

## INÉGALITÉS DE RÉSOVANTE POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC POTENTIEL MULTIPOLAIRE CRITIQUE

PAR THOMAS DUICKAERTS

---

RÉSUMÉ. — On étudie un opérateur de la forme  $-\Delta + V$  sur  $\mathbb{R}^d$ , où  $V$  est un potentiel admettant plusieurs pôles en  $a/r^2$ . Plus précisément, on démontre l'estimation de résolvante tronquée à hautes fréquences, classique dans les cas non-captifs, et qui implique l'effet régularisant standard pour l'équation de Schrödinger correspondante. La preuve est basée sur l'introduction d'une mesure de défaut micro-locale semi-classique. On démontre également, dans le même contexte, des inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger.

ABSTRACT (*Resolvent estimates for Schrödinger operator with critical multipolar potential*)

We consider an operator of the form:  $-\Delta + V$  on  $\mathbb{R}^d$ , where  $V$  is a potential with a finite number of inverse-square singularities. More precisely, we show the usual high frequency estimate on the truncated resolvent, which is classical in nontrapping geometries, and implies the smoothing effect on the corresponding Schrödinger equation. The proof relies on the use of a semiclassical microlocal defect measure. We also show, in the same framework, Strichartz estimates for solutions of the Schrödinger equations.

---

*Texte reçu le 2 juillet 2004, révisé le 25 octobre 2005.*

THOMAS DUICKAERTS, Université de Cergy-Pontoise, Département de Mathématiques, Site de Saint Martin, 2 avenue Adolphe-Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise Cedex (France).

*E-mail* : [thomas.duyckaerts@u-cergy.fr](mailto:thomas.duyckaerts@u-cergy.fr)

Classification mathématique par sujets (2000). — 35A27, 35B65, 35Q40, 81Q20, 47A10, 35B25, 35L05.

Mots clefs. — Équation de Schrödinger, potentiel singulier, inégalité de résolvante, analyse micro-locale, mesure de défaut.

### Table des matières

1. Introduction .....	202
2. Définitions et hypothèses .....	206
3. Preuve des inégalités de résolvante .....	210
4. Un cas plus général .....	232
5. Inégalités de Strichartz .....	234
Bibliographie .....	237

### 1. Introduction

Nous considérons dans ce travail un opérateur de la forme

$$P = -\Delta + V,$$

sur l'espace  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ), où

$$\Delta = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

est le laplacien standard et le potentiel  $V$  est une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}^d$ . L'étude de la résolvante

$$R_z = (P - z)^{-1}, \quad z \notin \mathbb{R},$$

près de l'axe réel, intéressante en elle-même, permet aussi de préciser le comportement des solutions des équations d'onde et de Schrödinger associées à  $P$ . Lorsque  $V$  est régulier, de nombreuses inégalités ont été démontrées sur des normes de  $R_z$  dans des espaces à poids, notamment l'inégalité standard à haute fréquence, sur la résolvante tronquée

$$(1) \quad \|\chi R_z \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{1 + |z|}}$$

où  $z$  est grand en module près de l'axe réel, et  $\chi$  est une fonction régulière à support compact. De tels résultats remontent aux travaux de C.S. Morawetz [18] et [19], qui en déduisait la décroissance uniforme de l'énergie locale de l'équation des ondes correspondante. On peut démontrer (1) dans un cadre général, en modifiant la métrique définissant le laplacien ou en rajoutant un obstacle, moyennant une hypothèse essentielle de non-capture sur les géodésiques de cette métrique (cf. [16], [3], [29]).

Dans [25] et [26], A. Ruiz et L. Vega considèrent des potentiels peu réguliers, et démontrent des estimations sur la résolvante de  $P$ , et les effets régularisants locaux des équations d'onde et de Schrödinger. Le principe de ces deux articles est d'écrire des estimations sur le laplacien libre  $\Delta$ , puis de considérer  $V$  comme une petite perturbation de ce dernier. Un tel raisonnement fonctionne par exemple si  $V \in L^q$ ,  $q \geq \frac{1}{2}d$  est assez petit à l'infini.

Ici, nous supposons que le potentiel  $V$  (également petit à l'infini) est borné en dehors d'un ensemble fini de pôles distincts

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^d$$

près desquels

$$(2) \quad V(x) \approx \frac{a_j}{|x - p_j|^2}.$$

De telles singularités sont critiques, car du même ordre que le laplacien. Les singularités moins fortes rentrent dans le cadre de l'article précité et pour les singularités d'ordre supérieur on ne peut pas, en général, démontrer (1). De fait, il existe des potentiels positifs, à support compact, admettant une singularité en 0 de l'ordre de  $|x|^{-2} \log^2 |x|$ , et tels que la résolvante de  $P$  ne vérifie pas d'inégalité haute fréquence telle que (1), même en s'autorisant des pertes polynomiales en  $|z|$ . Pour de tels potentiels, les propriétés classiques de régularisation et de dispersion des solutions de l'équation de Schrödinger sont fausses (cf. [10]).

Deux cas particuliers de potentiels admettant des singularités en inverse quadratique ont déjà été étudiés. En dimension supérieure à 3, lorsque les constantes  $a_j$  sont petites dans (2), le potentiel  $V$  reste en un certain sens inférieur au laplacien et on reste dans le cadre de [26]. En omettant cette hypothèse de petitesse, on change la nature du problème car on ne peut plus considérer  $V$  comme une perturbation du laplacien.

Le cas unipolaire, essentiellement

$$P_a = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}, \quad a + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0,$$

est lui traité dans [22] et [5]. Moyennant l'hypothèse sur  $a$ , qui assure la positivité de l'opérateur  $P_a$ , les auteurs démontrent des inégalités de Strichartz sur les équations d'évolutions associées à  $P_a$ . Leur raisonnement, reposant sur la forme particulière de  $P_a$  et des calculs explicites, ne s'adapte pas au cas multipolaire.

On démontre ici (1) pour un potentiel multipolaire. Ce type de potentiels apparaît dans certains modèles de chimie physique [2], mais la motivation principale de ce travail est l'étude d'un problème critique, cas limite où les singularités de  $V$  sont exactement du degré d'homogénéité du laplacien. On suppose que près de chaque pôle  $p_j$ ,  $V$  est radial (c'est à dire fonction de la seule variable  $|x - p_j|$ ). Cette condition est légèrement assouplie dans la section 4 (cf. théorème 4). On fait également, près de  $p_j$ , les hypothèses

$$\frac{a}{|x - p_j|^2} \leq V(x) \leq \frac{C}{|x - p_j|^2}, \quad |\nabla V(x)| \leq \frac{C}{|x - p_j|^3},$$

pour une grande constante  $C$  et un réel  $a$  tel que  $a + (\frac{1}{2}d - 1)^2 > 0$ .

Ces hypothèses sont vérifiées par exemple lorsque  $V$  est exactement, près de chaque  $p_j$ , de la forme

$$\frac{a_j}{|x - p_j|^2}, \quad a_j + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0.$$

On suppose aussi pour simplifier  $V$  nul à l'infini et borné en dehors des pôles. Dans ces conditions on peut toujours définir, au sens des formes quadratiques, un opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement  $P = -\Delta + V$ . Les hypothèses sur  $V$  et la construction précise de  $P$  sont explicitées et discutées dans la section 2.

THÉORÈME 1. — *Soient  $V$  vérifiant les hypothèses (7)–(12) de la section 2 et  $P = -\Delta + V$ . On se donne  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors :*

$$(3) \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi R_{\lambda \pm i\varepsilon} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{1 + \sqrt{\lambda}}.$$

*Dans le cas d'un seul pôle ( $N = 1$ ), l'estimation (3) reste vraie sans la borne sur la dérivée de  $V$  (hypothèse (11) de la section 2).*

Comme déjà indiqué, l'estimation (3) est l'estimation standard sur la résolvante d'un laplacien induisant une métrique non captive. Dans les cas captifs, cette estimation est fautive. Le théorème 1 montre en particulier que l'énergie ne se concentre pas à haute fréquence sur les pôles, et que ces derniers ne se comportent pas non plus comme des obstacles qui renverraient les rayons optiques.

La démonstration du théorème 1 suit celle de N. Burq [3], qui prouve la même inégalité pour un laplacien sur l'espace  $\mathbb{R}^d$  éventuellement privé d'un obstacle, associé à une métrique non-captive. Elle repose sur l'introduction dans un raisonnement par l'absurde d'une mesure de défaut semi-classique, objet introduit indépendamment par P. Gérard et P.L. Lions [13] et [17]. La difficulté nouvelle repose dans la compréhension du comportement de la mesure près de chacun des pôles. On peut signaler une approche différente mais liée à la nôtre pour démontrer des résultats similaires, celle du calcul de commutateurs positifs introduit par E. Mourre [20], et qui fonctionne telle quelle sur l'opérateur unipolaire  $P_a$ . L'auteur tient à remercier C. Gérard et F. Nier pour l'avoir éclairé sur ce sujet. On renvoie à [12] pour un ouvrage général dans cette direction. L'article [29] de A. Vasy et M. Zworsky donne une version micro-locale de ce type de techniques.

On énonce à présent des applications du théorème 1 à l'équation de Schrödinger associée à  $P$  :

$$(4) \quad i\partial_t u + Pu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

L'effet régularisant avec gain d'une demi-dérivée est une conséquence standard de l'inégalité (3) (cf. Burq, Gérard et Tzvetkov [4, prop. 2.7, rem. 2.9]) :

COROLLAIRE 2. — *Soit  $V$  vérifiant les hypothèses du théorème 1. Alors*

$$(5) \quad \forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \forall T > 0, \exists C > 0, \forall u_0 \in L^2, \\ \| \chi u(t) \|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d))} \leq C \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où l'on a noté  $u(t)$  la solution de l'équation de Schrödinger (4).

Cet effet régularisant a été remarqué pour la première fois, lorsque  $V$  est régulier, par Constantin et Saut [8], Sjölin [27] et Vega [31]. Nous avons énoncé une propriété locale en temps. L'inégalité (3) mais pour tout réel  $\lambda$  impliquerait un effet régularisant global en temps, c'est-à-dire (5) en remplaçant  $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d))$  par  $L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d))$ . Dans notre cas l'absence, en dehors des pôles, d'hypothèse de borne inférieure sur  $V$ , et donc l'existence possible d'un nombre fini de valeurs propres pour  $P$  empêchent en général une telle propriété.

Une autre question naturelle, essentielle dans l'étude des équations non-linéaires, est celle des estimations de Strichartz pour les solutions de (4). Une façon de répondre (partiellement) à cette question est de remarquer que l'inégalité (5) permet, en absorbant les termes d'erreur dus aux troncatures, de localiser ces estimations (cf. Staffilani et Tataru [28]). Dans notre cas, on obtient, à partir des inégalités de Strichartz pour des potentiels unipolaires (démontrées par N. Burq, F. Planchon, J. Stalker et A. Shadi Tahvildar-Zadeh [5]), les mêmes estimations pour nos potentiels multipolaires. Pour valider un tel raisonnement, les singularités de  $V$  doivent alors vérifier les hypothèses du théorème 1, mais également celles faites dans [5]. On donne ici, pour ne pas alourdir la présentation, une forme très particulière au potentiel mais le théorème 4 et les résultats récents de [6] permettraient une légère généralisation. On note encore  $u(t)$  la solution de l'équation de Schrödinger (4) de condition initiale  $u_0$ .

COROLLAIRE 3. — *Soit  $V \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , à support compact. On suppose que pour tout  $j$ , il existe un réel  $a_j$  vérifiant  $a_j + (\frac{1}{2}d - 1)^2 > 0$  et tel que*

$$V(x) = \frac{a_j}{|x - p_j|^2}$$

près de chaque pôle  $p_j$ . Soient  $r, s \in [2, +\infty]$  tels que

$$\frac{2}{r} + \frac{d}{s} = \frac{d}{2}, \quad r > 2.$$

Alors :

$$(6) \quad \forall T \in ]0, +\infty[, \exists C > 0, \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ \| u(t) \|_{L^r(0,T;L^s(\mathbb{R}^d))} \leq C \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Il est standard que les inégalités (6) impliquent des résultats d'existence et d'unicité sur les équations non-linéaires correspondant à (4) (cf. [14]).

Mentionnons encore que le théorème 1 permet aussi d'étudier l'équation des ondes associée à l'opérateur  $P$ , aspect que nous n'avons pas développé ici. Les travaux récents de V. Pierfelice et P. D'Ancona [21], [9] portent sur une telle équation, en dimension 3, avec un potentiel singulier. L'hypothèse faite dans [9] est simplement une hypothèse de petitesse sur la partie négative du potentiel, similaire à notre hypothèse (9). Dans cet article, le potentiel est pris dans une classe de Kato critique, contenant strictement  $L^{d/2}$ , mais n'incluant pas, par exemple, les potentiels du théorème 1. L'introduction de [21] présente de manière très complète les résultats connus sur les opérateurs de la forme  $-\Delta + V$ .

L'équation de la chaleur avec potentiel unipolaire en  $a/|x|^2$ , qui apparaît dans certains problèmes de réaction-diffusion, est étudiée dans [30]. Dans le cas surcritique  $a + (\frac{1}{2}d - 1)^2 > 0$  qui nous intéresse ici, le comportement de l'équation linéaire est similaire à l'équation de la chaleur avec laplacien libre (sans potentiel).

La deuxième partie du texte est consacrée à la définition précise de  $P$ . La troisième partie concerne la démonstration du théorème 1. Dans la quatrième partie, on énonce et on démontre un raffinement du théorème 1, où la condition de radialité sur  $V$  près de chaque pôle est assouplie. Enfin, la cinquième partie est consacrée à la démonstration du corollaire 3.

