BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

# Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 11 (1883), p. 25-53

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__25_1>

*Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre;* par M. Émile Picard.

(Séance du 17 novembre 1882.)

1. Étant donnée une relation algébrique du genre $p$

$$f(x, y) = 0,$$

considérons une intégrale abélienne de première espèce correspondante

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)};$$

on sait que cette intégrale a en général $2p$ périodes, mais il peut y avoir une réduction et le nombre des périodes peut notamment se réduire à deux. On voit immédiatement dans ce cas que l'équation

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)} = z - z_0,$$

définit une fonction $x$ de $z$, qui est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de $z$. Soient en effet $\omega$ et $\omega'$ les périodes de l'intégrale, et désignons par $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique aux mêmes périodes; on aura

$$(2) \qquad \lambda(z - z_0) = \lambda\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{F\,dx}{f'_y}\right);$$

or, pour une valeur donnée à $x$ et $y$, l'intégrale $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{F\,dx}{f'_y}$ n'a qu'une valeur, abstraction faite des multiples de $\omega$ et $\omega'$; on en déduit de suite que le second membre de l'équation (2) est une fonction rationnelle de $x$ et $y$ : donc

$$\lambda(z - z_0) = P(x, y),$$

P étant rationnel, et par conséquent $x$, est bien racine d'une équation algébrique à coefficients uniformes doublement périodiques.

Supposons maintenant, d'une manière plus générale, que, parmi les intégrales abéliennes relatives à l'équation donnée, il y en ait $q$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F_1(x,y)\,dx}{f'_y(x,y)}, \quad \int_{x_0}^{x} \frac{F_2(x,y)\,dx}{f'_y(x,y)}, \quad \ldots, \quad \int_{x_0}^{x} \frac{F_q(x,y)\,dx}{f'_y(x,y)},$$

ayant seulement $2q$ périodes distinctes, et cela, de telle manière que

$$\begin{array}{llll}
\Omega_{1,1}, & \Omega_{1,2}, & \ldots, & \Omega_{2,2q}, \\
\Omega_{2\,1}, & \Omega_{2,2}, & \ldots, & \Omega_{2,2q}, \\
\ldots\ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\Omega_{q,1}, & \Omega_{q,2}, & \ldots, & \Omega_{q,2q},
\end{array}$$

désignant ces $2q$ systèmes de périodes correspondantes, tout autre système de périodes correspondantes soit de la forme

$$\begin{array}{l}
m_1\Omega_{1,1} + m_2\Omega_{1,2} + \ldots + m_{1q}\Omega_{2,2q}, \\
m_1\Omega_{2,1} + m_2\Omega_{2,2} + \ldots + m_{2q}\Omega_{2,2q}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_1\Omega_{q,1} + m_2\Omega_{q,2} + \ldots + m_{2q}\Omega_{q,2q},
\end{array}$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_{2q}$ sont, bien entendu, des entiers. Considérons alors les équations

$$\begin{array}{l}
\int_{(x_0,y_0)}^{x_1,y_1} \frac{F_1\,dx}{f^1_y} + \int_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)} \frac{F_1\,dx}{f'_y} + \ldots + \int_{(x_0,y_0)}^{(x_q,y_q)} \frac{F_1\,dx}{f'_y} = u_1 + h_1, \\
\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{F_2\,dx}{f'_y} + \int_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)} \frac{F_2\,dx}{f'_y} + \ldots + \int_{(x_0,y_0)}^{(x_q,y_q)} \frac{F_2\,dx}{f'_y} = u_2 + h_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{F_q\,dx}{f'_y} + \int_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2} \frac{F_q\,dx}{f'_y} + \ldots + \int_{(x_0,y_0)}^{(q,y_q)} \frac{F_q\,dx}{f'_y} = u_q + h_q,
\end{array}$$

où les $h$ sont des constantes.

On sait que, dans le cas d'un système abélien, c'est-à-dire quand $q=p$, toute fonction symétrique de $x_1, x_2, \ldots, x_q$ est une fonction uniforme de $u_1, u_2, \ldots, u_q$. Il n'en est plus ainsi quand $q$ est différent de $p$, mais nous allons voir que $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont encore racines d'équations algébriques dont les coefficients sont fonctions uniformes de $u_1, u_2, \ldots, u_q$ avec $2q$ systèmes de périodes; de plus, ces fonctions périodiques pourront s'exprimer à l'aide des fonctions $\Theta$ de $q$ variables indépendantes.

**2.** Rappelons tout d'abord que, entre les périodes des deux intégrales quelconques de première espèce $u$ et $v$, correspondant à une même relation $f(x, y) = 0$ de genre $p$, périodes que nous désignerons par

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p},$$
$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2p},$$

il existe une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} c_{ik}\omega_i\varepsilon_k = 0;$$

les $c$ représentent des entiers et l'on a de plus

$$c_{ki} = -c_{ik} \quad \text{et} \quad c_{ii} = 0$$

(voir, par exemple, Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 53).

On sait de plus que le déterminant $|c_{ik}|$, qui est manifestement un déterminant gauche, est égal à l'unité.

Supposons maintenant que $u$ et $v$ désignent deux des $q$ intégrales admettant seulement $2q$ systèmes de périodes : on peut exprimer toutes les périodes $\omega$ par des expressions linéaires à coefficients entiers de ces $2q$ périodes; désignons ces dernières, afin de ne pas multiplier les notations, par les mêmes lettres $\omega$, aucune confusion n'étant possible,

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q},$$

et l'on a de même, pour la seconde intégrale, les périodes

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2q}.$$

Entre les $\omega$ et les $\varepsilon$ existera une relation, et il est clair que cette relation aura la même forme que plus haut : ce sera

$$\sum_{i=1}^{i=2q}\sum_{k=1}^{k=2q} c_{ik}\omega_i\varepsilon_k = 0,$$

et l'on aura

$$c_{ki} = -c_{ik} \quad \text{et} \quad c_{ii} = 0;$$

seulement le déterminant gauche $|c_{ik}|$ ne sera plus nécessairement égal à l'unité.

Désignons sa valeur par $n^2$ (le déterminant étant, comme on sait, un carré parfait).

On a donc

$$\Delta = n^2 = \begin{vmatrix} c & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,2q} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & \dots & c_{2,2q} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & \dots & c_{3,2q} \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots\dots \\ c_{2p,1} & . & . & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Considérons les termes de la première ligne ; soit $\alpha_1$ leur plus grand commun diviseur.

