Bull. Soc. math. France
134 (2), 2006, p. 165–171

UNE REMARQUE SUR LE DEGRÉ FORMEL D'UNE SÉRIE DISCRÈTE D'UN GROUPE LINÉAIRE GÉNÉRAL p-ADIQUE

PAR VOLKER HEIERMANN

RÉSUMÉ. — Nous montrons dans le cas simple du groupe linéaire général, comment on peut déduire de [2] des informations précises sur le degré formel d'une représentation de carré intégrable d'un groupe p-adique.

ABSTRACT (*A remark on the formal degree of a general linear p-adic group's discrete series*)

We show in the simple case of the general linear group, how one can get from [2] precise information on the formal degree of a square integrable representation of a p-adic group.

Soient F un corps local non archimédien de valeur absolue normalisée $|\,.\,| = |\,.\,|_F$ et $m > 0$ un entier. Fixons une représentation cuspidale unitaire σ de $\mathrm{GL}_m(F)$ et un entier $d \geq 1$. Posons $n = md$, $G = \mathrm{GL}_n(F)$. Notons M l'unique sous-groupe de Levi standard de G qui est isomorphe à $\mathrm{GL}_m(F)\times\cdots\times\mathrm{GL}_m(F)$, $\det_m$ le déterminant de $\mathrm{GL}_m(F)$ et π_d l'unique série discrète de $\mathrm{GL}_n(F)$ qui est un sous-quotient de l'induite parabolique (normalisée) de

$$\sigma|\det{}_m|^{\frac{1}{2}(d-1)} \otimes \cdots \otimes \sigma|\det{}_m|^{\frac{1}{2}(-d+1)} := \rho_d.$$

On va appliquer les résultats de [2] pour calculer le degré formel de π_d en fonction de celui de σ. On retrouvera à cette occasion le résultat de A.-M. Aubert et

Texte reçu le 30 janvier 2004, accepté le 1er octobre 2004.

VOLKER HEIERMANN, Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Unter den Linden 6, 10099 Berlin (Allemagne). • *E-mail :* heierman@math.hu-berlin.de

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50, 11F70, 11F85.

Mots clefs. — Degré formel, représentations p-adiques, séries discrètes, formule de Plancherel.

R. Plymen [1] dont la preuve utilisait la théorie des types de Bushnell-Kutzko. Remarquons que, si on veut généraliser cette méthode à toute série discrète de tout groupe réductif p-adique, des problèmes supplémentaires apparaissent, venant de la géométrie des pôles de la fonction μ de Harish-Chandra et du fait que plusieures séries discrètes peuvent avoir le même support cuspidal.

1. Les mesures

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ les racines simples de G qui ne sont pas des racines de M et identifions-les à des racines du tore déployé maximal de M. Lorsque ℓ est un entier, $1 \leq \ell \leq d$, M_ℓ désignera le sous-groupe de Levi standard contenant M, obtenu en adjoignant à M les racines $\alpha_\ell, \dots, \alpha_{d-1}$. Il est isomorphe à

$$\mathrm{GL}_m(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{GL}_{(d-\ell+1)m}(F).$$

En particulier $M_1 = G$ et $M_d = M$. Nous noterons $(m_1, \dots, m_\ell)$ un élément général de M_ℓ (où $m_1, \dots, m_{\ell-1} \in \mathrm{GL}_m(F)$ et $m_\ell \in \mathrm{GL}_{(d-\ell+1)m}(F)$). Le symbole M_ℓ^1 désignera l'intersection des noyaux des caractères non ramifiés de M_ℓ. Le générateur > 1 de l'image de $|\,.\,|$ sera noté q. Notons

- $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$ le groupe des caractères non ramifiés de M_ℓ et
- $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$ le sous-groupe formé des caractères unitaires.

Identifions le groupe $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$ à $(S^1)^\ell$ au moyen de l'isomorphisme qui envoie un élément $(q^{s_1}, \dots, q^{s_\ell})$ de $(S^1)^\ell$ sur le caractère non ramifié $|\det_m|_F^{s_1} \cdots |\det_m|_F^{s_{\ell-1}} \,|\det_{(d-\ell+1)m}|_F^{s_\ell}$ de M_ℓ.

Le tore déployé maximal dans le centre de M_ℓ sera noté T_{M_ℓ}. Il est isomorphe à $(F^\times)^\ell$. Le groupe $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(T_{M_\ell})$ est isomorphe à $(S^1)^\ell$ au moyen de l'isomorphisme qui envoie un élément $(q^{s_1}, \dots, q^{s_\ell})$ de $(S^1)^\ell$ sur le caractère non ramifié de $(F^\times)^\ell$ donné par $|\det_1|_F^{s_1} \cdots |\det_1|_F^{s_\ell}$.

