points de X sur l'ensemble des $\mathbb{C}$-points de X. Alors γ_ν est un morphisme de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ dans l'anneau $\mathbb{C}[\tau]$. Soit γ'_ν le morphisme

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}, \quad \varphi{\otimes}u \longmapsto \gamma_\nu(\varphi){\otimes}u,$$

où φ est dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et où u est dans $\mathfrak{g}$. Puisque σ est le morphisme d'éclatement de W centré en e, les fibres de σ sont irréductibles et l'espace tangent à W en un point z de W est la réunion des images des applications linéaires tangentes à σ en les points de la fibre de σ en z. En particulier, puisque $Y \setminus X_r$ est un ouvert de la fibre $\sigma^{-1}(e)$ de σ en e, la réunion des images des applications linéaires tangentes à σ en les points de $Y \setminus X_r$ contient un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^f$.

Soit v un vecteur de $\mathfrak{g}^f$ appartenant à cet ouvert. Soient alors x dans $Y \setminus X_r$ et v' un vecteur tangent à Y en x tels que l'image de v' par l'application linéaire tangente $\sigma'(x)$ à σ en x soit égale à v. Soit enfin ν un $\mathbb{C}[\tau]$-point de Y au dessus du $\mathbb{C}[\tau_0]$-point de X défini par v'. On note $q'(x)$ la différentielle de q en x. Puisque l'image de $q^{m_i}\mu_i$ par γ'_ν est égale à $\tau^{m_i}q'(x)(v')\mu_i(x)$, de l'égalité

$$\big[\sigma(x), v_i\big] = q(x)^{m_i}\mu_i(x),$$

on tire l'égalité

$$\tau[v, v_i] + \cdots = \tau^{m_i}q'(x)(v')\mu_i(x),$$

car le terme de degré 1 en τ de $\gamma'_\nu(\sigma)$ est τv. Puisque $m_i > 1$, on obtient que $[v, v_i]$ est nul. Il en résulte que pour tout v dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^f$, $[v, v_i]$ est nul. Par suite, $[v, v_i]$ est nul pour tout v dans $\mathfrak{g}^f$. On en déduit que v_i appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^f)$ de $\mathfrak{g}^f$. Ceci est impossible car $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^f)$ et $\mathfrak{g}^e$ ont une intersection nulle. On a finalement obtenu la relation $[\sigma(x), v_i] = q(x)\mu_i(x)$, pour tout x dans Y.

Pour x dans Y, la valeur de Δ en la forme linéaire $v \mapsto \langle \sigma(x), v\rangle$ est

$$\det \begin{bmatrix} \langle \sigma(x), [v_1, v_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [v_1, v_s]\rangle & \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & 0 \\ \langle \sigma(x), [v_s, v_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [v_s, v_s]\rangle & \\ \langle \sigma(x), [w_1, v_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [w_1, v_s]\rangle & \langle \sigma(x), [w_1, w_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [w_1, w_t]\rangle \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \langle \sigma(x), [w_t, v_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [w_t, v_s]\rangle & \langle \sigma(x), [w_t, w_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [w_t, w_t]\rangle \end{bmatrix}$$

$$= \big(-q(x)\big)^s$$

$$\times \det \begin{bmatrix} \langle \mu_1(x), v_1\rangle \cdots \langle \mu_s(x), v_1\rangle & \\ \vdots \qquad \vdots & 0 \\ \langle \mu_1(x), v_s\rangle \cdots \langle \mu_s(x), v_s\rangle & \\ \langle \mu_1(x), w_1\rangle \cdots \langle \mu_s(x), w_1\rangle & \langle \sigma(x), [w_1, w_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [w_1, w_t]\rangle \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \langle \mu_1(x), w_t\rangle \cdots \langle \mu_s(x), w_t\rangle & \langle \sigma(x), [w_t, w_1]\rangle \cdots \langle \sigma(x), [w_t, w_t]\rangle \end{bmatrix}.$$

Soit ζ la fonction régulière définie sur Y qui à x dans Y associe $(-q(x))^{-s}\Delta(\langle\sigma(x),.\rangle)$. On suppose par l'absurde que ζ est identiquement nulle sur $Y\setminus X_r$. Alors il existe des fonctions régulières non toutes identiquement

nulles, $a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_t$ sur $Y\setminus X_r$, qui, pour tout x de $Y\setminus X_r$, satisfont aux égalités

$$\Big\langle \sum_{j=i}^{s} a_j(x)\mu_j(x), v_i\Big\rangle = 0, \quad \forall i=1,\dots,s,$$

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{s} a_j(x)\mu_j(x) + \sum_{k=1}^{t} b_k(x)[\sigma(x),w_k],w_i\Big\rangle = 0, \quad \forall i=1,\dots,t.$$

En utilisant les inclusions $Y\setminus X_r\subset\sigma^{-1}(\{e\})$ et $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}^e$, on trouve la relation $\langle[\sigma(x),w_k],w\rangle=0$, pour tout w, x et k dans $\mathfrak{n}$, $Y\setminus X_r$ et $\{1,\dots,t\}$ respectivement, d'où l'égalité

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{s} a_j(x)\mu_j(x) + \sum_{k=1}^{t} b_k(x)\big[\sigma(x),w_k\big],w\Big\rangle = 0, \tag{6}$$

pour tout w dans $\mathfrak{n}\oplus[f,\mathfrak{g}]$ et tout x dans $Y\setminus X_r$.