Nous poserons $\omega'_1 = \alpha_1\omega_1$ et en même temps $\varepsilon'_1 = \alpha_1\varepsilon_1$, les autres périodes restant les mêmes ; la relation entre les nouvelles périodes aura toujours des coefficients entiers et le déterminant des coefficients $\Delta_1$ aura pour valeur $\frac{n^2}{\alpha_1^2}$ et dans $\Delta_1$ les éléments de la première ligne et de la première colonne seront premiers entre eux. On peut donc, par une transformation du premier ordre effectuée sur les périodes

$$\omega'_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \dots,\ \omega_{2q},$$
$$\varepsilon'_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \dots,\ \varepsilon_{2q},$$

amener le tableau des coefficients dans la relation entre les périodes à avoir la forme

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1,2q-2} \\ 0 & 0 & d_{21} & 0 & d_{23} & \dots & \\ . & . & . & . & \dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & d_{2q,21} & & & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

On le montrera en suivant la même voie que M. Briot (*Théorie des fonctions abéliennes*, p. 56) : la valeur du déterminant ne change pas par une transformation du premier ordre sur les périodes : sa valeur est donc encore $\frac{n^2}{\alpha_1^2}$. En définitive, c'est par une transformation d'ordre $\alpha_1$ effectuée sur les périodes primitives $\omega$ et $\varepsilon$, c'est-à-dire en remplaçant les $\omega$ par

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\ \omega_2 + \ldots + a_{1,2q}\,\omega_{2q},\\
\Omega_2 &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\ \omega_2 + \ldots + a_{2,2q}\,\omega_{2q},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Omega_{2q} &= a_{q,1}\omega_1 + a_{q,2}\omega_2 + \ldots + a_{q,2q}\,\omega_{2q},
\end{aligned}$$

les $a$ étant des entiers convenables dont le déterminant est égal à $\alpha_1$, que nous amenons la relation entre les périodes à avoir la forme

$$\Omega_1\mathcal{E}_2 - \Omega_2\mathcal{E}_1 + \sum_{i=1}^{i=2q-2}\ \sum_{k=1}^{k=2q-2} d_{ik}\Omega_{i+2}\mathcal{E}_{k+2} = 0.$$

On continuera ce raisonnement de proche en proche et l'on établira de la sorte que, par une série de transformations successives d'ordre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, le déterminant des coefficients peut être ramené à la forme canonique

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & .\\
. & . & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1\\
0 & 0 & . & . & \ldots & -1 & 0
\end{vmatrix}.$$

Par conséquent, en effectuant sur les périodes primitives $\omega$ et $\varepsilon$ une transformation d'ordre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, la relation entre les nouvelles périodes $\Omega$ et $\mathcal{E}$ a la forme

$$\Omega_1\mathcal{E}_2 - \Omega_2\mathcal{E}_1 + \Omega_3\mathcal{E}_4 - \Omega_4\mathcal{E}_3 + \ldots + \Omega_{2q-1}\mathcal{E}_{2q} - \Omega_{2q}\mathcal{E}_{2q-1} = 0.$$

Il est facile d'évaluer le produit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. On voit, en effet, qu'en effectuant sur les $\omega$ une transformation quelconque, le nouveau déterminant des lettres $c$ est égal au déterminant primitif divisé par le carré du déterminant de la transformation. Or le nouveau déterminant est égal à l'unité. On a donc

$$1 = \frac{n^2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_q^2}$$

et, par suite, le degré de la transformation est précisément égal à $n$.

3. Ceci posé, envisageons le nouveau tableau de périodes que nous désignerons par

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \ldots, & \Omega_{1,2q}, \\ \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} & \ldots, & \Omega_{2\,2q}, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ \Omega_{q,1} & \Omega_{q,2} & \ldots, & \Omega_{q,2q}, \end{array}\right.$$

où l'on a, entre les termes de ligne quelconque $\alpha$ et $\beta$, la relation

$$\Omega_{\alpha,1}\Omega_{\beta,2} - \Omega_{\alpha,2}\Omega_{\beta,1} + \ldots + \Omega_{\alpha,2q-1}\Omega_{\beta,2q} - \Omega_{\alpha,2q}\Omega_{\beta,2q-1} = 0.$$

On pourra, d'après ces relations, former à l'aide des fonctions $\Theta$ un système de $q$ fonctions

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_q), \ \ldots, \ F_q(u_1, u_2, \ldots, u_q),$$

indépendantes entre elles et admettant le système de périodes représenté par le tableau (4). Considérons maintenant les équations

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(u_1 + h_1, \quad u_2 + h_2, \quad \ldots, \quad u_q + h_q) \\ \quad = F_1\left(\sum\limits_{i=1}^{i=q}\int_{x_0}^{x_i} d\mu_1, \quad \sum\limits_{i=1}^{i=q}\int_{x_0}^{x_i} d\mu_2, \quad \ldots, \quad \sum\limits_{i=1}^{i=q}\int_{x_0}^{x_i} d\mu_q\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_q(u_1 + h_1, \quad u_2 + h_2, \quad \ldots, \quad u_q + h_q) \\ \quad = F_q\left(\sum\limits_{i=1}^{i=q}\int_{x_0}^{x_i} d\mu_1, \quad \ldots, \quad \sum\limits_{i=1}^{i=q}\int_{x_0}^{x_i} d\mu_q\right), \end{array}\right.$$

où l'on a posé

$$d\mu_1 = \frac{F_1\,dx}{f'_y}, \quad d\mu_2 = \frac{F_2\,dx}{f'_y}, \quad \ldots, \quad d\mu_q = \frac{F_q\,dx}{f'_y}.$$

Pour des valeurs données à $x_1, x_2, \ldots, x_q$, les intégrales figurant dans les seconds membres de ces équations auront seulement un nombre limité de valeurs, abstraction faite de multiples des périodes (4). On en conclut de suite que ces seconds membres sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots, x_q$, et réciproquement $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont des fonctions algébriques de $F_1, F_2, \ldots, F_q$, comme nous voulions l'établir.

La démonstration précédente suppose essentiellement que le déterminant formé avec les $c$ n'est pas nul. Nous allons montrer maintenant que cette circonstance ne peut se présenter; nous nous appuierons sur cette remarque fondamentale due à Riemann, qu'en posant

$$\omega_i = A_i + B_i\sqrt{-1},$$

les $\omega$ représentent les $2p$ périodes d'une intégrale quelconque de première espèce.

La somme

$$\sum_{k=1}^{k=2p} \sum_{i=1}^{i=2p} c_{ik} A_i B_k$$

est certainement différente de zéro.

Ceci posé, plaçons-nous d'abord, pour plus de clarté, dans le cas simple où l'on aurait $q = 2$; on a alors le système des périodes pour les intégrales $u$ et $v$,

$$\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4, \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & \varepsilon_4, \end{matrix}$$

et soit

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

où

$$c_{ik} = -c_{ki}.$$

le déterminant des $c$.