L'auteur tient à remercier vivement son directeur de thèse, Nicolas Burq ainsi que Clotilde Fermanian Kammerer qui ont tous les deux contribué de manière essentielle à ce travail.

## 2. Définitions et hypothèses

On commence par expliciter les hypothèses sur  $V$ . Comme déjà précisé, on se place en dimension  $d \geq 2$  et on se donne un ensemble de  $N$  pôles ( $N \geq 1$ ) distincts :

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^d.$$

On suppose :

$$(7) \quad V \text{ à support compact sur } \mathbb{R}^d,$$

$$(8) \quad V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}, \mathbb{R}),$$

et qu'il existe des constantes  $\ell$ ,  $C_V$ ,  $C'_V$  strictement positives, une constante réelle  $a$ , des fonctions  $V_j \in L_{\text{loc}}^\infty(]0, \ell], \mathbb{R})$  telles que pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $N$ , et pour  $|x - p_j| \leq \ell$ , on a

$$(9) \quad V(x) \geq \frac{a}{|x - p_j|^2}, \quad a + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0,$$

$$(10) \quad |V(x)| \leq \frac{C_V}{|x - p_j|^2},$$

$$(11) \quad |\nabla V(x)| \leq \frac{C'_V}{|x - p_j|^3},$$

$$(12) \quad V(x) = V_j(|x - p_j|).$$

Les hypothèses (7) et (8) sont loin d'être minimales mais on s'intéresse ici principalement à l'effet des pôles sur le comportement de  $P$ . Pour des potentiels plus généraux à l'infini, on pourra consulter [1] et [29].

La borne (11) sur la dérivée et l'hypothèse de radialité (12) de  $V$  près des pôles sont des hypothèses apparemment techniques. Dans le cas d'un seul pôle ( $N = 1$ ), la borne (11) est inutile, ce qui généralise les résultats connus jusqu'alors pour un potentiel unipolaire radial, qui nécessitait toujours une hypothèse sur la dérivée de  $V$ . Dans le théorème 4 plus loin, on fait une hypothèse légèrement plus faible que (12), ce qui permet d'inclure des pôles de la forme  $|x|^{-2}a(x/|x|)$ . Mais en dehors de ces deux cas, il semble impossible de se passer de (11) et (12) avec la méthode de preuve employée ici.

Enfin, (9) et (10) sont absolument essentielles. Lorsque l'inégalité (9) est inversée,  $P$  n'est plus semi-borné inférieurement, ce qui change complètement la nature du problème. La définition de  $P$  comme opérateur auto-adjoint (cf. corollaire 2.2) est alors elle-même ambiguë.

Dans le cas critique  $a_j + (\frac{1}{2}d - 1)^2 = 0$ ,  $d \geq 3$ , l'opérateur reste semi-borné inférieurement, mais le domaine de la forme quadratique  $Q$  associée à  $P$  (définie plus loin dans cette partie) peut-être légèrement plus grand que  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . Lorsque  $P$  est l'opérateur unipolaire  $P_a$  de l'introduction, un changement de fonction inconnue permet de ramener l'étude à celle de l'équation libre en dimension  $d = 2$ . On peut en déduire facilement toutes les inégalités de Strichartz sous-critiques. L'effet régularisant reste valide, mais en remplaçant dans (5) l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$  par l'espace  $D(P_a^{1/4})$  qui le contient strictement. On renvoie à [30] pour une étude précise de l'opérateur  $P_a$  et de son domaine dans ce cas critique. L'auteur tient à remercier Enrique Zuazua pour ses éclaircissements à ce sujet.

D'autre part, comme mentionné dans l'introduction, l'hypothèse (10) est pratiquement optimale (cf. [10]). Si l'on veut encore que (1) soit vérifiée pour des potentiels admettant des pôles d'ordre supérieur, il faut faire des hypothèses supplémentaires, peut-être supposer une propriété de monotonie de  $V$  au voisinage des pôles.

Soit  $Q$  la forme quadratique sur  $L^2$  définie par

$$D(Q) = H^1 \cap \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d); \frac{1}{|x - p_j|} u \in L^2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, N \right\},$$

$$Q(u) = \int |\nabla u|^2 dx + \int V|u|^2 dx.$$

LEMME 2.1. — *Sous les hypothèses (7)–(10), la forme quadratique  $Q$  est fermée, semi-bornée inférieurement.*

*Démonstration.* — Le fait que  $Q$  soit semi-bornée inférieurement, trivial pour  $d = 2$  ( $V$  est alors positif près de chaque pôle), découle, pour  $d \geq 3$ , de l'inégalité de Hardy

$$(13) \quad \int |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \int \frac{1}{|x|^2} |u|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

En effet, on se donne une partition de l'unité adaptée aux pôles  $p_j$

$$\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \sum_{j=1}^N \chi_j^2 = 1, \quad k \neq j \implies p_k \notin \text{supp } \chi_j,$$

et on écrit

$$\begin{aligned} Q(u) &= \int \sum_{j=0}^N \chi_j^2 |\nabla u|^2 dx + \int \sum_{j=0}^N V \chi_j^2 |u|^2 dx \\ &= \int |\chi_0 \nabla u|^2 dx + \sum_{j=1}^N \int |\nabla(\chi_j u) + [\chi_j, \nabla]u|^2 dx + \sum_{j=0}^N \int V |\chi_j u|^2 dx \\ &\geq \int |\chi_0 \nabla u|^2 dx + (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^N \int |\nabla(\chi_j u)|^2 dx \\ &\quad - C_\varepsilon \sum_{j=1}^N \int |[\chi_j, \nabla]u|^2 dx + \sum_{j=0}^N \int V |\chi_j u|^2 dx, \end{aligned}$$

où  $C_\varepsilon$  désigne une constante dépendant de  $\varepsilon$ . On conclut avec l'hypothèse (9), et l'inégalité (13), appliquée à  $\chi_j u$ , en prenant  $\varepsilon$  assez petit.

Il est évident que  $D(Q)$  est complet pour la norme

$$\|u\|_Q = \sqrt{Q(u) + \|u\|_{L^2}^2},$$

c'est-à-dire que  $Q$  est fermée. (En fait, dès que  $d \geq 3$ ,  $D(Q)$  est exactement l'espace  $H^1$  d'après l'inégalité de Hardy.)  $\square$

**COROLLAIRE 2.2.** — *Sous les hypothèses (7)–(10), on peut associer à  $Q$  un unique opérateur  $P$ , auto-adjoint, semi-borné inférieurement, tel que (cf. [24])*

$$\begin{aligned} D(P) &= \{u \in D(Q); v \mapsto Q(u, v) \text{ continu } L^2\}, \\ \forall u \in D(P), \forall v \in D(Q), \quad Q(u, v) &= (Pu, v)_{L^2}. \end{aligned}$$

La proposition suivante est conséquence immédiate de la définition de  $P$  et, pour le 1), de la densité de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$  dans  $D(Q)$  :

PROPOSITION 2.3. — On a :

- 1)  $D(P) = \{u \in D(Q); -\Delta u + Vu \in L^2\}$ ,
- 2)  $Pu = -\Delta u + Vu$  sur  $D(P)$ ,

où dans 1) et 2),  $-\Delta u + Vu$  est à prendre au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}$ .

REMARQUE 2.4. — Même si  $P$  est la somme formelle des opérateurs  $-\Delta$  et  $V$ , on n'a pas toujours les inclusions

$$D(P) \subset D(-\Delta) = H^2,$$

$$D(P) \subset D(V) = \left\{ u \in L^2; \frac{1}{|x - p_j|^2} u \in L^2, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Supposons par exemple, que près d'un pôle  $p_j$ ,  $V$  soit exactement de la forme

$$(14) \quad \frac{a_j}{|x - p_j|^2}, \quad 0 < a_j + \left(\frac{1}{2}d - 1\right)^2 < 1.$$

Considérons la fonction :

$$(15) \quad u_s(x) = |x - p_j|^s \varphi(x - p_j), \quad s = -\left(\frac{1}{2}d - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}d - 1\right)^2 + a},$$

où  $\varphi$  est à support compact dans  $\{r < \ell\}$  et vaut 1 près de 0. Comme  $-\Delta u + Vu$  est nul près du  $j$ -ième pôle, la proposition précédente montre que  $u$  est un élément de  $D(P)$ . Mais  $u$  n'est ni dans  $H^2$ , ni dans  $D(V)$ .

REMARQUE 2.5 (non-unicité de l'extension auto-adjointe)

Signalons une autre pathologie intéressante, qui survient encore par exemple lorsque  $V$  est de la forme (14) près d'un pôle. La fonction  $u_s$  définie par (15), avec cette fois

$$s = -\left(\frac{1}{2}d - 1\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}d - 1\right)^2 + a},$$

est dans  $L^2$  et vérifie

$$-\Delta u_s + Vu_s \in L^2$$

au sens des distribution sur  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}$ , mais n'est pas dans  $D(P)$ . Si  $A$  est l'opérateur  $-\Delta + V$ , défini de manière naturelle sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , on a donc

$$A \subsetneq P \subsetneq A^*.$$

Ainsi l'opérateur  $A$  n'est pas essentiellement auto-adjoint et admet plusieurs extensions auto-adjointes, dont l'extension de Friedrichs, choisie ici, qui est la seule dont le domaine est inclus dans  $H^1$ .

Lorsque la constante  $a$  de (9) est assez grande, les deux remarques précédentes ne sont plus valables : l'opérateur  $A$  ci-dessus admet une seule extension auto-adjointe, dont le domaine est exactement l'intersection de  $H^2$  et  $D(V)$ . Pour un aperçu de ces questions et une étude du cas unipolaire, on pourra consulter [23, chapitre X].

### 3. Preuve des inégalités de résolvante

**3.1. Introduction de la mesure et étude en dehors des pôles.**— On ne fait dans ce paragraphe 3.1 que les hypothèses (7)–(10) sur le potentiel  $V$ . L'adjoint de l'opérateur borné sur  $L^2$  :  $\chi R_{\lambda+i\varepsilon}\chi$  est l'opérateur :  $\overline{\chi}R_{\lambda-i\varepsilon}\overline{\chi}$ . Il suffit donc de démontrer (3) avec le signe  $-$  devant  $i\varepsilon$ . Donnons-nous une fonction  $\chi_1$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  valant 1 sur le support de  $\chi$ . L'inégalité (3) découle de

$$(3') \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi_1 R_{\lambda-i\varepsilon}\chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

Supposons que (3') soit fautive. Alors il existe des suites  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  telles que  $\lambda_n, \varepsilon_n > 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  et

$$\|\chi_1 R_{\lambda_n - i\varepsilon_n} \chi\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} > \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Il existe donc une suite  $(g_n)$  de fonctions  $L^2(\mathbb{R}^d)$  telle que

$$(16) \quad 1 = \|\chi_1 R_{\lambda_n - i\varepsilon_n} \chi g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} \|g_n\|.$$

De plus, on peut supposer  $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , cet espace étant dense dans  $L^2$ . On se place dans un contexte semi-classique, en posant

$$u_n = R_{\lambda_n - i\varepsilon_n} \chi g_n, \quad h_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad f_n = h_n g_n, \quad \alpha_n = \varepsilon_n h_n.$$

On a donc

$$(17) \quad h_n^2(-\Delta + V)u_n - (1 - i\alpha_n h_n)u_n = \chi h_n f_n,$$

$$(18) \quad \|\chi_1 u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1, \quad \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \alpha_n > 0.$$

Notons que contrairement à un « vrai » problème semi-classique, le potentiel  $V$  a un coefficient  $h_n^2$ . Ce coefficient le rend négligeable, sauf au voisinage de chaque pôle.

On omettra parfois les indices  $n$  pour alléger les notations. On commence par noter que l'on peut se contenter d'étudier la résolvante au voisinage de l'axe réel :

LEMME 3.1. — *On a*

$$(19) \quad \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$(20) \quad \alpha_n \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

*Démonstration.* — Ceci découle immédiatement du caractère auto-adjoint de l'opérateur  $P$ . En effet, en multipliant (17) par  $\bar{u}_n$  et en intégrant la partie imaginaire, on obtient

$$\operatorname{Im} (h_n^2 Q(u_n) - \|u_n\|_{L^2}^2) + h_n \alpha_n \|u_n\|_{L^2}^2 = h_n \operatorname{Im} \int \chi f_n \bar{u}_n dx.$$

On en déduit (20) car d'après (18),  $\chi u_n$  est borné et  $f_n$  tend vers 0 dans  $L^2$ . Également d'après (18), la norme de  $u_n$  dans  $L^2$  est minorée quand  $n$  tend vers  $+\infty$  par un réel strictement positif, ce qui donne (19).  $\square$

Le lemme suivant, conséquence facile de l'inégalité de résolvante (3) sur le laplacien libre, est le lemme 3.1 de [3] :

LEMME 3.2. — *La suite  $(u_n)$  est bornée dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ .*

On peut donc introduire la mesure semi-classique  $\mu$  associée à  $u_n$  et à la suite d'échelles  $(h_n)$  (cf. [3] et [11]). C'est une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi$  qui vérifie, à extraction d'une sous-suite de  $(u_n, h_n)$  près,

$$(21) \quad \forall a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \quad (a(x, h_n D)\varphi(x)u_n, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \mu, a \rangle,$$

où l'on a noté  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d_x)$  une fonction valant 1 sur la projection en  $x$  du support de  $a$ , et  $a(x, h_n D)$  la suite d'opérateurs uniformément bornés sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de noyaux

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int a(x, h_n \xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi.$$

Rappelons que la limite (21) ne dépend pas de la fonction  $\varphi$ .