On fixe une base $u_1,\dots,u_n$ de $\mathfrak{g}^f$ et on note $x_1,\dots,x_n$ la base duale. Pour $i=1,\dots,n$, on désigne aussi par x_i la forme affine sur $e+\mathfrak{g}^f$ dont la valeur au point $e+x$ de $e+\mathfrak{g}^f$ est la valeur de x_i en x. Soit x un point de $Y\setminus X_r$. Quitte à changer de base $u_1,\dots,u_n$, on peut supposer que l'ensemble des fonctions

$$y_1=x_1,\quad y_2=\frac{x_2}{x_1},\ \cdots\ ,\ y_n=\frac{x_n}{x_1}$$

est un système de coordonnées de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x. Puisque x_1 engendre l'idéal de définition de $\sigma^{-1}(\{e\})$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$, la fonction q/x_1 est un élément inversible de $\mathcal{O}_{X,x}$. L'égalité (6) revient à dire qu'il existe des polynômes $p_1,\dots,p_s,q_1,\dots,q_t$ en $n-1$ indéterminées, non tous nuls, qui satisfont, pour tout w dans $\mathfrak{n}\oplus[f,\mathfrak{g}]$, l'égalité

$$\begin{aligned}\Big\langle \sum_{j=1}^{s} p_j(y_2,\dots,y_n)&[e+u_1+y_2u_2+\cdots+y_nu_n,v_j]\\ &+\sum_{k=1}^{t} q_k(y_2,\dots,y_n)[e+u_1+y_2u_2+\cdots+y_nu_n,w_k],w\Big\rangle = 0.\end{aligned}$$

L'égalité précédente reste valable pour tout w qui centralise $e+u_1+y_2u_2+\cdots+y_nu_n$. Or pour tout v dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^f$, on a la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{e+v}\oplus\mathfrak{n}\oplus[f,\mathfrak{g}]$, car $\alpha(x)=\mathfrak{g}^{\sigma(x)}$, pour tout x dans l'intersection $Y'\cap X_r$.

On en déduit que l'élément

$$\sum_{j=1}^{s} p_j(y_2,\dots,y_n)[e+u_1+y_2u_2+\cdots+y_nu_n, v_j] \\ + \sum_{k=1}^{t} q_k(y_2,\dots,y_n)[e+u_1+y_2u_2+\cdots+y_nu_n, w_k]$$

est orthogonal à $\mathfrak{g}$, donc est nul. Désignons par d le plus grand des degrés des polynômes $p_1,\dots,p_s,q_1,\dots,q_t$ et par η la fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}^f$:

$$x_1^d \sum_{j=1}^{s} p_j\Big(\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\Big)v_j + x_1^d \sum_{k=1}^{t} q_k\Big(\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\Big)w_k.$$

Alors $\eta(z)$ centralise $e+x_1^{-1}z$ pour tout $z=x_1u_1+\cdots+x_nu_n$ dans $\mathfrak{g}^f$, avec x_1 non nul. Or pour tout v dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^f$, les sous-espaces $\mathfrak{g}^{e+v}$ et $\mathfrak{n}\oplus[f,\mathfrak{g}]$ de $\mathfrak{g}$ ont une intersection nulle. Par suite η est nulle. Ceci est absurde car les polynômes $p_1,\dots,p_s,q_1,\dots,q_t$ ne sont pas tous nuls.

L'application ζ n'est donc pas identiquement nulle sur $Y\setminus X_r$ et par conséquent Δ n'est pas un élément nul de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Ceci termine la preuve du lemme. □

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 4.2. — *On a les inclusions*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\subset\alpha(x)\subset\mathfrak{g}^e,\ \textit{pour tout } x \textit{ dans } Y\setminus X_r.$$

Démonstration. — La deuxième inclusion est connue. On s'intéresse à la première. On fixe un point x_0 dans $Y\setminus X_r$ et il s'agit de montrer l'inclusion

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\subset\alpha(x_0).$$

On suppose par l'absurde que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ n'est pas contenu dans $\alpha(x_0)$. Il existe alors un vecteur v' de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ qui n'appartient par à $\alpha(x_0)$ et on construit un supplémentaire $\mathfrak{n}'$ de $\alpha(x_0)$ dans $\mathfrak{g}^e$ admettant une base $\{v_1',\dots,v_s'\}$ telle que $v_1'=v'$. La matrice $([v_i',v_j'])_{1\le i,j\le s}$ a une première colonne nulle car $v_1'=v'$ appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de $\mathfrak{g}^e$. Ceci contredit le lemme 4.1 appliqué au supplémentaire $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$ de $\alpha(x_0)$ dans $\mathfrak{g}^e$. □

Soit $e_1,\dots,e_m$ une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. D'après la proposition précédente, on a l'inclusion $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)\subset\alpha(x)$, pour tout x dans $Y\setminus X_r$. Ceci permet de construire une base $\epsilon_1(x),\dots,\epsilon_{\mathrm{rg}\,\mathfrak{g}}(x)$ de $\alpha(x)$ pour x dans Y qui vérifie

$$\epsilon_i(x)=e_i,\ \text{pour tout } x \text{ dans } Y\setminus X_r \text{ et } i=1,\dots,m.$$

Il existe donc des applications régulières $\widetilde{\epsilon}_1,\dots,\widetilde{\epsilon}_m$ sur Y, non identiquement nulles sur $Y\setminus X_r$, qui vérifient les relations

$$\epsilon_i(x)=e_i+q(x)^{m_i}\widetilde{\epsilon}_i(x),$$

pour tout x dans Y et $i=1,\dots,m$, où m_i est un entier strictement positif.

LEMME 4.3. — *Pour tout i de $\{1,\dots,m\}$, l'entier m_i est égal à* 1.