D'après la remarque précédemment faite, tous les $c$ ne peuvent être nuls. Il peut arriver que tous les termes de la première et de la troisième ligne soient nuls; alors la relation entre les périodes se réduira à

$$\omega_2\omega_4 - \omega_4\varepsilon_2 = 0.$$

Si nous laissons ce cas de côté, nous pouvons supposer que tous les termes de la première ligne ne sont pas nuls. Alors, en répétant le raisonnement fait plus haut, par une transformation convenable d'ordre $\alpha$, nous amènerons le déterminant à la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix},$$

mais le déterminant étant nul, après comme avant cette transformation, $a$ sera nécessairement nul, et la relation entre les périodes transformées

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4,$$
$$\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2,\ \mathcal{E}_3,\ \mathcal{E}_4$$

se réduit à

$$\Omega_1 \mathcal{E}_2 - \Omega_2 \mathcal{E}_1 = 0,$$

relation qui a la même forme que dans le cas considéré d'abord.

Si, au lieu de partir des deux intégrales $u$ et $v$, nous étions partis des deux intégrales

$$U' = Mu + Nv, \quad V' = M'u + N'v, \quad (MN' - M'N \neq 0)$$

nous aurions eu le tableau des périodes

$$\Omega'_1,\ \Omega'_2,\ \Omega'_3,\ \Omega'_4,$$
$$\mathcal{E}'_1,\ \mathcal{E}'_2,\ \mathcal{E}'_3,\ \mathcal{E}'_4,$$

avec la relation

$$\Omega'_1 \mathcal{E}'_2 - \Omega'_2 \mathcal{E}'_1 = 0,$$

et l'on sait qu'en posant

$$\Omega'_i = A'_i + B'_i \sqrt{-1},$$

la somme $A'_1 B'_2 - A'_2 B'_1$ n'est pas nulle. Mais nous pouvons évidemment choisir M et N de manière que $\Omega'_1$ soit nul et par conséquent $A'_1$ et $B'_1$, et alors l'expression précédente serait nulle, ce qui nous amène à une contradiction.

La même démonstration est applicable dans le cas où $q$ est quelconque. Les périodes étant, pour le système d'intégrales $u_1$, $u_2, \ldots, u_q$,

$$\begin{matrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & \ldots, & \omega_{1,2q}, \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \ldots, & \omega_{2,2q}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega_{q1}, & \omega_{q2}, & \ldots, & \omega_{q\,2q}, \end{matrix}$$

on établira que, si le déterminant des $c$ figurant dans la relation

$$\sum_{k=1}^{k=2q} \sum_{i=1}^{i=2q} c_{ik}\,\omega_{\alpha,i}\,\omega_{\beta,k} = 0$$

est nul, on peut, par une transformation de degré convenable, remplacer le système des périodes par le suivant :

$$\begin{array}{llll} \Omega_{11}, & \Omega_{12}, & \ldots, & \Omega_{1,2q}, \\ \Omega_{21}, & \Omega_{22}, & \ldots, & \Omega_{2,2q}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \Omega_{q,1}, & \Omega_{q,2}, & \ldots, & \Omega_{q,2q}, \end{array}$$

et entre les périodes correspondant à deux lignes quelconques de rang $\alpha$ et $\beta$, on aura

$$\begin{aligned} &\Omega_{\alpha,1}\,\Omega_{\beta,2} - \Omega_{\alpha,2}\,\Omega_{\beta,1} + \Omega_{\alpha,3}\,\Omega_{\beta,4} \\ &\quad - \Omega_{\alpha,4}\Omega_{\beta,3} + \ldots + \Omega_{\alpha,2r-1}\,\Omega_{\beta,2r} - \Omega_{\alpha,2r}\,\Omega_{\beta,2r-1} = 0, \end{aligned}$$

où $r$ est moindre que $q$.

De plus, puisque $r$ est moindre que $q$, on peut, en considérant, au lieu de $u_1, u_2, \ldots, u_q$, des combinaisons linéaires de ces intégrales, supposer, en gardant les mêmes notations, que

$$\Omega_{\alpha,1} = 0, \quad \Omega_{\alpha,3} = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_{\alpha,2r-1} = 0.$$

Mais nous savons que, en posant

$$\Omega_{\alpha\,i} = A_i + B_i\sqrt{-1},$$

la somme

$$A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_4 - A_4B_3 + \ldots + A_{2r-1}B_{2r} - A_{2r}B_{2r-1}$$

n'est pas nulle, ce qui nous amène encore à une contradiction, puisque, ici,

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad \ldots, \quad A_{2r-1} = 0, \quad B_{2r-1} = 0.$$

4. Nous allons nous borner dans ce qui va suivre au cas où la courbe considérée est du second genre, en la prenant immédiatement, comme il est permis, sous la forme

$$(6) \qquad y^2 = R(x) = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x).$$

Nous nous proposons de traiter le problème suivant :

*Trouver les expressions générales de $k^2$, $l^2$ et $m^2$, telles qu'il* *existe une intégrale de première espèce correspondant à la courbe précédente, ayant seulement deux périodes.*

Admettons donc que l'on puisse trouver un polynôme du premier degré $f(x)$, de manière que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ait seulement deux périodes.

Désignons par $P(x)$ et $Q(x)$ deux intégrales normales de première espèce correspondant à la relation (6).

On aura comme tableau des périodes de ces intégrales

$$(7) \qquad \begin{cases} 1 & 1 & G' & H, \\ 1 & 0 & H & G \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = A\,P(x) + B\,Q(x),$$

A et B étant deux constantes convenables. Ses périodes sont donc

$$B, \quad A, \quad AG' + BH, \quad AH + BG,$$

et elles doivent, par hypothèse, se réduire à deux. Par suite, on doit avoir

$$\begin{aligned} m\,B + n\,A + p\,(AG' + BH) + q'(AH + BG) &= 0, \\ m'\,B + n'\,A + p'(AG' + BH) + q'(AH + BG) &= 0, \end{aligned}$$

les $m$, $n$, $p$, $q$ étant des entiers, et l'on suppose, bien entendu, que l'on n'a pas

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} A(n + p\,G' + q\,H) + B(m + p\,H + q\,G) &= 0, \\ A(n' + p'\,G' + q'\,H) + B(m' + p'\,H + q'\,G) &= 0, \end{aligned}$$

d'où, par suite,

$$(8) \qquad \begin{cases} 0 = nm' - mn' + )pm' - p'm)G' \\ \qquad + (qm' - q'm + np' - n'p)H \\ \qquad + (nq' - n'q)G + (qp' - pq')(H^2 - GG'). \end{cases}$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre les quantités G, G' et H.

5. Transformons tout d'abord ce premier résultat. Une transformation du premier degré substitue aux intégrales normales $P(x)$ et $Q(x)$ deux nouvelles intégrales pour lesquelles on a le tableau de périodes

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & G'_1 & H_1, \\ 1 & 0 & H_1 & G_1, \end{array}$$

et l'on a, comme on sait [*voir* HERMITE, *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1855)],

$$G_1 = \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\,G + 2(db)_{03}\,H + (db)_{02}\,G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + 2(ab)_{03}\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

$$H_1 = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\,G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]\,H + (ad)_{02}\,G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + 2(ab)_{03}\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

$$G'_1 = \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}\,G + 2(ac)_{03}\,H + (ac)_{02}\,G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{03}\,G + 2(ab)_{03}\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

où l'on a posé, d'une manière générale,

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i.$$

Les $a$, $b$, $c$, $d$ sont des entiers vérifiant les relations

$$(9)\quad \begin{cases} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0, \\ a_2 d_3 + b_1 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0, \end{cases}$$

système qui a fait l'objet des recherches de M. Hermite (voir *loc. cit.*).