PROPOSITION 3.3. — *Supposons (7)–(10).*

1) Vitesse d'oscillation de  $u_n$  et convergence  $L^2$ . — *Si  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on a*

$$(22) \quad h_n^2 \int |\nabla u_n|^2 \psi dx + \sum_{j=1, \dots, N} h_n^2 \int \frac{1}{|x - p_j|^2} |u_n|^2 \psi dx = O(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

*En particulier,*

$$(23) \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \iff \mu = 0.$$

2) Localisation de  $\mu$ . — *Le support de la mesure  $\mu \mathbf{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}) \times \mathbb{R}^d}$  est inclus dans*

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi ; |\xi|^2 = 1\}.$$

3) Invariance de  $\mu$ . — *La mesure  $\mu$  vérifie, au sens  $\mathcal{D}'((\mathbb{R}^d_x \setminus \mathcal{P}) \times \mathbb{R}^d_\xi)$ , l'équation*

$$(24) \quad \xi \cdot \partial_x \mu = 0.$$

4) Condition à l'infini. — Soit  $M > 0$  assez grand. La mesure  $\mu$  est nulle près des points rentrants :

$$\text{Inc} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; |x| \geq M, x \cdot \xi \leq 0\}.$$

*Démonstration.* — Pour démontrer le 1), on effectue le produit scalaire de l'équation (17) sur  $u$  avec  $\psi u$  et on obtient, en utilisant le fait que  $f_n$  et  $u_n$  sont bornés dans  $L^2_{\text{loc}}$  :

$$h_n^2 \text{Re} Q(u_n, \psi u_n) = O(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Mais, par une intégration par parties élémentaire,

$$\text{Re} Q(u_n, \psi u_n) = h_n^2 \int |\nabla u_n|^2 \psi dx - h_n^2 \int |u_n|^2 \Delta \psi dx + h_n^2 \int V |u_n|^2 \psi dx,$$

ce qui implique (22), en utilisant l'inégalité de Hardy comme dans le lemme 2.1. On en déduit que  $u_n$  est  $h_n$ -oscillante, c'est-à-dire que pour toute fonction  $\psi$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(25) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{|h_n \xi| \leq 1} |\widehat{\psi u_n}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

L'équivalence (23) est une conséquence facile de (25) (cf. [11]).

Les points 2) et 3) sont élémentaires. On renvoie à [3, (3.18) et (3.24)]. Le point 4), moins immédiat, se déduit de l'étude du laplacien libre. C'est une version micro-locale de la condition de radiation Sommerfeld : le choix du signe + ou - devant  $ih_n \alpha_n$  dans (17), se traduit par une condition sur la direction des oscillations de  $u_n$  à l'infini. Pour la preuve de ce résultat, voir la proposition 3.5 de [3].  $\square$

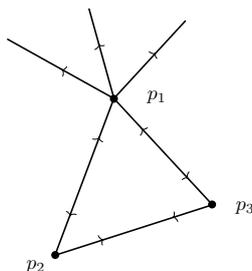


FIGURE 1. Le support de  $\mu$

L'équation (24) est une équation de transport qui implique que la mesure, en dehors des pôles, est invariante le long des courbes intégrales du champ hamiltonien associé à  $\xi \partial_x$ , qui sont de la forme  $\{(x_0 + s\xi_0, \xi_0); s \in ]a, b[ \}$ . Il n'y a pas de pôle dans [3], et le point 4) implique donc, avec cette propriété d'invariance de

la mesure et une hypothèse de non-capture qui dit que toute courbe intégrale du champ hamiltonien passe dans l'ensemble Inc, que la mesure  $\mu$  est nulle. Ceci montre, la suite  $(u_n)$  étant  $h_n$ -oscillante, qu'elle tend vers 0 dans  $L^2_{\text{loc}}$ , contredisant ainsi l'hypothèse (18).

Dans notre cas, la stratégie de preuve est la même, mais l'argument précédent ne fonctionne pas pour les trajectoires passant par  $\mathcal{P}$ . L'invariance de la mesure et le point 4) de la proposition 3.3 impliquent seulement que le support de  $\mu$  est inclus dans la réunion des rayons reliant les pôles et des rayons sortants partant de chacun de ces pôles (cf. figure 1).

Ces derniers rayons sont les plus faciles à éliminer, par un argument de « conservation de l'énergie » exprimé dans la proposition 3.4 : si le support de la mesure  $\mu$  ne contient aucun rayon rentrant dans un certain compact, il ne peut pas non plus contenir de rayon sortant de ce compact.

PROPOSITION 3.4. — Soient  $R_1, R_2$ , vérifiant  $0 < R_1 < R_2$  et tels que  $\chi$  et  $V$  soient nuls sur  $\{|x| \geq R_1\}$ . Supposons

$$(26) \quad \text{supp } \mu \cap \{R_1 \leq |x| \leq R_2\} \subset \{x \cdot \xi > 0\}$$

ou

$$(26') \quad \text{supp } \mu \cap \{R_1 \leq |x| \leq R_2\} \subset \{x \cdot \xi < 0\}.$$

Alors  $\mu$  est nulle sur  $\{|x| \geq R_1\}$ .

Démonstration. — Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , radiale, telle que

$$r \geq R_2 \implies \varphi(r) = 1, \quad r \leq R_1 \implies \varphi(r) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \geq 0.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Im} \left( (-h_n^2 \Delta u_n - u_n + i h_n \alpha_n u_n), \varphi u_n \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \text{Im} h_n \int h_n \nabla \varphi \cdot \nabla u_n \bar{u}_n dx + h_n \alpha_n \int |u_n|^2 \varphi dx. \end{aligned}$$

Donc d'après (20),

$$(27) \quad \text{Im} \int h_n \nabla \varphi \cdot \nabla u_n \bar{u}_n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite  $u_n$  est  $h_n$ -oscillante, on a donc, en se donnant une fonction  $\psi$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , à valeurs réelles et valant 1 près de 0,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} \int h_n \nabla \varphi \cdot \nabla u_n \bar{u}_n dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} \int h_n \nabla \varphi \cdot \nabla u_n \psi(R^{-1} h_n D) \bar{u}_n dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} \int \psi(R^{-1} h_n D) (\nabla \varphi \cdot h_n \nabla u_n) \bar{u}_n dx \\ &= \langle \mu, \nabla \varphi(x) \cdot \xi \rangle. \end{aligned}$$

On déduit de (27) que cette dernière quantité est nulle. Mais d'après l'hypothèse (26) ou (26'),  $\nabla \varphi(x) \cdot \xi$  a un signe constant sur le support de  $\mu$ . La positivité de  $\mu$  montre alors qu'elle est nulle sur l'ensemble

$$\{\nabla \varphi(x) \cdot \xi \neq 0\},$$

ce qui implique la nullité de  $\mu$  sur la couronne  $\{d\varphi/dr \neq 0\}$ , et donc par invariance sur  $\{|x| \geq R_1\}$ .  $\square$

Il nous reste à montrer que  $\mu$  ne charge pas les pôles et s'annule le long des rayons reliant ces pôles. Le premier point ne nécessite pas l'hypothèse (11) et est traité dans les deux prochaines parties. Dans le cas d'un seul pôle, on en déduit immédiatement la contradiction recherchée. Le deuxième point est traité dans la partie 3.4 où on a besoin de toutes les hypothèses (7)–(12) sur  $V$ .

**3.2. Élimination des petites harmoniques sphériques près d'un pôle.**— D'après le paragraphe 3.1, la projection spatiale du support de la mesure  $\mu$  est incluse dans l'ensemble formé des  $N$  pôles et des  $\frac{1}{2}N(N-1)$  segments les reliant. On cherche ici à étudier le comportement de  $\mu$  au voisinage d'un pôle  $p_j$ . On translate le repère pour prendre  $p_j$  comme origine et on se place en coordonnées sphériques :

$$r = |x| \in ]0, +\infty[, \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1}.$$

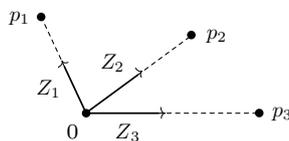


FIGURE 2. Les vecteurs  $Z_j$

Notons  $\mathcal{P}'_0$  l'ensemble des pôles différents de 0 dans ce nouveau repère et  $Z_j$  les directions sortantes :

$$Z_j = \frac{p_j}{|p_j|}, \quad p_j \in \mathcal{P}'_0.$$

La mesure au voisinage de  $x = 0$  se concentre (sauf peut-être en  $x = 0$ ), sur  $\{|\xi| = 1\}$ , sur chacun des segments partant de 0 dans les directions  $Z_j$ . Elle est aussi invariante par le flot hamiltonien en dehors de 0. On en déduit

$$(28) \quad \langle \mathbf{1}_{x \neq 0} \mu, a \rangle = \sum_{p_j \in \mathcal{P}'_0} \int_0^{+\infty} (\lambda_i^+ a(x = tZ_i, \xi = Z_i) + \lambda_i^- a(x = tZ_i, \xi = -Z_i)) dt,$$

où  $a \in C_0^\infty(\{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq \ell\} \times \mathbb{R}_\xi^d)$  et les  $\lambda_i^+, \lambda_i^-$  sont, du fait de la positivité de  $\mu$ , des constantes positives.

Décomposons  $u$  et  $f$  en harmoniques sphériques

$$(29) \quad u_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{kn}(r) e_k(\theta), \quad f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_{kn}(r) e_k(\theta),$$

où les  $e_k$  sont les fonctions propres du laplacien sur la sphère, qui forment une base hilbertienne de  $L^2(S^{d-1})$  telle que

$$e_k \in C^\infty(S^{d-1}), \quad -\Delta_{S^{d-1}} e_k = \nu_k^2 e_k, \\ \nu_{k+1} \geq \nu_k \geq \nu_0 = 0, \quad \nu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Fixons un entier naturel  $\tilde{\nu}$ . On sépare les petites et les grandes harmoniques sphériques de  $u$  et de  $f$  :

$$(30) \quad \begin{aligned} u_n &= u_{pn} + u_{gn}, & u_{pn} &:= \sum_{\nu_k \leq \tilde{\nu}} u_{kn} e_k, & u_{gn} &:= \sum_{\nu_k > \tilde{\nu}} u_{kn} e_k, \\ f_n &= f_{pn} + f_{gn}, & f_{pn} &:= \sum_{\nu_k \leq \tilde{\nu}} f_{kn} e_k, & f_{gn} &:= \sum_{\nu_k > \tilde{\nu}} f_{kn} e_k. \end{aligned}$$

On notera  $\mu_p$  (respectivement  $\mu_g$ ) la mesure semi-classique associée près de 0 à la suite  $(u_{pn})_n$  (respectivement  $(u_{gn})_n$ ) et à la suite d'échelle  $(h_n)_n$ . Par un argument élémentaire d'orthogonalité, l'équation (17) étant radiale au voisinage du pôle, les deux suites vérifient près de 0, cette même équation (en remplaçant  $f_n$  par  $f_{gn}$  ou  $f_{pn}$ ), et elles sont donc toutes les deux  $h_n$ -oscillantes.

L'intérêt de cette décomposition est que pour étudier  $u_{pn}$ , on est ramené à un nombre fini d'équations différentielles ordinaires, et que l'opérateur  $P$  est « très » positif près de 0 lorsqu'il agit sur les grandes harmoniques sphériques qui forment  $u_{gn}$ . Dans ce paragraphe, on montre que les petites harmoniques sphériques ne jouent aucun rôle. L'étude de  $\mu_g$  se fera dans les deux paragraphes suivants.

PROPOSITION 3.5. — *Sous les hypothèses (7)–(10) et (12), la mesure  $\mu_p$  est nulle et les mesures  $\mu$  et  $\mu_g$  sont égales.*

*Démonstration.* — On commence par démontrer :

LEMME 3.6. — *La mesure  $\mu_p$  ne charge pas 0.*

*Preuve du lemme 3.6.* — On considère la mesure  $\mu_k$  associée à la suite  $h_n$ -oscillante  $(u_{kn}e_k)_n$ . Puisque  $u_{pn}$  est la somme d'un nombre fini de  $u_{kn}e_k$ , il suffit de montrer le lemme sur chaque  $\mu_k$ . On fixe donc  $k \geq 0$ . On a, en notant ' la dérivée par rapport à  $r$  :

$$(31) \quad -h_n^2 u_{kn}'' + h_n^2 \frac{d-1}{r} u_{kn}' + h_n^2 \left( V + \frac{\nu_k^2}{r^2} \right) u_{kn} - (1 - ih_n \alpha_n) u_{kn} = h_n f_{kn}.$$

Posons

$$\begin{aligned} u_{kn}(r) &= r^{\frac{1}{2}(d-1)} v_{kn}(r), & f_{kn}(r) &= r^{\frac{1}{2}(d-1)} g_{kn}(r), \\ W_k(r) &:= V(r) + \frac{\nu_k^2}{r^2} + \frac{d^2 - 4d + 3}{4r^2}. \end{aligned}$$

On a  $|W_k(r)| \leq C_1/r^2$  et

$$(32) \quad S_k v_{kn} = h_n g_{kn}, \quad S_k := -h_n^2 \frac{d^2}{dr^2} + h_n^2 W_k - (1 - ih_n \alpha_n).$$

Dans cette démonstration, on ne précise pas la dépendance éventuelle en  $k$  des constantes (qui sont bien sûr indépendantes de  $n$ ),  $k$  étant fixé de bout en bout. Il suffit de montrer

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_1 > 0, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{r_1} |v_{kn}|^2 dr \leq \varepsilon.$$

Soit  $\varepsilon$  strictement positif. D'après (22),

$$\exists C_2 > 0, \forall n, \quad \int_0^{r_0} \frac{h_n^2}{r^2} |v_{kn}|^2 dr \leq C_2.$$