Démonstration. — On suppose par l'absurde $m_i > 1$ pour un i dans l'ensemble $\{1,\dots,m\}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. On raisonne comme dans la démonstration du lemme 4.1 et on reprend les mêmes notations. Puisque l'image de $\epsilon_i = e_i + q^{m_i}\widetilde{\epsilon_i}$ par γ'_ν est égale à $e_i + \tau^{m_i} q'(x)(v')\widetilde{\epsilon_i}(x)$, on tire de l'égalité $[\sigma(x), \epsilon_i(x)] = 0$ l'égalité

$$\big[e + \tau v + \cdots, e_i + \tau^{m_i} q'(x)(v')\widetilde{\epsilon_i}(x)\big] = 0,$$

car l'image de σ par γ'_ν est égale à $e + \tau v \bmod \tau^2$. Puisque $m_i > 1$, le terme de degré 1 en τ du membre de gauche de cette égalité est nul ; donc $[v, e_i]$ est nul. Il en résulte que pour tout v dans un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^f$, $[v, e_i]$ est nul. Par suite, $[v, e_i]$ est nul pour tout v dans $\mathfrak{g}^f$. Ceci est absurde car e_i est un élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^f)$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ ont une intersection nulle. □

On déduit du lemme précédent la relation $\epsilon_i(x) = e_i + q(x)\widetilde{\epsilon_i}(x)$, pour tout x dans Y et tout i dans $\{1,\dots,m\}$. D'après la proposition 1.2, on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{e\perp} \oplus \mathfrak{g}^f$. On note, pour x dans Y et i dans $\{1,\dots,m\}$, $\widetilde{\epsilon}_{i,1}(x)$ et $\widetilde{\epsilon}_{i,2}(x)$ les composantes de $\widetilde{\epsilon_i}(x)$ sur $\mathfrak{g}^{e\perp}$ et $\mathfrak{g}^f$ respectivement.

PROPOSITION 4.4. — *Pour tout x dans un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$, l'ensemble des éléments $\widetilde{\epsilon}_{1,2}(x),\dots,\widetilde{\epsilon}_{m,2}(x)$ est une partie libre de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. — Supposons l'assertion fausse. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Il existe des fonctions régulières $a_1,\dots,a_m$ sur Y, non toutes identiquement nulles sur $Y \setminus X_r$, qui satisfont l'égalité

$$a_1(x)\widetilde{\epsilon}_{1,2}(x) + \cdots + a_m(x)\widetilde{\epsilon}_{m,2}(x) = 0,$$

pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Soit μ l'application régulière sur Y à valeurs dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ qui à x dans Y associe $a_1(x)e_1 + \cdots + a_m(x)e_m$.

On reprend les notations de la démonstration du lemme 4.2 avec $m_i = 1$, autrement dit $\tau = \tau_0$. Pour v dans $\mathfrak{g}^f$ non nul, on note $[v]$ l'image de v dans $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^f)$. L'ensemble des points v de $\mathfrak{g}^f$ pour lesquels le point $e \times [v]$ de $(e + \mathfrak{g}^f) \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}^f)$ appartient à $Y \setminus X_r$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^f$. Soit v dans $\mathfrak{g}^f$ appartenant à cet ouvert et posons $x = e \times [v] \in Y \setminus X_r$. Alors il existe un vecteur v' tangent à Y en x tel que l'image de v' par l'application linéaire tangente à σ en x soit égale à v. En effet, on considère la courbe γ qui au complexe t associe le point $(e + tv) \times [v]$ de $(e + \mathfrak{g}^f) \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}^f)$. Pour t dans un voisinage ouvert de 0, la courbe γ est à valeurs dans Y et l'on a $\gamma(0) = x$; par suite la dérivée $\gamma'(0)$ de γ en 0 est un vecteur de l'espace tangent à Y en x. Or on vérifie aisément que $\sigma'(x)(\gamma'(0)) = v$, d'où l'existence du vecteur v'.

Puisque l'image de $\sum_{j=1}^m a_j\epsilon_j = \sum_{j=1}^m a_j e_j + q\sum_{j=1}^m a_j\widetilde{\epsilon}_j$ par γ'_ν est égale à

$$\sum_{j=1}^m a_j(x)e_j + \tau\sum_{j=1}^m a'_j(x)(v')e_j + \tau q'(x)(v')\sum_{j=1}^m a_j(x)\widetilde{\epsilon}_j(x),$$

de l'égalité $[\sigma(x), \sum_{j=1}^m a_j(x)\epsilon_j(x)] = 0$, on tire l'égalité

$$\Big[e+\tau v, \sum_{j=1}^m a_j(x)e_j + \tau\sum_{j=1}^m a'_j(x)(v')e_j + \tau q'(x)(v')\sum_{j=1}^m a_j(x)\widetilde{\epsilon}_{j,1}(x)\Big] = 0.$$

Cela provient des deux égalités suivantes :

$$\gamma'_\nu(\sigma) = e+\tau v \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^p a_j(x)\widetilde{\epsilon}_{j,2}(x) = 0.$$

Le terme de degré 1 en τ du membre de gauche de l'égalité précédente est nul, d'où l'égalité

$$\Big[e, q'(x)(v')\sum_{j=1}^m a_j(x)\widetilde{\epsilon}_{i,1}(x)\Big] = -\Big[v, \sum_{j=1}^m a_j(x)e_j\Big].$$

Les applications $\widetilde{\epsilon}_{i,1}$ sont à valeurs dans $\mathfrak{g}^{e\perp} = [e,\mathfrak{g}]$ et ce qui précède donne la relation

$$\Big[v, \sum_{j=1}^m a_j(x)e_j\Big] \in \big[e,[e,\mathfrak{g}]\big] = \big(\mathfrak{g}^e \oplus [f,\mathfrak{g}^e]\big)^\perp,$$

d'après la proposition 1.3, ce qui signifie encore, par définition de l'application μ,

$$\big\langle v, \big[[f,\mathfrak{g}^e],\mu(x)\big]\big\rangle = \{0\}\cdot$$

En résumé, on a montré que, pour tout $e\times[v]$ dans $Y\setminus X_r$, on a la relation