Cela posé, nous allons voir que, $G$, $H$ et $G'$ étant supposés satisfaire à la relation (8), on peut trouver des entiers $(a, b, c, d)$ vérifiant les relations (9) et tels que $H_1$ soit l'inverse d'un nombre entier $D$. La relation (8) devra alors être susceptible de prendre la forme

$$\frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\,G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]\,H + (ad)_{02}\,G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + [(ab)_{03} + (ab)_{21}]\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')} = \frac{1}{D}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
a_0(\mathrm{D}d_1 - b_1) - a_1(\mathrm{D}d_0 - b_0) &= \lambda(nm' - mn'),\\
a_3(\mathrm{D}d_1 - b_1) - a_1(\mathrm{D}d_3 - b_3) &= \lambda(nq' - n'q),\\
a_0(\mathrm{D}d_3 - b_3) - a_3(\mathrm{D}d_0 - b_0) &= \lambda(qm' - q'm),\\
a_2(\mathrm{D}d_1 - b_1) - a_2(\mathrm{D}d_2 - b_2) &= \lambda(np_4 - n'p),\\
a_0(\mathrm{D}d_2 - b_2) - a_2(\mathrm{D}d_0 - b_0) &= \lambda(pm' - p'm),\\
a_2(\mathrm{D}d_3 - b_3) - a_3(\mathrm{D}d_2 - b_2) &= \lambda(qp' - pq'),
\end{aligned}$$

$\lambda$ étant un nombre évidemment rationnel.

On déduit de ces équations, à l'aide des relations (6),

$$\mathrm{D} = \lambda(qm' - mq' + pn' - p'n), \tag{9 bis}$$

et nous supposerons d'abord le coefficient de $\lambda$ différent de zéro.

Les binômes $nm' - mn'$, $nq' - n'q$, ..., $qp' - pq'$ n'étant pas tous nuls, soit $nm' - mn' \pm 0$.

Les équations précédentes se réduisent alors, en posant

$$\mathrm{D}d_0 - b_0 = \mathrm{A}_0, \quad \mathrm{D}d_1 - b_1 = \mathrm{A}_1, \quad \mathrm{D}d_2 - b_2 = \mathrm{A}_2, \quad \mathrm{D}d_3 - b_3 = \mathrm{A}_3,$$

à

$$(10) \quad \left\{\begin{array}{l}
a_2(nm' - mn') = a_0(np' - n'p) + a_1(pm' - p'm),\\
a_3(nm' - mn') = a_0(nq' - n'q) + a_1(qm' - q'm),\\
\mathrm{A}_2(nm' - mn') = \mathrm{A}_0(np' - n'p) + \mathrm{A}_1(pm' - p'm),\\
\mathrm{A}_3(nm' - mn') = \mathrm{A}_0(nq' - n'q) + \mathrm{A}_1(qm' - q'm),\\
\quad a_0\mathrm{A}_1 - a_1\mathrm{A}_0 = \lambda(nm' - mn');\\
\text{et les relations (9) se réduiront alors à}\\
a_0 d_3 + a_1 d_2 - a_2 d_1 - a_3 d_0 = 1,\\
a_0 c_3 + a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0 = 0,\\
\mathrm{A}_0 c_3 + \mathrm{A}_1 c_2 - \mathrm{A}_2 c_1 - \mathrm{A}_3 c_0 = -1,\\
\mathrm{A}_0 d_3 + \mathrm{A}_1 d_2 - \mathrm{A}_2 d_1 - \mathrm{A}_3 d_0 = 0,\\
c_0 d_3 + c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_3 d_0 = 0.
\end{array}\right.$$

Il s'agit maintenant de rechercher si l'on peut trouver des entiers $(a, \mathrm{A}, c, d)$, puis la quantité fractionnaire $\lambda$, satisfaisant aux relations (10), et $\lambda$ étant tel que la valeur de D tirée de l'équation (9 *bis*) soit entière.

5. Nous simplifierons les calculs en supposant $m' = 0$, $n = 0$, ce qui ne diminue en rien la généralité, car on peut supposer les

deux relations entre les périodes (n° 3), écrites de telle manière qu'elles ne renferment chacune que trois périodes; de plus on peut considérer $m$, $p$, $q$ d'une part, et $n'$, $p'$, $q'$ d'autre part, comme premiers entre eux, et l'on a d'ailleurs $m$ et $n'$ différents de zéro.

Les relations (10), après quelques modifications, vont alors s'écrire

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
& n'ma_2 = n'pa_0 + mp'a_1, \quad n'm\mathrm{A}_2 = n'p\,\mathrm{A}_0 + mp'\mathrm{A}_1 \\
& n'ma_3 = n'q\,a_0 + mq'a_1, \quad n'm\,\mathrm{A}_3 = n'q\,\mathrm{A}_0 + mq'\mathrm{A}_1, \\
& a_1 = \quad \lambda(-mn'c_3 + n'pc_1 + n'qc_0), \\
& a_0 = -\lambda(-mn'c_2 + mp'c_1 + mq'c_0), \\
& \mathrm{A}_1 = \quad \lambda(-mn'd_3 + n'qd_0), \\
& \mathrm{A}_0 = -\lambda(-mn'd_2 + mp'd_1 + mq'd_0), \\
& \lambda[mn'(c_2d_3 - c_3d_2) + mp'(c_3d_1 - c_1d_3) \\
& \quad + (mq' + n'p)(c_1d_2 - c_2d_1) \\
& \quad + (pq' - p'q)(c_0d_1 - c_1d_0) + n'q(c_0d_2 - c_2d_0)] = 1, \\
& c_0d_3 + c_1d_2 - c_2d_1 - c_3d_0 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous prendrons $\lambda = \frac{1}{\theta}$, $\theta$ désignant le plus grand commun diviseur entre

$$mn', \; mp', \; mq' + n'p, \; pq' - p'q, \; n'q,$$

et l'on verra bien facilement que $\theta$ divise $mq'$ et $n'p$, en se rappelant que $m, p$, $q$ d'une part, et $n'$, $p'$, $q'$ d'autre part, sont premiers entre eux.

Dans ces conditions, les valeurs de $a_1$, $a_0$, $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_0$ tirées des équations précédentes seront entières, quels que soient les $c$ et les $d$, et l'on voit sans peine que, $a_1$, $a_0$ et $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_0$ étant ainsi choisis, les valeurs de $a_2$, $a_3$, $\mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_3$ tirées des quatre premières équations (11) sont également entières : on trouve en effet

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \lambda[n'pc_2 - mp'c_3 + (qp' - pq')c_0], \\
a_3 &= \lambda[n'q\,c_2 - mq'c_3 + (pq' - p'q)c_1],
\end{aligned}
$$

et des valeurs analogues pour $\mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_3$.