Soit  $m > 0$ . On a

$$(33) \quad \int_0^{mh_n} |v_{kn}(r)|^2 dr \leq m^2 \int_0^{mh_n} \frac{h_n^2}{r^2} |v_{kn}|^2 dr \leq C_2 m^2 \leq \varepsilon,$$

en choisissant  $m$  assez petit pour que la dernière inégalité soit vérifiée. Il nous reste à majorer la norme  $L^2$  de  $v_{kn}$  dans la zone  $\{r > mh_n\}$ . On introduit

$$E_{kn}(r) := |v_{kn}(r)|^2 + |h_n v_{kn}'(r)|^2,$$

qui est dérivable, de dérivée

$$\begin{aligned}
 E'_{kn}(r) &= 2 \operatorname{Re}(v'_{kn} \bar{v}_{kn} + h_n^2 v'_{kn} \bar{v}''_{kn}) \\
 &= 2 \operatorname{Re}(h_n^2 W_k v'_{kn} \bar{v}_{kn} - i \alpha_n v'_{kn} \bar{v}_{kn} - h_n \chi v'_{kn} \bar{\mathbf{g}}_{kn}), \\
 |E'_{kn}(r)| &\leq \left( \frac{C_1 h_n}{r^2} + \alpha_n \right) |h_n v'_{kn} v_{kn}| + |h_n v'_{kn} \mathbf{g}_{kn}|, \\
 (34) \quad -E'_{kn}(r) &\leq \left( \frac{C_1 h_n}{r^2} + 1 \right) E_{kn}(r) + |\mathbf{g}_{kn}(r)|^2,
 \end{aligned}$$

dès que  $n$  est assez grand pour que  $\alpha_n$  soit inférieur à 1. On a obtenu la deuxième ligne par l'équation (32) sur  $v_{kn}$ . Majorons  $E_{kn}$  près de 0 par le lemme de Gronwall. Pour cela, on fixe deux réels strictement positifs  $t$  et  $\rho$ . Il découle de (34)

$$\forall r \geq t, \quad -\frac{d}{dr} \left( e^{\int_t^r (C_1 h_n/s^2 + 1) ds} E_{kn}(r) \right) \leq e^{\int_t^r (C_1 h_n/s^2 + 1) ds} |\mathbf{g}_{kn}(r)|^2.$$

Soit, en intégrant cette inégalité entre  $t$  et  $t + \rho$ , avec  $t \geq m h_n$

$$E_{kn}(t) \leq e^{C_1/m+\rho} \kappa_k^2(n) + e^{C_1/m} E_{kn}(t+\rho), \quad \kappa_k^2(n) := \int_0^\ell |\mathbf{g}_{kn}(r)|^2 dr \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On intègre maintenant par rapport à la mesure  $dt$  entre  $m h_n$  et un réel positif  $r_1$ . On obtient

$$(35) \quad \int_{m h_n}^{r_1} E_{kn}(t) dt \leq \underbrace{e^{C_1/m+\rho} r_1 \kappa_k^2(n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + e^{C_1/m+\rho} \int_{m h_n}^{r_1} E_{kn}(t + \rho) dt.$$

Fixons  $\rho$  strictement compris entre 0 et  $\ell$ . On a

$$\begin{aligned}
 \int_\rho^{r_1+\rho} E_{kn}(r) dr &= \int_\rho^{r_1+\rho} |\mathbf{u}_{kn}(r)|^2 r^{d-1} dr \\
 &\quad + h_n^2 \int_\rho^{r_1+\rho} |\mathbf{u}'_{kn}(r)|^2 r^{d-1} dr + O(h_n^2), \quad n \rightarrow +\infty \\
 (36) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_\rho^{r_1+\rho} E_{kn}(r) dr &\leq 2\mu_k(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}).
 \end{aligned}$$

On a obtenu cette dernière ligne en utilisant que  $|\xi|$  vaut 1 sur le support de  $\mu \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}$ , et donc sur celui de  $\mu_k \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}$ . La forme de la mesure  $\mu_p$  près de 0 montre que le terme de droite de cette inégalité peut être choisi plus petit que  $e^{-C_1/m} \varepsilon$ , en prenant  $r_1$  assez petit. En effet, l'orthogonalité des harmoniques sphériques implique

$$\begin{aligned}
 \mu(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}) &= \mu_p(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}) + \mu_g(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}) \\
 &\geq \mu_p(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}),
 \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $r_1$  tend vers 0 d'après l'expression (28) de la mesure. Finalement en utilisant (36) avec un tel  $r_1$ , ainsi que (33) et (35), on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{r_1} E_{kn}(r) dr \leq 2\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.6.  $\square$

Pour conclure la preuve de la proposition 3.5, on va exploiter le fait que les fonctions  $u_{pn}$ , sommes d'un nombre fini d'harmoniques sphériques sont, de notre point de vue, quasiment radiales : on étudie les oscillations des  $u_n$  à l'échelle  $1/h_n$ , alors que les variations tangentielle des  $u_{pn}$  sont d'un ordre constant. Les fonctions  $u_{pn}$  ne peuvent donc pas contribuer, en dehors de 0 (qui est de toutes façons exclu par le lemme précédent), à la mesure  $\mu$ , dont la partie absolument continue par rapport à la mesure  $d\theta$  est nulle.

Fixons un  $r_0$  proche de 0. Les suites  $(u_n)$ ,  $(u_{gn})$  et  $(u_{pn})$ , vérifient deux propriétés d'« orthogonalités ».

- La première est simplement l'orthogonalité dans  $L^2$  des harmoniques sphériques, qui implique  $(u_{gn}, u_{pn})_{L^2(\{r \leq r_0\})} = 0$ . D'où

$$(37) \quad \begin{cases} |u_n|_{L^2(\{r \leq r_0\})}^2 = |u_{pn}|_{L^2(\{r \leq r_0\})}^2 + |u_{gn}|_{L^2(\{r \leq r_0\})}^2, \\ \mu(\{r \leq r_0\}) = \mu_g(\{r \leq r_0\}) + \mu_p(\{r \leq r_0\}). \end{cases}$$

- La deuxième est le fait que les mesures  $\mu \mathbf{1}_{\{|x| < 2r_0\}}$  et  $\mu_p \mathbf{1}_{\{|x| < 2r_0\}}$  sont mutuellement singulières. La première de ces mesures est portée par l'ensemble  $\mathcal{S} = S \times \mathbb{R}_\xi^d$  avec  $S = \{sZ_j, s \in [0, 2r_0[, p_j \in \mathcal{P}'_0\}$ . Nous allons démontrer que  $\mu_p \mathbf{1}_{\{|x| < 2r_0\}}$  ne charge pas cet ensemble. Soit  $\varepsilon > 0$ . La mesure  $\mu_p$  ne charge pas 0; donc si  $\rho$  est assez petit,

$$(38) \quad \mu_p(\{|x| \leq \rho\}) \leq \varepsilon.$$

D'autre part,  $u_p$  ne peut pas se concentrer sur un rayon. En effet, si  $Z$  est un point de  $S^{d-1}$ ,

$$(39) \quad \left\{ \int_{\substack{|x/|x| - Z| \leq \eta \\ |x| \leq 2r_0}} |u_{pn}(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \leq \sum_{k, \nu_k \leq \bar{\nu}} \left\{ \int_{\substack{|x/|x| - Z| \leq \eta \\ |x| \leq 2r_0}} |u_{kn}(|x|) e_k(x/|x|)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \leq \sum_k \left\{ \int_0^{2r_0} |u_{kn}(r)|^2 r^{d-1} dr \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{|\theta - Z| \leq \eta} |e_k(\theta)|^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier facteur est majoré par une constante indépendante de  $n$ , et le deuxième, indépendant de  $n$ , tend vers 0 lorsque  $\eta$  tend vers 0. On obtient

finalement, avec (38) et (39), que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\mathcal{S}$  tel que

$$\mu_{\mathfrak{p}}(V) \leq \varepsilon,$$

et donc que  $\mu_{\mathfrak{p}}\mathbf{1}_{\mathcal{S}} = 0$ . Il est facile de montrer, dans ces conditions que pour tout symbole  $a(x, \xi) \in C_0^\infty(\{|x| < 2r_0\} \times \mathbb{R}^d)$  et pour toute fonction régulière  $\varphi$  tronquant autour de 0, on a

$$(40) \quad (a(x, h_n D)\varphi u_{\mathfrak{p}n}, u_n)_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(il suffit de diviser le produit scalaire entre un petit voisinage de  $S$ , sur lequel la limite supérieure des normes  $L^2$  de  $u_{\mathfrak{p}n}$  est aussi petite que l'on veut, et son complémentaire, sur lequel la norme  $L^2$  de  $u_{\mathfrak{g}n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini). Finalement, l'égalité  $u_{\mathfrak{g}} = u - u_{\mathfrak{p}}$  et (40) impliquent

$$(41) \quad \mu_{\mathfrak{g}}(\{r \leq r_0\}) = \mu(\{r \leq r_0\}) + \mu_{\mathfrak{p}}(\{r \leq r_0\}).$$

D'après (37) et (41),  $\mu_{\mathfrak{p}}(\{r \leq r_0\})$  est nulle. La proposition 3.5 est démontrée.  $\square$

### 3.3. Absence de concentration sur le pôle

PROPOSITION 3.7. — *Sous les hypothèses (7)–(10) et (12), la mesure  $\mu$  ne charge pas les pôles.*

COROLLAIRE 3.8. — *Sous les mêmes hypothèses et si  $N = 1$ ,  $\mu$  est nulle.*

En effet, dans ce dernier cas, la projection en  $x$  du support de  $\mu$  est incluse dans le pôle d'après le paragraphe 3.1 (propositions 3.3 et 3.4). L'étude du cas  $N \geq 2$  est complétée dans la partie 3.4.

On reprend les notations de la partie 3.2 pour montrer la proposition 3.7. On se place encore au voisinage du pôle  $p_{j_0} = 0$  et on considère la décomposition (30) en petites et grandes harmoniques sphériques :  $u = u_{\mathfrak{p}} + u_{\mathfrak{g}}$ . La mesure  $\mu_{\mathfrak{p}}$  étant nulle, il suffit de montrer que la mesure  $\mu_{\mathfrak{g}}$  ne charge pas les pôles. On va en fait montrer un résultat plus fort :

LEMME 3.9. — *Soit  $t \in ]0, 1[$ . Si  $\tilde{\nu}$  est choisi assez grand,*

$$(42) \quad \int_{|x| \leq 1} |x|^{-t} \cdot |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx = O(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* — On note  $r^{\frac{1}{2}(d-1)}v_{kn} = u_{kn}$  comme dans la démonstration du lemme 3.6. Fixons  $n$  et  $k$ . Pour justifier les intégrations par parties qui vont suivre, on doit connaître le comportement près de 0 de  $v_{kn}$  et de ces dérivées. On notera

$$F(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} G(r) \iff \exists \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall r \in ]0, \varepsilon[, |F(r)| \leq A|G(r)|.$$

On a choisi les fonctions  $f_n$  nulles près de chaque pôle. La fonction  $\mathbf{v}_{kn}$  est donc, au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle en  $y : S_k y = 0$  (où  $S_k$  est l'opérateur différentiel de degré 2 défini par (32)), qui admet une famille libre de solutions  $\{y_+, y_-\}$  telle que

$$(43) \quad \left| \left( \frac{d}{dr} \right)^j y_+(r) \right| \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{1-j+\sigma_k}, \quad j = 0, 1, 2, \quad y_-(r) \underset{r \rightarrow 0}{\gtrsim} r^{1-\sigma_k},$$

avec  $\sigma_k := \sqrt{(\frac{1}{2}d - 1)^2 + a + \nu_k^2}$ . Admettons pour l'instant cette affirmation (conséquence du lemme 3.11 plus loin). La fonction  $u_n$  étant dans le domaine de  $P$ ,  $r^{-1}\mathbf{u}_{kn}$  appartient à  $L^2(r^{d-1}dr)$  et donc  $r^{-1}\mathbf{v}_{kn}$  à  $L^2(dr)$ . On en déduit que la composante de  $\mathbf{v}_{kn}$  selon  $y_-$  est nulle et que  $\mathbf{v}_{kn}$  vérifie

$$(44) \quad \left| \left( \frac{d}{dr} \right)^j \mathbf{v}_{kn}(r) \right| \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{1-j+\sigma_k}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Cette majoration n'est uniforme ni en  $n$ , ni en  $k$ , mais elle justifie toutes les intégrations par parties qui suivent grâce au lemme élémentaire suivant :

LEMME 3.10. — Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions régulières de la variable  $r > 0$ , nulles près de l'infini, telles que pour des réels  $\sigma$  et  $\tau$  vérifiant  $\sigma + \tau > 0$ ,

$$\left| \left( \frac{d}{dr} \right)^j F(r) \right| \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{\sigma-j}, \quad \left| \left( \frac{d}{dr} \right)^j G(r) \right| \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{\tau-j}, \quad j = 0, 1.$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{dF}{dr} G dr = - \int_0^{+\infty} F \frac{dG}{dr} dr.$$

Notons  $\mathbf{w}_{kn} = e^{ir/h}\mathbf{v}_{kn}$  et posons

$$\beta_k^2(n) := \int_0^\ell |\mathbf{w}_{kn}|^2 dr, \quad \gamma_k^2(n) := \int_0^\ell h_n^2 |\mathbf{w}'_{kn}|^2 dr, \quad \kappa_k^2(n) := \int_0^\ell |\mathbf{g}_{kn}|^2 dr,$$

$$M_k^2(n) := \gamma_k^2(n) + (1 + h_n^2 \nu_k^2) \beta_k^2(n) + \kappa_k^2(n).$$