Suivant [2] on munit le groupe $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(T_{M_\ell})$ de l'unique mesure de Haar de mesure totale égale à 1. La mesure sur $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$ est l'unique mesure de Haar telle que la restriction $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell) \to \mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(T_{M_\ell})$ préserve localement les mesures. En identifiant les deux groupes avec le tore $(S^1)^\ell$, cette restriction correspond à l'application de $(S^1)^\ell$ dans $(S^1)^\ell$ qui envoie $(z_1, \dots, z_\ell)$ sur $(z_1^m, \dots, z_{\ell-1}^m, z_\ell^{(d-\ell+1)m})$. Il en résulte que $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$ a la mesure $(d-\ell+1)m^\ell$.

Notons

- $\mathcal{O}_\ell$ l'orbite inertielle de $\rho := \sigma \otimes \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$ par $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$,
- $\mathcal{O}_{\ell,0}$ l'orbite unitaire de ρ par $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$ et
- t l'ordre du stabilisateur de σ dans $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$.

La mesure sur $\mathcal{O}_{\ell,0}$ est l'unique mesure de Haar telle que l'application $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{nr}}(M_\ell) \to \mathcal{O}_{\ell,0}$ qui envoie un caractère unitaire non ramifié χ sur (la classe d'équivalence de) $\sigma \otimes \chi$ préserve localement les mesures. Comme les fibres de cette application ont toutes même cardinalité t^ℓ, la mesure de $\mathcal{O}_{\ell,0}$ est $(d-\ell+1)(m/t)^\ell$.

Tout sous-groupe fermé H de G sera muni de l'unique mesure de Haar telle que son intersection avec $K = \mathrm{GL}_n(O_F)$ a la mesure 1, O_F désignant l'anneau des entiers de F.

2. La racine $\widetilde{\alpha}_{\ell-1}$

Considérons $\alpha_{\ell-1}$ comme racine de T_{M_ℓ}. Fixons un générateur $\widetilde{\omega}$ de l'idéal maximal de O_F. Un générateur $h_{\ell-1}$ du $\mathbb{Z}$-module $M^1_{\ell-1} \cap M_\ell/M^1_\ell$ est donné par la classe modulo M^1_ℓ d'une matrice diagonale $\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)$ avec

$$x_{m(\ell-1)} = \widetilde{\omega}, \quad x_{m(\ell-1)+1} = \widetilde{\omega}^{-1} \quad \text{et} \quad x_i = 1 \text{ sinon.}$$

Notons $\mathrm{Rat}(M_\ell)$ le groupe des caractères algébriques de M_ℓ définis sur F.

L'élément de $\mathrm{Rat}(M_\ell)$ qui correspond à $(d-\ell+1)m\alpha_{\ell-1}$ envoie $(m_1, \dots, m_\ell)$ sur $\det_m(m_{\ell-1})^{d-\ell+1} \det_{(d-\ell+1)m}(m_\ell)^{-1}$. L'élément

$$\alpha^*_{\ell-1} := \Big(\frac{d-\ell+1}{d-\ell+2}\Big) m\alpha_{\ell-1}$$

vérifie donc

$$\big\langle \alpha^*_{\ell-1}, H_M(h_{\ell-1}) \big\rangle = 1.$$

La puissance $h^t_{\ell-1}$ de $h_{\ell-1}$ est minimale telle que $\chi \in \mathfrak{X}(M_\ell)$ vérifie $\chi(h^t_{\ell-1}) = 1$, si et seulement si $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_{\ell-1}) \, \mathrm{Stab}(\rho)$. On trouve donc

$$\widetilde{\alpha}_{\ell-1} = \frac{d-\ell+1}{d-\ell+2} \Big(\frac{m}{t}\Big) \alpha_{\ell-1}$$

dans les notations de [2, 3.2].