Et de même la valeur de D tirée de l'équation (9 *bis*), qui s'écrira

$$\mathrm{D} = \lambda(-mq' + pn'),$$

est bien aussi entière.

Nous avons donc simplement à vérifier que l'on peut trouver des entiers $c_0, c_1, c_2, c_3$ et $d_0$, $d_1$, $d_2$ et $d_3$ satisfaisant aux deux dernières des équations (11). Ces équations sont

$$\begin{gathered}\alpha(c_2 d_3 - c_3 d_2) + \beta(c_3 d_1 - c_1 d_3)\\ + \gamma(c_1 d_2 - c_2 d_1) + \delta(c_0 d_1 - c_1 d_0) + \varepsilon(c_0 d_2 - c_2 d_0) = 1,\\ c_0 d_3 + c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_3 d_0 = 0,\end{gathered}$$

et les entiers $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et $\varepsilon$ sont premiers entre eux.

On s'assure aisément que l'on peut trouver des entiers $(c, d)$ vérifiant ces équations (6). Fait-on, par exemple, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$, $c_3 = 0$, si $\beta$ et $\delta$ ou $\delta$, $\gamma$, $\varepsilon$ et $\alpha$ ne sont pas nuls à la fois, les équations deviendront

$$c_0 = c_2 d_1,$$

puis

$$c_2(\delta d_1^2 - \gamma d_1 - \varepsilon d_0 + \alpha) - c_1(\beta + \delta d_0) = 1 :$$

telle est la seule relation entre $c_1$, $c_2$, $d_1$ et $d_0$. Prend-on convenablement $d_1$ et $d_0$,

$$\beta + \delta d_0 \quad \text{et} \quad \delta d_1^2 - \gamma d_1 - \varepsilon d_0 + \alpha$$

seront premiers entre eux. Pour le voir bien nettement, remarquons que

$$\beta, \ \delta, \ \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta d_1^2 - \gamma d_1 + \alpha$$

seront, si $d_1$ est convenablement pris, premiers entre eux, et l'on peut d'ailleurs évidemment supposer que

$$\delta^2 d_1^2 - \gamma\delta d_1 + \alpha\delta + \beta\varepsilon$$

n'est pas nul, si $\delta$ et $\varepsilon$ ne sont pas tous deux nuls.

On a donc deux expressions

$$M + N d_0, \quad M_1 + N_1 d_0,$$

où

$$M, N, M_1 \quad \text{et} \quad N_1$$

sont premiers entre eux et $MN_1 - M_1 N$ n'étant pas nul, et l'on a alors simplement à vérifier que $d_0$ peut être pris de manière que ces expressions soient premières entre elles, comme on le voit immédiatement. Si $\delta$ et $\varepsilon$ sont nuls à la fois, on reconnaît de suite que

$$\beta \quad \text{et} \quad -\gamma d_1 + \alpha$$

seront, pour $d_1$ convenablement choisi, premiers entre eux. Donc, en résumé, on pourra satisfaire à l'équation

$$c_2(\delta d_1^2 - \gamma d_1 - \varepsilon d_0 + \alpha) - c_1(\beta + \delta d_0) = 1,$$

si $\beta$ et $\delta$ ou $\delta$, $\gamma$, $\varepsilon$ et $\alpha$ ne sont pas nuls à la fois.

Le second de ces cas particuliers se traite immédiatement; que l'on prenne alors, en effet,

$$d_1 = 0, \quad c_1 = 1,$$

on aura les équations

$$\begin{aligned} \beta d_3 + \delta d_0 &= -1, \\ c_0 d_3 + d_2 &= c_3 d_0, \end{aligned}$$

et l'on peut y satisfaire, puisque $\beta$ et $\delta$ sont ici premiers entre eux.

Examinons enfin le cas où $\beta$ et $\delta$ seront nuls à la fois. Nous ferons

$$c_2 = 0, \quad d_2 = 1,$$

et les équations deviendront

$$\begin{aligned} \gamma c_1 + \varepsilon c_0 - \alpha c_3 &= 1, \\ c_0 d_3 + c_1 &= c_3 d_0; \end{aligned}$$

la seconde équation donne $c_1$ et la première devient alors

$$c_3(\gamma d_0 - \alpha) + c_0(\varepsilon - \gamma d_3) = 1,$$

évidemment résoluble.

7. Dans les calculs précédents (n° 4), nous avons supposé que $nm' - mn'$ était différent de zéro; mais, les binômes $nm' - mn'$, $nq' - n'q, \ldots, qp' - pq'$ n'étant pas tous nuls, on pourra toujours opérer en suivant une voie analogue à celle qui vient d'être indiquée. Il faut maintenant voir quel parti on peut tirer du résultat précédent. Si la valeur de D, donnée par l'équation (9 *bis*)

$$D = \lambda(qm' - mq' + pn' - p'n),$$

n'est pas nulle, la valeur de $H_1$ sera la quantité finie $\frac{1}{D}$, et $G_1$ et $G'_1$ auront des valeurs finies bien déterminées. Nous aurons alors, dans ce cas, un tableau de périodes intégrales normales

$$\begin{matrix} 0 & 1 & G'_1 & \frac{1}{D} \\[1ex] 1 & 0 & \frac{1}{D} & G_1 \end{matrix}$$

mais une circonstance particulière doit nous arrêter maintenant : je veux parler du cas où l'on aurait $D = 0$ ; les valeurs de $G_1$, $H_1$ et $H'_1$ seraient infinies et le résultat se présenterait sous une forme illusoire. Nous allons montrer que cette circonstance ne peut se rencontrer, c'est-à-dire que l'on ne peut avoir

$$qm' - mq' + pn' - p'n = 0.$$

La relation entre G, H et G' serait, en effet, dans ce cas (équation 8)