Les suites  $(u_n)$ ,  $(h_n \nabla u_n)$  et  $(h_n/r \cdot u_n)$  sont bornées dans  $L^2_{\text{loc}}$ , et  $(f_n)$  tend vers 0 dans  $L^2$ . On a donc

$$(45) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \kappa_k^2(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} M_k^2(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1).$$

L'équation vérifiée par  $\mathbf{w}_{kn}$  pour  $r \leq \ell$  s'écrit

$$(46) \quad T_k \mathbf{w}_{kn} = h_n e^{ir/h_n} \mathbf{g}_{kn},$$

avec

$$T_k := e^{ir/h_n} S_k e^{-ir/h_n} = -h_n^2 \frac{d^2}{dr^2} + h_n^2 \frac{b_k}{r^2} + h_n^2 V + ih_n \left( \alpha_n + 2 \frac{d}{dr} \right),$$

$$b_k := \nu_k^2 + \frac{d^2 - 4d + 3}{4}.$$

On a

$$\nu_k \geq \tilde{\nu} \implies \sigma_k \geq \tilde{\sigma}, \quad \tilde{\sigma} := \sqrt{\left(\frac{1}{2}d - 1\right)^2 + a + \tilde{\nu}^2}.$$

On se donne une fonction positive  $\varphi$  de  $C_0^\infty([0, l])$  valant 1 près de 0. Le réel  $t \in ]0, 1[$  étant fixé, on choisit  $\tilde{\nu}$  tel que

$$(47) \quad 2\tilde{\sigma} - t > 0.$$

On commence par montrer que si  $\tilde{\nu}$  est assez grand

$$(48) \quad \int h_n^2 |w'_{kn}|^2 r^{-t} \varphi dr + \int h_n^2 |w_{kn}|^2 r^{-2-t} \varphi dr = O(M_k^2(n)),$$

où on a noté

$$X_k(n) = O(Y_k(n)) \iff \exists C > 0, \forall k, \nu_k \geq \tilde{\nu}, \forall n, \quad |X_k(n)| \leq C |Y_k(n)|.$$

La constante  $C$  dépend donc éventuellement de  $t$  mais ni de  $n$ , ni de  $k$ , moyennant la condition  $\nu_k \geq \tilde{\nu}$ . On a (dans tous les calculs qui suivent on omet les indices  $n$  pour alléger les notations, et on note  $\int$  pour  $\int_0^{+\infty}$ ) :

$$(49) \quad \overbrace{\operatorname{Re} \int T_k w_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi dr}^I$$

$$= - \operatorname{Re} h^2 \underbrace{\int w'_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi dr}_{I_1} + \operatorname{Re} h^2 b_k \underbrace{\int w_k \bar{w}'_k r^{-1-t} \varphi dr}_{I_2}$$

$$+ \operatorname{Re} h^2 \underbrace{\int V w_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi dr}_{I_3} + \operatorname{Im} h \alpha \underbrace{\int w_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi dr}_{I_4}.$$

Remarquons que par les estimations (44), et l'hypothèse (47) sur le paramètre  $t$ , toutes ces intégrales sont absolument convergentes. On a

$$I_1 = -\frac{1}{2} h^2 \int \frac{d}{dr} |w'_k|^2 r^{1-t} \varphi dr, \quad |w'_k|^2 \lesssim r^{2\sigma_k-1}, \quad \frac{d}{dr} |w'_k|^2 \lesssim r^{2\sigma_k-2}, \quad r \rightarrow 0.$$

D'après le lemme 3.10 et la condition  $2\tilde{\sigma} - t > 0$ , on peut intégrer par parties :

$$(50) \quad I_1 = \underbrace{\frac{(1-t)}{2} h^2 \int |w'_k|^2 r^{-t} \varphi dr}_{I_{1a}} + \underbrace{\frac{1}{2} h^2 \int |w'_k|^2 r^{1-t} \varphi' dr}_{O(\gamma_k^2(n))}.$$

Pour majorer le dernier terme on a utilisé que la dérivée de  $\varphi$  est nulle près de 0. En raisonnant de la même manière pour justifier les intégrations par parties, on obtient

$$(51) \quad \begin{aligned} I_2 &= \frac{h^2}{2} b_k \int \frac{d}{dr} |w_k|^2 r^{-1-t} \varphi dr \\ I_2 &= \underbrace{\frac{(1+t)}{2} h^2 b_k \int |w_k|^2 r^{-2-t} \varphi dr}_{I_{2a}} - \underbrace{\frac{h^2}{2} b_k \int |w_k|^2 r^{-1-t} \varphi' dr}_{O(h^2(1+\nu_k^2)\beta_k^2)}. \end{aligned}$$

Par la majoration (10) sur  $V$ , on a

$$(52) \quad \begin{aligned} |I_3| &\leq h^2 \int \frac{C_V}{r^2} |w_k| \cdot |w'_k| r^{1-t} \varphi dr \\ &\leq C_V \left\{ \int \frac{h^2}{r^2} |w_k|^2 r^{-t} \varphi dr \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int h^2 |w'_k|^2 r^{-t} \varphi dr \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ |I_3| &\leq \frac{C_V}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{h^2}{r^2} |w_k|^2 r^{-t} \varphi dr + \varepsilon \int h^2 |w'_k|^2 r^{-t} \varphi dr \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, on a les majorations simples

$$(53) \quad \begin{cases} I_4 = O(\alpha \gamma_k \beta_k), \\ I = \int T_k w_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi dr = \int e^{ir/h} h \mathbf{g}_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi dr = O(\kappa_k \gamma_k). \end{cases}$$

Prenons  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\frac{1}{2}(1-t) > \frac{1}{2}C_V\varepsilon$ , ce qui est possible car  $t < 1$ , puis choisissons  $\tilde{\nu}$  tel que

$$\nu_k \geq \tilde{\nu} \implies b_k > \frac{C_V}{2\varepsilon},$$

ce qui ne pose pas de problème non plus car

$$b_k = \nu_k^2 + \frac{d^2 - 4d + 3}{4} \geq \tilde{\nu}^2 + \frac{d^2 - 4d + 3}{4}.$$

Les deux termes principaux de (50) et (51),  $I_{1a}$  et  $I_{2a}$  dominent donc  $I_3$  et on obtient, par (49), (50), (51), (52), (53), l'inégalité (48).

On va maintenant en déduire, en utilisant à nouveau l'équation (46) sur  $w_k$  la conclusion du lemme 3.9. On a

$$(54) \quad \begin{aligned} J &:= \operatorname{Im} \int T_k w_k \bar{w}_k r^{1-t} \varphi dr \\ &= \underbrace{-h^2 \operatorname{Im} \int w'_k \bar{w}_k r^{1-t} \varphi dr}_{J_1} + \underbrace{\alpha h \int |w_k|^2 r^{1-t} \varphi dr}_{J_2} + \underbrace{2h \operatorname{Re} \int w'_k \bar{w}_k r^{1-t} \varphi dr}_{J_3}. \end{aligned}$$

En remarquant (les intégrations par parties se justifient comme précédemment) :

$$\begin{aligned}
 J &= O(h\kappa_k\beta_k), \\
 J_1 &= 2 \operatorname{Im}(1-t)h^2 \int \mathbf{w}'_k \overline{\mathbf{w}}_k r^{-t} \varphi \, dr + O(h\beta_k\gamma_k), \\
 |J_1| &\leq Ch \left\{ \int h^2 |\mathbf{w}'_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int |\mathbf{w}_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}^{\frac{1}{2}} + O(h\beta_k\gamma_k), \\
 J_2 &= O(h\beta_k^2), \\
 J_3 &= h \int \frac{d}{dr} |\mathbf{w}_k|^2 r^{1-t} \varphi \, dr = (t-1)h \int |\mathbf{w}_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr + O(h\beta_k^2).
 \end{aligned}$$

En utilisant (48) pour majorer  $J_1$ , on déduit de (54) :

$$\int |\mathbf{w}_k|^2 r^{-t} \, dr = O(M_k^2).$$

En repassant à  $\mathbf{u}_k = e^{-ir/h} \cdot r^{\frac{1}{2}(d-1)} \mathbf{w}_k$ , puis en sommant sur tous les  $k$  tels que  $\nu_k \geq \tilde{\nu}$ , et en utilisant la majoration (45) de la somme des  $M_k^2$ , on obtient exactement (42). □

Il reste à démontrer l'affirmation (43) sur les solutions de l'équation  $S_k y = 0$ .

LEMME 3.11. — Soient  $\ell > 0$ ,  $q_1, q_2 \in L_{\text{loc}}^\infty(]0, \ell], \mathbb{R})$  tels que

$$(55) \quad q_1(r) \geq \frac{b}{r^2}, \quad b > -\frac{1}{4},$$

$$(56) \quad |q_j(r)| \leq \frac{C}{r^2}, \quad j = 1, 2.$$

Alors l'équation différentielle

$$(57) \quad y''(r) = (q_1(r) + iq_2(r))y(r), \quad r \in ]0, \ell],$$

admet une base de solutions  $(y_+, y_-)$  telle que

$$(58) \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^j y_+(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{1/2 + \sqrt{B} - j}, \quad j = 0, 1, 2,$$

$$(59) \quad y_-(r) \underset{r \rightarrow 0}{\gtrsim} r^{1/2 - \sqrt{B}}.$$

Démonstration. — Posons

$$r = e^{-s}, \quad y(r) = e^{-s/2} z(s) = r^{\frac{1}{2}} z(-\log r).$$

L'équation différentielle (57) et les hypothèses (55) et (56) s'écrivent

$$(57') \quad z'' = \underbrace{\left(\frac{1}{4} + e^{-2s}q_1(e^{-s})\right)}_{Q_1(s)} z + i \underbrace{e^{-2s}q_2(e^{-s})}_{Q_2(s)} z, \quad s \geq L := -\log \ell,$$

$$(55') \quad Q_2(s) \geq B := b + \frac{1}{4} > 0,$$

$$(56') \quad |Q_j(s)| \leq C, \quad j = 1, 2.$$

On s'inspire de [15, chap. II, ex. 14]. Soit  $z$  une solution de (55') et  $Z = |z|^2$ . Alors, en utilisant (57') et (55'), on obtient

$$(60) \quad \begin{cases} Z'(s) = 2 \operatorname{Re}(z(s)\overline{z}'(s)), \\ Z''(s) = 2|z'(s)|^2 + 2Q_1(s)|z(s)|^2 \geq 2\sqrt{B}\left(\frac{1}{\sqrt{B}}|z'(s)|^2 + \sqrt{B}|z(s)|^2\right), \\ Z''(s) \geq 2\sqrt{B}Z'(s). \end{cases}$$

On commence par construire la solution  $z_-$  correspondant à  $y_-$ , en choisissant la solution de (57') telle que  $z_-(L) = z'_-(L) = 1$ . Il est facile de voir, avec (60) que  $Z_-$  et  $Z'_-$  restent supérieur à 1 et croissantes. Par le lemme de Gronwall, (60) implique

$$(61) \quad \begin{cases} Z'_-(s) \geq e^{2\sqrt{B}(s-L)} Z'_-(L), \\ Z_-(s_0) \geq Z'_-(L) \frac{1}{2\sqrt{B}} e^{2\sqrt{B}(s_0-L)} + Z_-(L), \\ z_-(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\gtrsim} e^{\sqrt{B}s}, \end{cases}$$

ce qui démontre la condition (59) sur  $y_-(r) = r^{\frac{1}{2}} z_-(-\log r)$ . On construit ensuite  $z_+$ , comme la solution de (57') définie par

$$z_+(s) := z_-(s) \int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{z_-^2(\sigma)}.$$

On a

$$|z_+(s)| \leq |z_-(s)| \int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{|z_-(\sigma)|^2} \leq \int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{|z_-(\sigma)|},$$

car  $|z_+|$  est croissante puisque  $Z_+$  l'est. Donc, grâce à (61),

$$(62) \quad z_+(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\lesssim} e^{-\sqrt{B}s},$$

et par l'équation (57') et les hypothèses sur  $Q_1$  et  $Q_2$ , la même propriété est vraie pour la dérivée seconde de  $z_+$ . Il est bien connu que cela implique aussi (62) pour la dérivée première de  $z_+$ . Les estimations (58) sur  $y_+(r) = r^{\frac{1}{2}} z_+(-\log(r))$  en découlent immédiatement.  $\square$

**3.4. Fin de la démonstration dans le cas multi-polaire.** — Dans cette partie, on achève la preuve du théorème dans le cas  $N \geq 2$  en montrant :

PROPOSITION 3.12. — *Supposons (7)–(12). Soient  $p \in \mathcal{P}$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_p$  l'ensemble des pôles  $p'$ , distincts de  $p$ , et tels que  $\mu$  ne soit pas nulle au voisinage de  $p'$ . On suppose que  $\mu$  n'est pas nulle près de  $p$ . Alors  $p$  appartient à l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}_p$ .*

Montrons d'abord comment la proposition 3.12 permet de conclure. Considérons pour cela  $\tilde{\mathcal{P}}$  l'ensemble des pôles près desquels la mesure n'est pas nulle. Supposons  $\tilde{\mathcal{P}}$  non vide. Le bord de l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}$  est alors un polygone dont les sommets sont des points de  $\tilde{\mathcal{P}}$ . En appliquant la proposition 3.12 à un tel sommet, on obtient une contradiction qui montre que  $\tilde{\mathcal{P}}$  est vide et donc que  $\mu$  est nulle, ce qui prouve le théorème 1.