Notons $\alpha^\vee_\ell$ la coracine associée à α_ℓ. Un calcul élémentaire donne

$$t \left\langle \alpha^\vee_\ell, z_1\widetilde{\alpha}_1 + z_2\widetilde{\alpha}_2 + \dots + z_{d-1}\widetilde{\alpha}_{d-1} \right\rangle = z_\ell - \frac{d-\ell-1}{d-\ell} z_{\ell+1}$$

(où $z_d := 0$). Posons

$$a^*_{M_\ell} = \mathrm{Rat}(M_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Considérons la surjection canonique $a^*_{M_\ell,\mathbb{C}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$, $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ (cf. [2, 1.2]). En posant $r_\ell = t\frac{1}{2}(d-\ell+1)$, on en déduit

$$\rho_d = \rho \otimes \chi_{r_1\widetilde{\alpha}_1 + r_2\widetilde{\alpha}_2 + \dots + r_{d-1}\widetilde{\alpha}_{d-1}}.$$

3. La fonction μ

Notons $a = n(\sigma \times \sigma^\vee)$ le conducteur d'Artin de paires (cf. [3, p. 291]) et μ^{M_ℓ} la fonction μ de Harish-Chandra définie sur $\mathcal{O} := \mathcal{O}_d$ relative à M_ℓ comme produit des opérateurs d'entrelacement (cf. [2, 1.5]), $\mu := \mu^G$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la formule de produit pour μ^{M_ℓ}, utilisant la formule explicite pour μ dans le cas d'un sous-groupe de Levi maximal (cf. [1, Thm. 3.3]).

Proposition 3.1. — *Posons $\alpha_{i,j}^\vee = \alpha_i^\vee + \cdots + \alpha_j^\vee$ pour $i \leq j$. La fonction $\lambda \mapsto \mu(\rho \otimes \chi_\lambda)$ est régulière et non nulle en dehors de la réunion des hyperplans affines de a_M^* de la forme $\langle \alpha_{i,j}^\vee, \lambda \rangle = 0, \pm 1$ avec $1 \leq i < j \leq d-1$.*

La fonction $(\mu^{M_{\ell-1}}/\mu^{M_\ell})(\rho_0 \otimes \chi_{z\widetilde{\alpha}_{\ell-1}+r_\ell\widetilde{\alpha}_\ell+\cdots+r_{d-1}\widetilde{\alpha}_{d-1}})$ vaut

$$q^{(d-\ell+1)a}\frac{(1-q^{t\frac{1}{2}(d-\ell)-z})(1-q^{t\frac{1}{2}(d-\ell)+z})}{(1-q^{-t\frac{1}{2}(d-\ell)-t-z})(1-q^{-t\frac{1}{2}(d-\ell)-t+z})}.$$

4. La donnée de résidu Res_A^P

Posons $A_\ell = \rho_d \otimes \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_\ell)$, notons $r(A_\ell)$ « l'origine » de A_ℓ (cf. [2, 1.4]), $A_{\ell,0}$ le sous-espace de A_ℓ, formé des points de partie réelle $r(A_\ell)$, et $\mathcal{S}_{A_1}$ l'ensemble formé des hyperplans affines $\{\rho \otimes \chi_\lambda \mid \langle \alpha_\ell^\vee, \lambda \rangle = 1\}$, $\ell = 1, \ldots, d-1$, de $\mathcal{O} := \mathcal{O}_d$. Désignons par $\mathcal{R}(\mathcal{S}_{A_1})$ l'espace des fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_d$, régulières en dehors des hyperplans affines dans $\mathcal{S}_{A_1}$. Remarquons que la partie réelle $\Re(\rho \otimes \chi_\lambda) := \Re(\lambda)$ est bien définie. Le symbole $\int_{\Re(\rho')=R} \psi(\rho')\mathrm{d}_{A_d}\Im(\rho')$ désignera la mesure sur $\chi_R\mathcal{O}_0$, déduite de celle sur $\mathcal{O}_0 = A_{d,0}$. De façon analogue pour $\int_{A_{\ell,0}} \mathrm{d}_{A_\ell}\Im(\rho')$. L'ordre sur a_M^* induit par le sous-groupe parabolique standard P de Levi M sera noté $>_P$.

Proposition 4.1. — *Soit $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{A_1})$ invariante par $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$. Pour $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$ et $z_1, \ldots, z_{d-1} \in \mathbb{C}$, posons*

$$f(z_1, \cdots, z_{d-1}) = \psi(\rho \otimes \chi\chi_{z_1\widetilde{\alpha}_1+\cdots+z_{d-1}\widetilde{\alpha}_{d-1}}).$$

On a

$$\int_{\Re(\rho')=R\gg_P 0} \psi(\rho')\mathrm{d}_{A_d}\Im(\rho') = \sum_{\ell=1}^{d} \int_{A_{\ell,0}} (\mathrm{Res}_{A_\ell}\psi)(\rho')\mathrm{d}_{A_\ell}\Im(\rho'),$$

avec $\mathrm{Res}_{A_\ell}\psi(\rho \otimes \chi\chi_{z_1\widetilde{\alpha}_1+\cdots+z_{\ell-1}\widetilde{\alpha}_{\ell-1}})$ égal à

$$\Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^{d-\ell}\frac{1}{d-\ell+1}\mathrm{Res}_{z_\ell=r_\ell}\big(\cdots(\mathrm{Res}_{z_{d-1}=r_{d-1}} f)\big)(z_1, \ldots, z_{\ell-1}).$$