(7) $$v \in \big[[f,\mathfrak{g}^e],\mu\big(e\times[v]\big)\big]^\perp.$$

On note

$$Y' = \big\{x\in Y\setminus X_r \mid \mu(x)\neq 0\big\}.$$

L'ensemble Y' est un ouvert non vide de $Y\setminus X_r$ et comme e vérifie la propriété (P), on a l'inclusion

$$\big[[f,\mathfrak{g}^e],\mu(x)\big]^\perp \subset \mathfrak{z}_{\max}^\perp,$$

pour tout x dans Y'. Comme le sous-espace $\mathfrak{z}_{\max}$ est contenu dans $\mathfrak{g}^e$, son orthogonal $\mathfrak{z}_{\max}^\perp$ ne contient pas $\mathfrak{g}^f$; sinon, ce dernier contiendrait la somme $\mathfrak{g}^f\oplus\mathfrak{g}^{e\perp} = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z}_{\max}$ serait nul. L'ensemble

$$X^0 = \big\{e\times[v]\in X\setminus X_r \mid v\notin\mathfrak{z}_{\max}^\perp\big\}$$

est donc un ouvert non vide de $X \setminus X_r$ et l'intersection $Y' \cap X^0$ est non vide. Il en résulte que pour tout $x = e \times [v]$ dans l'intersection $Y' \cap X^0$, le sous-espace $[[f, \mathfrak{g}^e], \mu(x)]^{\perp}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{z}_{\max}^{\perp}$, d'après la relation (7). Ceci contredit le fait que x appartient à Y'. $\square$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.5. — *On note $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathfrak{g}^e$ telle que $e_1, \ldots, e_m$ est une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. On suppose que e vérifie la propriété (P). Alors la matrice $([[f, e_i], e_j])_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal égal à $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$.*

Démonstration. — On évalue la matrice $([[f, e_i], e_j])_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ en la forme linéaire $\langle \sigma(x), . \rangle$ sur $\mathfrak{g}^e$, pour x dans Y :

$$\begin{aligned}\big(\langle \sigma(x), [[f, e_i], e_j] \rangle\big)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} &= \big(\langle [\sigma(x), e_j], [f, e_i] \rangle\big)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} \\ &= -q(x)\big(\langle [\sigma(x), \widetilde{\epsilon_j}(x)], [f, e_i] \rangle\big)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}.\end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que, pour tout x dans $Y \setminus X_r$, la matrice $(\langle [\sigma(x), \widetilde{\epsilon}_j(x)], [f, e_i] \rangle)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ n'est pas de rang maximal ; autrement dit on suppose que, pour tout x dans $Y \setminus X_r$, les vecteurs à coefficients complexes

$$\begin{bmatrix} \langle [\sigma(x), \widetilde{\epsilon_1}(x)], [f, e_1] \rangle \\ \vdots \\ \langle [\sigma(x), \widetilde{\epsilon_1}(x)], [f, e_n] \rangle \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \langle [\sigma(x), \widetilde{\epsilon_m}(x)], [f, e_1] \rangle \\ \vdots \\ \langle [\sigma(x), \widetilde{\epsilon_m}(x)], [f, e_n] \rangle \end{bmatrix},$$

sont liés. Il existe donc des fonctions régulières $a_1, \ldots, a_m$ sur $Y \setminus X_r$, non toutes identiquement nulles, qui satisfont l'égalité

$$\Big\langle \Big[\sigma(x), \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \widetilde{\epsilon_j}(x)\Big], [f, e_i] \Big\rangle = 0,$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et x dans $Y \setminus X_r$. Notons χ l'application

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \widetilde{\epsilon_j}(x).$$

L'inclusion $Y \setminus X_r \subset \sigma^{-1}(\{e\})$ donne la relation

$$\big\langle \chi(x), \big[e, [f, \mathfrak{g}^e]\big] \big\rangle = \{0\},$$

pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Puisque $[e, [f, \mathfrak{g}^e]] = \mathfrak{g}^e$, on en déduit que $\chi(x)$ appartient à $\mathfrak{g}^{e\perp}$, pour tout x dans $Y \setminus X_r$. Comme $\chi(x)$ s'écrit $\chi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \widetilde{\epsilon}_{i,1}(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \widetilde{\epsilon}_{i,2}(x)$, avec $\sum_{i=1}^{m} a_i(x) \widetilde{\epsilon}_{i,1}(x)$ dans $\mathfrak{g}^{e\perp}$, l'élément $\sum_{i=1} a_i(x) \widetilde{\epsilon}_{i,2}(x)$ appartient à l'intersection $\mathfrak{g}^{e\perp} \cap \mathfrak{g}^f$, donc est nul. D'après la proposition 4.4, les éléments $\widetilde{\epsilon}_{i,2}(x)$ sont linéairement indépendants pour tout

x dans un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$. On en déduit que les fonctions a_i sont toutes identiquement nulles sur $Y \setminus X_r$, ce qui contredit les hypothèses.

Par conséquent la matrice $(\langle[\sigma(x), \widetilde{\epsilon_j}], [f, e_i]\rangle)_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq m}$ à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^e)$ est de rang maximal, pour tout x dans un ouvert non vide de $Y \setminus X_r$. $\square$

On en déduit le théorème 2 lorsque e vérifie la propriété (P) de la définition 1.4. En effet, avec les notations de la proposition 2.3, la matrice du corollaire précédent est la matrice $\left[\begin{smallmatrix}\mathfrak{D}\\ \mathfrak{E}\end{smallmatrix}\right]$. Cela résulte des relations, déjà vues, $[[f, e_j], e_i] = [[f, e_i], e_j]$, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$. En outre le théorème 2 est connu pour les éléments nilpotents réguliers de $\mathfrak{g}$.

Remarque 4.6. — Sous les hypothèses et avec les notations de la partie 3, il n'est pas difficile de montrer que les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ vérifient la propriété (P) lorsque $\widetilde{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. En revanche, les éléments nilpotents de $\mathfrak{so}_{2n}$ ne vérifient pas la propriété (P) en général.