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} nm' - mn' + (pm' - p'm)G' + 2(qm' - mq')H \\ \qquad + (nq' - n'q)G + (qp' - p'q')(H^2 - GG') = 0 \end{array} \right.$$

avec la condition

$$qm' - mq' = np' - pn',$$

et nous allons voir qu'une pareille relation ne peut exister entre les trois quantités H, G et G', qui jouissent, comme on sait, de la propriété suivante. On a, en désignant par $h$, $g$ et $g'$ les coefficients de $i$ dans ces quantités,

$$h^2 - gg' < 0.$$

Considérons d'abord le cas où $p'q - p'q = 0$. On peut alors supposer que $p' = 0$ et $q' = 0$, car les relations entre les périodes (n° 3) peuvent, dans ce cas, être remplacées par deux autres, dont la seconde ne renfermera que A et B. On aura donc

$$nm' - mn' + pm'G' + 2qm'H - n'qG = 0$$

avec la condition

$$qm' = -pn';$$

on aura par suite

$$pm'g' + 2qm'h - n'qg = 0.$$

$p$ et $h$ ne sont évidemment pas nuls à la fois, ni $m'$ et $n'$. Soit $n$ différent de zéro, on aura, en substituant $p = -\frac{qm}{n'}$ dans la seconde équation,

$$-qm'^2g' + 2qm'n'h - n'^2qg = 0.$$

Or $q$ n'est pas nul, parce que $p$ serait alors nul ; on a donc

$$m'^2g' - 2m'n'h + n'^2g = 0,$$

et, comme $m'$ et $n'$ ne sont pas nuls tous deux, il en résulte nécessairement

$$h^2 - gg' > 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

La vérification directe du théorème précédent nous entraînerait dans des calculs pénibles; la voie indirecte que nous allons exposer nous conduira bien plus simplement au résultat. Partons d'un système d'intégrales normales pour lesquelles H, G et G', satisfaisant d'ailleurs à la relation nécessaire $h^2 - gg' < 0$, vérifieraient l'équation (12), et l'on suppose d'ailleurs que $pq' - p'q$ est différent de zéro.

Effectuons une transformation correspondant à l'entier positif $k$. Les coefficients $(a, b, c, d)$ de la transformation satisfont, comme on sait, aux relations (Hermite, *loc. cit.*)

$$\begin{aligned}
&a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0 = 0,\\
&a_0 c_3 + a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0 = 0,\\
&a_0 d_3 + a_1 d_2 - a_2 d_1 - a_3 d_0 = k,\\
&b_0 c_3 + b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0 = k,\\
&b_0 d_3 + b_1 d_2 - b_2 d_1 - b_3 d_0 = 0,\\
&c_0 d_3 + c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_3 d_0 = 0.
\end{aligned}$$

Nous allons prendre

$$\begin{aligned}
&b_0 = m', \quad b_1 = n', \quad b_2 = p', \quad b_3 = q',\\
&d_0 = m, \quad d_1 = n, \quad d_2 = p, \quad d_3 = q;
\end{aligned}$$

l'avant-dernière des équations précédentes se réduit à

$$m'q + n'p - np' - mq' = 0,$$

qui est bien effectivement vérifiée.

Soit encore

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0;$$

on aura

$$\begin{aligned}
&a_0 q' + a_1 p' = 0, \quad c_0 q' + c_1 p' = -k,\\
&a_0 q + a_1 p = k, \quad c_0 q + c_1 p = 0.
\end{aligned}$$

Prenons $k$ égal à la valeur absolue de $(pq' - p'q)$; il est clair qu'alors les équations précédentes donneront, pour $(a_0, a_1, c_0, c_1)$, des valeurs entières, et l'on aura alors tous les coefficients $(a, b, c, d)$ d'une transformation de degré $k (k > 0)$.

Or, après cette transformation, G, H et G′ sont remplacées par $G_1$, $H_1$ et $G'_1$, et l'on a

$$G_1 = \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\,G + 2(db)_{03}\,H + (db)_{02}\,G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + 2(ab)_{03}\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}.$$

$H_1$ et $G'_1$ sont données par des expressions analogues ayant même dénominateur; or le numérateur de $G_1$ est précisément

$$\begin{aligned} mn' - nm' + (n'q - nq')G + 2(m'q - mq')H \\ + (m'p - mp')G' + (p'q - pq')(H^2 - GG'), \end{aligned}$$

qui est nul d'après l'équation (12). D'ailleurs le dénominateur de $G_1$ est

$$a_0 n' - a_1 m' - a_1 q' G + 2a_0 q' H + a_0 p' G',$$

qui n'est certainement pas nul; le coefficient de $\sqrt{-1}$ est, en effet,

$$- a_1 q' g + 2a_0 q' h + a_0 p' g';$$

or $p'$ et $q'$ ne sont pas nuls à la fois, puisque $pq' - p'q$ est différent de zéro; $a_0$ et $a_1$ sont d'ailleurs proportionnels à $p'$ et à $-q'$, et l'expression précédente est, à un facteur constant près, différente de zéro

$$q'^2 g + 2p'q'h + p'^2 g',$$

et elle n'est pas nulle, puisque $h^2 - gg' < 0$.

Le dénominateur de $G_1$ n'étant pas nul, on a donc $G_1 = 0$, et $H_1$ et $G'_1$ ont des valeurs finies parfaitement déterminées. Or on sait que (Hermite, *loc. cit.*), après une transformation de degré quelconque $k$, $h^2 - gg'$ ne change pas de signe; en désignant donc par $g_1$, $h_1$ et $g'_1$ les coefficients de $i$ dans $G_1$, $H_1$ et $G'_1$, on devra avoir

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0,$$

puisque l'on a

$$h^2 - gg' < 0,$$

mais l'inégalité

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$$

est impossible, puisque $g_1 = 0$.

Nous arrivons donc à une contradiction, et il est par suite impossible de supposer, entre G, H et G′, une relation de la forme (12).

8. L'analyse qui vient d'être développée nous permet donc d'énoncer la proposition suivante :

*S'il existe une intégrale de première espèce correspondant à la relation algébrique*

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$

*qui ait seulement deux périodes, on pourra trouver un système d'intégrales normales, dont le tableau des périodes sera*

$$\begin{matrix} 0 & 1 & G & \frac{1}{D} \\ 1 & 0 & \frac{1}{D} & G' \end{matrix}$$

*où* D *désigne un entier réel et positif.*

Ce théorème donne immédiatement les valeurs de $k^2$, $l^2$ et $m^2$. On sait, en effet, que, pour un système d'intégrales dont le tableau des périodes serait

$$\begin{matrix} 0 & 1 & G & H \\ 1 & 0 & H & G' \end{matrix}$$

on a les valeurs de $k^2$, $l^2$, $m^2$ données par les formules de Richelot. Soient

$$\left.\begin{matrix} \vartheta_5 & \vartheta_{12} & \vartheta_{34} & \vartheta_0 \\ \vartheta_{01} & \vartheta_{02} & \vartheta_2 & \vartheta_1 \\ \vartheta_4 & \vartheta_{03} & \vartheta_3 & \vartheta_{04} \\ \vartheta_{23} & \vartheta_{13} & \vartheta_{24} & \vartheta_{14} \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{matrix} c_5 & c_{12} & c_{34} & c_0 \\ c_{01} & 0 & c_2 & 0 \\ c_4 & c_{03} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & c_{14} \end{matrix}\right.$$

les seize fonctions $\vartheta$ hyperelliptiques de M. Weierstrass et leurs valeurs correspondant aux arguments zéro ; on a

$$k^2 = \frac{c_{23}\,c_4}{c_{01}\,c_5}, \quad l^2 = \frac{c_{03}\,c_{23}}{c_{12}\,c_{01}}, \quad m^2 = \frac{c_{03}\,c_4}{c_{12}\,c_5},$$

et les $c$ sont des fonctions uniformes de G, H et G'. Fait-on dans ces formules $H = \frac{1}{D}$, on obtient l'expression générale des modules répondant au problème proposé, en y ajoutant toutefois, bien entendu, ceux qui s'en déduisent par une transformation du premier ordre. Écrivons donc

$$k^2 = F_1\left(G, \frac{1}{D}, G'\right), \quad l^2 = F_2\left(G, \frac{1}{D}, G'\right), \quad m^2 = F_3\left(G, \frac{1}{D}, G'\right).$$

Pour une valeur fixe donnée à l'entier D, $k^2$, $l^2$ et $m^2$ sont des fonctions de G et G', et il est aisé d'établir qu'entre ces trois fonctions existe une relation algébrique.