Démonstration. — Écrivons $R = R_1\widetilde{\alpha}_1 + R_2\widetilde{\alpha}_2 + \cdots + R_{d-1}\widetilde{\alpha}_{d-1}$. Par la suite exacte dans [2, 1.2] et notre choix des mesures, on a

$$\frac{\log q}{2\pi}\int_{\Re(\rho')=R}\psi(\rho')\mathrm{d}_{A_d}\Im(\rho') = \Big(\frac{\log q}{2\pi}\Big)^d\Big(\frac{m}{t}\Big)^d$$
$$\times\int_0^{2\pi/\log q}\cdots\int_0^{2\pi/\log q} f(R_1+it_1,\dots,R_{d-1}+it_{d-1})\mathrm{d}t_{d-1}\cdots\mathrm{d}t_1.$$

Si on fixe $z_1,\dots,z_{\ell-1}$ avec $\Re(z_i)=R_i$, la fonction

$$z_\ell \longmapsto \psi(z_1\widetilde{\alpha}_1+\cdots+z_{\ell-1}\widetilde{\alpha}_{\ell-1}+z_\ell\widetilde{\alpha_\ell}+r_{\ell+1}z_{\ell+1}+\cdots r_{d-1}z_{d-1})$$

possède, compte du calcul dans le paragraphe 2 et du fait que ψ est régulière en dehors des hyperplans dans $\mathcal{S}_{A_1}$, au plus un pôle en $z_\ell = r_\ell$. Par les arguments dans [2, 3.6], l'intégrale vaut

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^\ell\Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^d\sum_{\ell=1}^d\int_0^{2\pi/\log q}\cdots\int_0^{2\pi/\log q}$$
$$\mathrm{Res}_{z_\ell=r_\ell}\big(\cdots(\mathrm{Res}_{z_{d-1}=r_{d-1}}f)\big)(it_1,\dots,it_{\ell-1})\mathrm{d}t_{\ell-1}\cdots\mathrm{d}t_1$$
$$=\sum_{\ell=1}^d\Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^{d-\ell}\frac{1}{d-\ell+1}(d-\ell+1)\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^\ell\Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^\ell$$
$$\times\int_0^{2\pi/\log q}\cdots\int_0^{2\pi/\log q}\mathrm{Res}_{z_\ell=r_\ell}\big(\cdots(\mathrm{Res}_{z_{d-1}=r_{d-1}}f)\big)(it_1,\dots,it_{\ell-1})$$
$$\mathrm{d}t_{\ell-1}\cdots\mathrm{d}t_1$$
$$=\frac{\log q}{2\pi}\sum_{\ell=1}^d\int_{A_{\ell,0}}(\mathrm{Res}_{A_\ell}\psi)(\rho')\mathrm{d}_{A_\ell}\Im(\rho'). \qquad\square$$

COROLLAIRE 4.2. — *Notons* $\mathrm{Res}^P_{A_1}$ *la donnée de résidu défini dans* [2, 4.9]. *Avec* $f(z_1,\dots,z_{d-1}) = \mu(\rho\otimes\chi_{z_1\widetilde{\alpha}_1+\cdots+z_{d-1}\widetilde{\alpha}_{d-1}})$, *on a*

$$(\mathrm{Res}^P_{A_1}\mu) = \Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^{d-1}\frac{1}{d}\mathrm{Res}_{z_1=r_1}\big(\cdots(\mathrm{Res}_{z_{d-1}=r_{d-1}}f)\big).$$

Démonstration. — Par [2, 3.9], la donnée de résidu $\mathrm{Res}^P_{A_1}$ est déterminée par sa restriction à $\mathcal{S}_{A_1}$, donc en raison de [2, 3.10] égale à l'expression donnée dans la proposition ci-dessus. □

5. Le degré formel

THÉORÈME 5.1. — *Le degré formel de l'unique sous-quotient irréductible de carré intégrable* π_d *de la représentation induite parabolique* (*normalisée*) *de la* *représentation* $\sigma \cdot |\det_m|^{\frac{1}{2}(d-1)} \otimes \cdots \otimes \sigma \cdot |\det_m|^{\frac{1}{2}(-d+1)}$ *de* M *est lié à celui de* σ *par la formule*

$$\deg(\pi_d) = \frac{|\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\operatorname{GL}_m(\mathbb{F}_q)|^d}\, q^{mn-n^2}\, \frac{m^{d-1}}{t^{d-1}d}\, q^{\frac{1}{2}ad(d-1)}\, q^{\frac{1}{2}td(d-1)}\, \frac{(q^t-1)^d}{q^{td}-1} \deg(\sigma)^d.$$