5. Étude de la propriété (*P*) et démonstration des théorèmes 1 et 2 dans le cas exceptionnel

Pour terminer la preuve des théorèmes 1 et 2, il reste à prouver que toutes les orbites nilpotentes distinguées non régulières dans une algèbre de Lie simple exceptionnelle vérifient la propriété (P). Cela résulte des propositions 2.3 et 2.4 et du corollaire 4.5. Notons ici l'importance d'avoir démontré le théorème 2 dans le cas classique avant le cas exceptionnel pour appliquer la proposition 2.4. En effet, les sous-algèbres de Lie semi-simples d'une algèbre de Lie exceptionnelle sont isomorphes à des produits finis d'idéaux simples et ces composantes simples peuvent être isomorphes à des algèbres de Lie classiques.

On suppose dans cette partie que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'une des cinq algèbres de Lie simples exceptionnelles E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2 et on suppose que e est un élément nilpotent distingué non régulier de $\mathfrak{g}$. Il s'agit de montrer que l'élément e vérifie la propriété (P). On note $m_1, \ldots, m_r$ les valeurs propres de la restriction de $\operatorname{ad} h$ au sous-espace $\mathfrak{g}^e$. Les entiers $m_1, \ldots, m_r$ sont pairs et on a

$$2 = m_1 < m_2 < \cdots < m_r.$$

On note $\mathfrak{g}^e_{m_\ell}$ le sous-espace propre correspondant à la valeur propre m_ℓ, pour $\ell = 1, \ldots, r$. Avec les notations de la définition 1.4, on a :

$$\mathfrak{z}_{\max} = \mathfrak{g}^e_{m_r}.$$

On choisit une base

$$\mathcal{B} = e^1_{m_1}, \ldots, e^{d_1}_{m_1}, e^1_{m_2}, \ldots, e^{d_2}_{m_2}, \ldots, e^1_{m_r}, \ldots, e^{d_r}_{m_r}$$

de $\mathfrak{g}^e$ de vecteurs propres telle que $e^1_{m_\ell}, \ldots, e^{d_\ell}_{m_\ell}$ forme une base de $\mathfrak{g}^e_{m_\ell}$, pour $\ell = 1, \ldots, r$, et telle qu'il existe une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ formée de vecteurs de $\mathcal{B}$. On peut supposer que $e^1_{m_1} = e^1_2 = e$. On fixe un élément non nul v de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$

et on souhaite montrer que le sous-espace $\mathfrak{g}^e_{m_r}$ est contenu dans le sous-espace $[[f,\mathfrak{g}^e],v]$. Commençons par prouver le lemme suivant :

LEMME 5.1. — *Soit v un élément non nul de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. Si la coordonnée de v en $e^1_{m_1}=e$ est non nulle, alors le sous-espace $\mathfrak{g}^e_{m_r}$ est contenu dans le sous-espace $[[f,\mathfrak{g}^e],v]$.*

Démonstration. — Soit v un élément non nul de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ dont la coordonnée λ de v en $e^1_{m_1}=e$ est non nulle. Soit p dans $\{1,\dots,d_r\}$. L'élément $e^p_{m_r}$ de $\mathfrak{g}^e_{m_r}$ s'écrit

$$e^p_{m_r}=\Big[\Big[f,-\frac{1}{m_r}e^p_{m_r}\Big],e\Big].$$

D'après [8, théorème 2.3], ou [2, théorème 7.1], e est le seul élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ de poids 2. Comme m_r est la plus grande valeur propre, on en déduit que l'élément $e^p_{m_r}$ s'écrit sous la forme

$$e^p_{m_r}=\Big[\Big[f,-\frac{1}{m_r\times\lambda}e^p_{m_r}\Big],v\Big].$$

Ceci étant vrai pour tout p de $\{1,\dots,d_r\}$, on en déduit l'inclusion

$$\mathfrak{g}^e_{m_r}\subseteq\big[[f,\mathfrak{g}^e],v\big],$$

et le lemme. □

Soient $i_1<\cdots<i_s$ dans $\{1,\dots,r\}$ et $k_{(1,1)},\dots,k_{(1,\delta_1)},\dots,k_{(s,1)},\dots,k_{(s,\delta_s)}$ des indices tels que les éléments

$$e^{k_{(1,1)}}_{m_{i_1}},\dots,e^{k_{(1,\delta_1)}}_{m_{i_1}},\dots,e^{k_{(s,1)}}_{m_{i_s}},\dots,e^{k_{(s,\delta_s)}}_{m_{i_s}}$$

forment une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$. En particulier, on a les relations $m_{i_1}=2$ et $\delta_1=1$, $m_{i_s}=m_r$, $\delta_s=d_r$ et $k_{(s,\ell)}=\ell$, pour $\ell=1,\dots,\delta_s$. L'élément v s'écrit sous la forme

$$v=\alpha^1_1e^{k_{(1,1)}}_{m_{i_1}}+\cdots+\alpha^{\delta_1}_1e^{k_{(1,\delta_1)}}_{m_{i_1}}+\cdots+\alpha^1_se^{k_{(s,1)}}_{m_{i_s}}+\cdots+\alpha^{\delta_s}_se^{k_{(s,\delta_s)}}_{m_{i_s}},$$

avec $(\alpha^1_1,\dots,\alpha^{\delta_1}_1,\dots,\alpha^1_s,\dots,\alpha^{\delta_s}_s)$ non nul dans $\mathbb{C}^K$ où $K=\delta_1+\cdots+\delta_s$. Soit ℓ_0 le plus petit entier de $\{1,\dots,s\}$ tel que le δ_{ℓ_0}-uplet $\underline{\alpha}_{\ell_0}=(\alpha^1_{\ell_0},\dots,\alpha^{\delta_{\ell_0}}_{\ell_0})$ est non nul.

Pour i,j et k dans $\{1,\dots,r\}$ et t,p et q dans $\{1,\dots,d_i\}$, $\{1,\dots,d_j\}$ et $\{1,\dots,d_k\}$ respectivement, on note $\lambda_{(m_k,q),(m_i,t),(m_j,p)}$ la coordonnée de l'élément $[[f,e^q_{m_k}],e^t_{m_i}]$ en $e^p_{m_j}$. Notons que si $\lambda_{(m_k,q),(m_i,t),(m_j,p)}$ est non nul, on a la relation $m_k=m_j-m_i+2$.