*Démonstration de la proposition 3.12.* — On suppose encore  $p = 0$  et on reprend les notations des deux parties précédentes. Puisque d'après la proposition 3.7,  $\mu$  ne charge pas 0, la formule (28) peut se réécrire :

$$(28') \quad \langle \mu_{\mathfrak{g}}, a \rangle = \langle \mu, a \rangle = \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \int_0^{+\infty} (\lambda_i^+ a(x = tZ_i, \xi = Z_i) + \lambda_i^- a(x = tZ_i, \xi = -Z_i)) dt,$$

où  $a \in C_0^\infty(\{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq \ell\} \times \mathbb{R}_\xi^d)$  et les  $\lambda_i^\pm$  sont des constantes positives. On commence par démontrer, près de 0, l'équivalent du lemme 3.4 d'invariance globale :

LEMME 3.13. — *Les rayons rentrant en 0 et sortant de 0 portent la même masse :*

$$(63) \quad \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_j^- = \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_j^+ =: \Lambda.$$

*Démonstration.* — On se donne une fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\{|x| < \ell\})$ , positive, radiale, décroissante en  $r$  et valant 1 près de 0. On a

$$S_n := h_n^{-1} (h_n^2 P u_n - u_n, \varphi u_n)_{L^2} - h_n^{-1} (\varphi u_n, h_n^2 P u_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} S_n &= h_n Q(u_n, \varphi u_n) - Q(\varphi u_n, u_n) = h_n \int (\nabla u_n \cdot \nabla \varphi) \bar{u} dx - h_n \int u_n \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{u}_n dx \\ &= 2i \operatorname{Im} \int h_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \bar{u}_n dx. \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  étant  $h_n$ -oscillante, il est facile de montrer

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2i \operatorname{Im} \langle \mu, i\xi \cdot \nabla \varphi \rangle$$

On en déduit, en utilisant l'expression (28') :

$$0 = \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \int_0^{+\infty} \left( \lambda_i^+ \frac{d\varphi}{dr}(r=t) - \lambda_i^- \frac{d\varphi}{dr}(r=t) \right) dt = - \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_i^+ + \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_i^-. \quad \square$$

On écrit maintenant une variante du lemme 3.9, qui utilise l'hypothèse (11) faite sur la dérivée de  $V$  :

LEMME 3.14. — Soit  $c_d = \frac{1}{4}(d-1)(d-3)$ . Alors

$$(64) \quad \left( c_d + \tilde{\nu} - \frac{C'_V}{2} \right) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{\mathbf{g}n}|^2 dx \leq 2\Lambda.$$

REMARQUE 3.15. — La majoration du lemme 3.14 est similaire à la majoration intermédiaire (48) du lemme 3.9, avec  $t = 1$ , mais on ne peut pas démontrer la majoration correspondante de la dérivée radiale de  $u_{\mathbf{g}}$  (à cause de la constante  $1 - t$  dans (50) qui s'annule lorsque  $t = 1$ ) :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{h_n^2}{|x|} \left| \frac{\partial u_{\mathbf{g}n}}{\partial r} \right|^2 dx < +\infty.$$

De même, on ne peut malheureusement pas aboutir par cette méthode à la conclusion (42) du lemme 3.9 dans le cas  $t = 1$ , c'est à dire montrer

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |x|^{-1} \cdot |u_{\mathbf{g}n}|^2 dx < +\infty.$$

Notons que cette dernière propriété, avec la formule (28') et la non-intégrabilité en 0 de l'application  $r \mapsto 1/r$ , impliquerait directement la nullité de  $\mu$  près de 0.

REMARQUE 3.16. — Le lemme 3.14 correspond au gain d'une demi-puissance de  $r$  par rapport à la borne naturelle

$$\frac{h_n}{r} u_n = O(1) \quad \text{dans } L^2_{\text{loc}}.$$

Dans la suite, la fonction  $h_n^{3/2} r^{-1} u_n$ , jouera, près de 0, un rôle similaire à celui que jouerait une trace dans un problème au bord. On peut comparer le gain de  $r^{-\frac{1}{2}}$  donné par (64) au gain d'une demi-dérivée par rapport aux théorèmes de traces standard obtenu sur les traces d'un problème au bord avec des conditions au bord adéquates (cf. la régularité cachée de la trace de la dérivée normale d'une solution de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet).

*Démonstration du lemme 3.14.* — On se donne  $k$  tel que  $\nu_k \geq \tilde{\nu}$ , et on reprend la démonstration du lemme 3.9, mais avec  $t = 1$ . La formule (49) est encore valable et s'écrit

$$(49') \quad \underbrace{\operatorname{Re} \int T_k \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} \varphi \, dr}_I = - \operatorname{Re} h^2 \underbrace{\int \mathbf{w}''_k \overline{\mathbf{w}'_k} \varphi \, dr}_{I_1} \\ + \underbrace{\operatorname{Re} h^2 b_k \int \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} r^{-2} \varphi \, dr}_{I_2} + \operatorname{Re} h^2 \underbrace{\int V \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} \varphi \, dr}_{I_3} + \operatorname{Im} h \alpha \underbrace{\int \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} \varphi \, dr}_{I_4}.$$

Toutes ces intégrales sont absolument convergentes grâce aux estimations (44). Par des intégrations par parties élémentaires, que l'on justifie encore par le lemme 3.10, on calcule

$$(65) \quad I_1(k, n) = \frac{1}{2} \int h_n^2 |\mathbf{w}'_{kn}|^2 \varphi'(r) \, dr,$$

$$(66) \quad I_2(k, n) = \underbrace{\int h_n^2 b_k |\mathbf{w}_{kn}|^2 r^{-3} \varphi \, dr}_{I_{2a}(k, n)} + \underbrace{\int -\frac{h_n^2 \nu_k^2}{r^2} |\mathbf{w}_{kn}|^2 \varphi'(r) \, dr}_{I_{2b}(k, n)} + O(h_n^2 \beta_k^2(n)),$$

$$I_3(k, n) = -\frac{h_n^2}{2} \int \frac{dV}{dr} |\mathbf{w}_{kn}|^2 \varphi \, dr + O(h_n^2 \beta_k^2(n)),$$

$$(67) \quad |I_3(k, n)| \leq \frac{C'_V}{2} \int \frac{h_n^2}{r^3} |\mathbf{w}_{kn}|^2 \varphi \, dr + O(h_n^2 \beta_k^2(n)),$$

$$(68) \quad I_4(k, n) = O(\alpha_n \gamma_k(n) \beta_k(n)).$$

Notons

$$\mathcal{I}_j(n) := \sum_{\nu_k \geq \tilde{\nu}} I_j(k, n), \quad \mathcal{I}_{2a,b}(n) := \sum_{\nu_k \geq \tilde{\nu}} I_{2a,b}(k, n).$$

En sommant par rapport à l'indice  $k$ , on a facilement les estimations

$$(69) \quad \mathcal{I}_{2a}(n) \geq (\tilde{\nu} + c_d) \int \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{gn}|^2 \varphi \, dx,$$

$$(70) \quad |\mathcal{I}_3(n)| \leq \frac{C'_V}{2} \int \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{gn}|^2 \varphi \, dx + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

$$(71) \quad \mathcal{I}_4(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il reste à étudier  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_{2b}$ , dont on peut calculer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  en utilisant la formule (28'). On a

$$\begin{aligned} e^{-ir/h_n} \cdot r^{-\frac{1}{2}(d-1)} h_n \mathbf{w}'_{kn} &= e^{-ir/h_n} \cdot r^{-\frac{1}{2}(d-1)} h_n \frac{d}{dr} (e^{ir/h_n} \cdot r^{\frac{1}{2}(d-1)} \mathbf{u}_{kn}) \\ &= h_n \mathbf{u}'_{kn} + i \mathbf{u}_{kn} + h_n \frac{d-1}{2r} \mathbf{u}_{kn}. \end{aligned}$$

En sommant par rapport à  $k$ , on obtient

$$(72) \quad \mathcal{I}_1(n) = \frac{1}{2} \int \left| h_n \frac{\partial u_{\mathbf{g}n}}{\partial r} + i u_{\mathbf{g}n} \right|^2 \varphi'(|x|) dx + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Posons

$$\begin{aligned} A &:= h_n \frac{\partial}{\partial r} + i, & \tilde{A} &:= \tilde{\varphi}(x) A \psi(h_n D), \\ \tilde{\varphi} &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), & \tilde{\varphi} &= 1 \text{ sur } \text{supp } \varphi', \\ \psi &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), & \psi(\xi) &= 1 \text{ sur } \{|\xi| = 1\}. \end{aligned}$$

Les suites  $(u_{\mathbf{g}n})$  et  $(h_n \nabla u_{\mathbf{g}n})$  étant  $h_n$ -oscillantes sur le support de  $\varphi'$ , et le support de la mesure  $\mu_{\mathbf{g}}$  étant inclus dans l'ensemble  $\{|\xi| = 1\}$ , on montre facilement les convergences  $L^2$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\text{supp } \varphi'} (\psi(h_n D) u_{\mathbf{g}n}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\text{supp } \varphi'} (\psi(h_n D) \nabla u_{\mathbf{g}n}) = 0.$$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow 0} (\tilde{A} - A) u_{\mathbf{g}n} = 0$  dans  $L^2(\text{supp } \varphi')$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(n) &= \frac{1}{2} (\tilde{A}^* \varphi'(|x|) \tilde{A} u_{\mathbf{g}n}, \tilde{u}_{\mathbf{g}n})_{L^2} + o(1), \\ (73) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_1(n) &= \left\langle \mu, \frac{1}{2} \psi(\xi) \left| i\xi \cdot \frac{x}{|x|} + i \right|^2 \varphi'(|x|) \right\rangle \\ &= \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda_i^+ 2^2 \varphi'(t) dt, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_1(n) &= 2\Lambda, \end{aligned}$$

où aux deux dernières lignes, on a utilisé la formule (28'), la définition (63) de  $\Lambda$  et le fait que  $\varphi(0) = 1$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2b}(n) &= \sum_{\nu_k \geq \bar{\nu}} -\frac{h_n^2}{2} \nu_k^2 \int |\mathbf{w}_{kn}|^2 r^{-2} \varphi'(r) dr = \sum_{\nu_k \geq \bar{\nu}} -\frac{h_n^2}{2} \nu_k^2 \int \frac{1}{|x|^2} |\mathbf{u}_{kn}|^2 \varphi'(|x|) dx \\ &= \int -\frac{h_n^2}{2} |\nabla_T u_{\mathbf{g}n}|^2 \varphi'(|x|) dx \end{aligned}$$

où  $\nabla_T$  désigne le gradient tangentiel

$$\nabla_T U = \nabla U - \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{x}{|x|}.$$

La limite de ce terme, quand  $n$  tend vers l'infini, est donc, par un raisonnement analogue au précédent,

$$(74) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{2b}(n) = \left\langle \mu, \frac{1}{2} \varphi'(|x|) \left| \xi - (x \cdot \xi) \frac{x}{|x|^2} \right|^2 \right\rangle,$$

qui vaut 0 car  $\mu_{\mathfrak{g}}$  est nulle lorsque  $\xi$  n'est pas parallèle à  $x$ . En remarquant

$$\mathcal{I}(n) := \sum_{j=1}^4 \mathcal{I}_j(n) = o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

et en additionnant (69), (70), (71), (73), (74) on obtient (64). □

Introduisons maintenant le réel positif  $\ell_{\mathfrak{g}}$ , défini par

$$\ell_{\mathfrak{g}} := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{r \leq 1} \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx.$$

D'après le lemme précédent, on a, dès que  $\tilde{\nu}$  est assez grand

$$(75) \quad 0 \leq \ell_{\mathfrak{g}} \leq \frac{2\Lambda}{c_d + \tilde{\nu}^2 - \frac{1}{2}C'_V}.$$

Les  $\lambda_j^+$  et les  $\lambda_j^-$  vont désormais jouer des rôles symétriques. La mesure  $\mu$  étant non nulle au voisinage de 0, on sait que  $\Lambda$  est strictement positif et on peut donc poser

$$2\Lambda t_j := \lambda_j^+ + \lambda_j^-, \quad \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} t_j = 1, \quad 0 \leq t_j \leq 1, \quad Z := \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} t_j Z_j,$$

Si l'on suppose que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ , le vecteur  $Z$  (qui ne dépend pas de  $\tilde{\nu}$  d'après la proposition (3.5)), est non nul. Notons que si  $\mu$  était invariante par le flot hamiltonien, y compris le long des rayons passant par le pôle, on aurait  $Z = 0$ . Cette invariance se démontre habituellement en calculant le commutateur  $\mathcal{C} = [-h^2P, A]$ , où  $A$  est un opérateur semi-classique  $a(x, hD)$ ,  $a \in C_0^\infty$ . Dans notre cas,  $\mathcal{C}$  ne peut pas s'estimer, car le potentiel  $V$  commute très mal avec de tels opérateurs. Pour contourner ce problème, on remplace  $A$  par un opérateur différentiel de degré 1 dont on peut exprimer exactement le commutateur avec  $V$  en fonction de la dérivée de  $V$ . L'hypothèse (11) faite sur la dérivée de  $V$ , et l'estimation (75) sur  $\ell_{\mathfrak{g}}$  permettent alors de maîtriser suffisamment  $\mathcal{C}$  pour montrer que  $Z = 0$ . Ce résultat, que l'on peut interpréter comme une forme de conservation du moment, est plus faible que le théorème d'invariance près du pôle, mais suffit pour démontrer la proposition 3.12.