Démonstration. — Par la remarque [2, 8.6], on a

$$\deg(\pi_d) = \gamma(G/M) \deg(\rho_d) \big|\operatorname{Stab}(A_1)\big|^{-1} (\operatorname{Res}^P_{A_1} \mu)(\rho_d).$$

Comme ρ_d est régulier, $\operatorname{Stab}(A_1) = \{1\}$. Il est immédiate par définition du degré formel que celui d'un produit tensoriel de représentations est égal au produit des degrés formels. La constante $\gamma(G/M)$ est égal à

$$\frac{|\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\operatorname{GL}_m(\mathbb{F}_q)|^d}\, q^{mn-n^2},$$

comme on le déduit directement de la formule pour $\gamma(G/M)$ dans [4] en haut de la page 241, en posant $H = I_n + \widetilde{\omega}\operatorname{GL}_n(O_F)$. Il reste à calculer le résidu, en utilisant la proposition 3.1 :

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Res}^P_{A_1} \mu)(\rho_d)\\
&= \Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^{d-1} \frac{1}{d} \prod_{\ell=2}^{d} q^{a(d-\ell+1)} \frac{(1-q^{\frac{1}{2}t(d-\ell)-r_{\ell-1}})(1-q^{\frac{1}{2}t(d-\ell)+r_{\ell-1}})}{(1-q^{-\frac{1}{2}t(d-\ell)-t-r_{\ell-1}})}\\
&\qquad\qquad \operatorname{Res}_{z=r_{\ell-1}} \frac{1}{1-q^{-\frac{1}{2}t(d-\ell)-t+z}}\\
&= \Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^{d-1} \frac{1}{d}\, q^{a\frac{1}{2}d(d-1)} \prod_{\ell=2}^{d} \frac{(q^{-t}-1)(q^{t(d-\ell+1)}-1)}{(q^{-t(d-\ell+2)}-1)}\\
&\qquad\qquad \operatorname{Res}_{z=r_{\ell-1}} \frac{1}{q^{-\frac{1}{2}t(d-\ell)-t+z}-1}\\
&= \Big(\frac{m\log q}{t}\Big)^{d-1} \frac{1}{d}\, q^{a\frac{1}{2}d(d-1)} (q^{-t}-1)^{d-1} \frac{q^t-1}{q^{-dt}-1}\\
&\qquad\qquad \Big(\frac{1}{\log q}\Big)^{d-1} \prod_{\ell=2}^{d-1} \frac{q^{t(d-\ell+1)}-1}{q^{-t(d-\ell+1)}-1}\\
&= \Big(\frac{m}{t}\Big)^{d-1} \frac{1}{d}\, q^{\frac{1}{2}ad(d-1)} (q^{-t}-1)^{d-1} \frac{q^t-1}{q^{-dt}-1} \prod_{\ell=2}^{d-1} (-q^{t(d-\ell+1)})\\
&= \Big(\frac{m}{t}\Big)^{d-1} \frac{1}{d}\, q^{\frac{1}{2}ad(d-1)} q^{-t(d-1)} (-1)^{d-1} (q^t-1)^{d-1} (-q^{td})\\
&\qquad\qquad \frac{q^t-1}{q^{td}-1} (-1)^{d-2} \prod_{\ell=2}^{d-1} q^{tl}\\
&= \Big(\frac{m}{t}\Big)^{d-1} \frac{1}{d}\, q^{\frac{1}{2}ad(d-1)} \frac{(q^t-1)^d}{q^{td}-1}\, q^{\frac{1}{2}td(d-1)}.
\end{aligned}$$

□

L'auteur remercie l'Université Purdue ainsi que F. Shahidi pour leur hospitalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBERT (A.-M.) & PLYMEN (R.) – *Plancherel measure for* GL(n) *: explicit formulas and Bernstein decomposition*, J. Number Theory, t. **112** (2005), no. 1, pp. 26–66.

[2] HEIERMANN (V.) – *Décomposition spectrale d'un groupe réductif p-adique*, J. Institut Math. Jussieu, t. **3** (2004), no. 3, pp. 327–395.

[3] SHAHIDI (F.) – *Langlands' conjecture on Plancherel measures for p-adic groups*, Progr. Math., vol. 101, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 277–295.

[4] WALDSPURGER (J.-L.) – *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)*, J. Institut Math. Jussieu, t. **2** (2003), pp. 235–333.