On suppose que $m_r-m_{i_{\ell_0}}+2$ est une valeur propre de la restriction de $\operatorname{ad}h$ à $\mathfrak{g}^e$. On note alors $k(\ell_0)$ l'élément de $\{1,\dots,r\}$ tel que $m_{k(\ell_0)}=m_r-m_{i_{\ell_0}}+2$. Soit $w=\sum_{p=1}^{d_r}b_pe^p_{m_r}$ un élément de $\mathfrak{g}^e_{m_r}$. On cherche u dans $\mathfrak{g}^e$ vérifiant

$$[[f,u],v]=w$$

sous la forme $u = \sum_{q=1}^{d_{k(\ell_0)}} a_q e^q_{m_{k(\ell_0)}}$. Ce problème revient à résoudre un système linéaire d'inconnue le vecteur $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{d_{k(\ell_0)}} \end{bmatrix}^t$, de second membre $\begin{bmatrix} b_1 \, b_2 & \dots & b_{d_r} \end{bmatrix}^t$ et de matrice associée la matrice $M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0})$ de taille $d_r \times d_{k(\ell_0)}$ dont les coefficients $(M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0}))_{p,q}$ sont donnés par

$$\big(M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0})\big)_{p,q} = \sum_{t=1}^{\delta_{\ell_0}} \alpha^t_{\ell_0} \lambda_{(m_{k(\ell_0)},q),(m_{i_{\ell_0}},t),(m_r,p)},$$

pour p dans $\{1, \dots, d_r\}$ et q dans $\{1, \dots, d_{k(\ell_0)}\}$. La matrice $M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0})$ s'écrit aussi, de manière plus agréable, comme une somme de matrices :

$$M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0}) = \sum_{t=1}^{\delta_{\ell_0}} \alpha^t_{\ell_0} M\big(\ell_0, \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{avec 1 en } t\text{-ième position}}\big). \tag{8}$$

Si $m_r - m_{i_{\ell_0}} + 2$ n'est pas une valeur propre de la restriction de $\operatorname{ad} h$ à $\mathfrak{g}^e$, on pose :

$$M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0}) = 0_{d_r,1}.$$

Il est clair que si la matrice $M(\ell_0, \underline{\alpha}_{\ell_0})$ est surjective, le sous-espace $\mathfrak{g}^e_{m_r}$ est contenu dans le sous-epsace $[[f, \mathfrak{g}^e], v]$ puisque le problème précédent à une solution pour tout w dans $\mathfrak{g}^e_{m_r}$. Remarquons que cette condition ne dépend que des termes de plus bas poids $m_{i_{\ell_0}}$ intervenant dans l'écriture de v. Cette discussion se résume en la proposition suivante :

Proposition 5.2. — *On reprend les notations précédentes et on suppose que la matrice $M(\ell, \underline{\alpha}_\ell)$ est surjective pour tout ℓ de $\{1, \dots, s\}$ et tout δ_ℓ-uplet $\underline{\alpha}_\ell$ non nul. Alors l'élément e vérifie la propriété (P).*

Remarque 5.3. — D'après le lemme 5.1, il suffit de vérifier la surjectivité des matrices $M(\ell, \underline{\alpha}_\ell)$, pour $\ell \geq 2$ et $\underline{\alpha}_\ell$ non nul. Cela laisse $s-1$ matrices, dépendant d'un paramètre $\underline{\alpha}_\ell$, à étudier. Lorsque $\delta_s = d_r = 1$, la matrice $M(s, \underline{\alpha}_s) = \alpha^1_s M(s, (1))$ est toujours surjective, pour α^1_s non nul. En effet, la matrice $M(s, (1))$ est une matrice ligne dont le premier coefficient, $\lambda_{(2,1),(m_r,1),(m_r,1)} = -m_r$, est non nul. Dans ce cas, on réduit à $s-2$ le nombre de matrices à étudier.

On est en mesure de prouver la proposition suivante qui achève la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Proposition 5.4. — *On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple de type E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2. Alors les orbites nilpotentes distinguées non régulières de $\mathfrak{g}$ vérifient la propriété (P).*

Proof. — Voyons tout d'abord le cas de G_2. Dans G_2, il n'y a qu'une seule orbite nilpotente distinguée non régulière et pour cette orbite le centre est de dimension 2. D'après la remarque 5.3, cette orbite vérifie (P).

On suppose désormais que $\mathfrak{g}$ est de type E_6, E_7, E_8 ou F_4 et on veut montrer que les orbites nilpotentes distinguées non régulières de $\mathfrak{g}$ vérifient les hypothèses de la proposition 5.2.

On trouve dans [5] une liste de $\mathfrak{sl}_2$-triplets correspondant aux orbites nilpotentes. Le logiciel GAP4 permet en outre d'effectuer des calculs dans les algèbres de Lie. Il permet notamment de calculer le centralisateur d'un élément, le centre d'une sous-algèbre, etc. Pour une orbite nilpotente distinguée non régulière de $\mathfrak{g}$ donnée, on considère l'élément e du $\mathfrak{sl}_2$-triplet fournit par [5] correspondant à la caractéristique de l'orbite. Grâce au logiciel GAP4, on exhibe une base $\mathcal{B}$ vérifiant les conditions qui précèdent le lemme 5.1 et on reprend les notations précédentes. On vérifie dans un premier temps que pour tout ℓ de $\{1,\dots,s\}$, il existe un entier $k(\ell)$ dans $\{1,\dots,r\}$ tel que $m_{k(\ell)} = m_r - m_{i_\ell} + 2$. On calcule ensuite, toujours à l'aide de GAP4, la matrice $M(\ell,\underline{\alpha_\ell})$, pour $\underline{\alpha_\ell} = (\alpha_\ell^1,\dots,\alpha_\ell^{\delta_\ell})$ un δ_ℓ-uplet non nul, et on vérifie la surjectivité de cette matrice. D'après la remarque 5.3, on peut supposer $\ell \geq 2$ et lorsque $d_r = 1$, on peut supposer de plus $\ell \leq s-1$. Enfin, dans la plupart des cas, on s'aperçoit que la somme de la relation (8) n'a qu'un seul terme. L'étude de la surjectivité de $M(\ell,\underline{\alpha_\ell})$ ne dépend alors d'aucun paramètre, ce qui facilite le travail.