LEMME 3.17. — *On a*

$$(76) \quad 4\Lambda|Z| \leq \sqrt{d} C'_V \ell_{\mathfrak{g}}.$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que  $P$ , qui est un opérateur borné de son domaine  $D(P)$  dans  $L^2$ , définit également un opérateur borné de l'espace  $D(Q)$  dans son dual  $D(Q)^*$  :

$$(PF, G)_{D(Q)^*, D(Q)} = Q(F, G), \quad F, G \in D(Q).$$

De plus, l'espace de fonctions test  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$  est dense dans  $D(Q)$ , donc  $D(Q)^*$  est un sous-espace de l'espace de distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$  et, d'après la proposition 2.3 :

$$\forall F \in D(Q), \quad PF = -\Delta F + VF \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}).$$

Soit  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  à support compact dans un petit voisinage de  $x = 0$  sur  $\mathbb{R}^d$ , qui près de 0 est constant et égal au vecteur  $(1, \dots, 1)$ . Soit  $j$  un entier compris entre 1 et  $d$ . On commence par montrer

$$(77) \quad (h_n^2[\Phi_j \partial_{x_j}, -\Delta + V]u_{gn}, u_{gn}) = \\ - (f_{gn} - i\alpha_n u_{gn}, h_n \partial_{x_j}(\Phi_j u_{gn})) - (\Phi_j h_n \partial_{x_j} u_{gn}, f_{gn} - i\alpha_n u_{gn}).$$

L'égalité (77) est vraie formellement par des intégrations par parties élémentaires. Il suffit de justifier ces dernières. Posons, pour  $M \geq \tilde{\nu}$ ,

$$U_n^M(x) := \sum_{\tilde{\nu} \leq \nu_k \leq M} u_{kn}(|x|) e_k(x/|x|), \quad F_n^M(x) := \sum_{\tilde{\nu} \leq \nu_k \leq M} f_{kn}(|x|) e_k(x/|x|).$$

La fonction  $U_n^M$  est localement dans  $H^2$  en dehors de 0 puisque  $u_n$  l'est. De plus, d'après (44),

$$|\nabla^j U_n^M(x)| \leq C_M |x|^{-\frac{1}{2}d + \frac{3}{2} - j + \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{(\frac{1}{2}d - 1)^2 + a + \tilde{\nu}}, \quad j \in \{0, 1, 2\},$$

où on a désigné par  $|\nabla^j \cdot|$  la somme des valeurs absolues de toutes les dérivées d'ordre  $j$ . On voit donc facilement que si  $\tilde{\nu}$  est assez grand,

$$U_n^M \in D(P), \quad \partial_{x_j} U_n^M \in H^1 \cap rL^2 = D(Q).$$

On a donc

$$\begin{aligned} ((h_n^2 P - 1)\Phi_j \partial_{x_j} U_n^M, U_n^M)_{D(Q)^*, D(Q)} &= (\Phi_j \partial_{x_j} U_n^M, (h_n^2 P - 1)U_n^M) \\ &= (\Phi_j h_n \partial_{x_j} U_n^M, F_n^M - i\alpha_n U_n^M) \\ (\Phi_j \partial_{x_j} (h_n^2 P - 1)U_n^M, U_n^M) &= -((h_n^2 P - 1)U_n^M, \partial_{x_j}(\Phi_j U_n^M)) \\ &= -(F_n^M - i\alpha_n U_n^M, h_n \partial_{x_j}(\Phi_j U_n^M)). \end{aligned}$$

On a donc, en faisant la différence de ces deux égalités,

$$(78) \quad ([\Phi_j \partial_{x_j}, h_n^2 P]U_n^M, U_n^M) = \\ - (F_n^M - i\alpha_n U_n^M, \partial_{x_j} \Phi_j U_n^M) - (\Phi_j \partial_{x_j} U_n^M, F_n^M - i\alpha_n U_n^M).$$

Or

$$(79) \quad [\Phi_j \partial_{x_j}, h_n^2 P] = h_n^2 \Phi_j \partial_{x_j} V + 2h_n^2 (\nabla \Phi_j) \cdot \nabla \partial_{x_j} + h_n^2 \Delta \Phi_j \partial_{x_j}.$$

D'après (64), on a

$$\int \frac{|u_{\mathfrak{g}n}|^2}{|x|^3} dx < \infty.$$

On peut en déduire facilement

$$\frac{1}{|x|^3} U_n^M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} u_{\mathfrak{g}n} \quad \text{dans } L^2(\{|x| \leq \ell\}),$$

et, puisque par l'hypothèse (11),  $|\nabla V|$  est dominé par  $|x|^{-3}$  près de 0,

$$\int \Phi_j(\partial_{x_j} V) |U_n^M|^2 dx \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \int \Phi_j(\partial_{x_j} V) |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx.$$

De même,  $u_{\mathfrak{g}n}$  est dans  $H^1$  et donc, près de 0,

$$U_n^M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} u_{\mathfrak{g}n}, \quad \text{dans } H^1.$$

Finalement, en faisant tendre  $M$  vers l'infini, on voit que l'on peut remplacer, dans (78), les  $U_n^M$  par des  $u_{\mathfrak{g}n}$ , ce qui donne exactement (77).

On sait que  $h_n \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}n}$  est borné dans  $L^2$  et que  $f_{\mathfrak{g}n}$  et  $\alpha_n u_{\mathfrak{g}n}$  tendent vers 0. On déduit donc de (77) et (79) :

$$(80) \quad \underbrace{h_n^2 \int \Phi_j \partial_{x_j} V |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx}_{\mathcal{C}_1(n)} + \underbrace{2h_n^2 \int ((\nabla \Phi_j) \cdot \nabla \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}n}) \bar{u}_{\mathfrak{g}n} dx}_{\mathcal{C}_2(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

L'hypothèse (11) et le lemme 3.14 impliquent

$$(81) \quad |\mathcal{C}_1(n)| \leq C'_V \ell_{\mathfrak{g}} + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$(82) \quad 2h_n^2 (\nabla \Phi_j \cdot \nabla \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}}, u_{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \mu, 2\xi \cdot \nabla \Phi_j \xi_j \rangle.$$

Finalement, on remarque que d'après (28'), et puisque  $\Phi_j(0) = 1$ ,

$$(83) \quad \langle \mu, 2\xi \cdot \nabla \Phi_j \xi_j \rangle = -4\Lambda Z \cdot e_j,$$

où  $e_j$  est le vecteur unitaire dont la  $j$ -ième coordonnée vaut 1. Avec (80)–(83), on obtient

$$4\Lambda |Z \cdot e_j| \leq C'_V \ell_{\mathfrak{g}},$$

dont on déduit (76) en sommant les carrés. □

D'après (75) et le lemme 3.17, on a

$$4\Lambda |Z| \leq \sqrt{d} C'_V \frac{2\Lambda}{c_d + \tilde{\nu}^2 - \frac{1}{2} C'_V}.$$

Or  $Z$  ne dépend pas de  $\tilde{\nu}$ , que l'on peut prendre aussi grand que l'on veut. On a donc  $Z = 0$ , ce qui montre que le pôle 0 est un barycentre des directions  $Z_j$  correspondant au pôles  $p_j$  qui appartiennent à  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ . On peut en déduire

facilement que 0 est dans l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ , ce qui démontre la proposition 3.12.  $\square$

#### 4. Un cas plus général

Dans cette section, on écrit une généralisation partielle du théorème 1 qui permet de considérer des potentiels de la forme

$$\frac{1}{|x - p_j|^2} a_j \left( \frac{x - x_j}{|x - x_j|} \right), \quad a_j + \left( \frac{d}{2} - 1 \right)^2 > 0$$

près de chaque pôle  $p_j$ . Nous précisons ensuite les modifications à apporter à la démonstration du théorème 1 pour démontrer ce résultat.

THÉORÈME 4. — Soit  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$  un ensemble de pôles sur  $\mathbb{R}^d$  et  $P = -\Delta + V$ , où  $V$  est un potentiel réel sur  $\mathbb{R}^d$  tel que

$$V = V_1 + V_2,$$

avec

- $V_1$  vérifiant les hypothèses (7)–(12) du théorème 1,
- $V_2 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , à support compact sur  $\mathbb{R}^d$  et tel que, si  $|x - p_j| \leq \ell$ ,

$$(84) \quad V_2(x) = \frac{1}{|x - p_j|^2} b_j \left( \frac{x - x_j}{|x - x_j|} \right), \quad b_j \in L^\infty(S^{d-1}),$$

$$(9') \quad b_j \geq 0,$$

$$(11') \quad \nabla_\theta b_j \in L^\infty(S^{d-1}).$$

Alors la conclusion du théorème 1 reste valide : si  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(85) \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi R_{\lambda \pm i\varepsilon} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

De plus, comme dans le théorème 1, si  $N = 1$ , (85) reste vraie sans les hypothèses (11) et (11') faites sur le gradient de  $V$ .

REMARQUE 4.1. — Un tel  $V$  vérifie les hypothèses (7)–(10) du théorème 1, ce qui permet de définir comme dans la section 2, l'opérateur  $P$  au sens des formes quadratiques.

REMARQUE 4.2. — Dans le cas unipolaire, les potentiels de la forme

$$V(r, \theta) = \chi(x) \frac{a(\theta)}{r^2}, \quad a \in L^\infty(S^{d-1}), \quad a(\theta) \geq a_0, \quad a_0 + \left( \frac{1}{2}d - 1 \right)^2 > 0,$$

où  $\chi$  est une fonction à support compact valant 1 près de 0, rentrent dans le cadre du théorème 4. Contrairement aux résultats connus jusqu'alors, on ne fait aucune hypothèse dans ce cas sur la dérivée du potentiel près du pôle, ce qui est naturel : une telle condition n'apparaît pas dans la définition de  $P$  de la section 2 par une forme quadratique semi-bornée inférieurement.

*Démonstration du théorème 4.* — On reprend point par point la démonstration du théorème 1 de la section 3.

La partie 3.1, qui ne nécessite que les hypothèses (7)–(10), reste valable.

On se place ensuite près d'un pôle  $p_{j_0}$  que l'on prend comme origine du repère. L'équation sur  $u_n$  s'écrit, en coordonnées polaires au voisinage de ce pôle

$$-h_n^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_n - h_n^2 \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_n + h_n^2 V_1(r) u_n - \frac{h_n^2}{r^2} \Delta_\theta u_n + \frac{b_j(\theta)}{r^2} u_n = h_n \chi f_n,$$

où on a noté  $\Delta_\theta$  le laplacien sur la sphère  $S^{d-1}$ . On considère alors l'opérateur sur  $L^2(S^{d-1})$  :

$$H = -\Delta_\theta + b_j(\theta), \quad D(H) = H^2(S^{d-1}).$$

La fonction  $b_j$  étant positive est bornée, il est facile de voir que  $H$  est un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte. Il admet donc une famille de vecteur propre formant une base hilbertienne de l'espace  $L^2(S^{d-1})$  :

$$e_k^* \in C^1(S^{d-1}), \quad H e_k^* = \nu_k^{*2} e_k, \\ \nu_{k+1}^* \geq \nu_k^* \geq \nu_0^* \geq 0, \quad \nu_k^* \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On décompose, comme dans la partie 3.2 chacune des fonctions  $u_n$  et  $f_n$  selon ces fonctions propres :

$$u_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{kn}^*(r) e_k^*(\theta), \quad f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_{kn}^*(r) e_k^*(\theta).$$

Puis, ayant fixé un entier naturel  $\tilde{\nu}$ , on regroupe à nouveau selon les grandes et les petites valeurs propres :

$$u_n = u_{pn}^* + u_{gn}^*, \quad u_{pn}^* := \sum_{\nu_k^* \leq \tilde{\nu}} u_{kn}^* e_k^*, \quad u_{gn}^* := \sum_{\nu_k^* > \tilde{\nu}} u_{kn}^* e_k^*, \\ f_n = f_{pn}^* + f_{gn}^*, \quad f_{pn}^* := \sum_{\nu_k^* \leq \tilde{\nu}} f_{kn}^* e_k^*, \quad f_{gn}^* := \sum_{\nu_k^* > \tilde{\nu}} f_{kn}^* e_k^*.$$

Les parties 3.2, 3.3, 3.4 de la démonstration fonctionnent alors parfaitement en remplaçant les  $e_k$  par les  $e_k^*$ , et les décompositions en harmoniques sphériques par les décompositions correspondantes associées aux  $e_k^*$ . Remarquons que l'équation sur  $u_k^*$  près du pôle s'écrit

$$-h^2 u_k^{*''} - h_n^2 \frac{d-1}{r} u_k^{*'} + h_n^2 \left( V_1(r) + \frac{\nu_k^{*2}}{r^2} \right) u_k^* - (1 - i\alpha_n) u_k^* = h_n f_k^*.$$

Elle est donc identique à l'équation (31) vérifiée par  $u_k$  dans la démonstration du théorème 1, et en sommant ces équations, on obtient près du pôles les équations sur  $u_g^*$  et  $u_p^*$  :

$$(86) \quad h^2 P u_g^* - (1 - ih\alpha) u_g^* = h f_g^*, \quad h^2 P u_p^* - (1 - ih\alpha) u_p^* = h f_p^*.$$

Notons que dans les paragraphes 3.2 et 3.3, les calculs se font sur chacune des harmoniques sphériques et que dans 3.4, on utilise seulement l'équation sur  $u_{\mathfrak{g}}$  identique à (86), et les hypothèses (10) et (11) sur  $V$ , qui sont encore valables ici grâce aux hypothèses (10) et (11) sur  $V_1$ , et (84), (11') sur  $V_2$ . On n'utilise jamais directement, dans le paragraphe 3.4, la forme radiale de  $V$  près du pôle.  $\square$

### 5. Inégalités de Strichartz

Comme annoncé dans l'introduction (corollaire 2), le théorème 1 implique un effet régularisant avec gain d'une demi-dérivée sur l'équation de Schrödinger correspondante. On montre ici les inégalités de Strichartz énoncées dans le corollaire 3. Notre démarche est la suivante : la proposition 5.1 traduit le fait que grâce à l'effet régularisant, on peut « localiser » ces inégalités, c'est-à-dire, dans notre cas, les démontrer pour des opérateurs de la forme  $-\Delta + V_j$ , où chaque potentiel  $V_j$  admet un seul pôle,  $p_j$ , près duquel il coïncide avec  $V$ . Il suffit ensuite d'utiliser le résultat de N. Burq, F. Planchon, J. Stalker et A. Shadi Tahvildar-Zadeh sur les potentiels avec un seul pôle rappelé dans la proposition 5.2.