On peut, par exemple, raisonner comme il suit. Tous les modules qui se déduisent de $k^2$, $l^2$ et $m^2$ par une transformation du premier ordre sont des fonctions algébriques de ces quantités; une fonction symétrique $\Phi$ de tous ces modules reste d'ailleurs invariable quand on remplace G, H et G' par $G_1$, $H_1$ et $G'_1$ (*voir* n° 4). Or, quand H a la valeur particulière $\frac{1}{D}$, il y a une infinité de ces substitutions qui laissent H invariables, G et G' se transformant linéairement; G, par exemple, étant remplacé par

$$\frac{c_1 + c_2 G}{b_1 + b_2 G},$$

$b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ étant des entiers, tels que

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1,$$

avec les formes suivantes pour $b_2$, $b_1$ et $c_2$,

$$b_2 = m D^2, \quad b_1 = n D - 1, \quad c_2 = p D - 1,$$

où $m$, $n$, $p$ sont des entiers.

Trois fonctions symétriques $\Phi$ sont donc des fonctions de G et G' se reproduisant pour des groupes de substitutions effectuées séparément sur G et G', ces groupes rentrant dans la catégorie de ceux que M. Poincaré a appelés *fuchsiens;* elles sont donc liées par une relation algébrique, et il en est de même alors de $F_1$, $F_2$ et $F_3$.

Nous avons donc, pour une valeur donnée à l'entier D, la relation algébrique

$$f(k^2, l^2, m^2) = 0,$$

et la réduction à deux périodes peut s'effectuer, pour certaines intégrales, quand $k$, $l$ et $m$ vérifient cette relation.

Les fonctions $\Theta$ de deux variables pour $H = \frac{1}{D}$ peuvent d'ailleurs se ramener aisément aux fonctions $\Theta$ d'une seule variable, et c'est en suivant cette voie que l'on devra effectuer le calcul des modules $k$, $l$ et $m$.

9. Arrêtons-nous un instant sur un cas particulier. Tout d'a-

bord, pour $D = 1$, on a, comme on le voit immédiatement en se reportant aux expressions de $k^2$, $l^2$ et $m^2$,

$$k^2 = l^2,$$

et ce cas ne correspond pas, à proprement parler, à une intégrale hyperelliptique.

Soit maintenant $D = 2$. A ce cas se rattache l'exemple suivant, où l'on a

$$y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + c.$$

Tout d'abord, il est évident que les deux intégrales $\int \frac{dx}{y}$ et $\int \frac{x\,dx}{y}$, se ramenant, en prenant $x^2$ pour variable, à une intégrale elliptique, n'ont que deux périodes; mais effectuons complètement la réduction pour nous assurer que ce cas correspond à $D = 2$.

Nous pouvons écrire

$$y^2 = (x^2 - a_1^2)(x^2 - a_2^2)(x^2 - a_3^2).$$

Soient $M_1$, $M_2$ et $M_3$ les points $a_1$, $a_2$, $a_3$ et $M_4$, $M_5$, $M_6$ les points symétriques par rapport à l'origine. Nous considérons d'abord l'intégrale

$$\int_{0,y_0}^{x} \frac{dx}{y},$$

ou $y_0$ est une des déterminations de $y$ pour $x = 0$, et nous désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_6$ les valeurs de cette intégrale le long de $OM_1, OM_2, \ldots, OM_6$.

On a évidemment

$$A_4 = -A_1, \quad A_5 = -A_2, \quad A_6 = -A_3.$$

On peut prendre comme périodes normales de l'intégrale précédente

$$\omega_1 = 2A_1 - 2A_2, \qquad \omega_2 = 2A_2 - 2A_3,$$
$$\omega_3 = 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4, \quad \omega_4 = 2A_4 - 2A_5$$

(voir Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* cas des intégrales hyperelliptiques), qui se réduisent, dans ce cas particulier, à

$$\omega_1 = 2A_1 - 2A_2, \qquad \omega_2 = 2A_2 - 2A_3,$$
$$\omega_3 = 4A_1 - 2A_2 + 2A_3, \quad \omega_4 = 2A_2 - 2A_1,$$

et, en prenant ensuite la seconde intégrale

$$\int_{0,y_0}^{x} \frac{x\,dx}{y},$$

les valeurs des intégrales le long de $OM_1$, ..., $OM_6$ étant $A'_1$, $A'_2$, ..., $A'_6$, avec les relations évidentes

$$A'_4 = A_1, \quad A'_5 = A_2, \quad A'_6 = A_3,$$

nous avons les périodes

$$\omega'_1 = 2A'_1 - 2A'_2, \quad \omega'_2 = 2A'_2 - 2A'_3, \quad \omega'_3 = -2A'_2 + 2A'_3, \quad \omega'_4 = 2A'_1 - 2A'_2$$

avec la relation entre les périodes

$$-\omega_1\omega'_2 + \omega_2\omega'_1 - \omega_3\omega'_4 + \omega_4\omega'_3 = 0.$$

Mais on voit que

$$\omega_3 = \omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_4 = -\omega_1,$$

en tenant compte de la relation

$$2A_1 - 2A_2 + 2A_3 = 0,$$

et aussi

$$\omega'_3 = -\omega'_2, \quad \omega'_4 = \omega'_1,$$

Nous avons donc le système de périodes

$$\begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_2 & -\omega_1 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & -\omega'_2 & \omega'_1 \end{matrix}$$

que, par une transformation du premier degré, on peut remplacer par

$$\begin{matrix} 0 & \omega_2 & 2\omega_2 & -\omega_1 \\ 2\omega'_1 & -\omega_2 & 0 & \omega'_1 \end{matrix}$$

ce qui nous donne un système de périodes d'intégrales normales :

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{\omega_1}{2\omega_2} \\ 1 & -\frac{\omega'_2}{2\omega'_1} & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

On a par suite $D = 2$, comme nous voulions l'établir.

Remarquons que le cas considéré autrefois par Jacobi, ou

$$y^2 = x(1-x)(1-ax)(1-bx)(1-abx),$$

$a$ et $b$ étant deux constantes quelconques, rentre dans le cas que nous venons d'examiner.