Les calculs faits à partir de GAP4 permettent de vérifier les hypothèses de la proposition 5.2 pour E_6, E_7, E_8 et F_4. Ceci termine la preuve de la proposition.

On présente ici les calculs pour E_6. On trouve dans [7] la liste complète de tous les calculs pour E_6, E_7, E_8 et F_4.

La démarche générale est la suivante : on définit l'algèbre de Lie `L` dans laquelle on veut travailler grâce à la commande `SimpleLieAlgebra`, on définit un système de racines (`RootSystem`), un système de racines positives correspondant (`PositiveRoots`) puis des systèmes de vecteurs «positifs» et «négatifs» associés (`PositiveRootVectors` et `NegatitiveRootVectors`). La commande `CanonicalGenerators` donne une base de la sous-algèbre de Cartan. On peut désormais faire des calculs dans l'algèbre de Lie `L`. Il s'agit ensuite d'étudier les orbites nilpotentes distinguées non régulières. Pour chacune d'entre elles, on définit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet `{e,h,f}` grâce aux données de [5]. On calcule ensuite le centralisateur `g` de l'élément positif `e` avec la commande `LieCentralizer` puis le centre `z` du centralisateur avec `LieCentre`. Pour chaque orbite, on précise la valeur du plus haut poids m_r et on donne le nombre de matrices à étudier. Pour chacune d'entre elles on donne les valeurs de m_{i_ℓ} et de $m_{k(\ell)}$ et on effectue les calculs nécessaires.

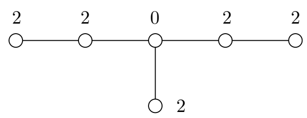
Voici, comme annoncé, les calculs pour E_6. On commence par définir `L` et les générateurs de `L` :

```
> L:=SimpleLieAlgebra("E",6,Rationals);
<Lie algebra of dimension 78 over Rationals>
> R:=RootSystem(L);
```

```
<root system of rank 6>
> P:=PositiveRoots(R);;
> x:=PositiveRootVectors(R);
[ v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6,
v.7, v.8, v.9, v.10, v.11, v.12,
v.13, v.14, v.15, v.16, v.17, v.18,
v.19, v.20, v.21, v.22, v.23, v.24,
v.25, v.26, v.27, v.28, v.29, v.30,
v.31, v.32, v.33, v.34, v.35, v.36 ]
> y:=NegativetiveRootVectors(R);
[ v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42,
v.43, v.44, v.45, v.46, v.47, v.48,
v.49, v.50, v.51, v.52, v.53, v.54,
v.55, v.56, v.57, v.58, v.59, v.60,
v.61, v.62, v.63, v.64, v.65, v.66,
v.67, v.68, v.69, v.70, v.71, v.72 ]
> CanonicalGenerators(R)[3]
[ v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78 ]
```

Dans E_6, il y a deux orbites nilpotentes distinguées non régulières :

1) Caractéristique :



On définit les éléments `e`, `f` du $\mathfrak{sl}_2$-triplet correspondant aux données de [5] :

```
> e:=x[1]+x[2]+x[5]+x[6]+x[8]+x[9];
v.1+v.2+v.5+v.6+v.8+v.9
> f:=(12)*y[1]+(8)*y[2]+(-8)*y[3]+(22)*y[5]
+(12)*y[6]+(8)*y[8]+(22)*y[9]+(8)*y[10];;
```

On vérifie que le crochet `e*f` est égal à l'élément neutre de la caractéristique et on pose `h:=e*f` :

```
> e*f;
(12)*v.73+(16)*v.74+(22)*v.75
+(30)*v.76+(22)*v.77+(12)*v.78
> h:=e*f;;
```

On calcule le centralisateur `g` de `e` et on en donne une base `Bg`. On calcule ensuite le centre `z` et on donne une base `Bz` de `z` :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 8 over Rationals>
```

Le centralisateur est de dimension 8.

```
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in
<Lie algebra of dimension 8 over Rationals>,
(dimension 5)>
```

Le centre est un idéal de dimension 5 dans $\mathtt{g}$.

```
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.1+v.2+v.5+v.6+v.8+v.9, v.23+(-1)*v.25+v.26,
v.27+(-1)*v.29+(-1)*v.30+(-1)*v.31,
v.34+v.35, v.36 ]
```

On calcule les «poids» de `z` en évaluant `h*Bz[l]` pour $\ell = 1, \ldots, 5$. On sait déjà que `h*Bz[1]=(2)*Bz[1]` car `Bz[1]=e`.

```
> h*Bz[2];
(8)*v.23+(-8)*v.25+(8)*v.26
> h*Bz[3];
(10)*v.27+(-10)*v.29+(-10)*v.30+(-10)*v.31
> h*Bz[4];
(14)*v.34+(14)*v.35
> h*Bz[5];
(16)*v.36
```

On obtient que les poids sont $2, 8, 10, 14, 16$, d'où $m_r = 16$. Il y a donc trois matrices à étudier d'après la remarque de la preuve de la proposition 5.4.

a) $m_{i_2} = 8$, $m_{k(2)} = 10$. On cherche une base de $\mathfrak{g}^e_{10}$ parmi les éléments de `Bg` en calculant `h*Bg[i]`, pour $i = 1, \ldots, 8$ et on effectue le calcul correspondant :

```
> h*Bg[5];
(10)*v.27+(-10)*v.29
> h*Bg[6];
(10)*v.30+(10)*v.31
```

Le sous-espace $\mathfrak{g}^e_{10}$ est engendré par les vecteurs `Bg[5]` et `Bg[6]`.