**5.1. Définitions et notations.** — On notera simplement  $L^q, H^s$  les espaces  $L^q(\mathbb{R}^d), H^s(\mathbb{R}^d)$ . Si  $E$  est un sous-espace vectoriel normé de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  et  $T > 0$ , on notera  $L_T^p(E)$  pour  $L^p(0, T; E)$ . L'ensemble de pôles  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$  est fixé.

On dira que  $V$  est un *potentiel multipolaire* lorsque :

- $V \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$  ;
- la forme quadratique sur  $L^2$

$$Q_V(u) := \int |\nabla u|^2 + \int V|u|^2, \quad D(Q_V) := C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$$

est semi-bornée inférieurement et fermable.

On peut alors définir, comme dans le chapitre 2, un unique opérateur  $P_V$  auto-adjoint, semi-borné inférieurement, tel que

$$D(P_V) = \{u \in D(Q_V); v \mapsto Q_V(u, v) \text{ continu } L^2\}, \\ \forall u \in D(P_V), \forall v \in D(Q_V), \quad Q_V(u, v) = (P_V u, v)_{L^2}.$$

On note  $(\text{SL}_V)$  l'équation de Schrödinger associée à  $P_V$  :

$$(\text{SL}_V) \quad i\partial_t u + P_V u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Soient  $r, s \geq 2$ . On dira que  $(\text{SL}_V)$  vérifie *Strichartz*  $(r, s)$  lorsque

$$\forall T > 0, \exists C_T, \forall u_0 \in L^2, \quad \|u\|_{L_T^r(L^s)} \leq C_T \|u_0\|_{L^2}.$$

On dira que  $(SL_V)$  est *localement régularisante* lorsque pour tout  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , pour tout  $T > 0$ , il existe  $C_T > 0$  tel que les solutions de l'équation avec second membre à support compact

$$(SL'_V) \quad i\partial_t u + P_V u = \chi f, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

vérifient

$$\|\chi u\|_{L_T^2(H^{\frac{1}{2}})} \leq C_T \{ \|f\|_{L_T^2(H^{-\frac{1}{2}})} + \|u_0\|_{L^2} \}.$$

**5.2. Localisation des inégalités de Strichartz.** — La proposition suivante ramène, moyennant l'effet régularisant, la preuve des inégalités de Strichartz sur un opérateur multipolaire à la preuve des mêmes inégalités sur  $N$  opérateurs unipolaires.

PROPOSITION 5.1. — Soient  $r, s \in [2, +\infty]$  avec  $r > 2$ ,  $(V_j)_{j=0..J}$  une famille de potentiels multipolaires et  $(\Omega_j)_{j=1..J}$  un recouvrement d'ouverts de  $\mathbb{R}^d$ , tels que

- $\forall j \in 1, \dots, J, \forall x \in \Omega_j, \quad V_0(x) = V_j(x);$
- $\forall j \in 0, \dots, J, (SL_{V_j})$  est localement régularisante;
- $\forall j \in 1, \dots, J, (SL_{V_j})$  vérifie Strichartz  $(r, s)$ .

Alors  $(SL_{V_0})$  vérifie Strichartz  $(r, s)$ .

*Démonstration.* — Fixons une fonction  $\chi$  dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Soit  $W$  un potentiel multipolaire. La preuve repose sur le fait (remarqué par Staffilani et Tataru [28], cf. aussi [4, prop. 2.10]) que si  $(SL_W)$  est localement régularisante et vérifie l'inégalité de Strichartz  $(r, s)$ , alors elle vérifie l'inégalité mixte Strichartz/effet régularisant

$$(87) \quad \|u\|_{L_T^r(L^s)} \leq C_T \{ \|f\|_{L_T^2(H^{-\frac{1}{2}})} + \|u_0\|_{L^2} \},$$

pour toute solution  $(u, f)$  de l'équation avec second membre à support compact  $(SL'_W)$ . En effet, il suffit de montrer (87) pour  $u_0 = 0$  (le cas  $f = 0$  correspondant à l'inégalité de Strichartz standard). Si  $u_0$  est nulle, on a

$$(88) \quad u(t) = -i \int_0^t e^{i(s-t)P_W} \chi f(s) ds =: (Bf)(t).$$

Considérons l'opérateur

$$A : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(]0, T[ \times \mathbb{R}^d), \quad u_0 \longmapsto e^{-itP_W} u_0.$$

L'inégalité de Strichartz sur  $(SL_W)$  montre que  $A$  est continue de  $L^2$  dans  $L_T^r(L^q)$ . De plus, l'effet régularisant de  $(SL_W)$  implique par dualité que  $A^* \chi$  se prolonge en une application continue de  $L_T^2(H^{-\frac{1}{2}})$  dans  $L^2$ . On en déduit que  $AA^* \chi$  est continue de  $L_T^2(H^{-\frac{1}{2}})$  dans  $L_T^r(L^s)$ . Or

$$-iAA^* \chi g = -i \int_0^T e^{i(s-t)P_W} \chi g(s) ds.$$

En changeant  $T$  en  $t$  dans cette expression, on retrouve exactement l'opérateur  $B$  défini en (88). Le lemme de Christ et Kiselev (cf. [7] ou [4, p. 15]) implique que  $B$  est continu de  $L_T^2(H^{-\frac{1}{2}})$  dans  $L_T^r(L^s)$ , ce dont on déduit (87).

Pour conclure, on se donne une partition de l'unité  $(\chi_j)_{j=1,\dots,J}$  associée au recouvrement d'ouverts  $(\Omega_j)$

$$\sum_{j=1}^J \chi_j = 1, \quad \chi_j \in C_0^\infty(\Omega_j).$$

Il suffit de montrer

$$\|\chi_j u\|_{L_T^r(L^s)} \leq C_T \|u_0\|_{L^2}.$$

Notons  $v_j = \chi_j u$ . Sur le support de  $v_j$ , les potentiels  $V_0$  et  $V_j$  coïncident. On a donc

$$i\partial_t v_j + P_{V_j} v_j = \psi_j [\Delta, \chi_j] u, \quad v_j|_{t=0} = \chi_j u_0,$$

où  $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  vaut 1 sur le support de  $[\Delta, \chi_j]$ . Par l'inégalité mixte (87), on en déduit

$$\begin{aligned} \|v_j\|_{L_T^p(L^q)} &\leq C_T \{ \|[\Delta, \chi_j] u\|_{L_T^2(H^{-\frac{1}{2}})} + \|\chi_j u_0\|_{L^2} \} \\ &\leq C_T \{ \|\psi_j u\|_{L_T^2(H^{\frac{1}{2}})} + \|\chi_j u_0\|_{L^2} \} \leq C_T \|u_0\|_{L^2}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité s'obtenant par l'effet régularisant de l'équation  $(SL_{V_0})$ . La proposition est démontrée.  $\square$

**5.3. Inégalités de Strichartz dans le cas d'un seul pôle.** — Il reste à rappeler le résultat de [5] qui permet de conclure :

PROPOSITION 5.2. — *On suppose  $d \geq 2$ . Soit  $V = a/|x|^2$ ,  $a + (\frac{1}{2}d - 1)^2 > 0$ . Soient  $r, s \in [2, +\infty]$  tels que*

$$(89) \quad \frac{2}{r} + \frac{d}{s} = \frac{d}{2}, \quad (r, s) \neq (2, 2).$$

*Alors  $(SL_V)$  vérifie Strichartz  $(r, s)$ .*

REMARQUE 5.3. — Dans le cas unipolaire, les inégalités de Strichartz sont vraies même pour le point extrémal  $r = 2$ ,  $s = 2d/(d-2)$ ,  $d > 2$ . Ce point extrémal est ici perdu lorsque l'on applique le lemme de Christ et Kiselev.

Soit  $V$  vérifiant les hypothèses du corollaire 3. Pour obtenir (6), on utilise la proposition 5.1 avec

- $J = N + 1$ ,  $V_0 = V$  ;
- $V_j = a_j/|x|^2$  pour  $j \in \{1, \dots, N\}$  et  $\Omega_j$  est un petit voisinage de  $p_j$  sur lequel  $V = V_j$  ;
- $\Omega_{N+1}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  contenant le complémentaire de  $\bigcup_{j=1}^N \Omega_j$  et  $V_{N+1}$  un potentiel borné, à support compact égal à  $V$  sur  $\Omega_{N+1}$ .

Notons que le potentiel  $V_{N+1}$  étant borné, à support compact,  $(SL_{V_{N+1}})$  vérifie trivialement les inégalités de Strichartz localement en temps. Grâce à la proposition 5.2 et le théorème 1, on est exactement dans le cadre de la proposition 5.1, ce qui démontre le corollaire 3.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEN-ARTZI (M.) & KLAINERMAN (S.) – *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, J. Anal. Math., t. **58** (1992), pp. 25–37, Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.
- [2] BEREZIN (A. A.) – *On the many-center problem for inverse square potentials*, Chem. Phys. Lett., t. **107** (1984), no. 4-5, pp. 409–412.
- [3] BURQ (N.) – *Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 5, pp. 221–241.
- [4] BURQ (N.), GÉRARD (P.) & TZVETKOV (N.) – *On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, t. **21** (2004), no. 3, pp. 295–318.
- [5] BURQ (N.), PLANCHON (F.), STALKER (J. G.) & TAHVILDAR-ZADEH (A. S.) – *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with the inverse-square potential*, J. Funct. Anal., t. **203** (2003), no. 2, pp. 519–549.
- [6] BURQ (N.), PLANCHON (F.), STALKER (J. G.) & TAHVILDAR-ZADEH (A. S.) – *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with potentials of critical decay*, Indiana Univ. Math. J., t. **53** (2004), no. 6, pp. 1665–1680.
- [7] CHRIST (M.) & KISELEV (A.) – *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal., t. **179** (2001), no. 2, pp. 409–425.
- [8] CONSTANTIN (P.) & SAUT (J.-C.) – *Local smoothing properties of Schrödinger equations*, Indiana Univ. Math. J., t. **38** (1989), no. 3, pp. 791–810.
- [9] D’ANCONA (P.) & PIERFELICE (V.) – *On the wave equation with a large rough potential*, Prépublication, 2003.
- [10] DUYCKAERTS (T.) – *A singular critical potential for the schrödinger operator*, Canad. Math. Bull. (2005), A paraître.
- [11] FERMANIAN-KAMMERER (C.) – *Équation de la chaleur et mesures semi-classiques*, Thèse, Université de Paris-Sud, 1995.
- [12] GÉRARD (C.) & MARTINEZ (A.) – *Principe d’absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., t. **306** (1988), no. 3, pp. 121–123.
- [13] GÉRARD (P.) – *Microlocal defect measures*, Comm. Partial Differential Equations, t. **16** (1991), no. 11, pp. 1761–1794.

- [14] GINIBRE (J.) & VELO (G.) – *The global cauchy problem for the nonlinear schrödinger equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, t. **2** (1985), pp. 309–327.
- [15] GONNORD (S.) & TOSEL (B.) – *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.
- [16] LAX (P. D.) & PHILLIPS (R. S.) – *Scattering theory*, 2nd éd., Pure and Applied Mathematics, vol. 26, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989, With appendices by Cathleen S. Morawetz and Georg Schmidt.
- [17] LIONS (P.-L.) & PAUL (T.) – *Sur les mesures de Wigner*, Rev. Mat. Iberoamericana, t. **9** (1993), no. 3, pp. 553–618.
- [18] MORAWETZ (C. S.) – *The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation*, Comm. Pure Appl. Math., t. **14** (1961), pp. 561–568.
- [19] ———, *Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation*, Comm. Pure Appl. Math., t. **28** (1975), pp. 229–264.
- [20] MOURRE (E.) – *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Comm. Math. Phys., t. **78** (1980/81), no. 3, pp. 391–408.
- [21] PIERFELICE (V.) – *Decay estimate for the wave equation with a small potential*, Prépublication, 2003.
- [22] PLANCHON (F.), STALKER (J. G.) & TAHVILDAR-ZADEH (A. S.) – *Dispersive estimate for the wave equation with the inverse-square potential*, Discrete Contin. Dyn. Syst., t. **9** (2003), no. 6, pp. 1387–1400.
- [23] REED (M.) & SIMON (B.) – *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [24] ———, *Methods of modern mathematical physics. I*, 2nd éd., Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980, Functional analysis.
- [25] RUIZ (A.) & VEGA (L.) – *On local regularity of Schrödinger equations*, Internat. Math. Res. Notices (1993), no. 1, pp. 13–27.
- [26] ———, *Local regularity of solutions to wave equations with time-dependent potentials*, Duke Math. J., t. **76** (1994), no. 3, pp. 913–940.
- [27] SJÖLIN (P.) – *Convergence properties for the Schrödinger equation*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, t. **57** (1987), pp. 293–297 (1989).
- [28] STAFFILANI (G.) & TATARU (D.) – *Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients*, Comm. Partial Differential Equations, t. **27** (2002), no. 7-8, pp. 1337–1372.
- [29] VASY (A.) & ZWORSKI (M.) – *Semiclassical estimates in asymptotically Euclidean scattering*, Comm. Math. Phys., t. **212** (2000), no. 1, pp. 205–217.

- [30] VÁZQUEZ (J. L.) & ZUAZUA (E.) – *The hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, J. Funct. Anal., t. **173** (2000), no. 1, pp. 103–153.
- [31] VEGA (L.) – *Schrödinger equations : pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc., t. **102** (1988), no. 4, pp. 874–878.