```
> ((f*Bg[5])*Bz[2]);
(-20)*v.36
> ((f*Bg[6])*Bz[2]);
(20)*v.36
```

La matrice à considérer est $M(2, (1))$; elle est donnée par $[-20\ 20]$. C'est une matrice surjective.

Remarque 5.5. — Lorsque $d_r = 1$, il suffit de trouver un élément de $\mathfrak{g}^e_{m_{k(\ell)}}$ qui donne un crochet non nul ; dans la suite on donnera seulement le calcul correspondant à cet élément.

b) $m_{i_3} = 10$, $m_{k(3)} = 8$.

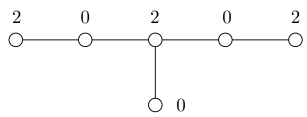
```
> ((f*Bz[2])*Bz[3]);
(-40)*v.36
```

c) $m_{i_4} = 14$, $m_{k(4)} = 4$.

```
> h*Bg[2];
(4)*v.7+(2)*v.11+(2)*v.12+(2)*v.13
+(-2)*v.14+(2)*v.15+(-4)*v.16
> ((f*Bg[2])*Bz[4]);
(14)*v.36
```

Ces calculs montrent que les hypothèses de la proposition 5.2 sont vérifiées.

2) Caractéristique :



Définition du $\mathfrak{sl}_2$-triplet :

```
> e:=x[7]+x[8]+x[9]+x[10]=x[11]+x[19];
v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.19
> f:=(8)*y[7]+(9)*y[8]+(5)*y[9]+(5)*y[10]+(8)*y[11]+y[19];
(8)*v.43+(9)*v.44+(5)*v.45+(5)*v.46+(8)*v.47+v.55
> e*f;
(8)*v.73+(10)*v.74+(14)*v.75+(20)*v.76+(14)*v.77+(8)*v.78
> h:=e*f;;
```

Calcul de g, Bg, z et Bz :

```
> g:=LieCentralizer(L,Subspace(L,[e]));
<Lie algebra of dimension 12 over Rationals>
> z:=LieCentre(g);
<two-sided ideal in
   <Lie algebra of dimension 12 over Rationals>,
     (dimension 4)>
> Bg:=BasisVectors(Basis(g));;
> Bz:=BasisVectors(Basis(z));
[ v.7+v.8+v.9+v.10+v.11+v.19, v.32+(-1)*v.33, v.35, v.36 ]
> h*Bz[2];
(8)*v.32+(-8)*v.33
> h*Bz[3];
(10)*v.35
> h*Bz[4];
(10)*v.36
```

Les poids de z sont $2, 8, 10, 10$; d'où $m_r = 10$. Il y a deux matrices à étudier.

a) $m_{i_2} = 8$, $m_{k(2)} = 4$

```
> h*Bg[4];
(4)*v.17+(-4)*v.18+(4)*v.20+(-4)*v.21
> h*Bg[5];
(4)*v.12+(4)*v.16+(-8)*v.22+(4)*v.24
> h*Bg[6];
(4)*v.22+(-4)*v.24+(-4)*v.25
> ((f*Bg[4])*Bz[2]);
(-16)*v.35
```

b) $m_{i_3} = 10$, $m_{k(3)} = 2$

```
> h*Bg[2];
(2)*v.1+(2)*v.4+(2)*v.6+(2)*v.13+(2)*v.14+(-6)*v.15
> h*Bg[3];
(2)*v.19
>((f*Bg[1])*Bz[3]); ((f*Bg[2])*Bz[3]); ((f*Bg[3])*Bz[3]);
(-10)*v.35
(10)*v.36
0*v.1
>((f*Bg[1])*Bz[4]); ((f*Bg[2])*Bz[4]); ((f*Bg[3])*Bz[4]);
(-9)*v.36
(6)*v.35
(-1)*v.36
```

La matrice à étudier est

$$\alpha\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -9 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\alpha & -\beta & 0 \\ -9\beta & 10\alpha & -\beta \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 2 pour tout couple (α, β) non nul.

Ainsi, cette orbite vérifie les hypothèses de la proposition 5.2.

Conclusion : d'après la proposition 5.2, les orbites nilpotentes distinguées non régulières de E_6 vérifient la propriété (P). $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brylinski (R.) & Kostant (B.) – *The variety of all invariant symplectic structures on a homogeneous space and normalisers of isotropy subgroups*, Symplectic Geom. and Math. Physics, t. **99** (1991), pp. 80–113.

[2] ______, *Nilpotent orbits, normality, and hamiltonien groups actions*, J. Amer. Math. Soc., t. **7** (1994), pp. 269–298.

[3] Charbonnel (J.-Y.) – *Propriété (Q) et (C). Variété commutante*, Bull. Soc. Math. France, t. **132** (2004), pp. 477–508.

[4] COLLINWOOD (D. H.) & MACGOVERN (W. M.) – *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebra*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand, 1992.

[5] GRÉLAUD (G.), QUITTÉ (C.) & TAUVEL (P.) – *Bases de Chevalley et* $\mathfrak{sl}_2$*-triplets des algèbre de Lie simples exceptionnelles*, Université de Poitiers, 1980.

[6] KURTZKE (J. F.) – *Centralizers of irregular elements in reductive algebraic groups*, Pacific J. Math., t. **104** (1983), pp. 133–154.

[7] MOREAU (A.) – *Calculs explicites dans une algèbre de Lie semi-simple effectués avec* GAP4, arXiv : `math.RT/0503019`, 2004.

[8] PANYUSHEV (D. I.) – *The index of a Lie algrebra, the centraliser of a nilpotent element, and the normaliser of the centraliser*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., t. **134** (2003), pp. 41–59.

[9] TAUVEL (P.) & YU (R. W. T.) – *Lie algebras an algebraic groups*, Springer-Verlag, 2005.