Soient en effet, d'une manière générale, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ et $a_6$ les racines d'un polynôme du sixième degré ; on sait qu'on peut remplacer ce polynôme par un polynôme du cinquième degré, soit par exemple le suivant :

$$(1-t)(1-at)(1-bt)(1-ct),$$

en posant

$$a=\frac{(a_2-a_5)(a_1-a_3)}{(a_1-a_5)(a_2-a_3)},\quad b=\frac{(a_2-a_6)(a_1-a_3)}{(a_1-a_6)(a_2-a_3)},\quad c=\frac{(a_2-a_4)(a_1-a_3)}{(a_1-a_4)(a_2-a_3)};$$

or, si le polynôme du sixième degré ne renferme que des puissances paires de la variable, on aura

$$a_2=-a_1,\quad a_4=-a_3,\quad a_6=-a_5,$$

et l'on voit que dans ce cas $c=ab$.

**10.** Il résulte du théorème énoncé (n° 8) que s'il existe, pour un polynôme donné $R(x)$, une intégrale correspondante n'ayant que deux périodes, il en existera nécessairement une seconde. Dans certains cas particuliers, *il peut arriver qu'il n'y ait pas seulement deux intégrales, mais une infinité :* je vais indiquer un exemple de cette circonstance singulière.

Je considère la courbe du second genre

$$y^3=x(x-1)(x-a)^2,$$

et soient les deux intégrales de première espèce

$$\omega=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-a)\,dx}{y^2},\quad \upsilon=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{y}.$$

En posant

$$\Omega=(1-\lambda)\int_0^a\frac{(x-a)\,dx}{y^2},\quad \Omega'=(1-\lambda)\int_1^a\frac{(y-a)\,dx}{y^2},$$

$$U=(1-\lambda^2)\int_0^a\frac{dx}{y},\quad U'=(1-\lambda^2)\int_1^a\frac{dx}{y},$$

où

$$\lambda=\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3},$$

on a, pour le tableau des périodes correspondantes de ces intégrales,

$$\Omega,\ \Omega',\ \lambda\Omega,\ \lambda\Omega',$$
$$U,\ U',\ \lambda^2 U,\ \lambda^2 U;$$

on reconnaît d'ailleurs que

$$U = -\lambda^2\Omega,\ U' = \Omega'.$$

Ceci posé, A et B étant deux constantes, l'intégrale $A\omega + B\upsilon$ a pour périodes

$$(A - B\lambda^2)\Omega,\quad (A+B)\Omega',\quad (A-B)\lambda\Omega,\quad (A\lambda + B\lambda^2)\Omega'.$$

Si donc il est possible de choisir A et B de manière que

$$\begin{aligned} m\,(A - B\lambda^2) &= (A - B\lambda), \\ m'(A + B) &= A\lambda + B\lambda^2, \end{aligned}$$

$m$ et $m'$ étant des quantités réelles commensurables, l'expression $A\omega + B\upsilon$ n'aura que deux périodes. Or l'élimination de A et B entre les équations précédentes conduit à l'unique relation

$$mm' - m + 2m' + 1 = 0.$$

L'une de ces quantités, $m$ par exemple, peut être prise arbitrairement et l'on en conclut que l'intégrale de première espèce

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(1 - m\lambda)(x - a) + (1 - m\lambda^2)y}{y^2}\,dx$$

n'a que deux périodes, $m$ étant une quantité réelle commensurable quelconque.

**11.** Revenons maintenant au cas général. Pour une valeur donnée à l'entier D et aux constantes G et G′ dans les expressions de $k^2$, $l^2$ et $m^2$ (n° 8), nous savons qu'il existe deux intégrales de première espèce correspondant au polynôme $R(x)$, n'ayant que deux périodes.

Soit l'une d'entre elles

$$u = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(P + Qx)\,dx}{y},$$

ayant précisément pour périodes $0,\ 1,\ G,\ \frac{1}{D}$.

Nous voulons étudier maintenant la substitution algébrique qui transformera l'intégrale précédente en une intégrale elliptique. Établissons à cet effet la proposition suivante :

Soit la fonction $\Theta$ de Jacobi obtenue en faisant

$$2K = \frac{1}{D} \quad \text{et} \quad 2iK' = G.$$

L'expression

$$\Theta\left[\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(P + Qx)\,dx}{y} - \alpha\right],$$

*où* $\alpha$ *désigne une constante arbitraire, est une fonction du point analytique* $(x, y)$ *qui a* D *racines.*

Supposons que les racines de $R(x)$ se présentent autour du point $(x_0, y_0)$ dans l'ordre $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, et figurons par $a_6$ le point à l'infini (ce sera, si l'on veut, sur la sphère).

Un système de périodes normales de l'intégrale considérée pourra être représenté (*voir* Briot, *Fonctions abéliennes*) par

$$2A_1 - 2A_2, \quad 2A_2 - 2A_3, \quad 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4, \quad 2A_4 - 2A_5,$$

en désignant par $A_i$ l'intégrale rectiligne prise depuis $(x_0, y_0)$ jusqu'en $a_i$.

Nous pouvons supposer ici que

$$2A_1 - 2A_2 = 1, \quad 2A_2 - 2A_3 = G, \quad 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4 = 0, \quad 2A_4 - 2A_5 = \frac{1}{D}.$$

Faisons dans le plan des coupures en joignant les points $a_1$, $a_2, \ldots, a_6$ au point $x_0$.

L'intégrale $u$ sera alors une fonction uniforme du point $(x, y)$ et la restriction apportée par les coupures ne change pas évidemment le nombre des racines. Au point géométrique $x$ correspondent deux points analytiques $x, y$ et $x, -y$ avec les valeurs $u$ et $u' = 2A_1 - u$. Nous avons donc à chercher le nombre des racines du produit

$$\Theta(u - \alpha)\,\Theta(u' - \alpha).$$

Le nombre des racines sera donné par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int d\log\Theta(u - \alpha)\Theta + \int d\log\Theta(u' - \alpha)\right],$$

l'intégrale étant prise le long du contour dans le sens marqué par les flèches ; ou bien, en supposant l'une des intégrations faite dans le sens direct, l'autre dans le sens inverse,

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int d\log\theta(u'-\alpha)-\int d\log\theta(u-\alpha)\right].$$

Désignons par $m'$ le point variable sur le contour relatif à la première intégrale et par $m$ celui qui est relatif à la seconde, et supposons que ces points marchent de manière à se correspondre de part et d'autre d'une coupure $a$.

Nous allons calculer

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int d\log\frac{\theta(u'-\alpha)}{\theta(u-\alpha)}=\frac{1}{2\pi i}\int d\log H,$$

en posant

$$H=\frac{\theta(u'-\alpha)}{\theta(u-\alpha)}.$$

Prenons successivement les lacets.

Nous avons, pour $a_1$, $u'=u$, donc $H=1$, et, par suite, la partie de l'intégrale est nulle.

Pour le lacet $a_2$, on a

$$u'-u=2A_2-2A_1=-1,$$

donc $H=1$, et l'on a encore zéro dans l'intégrale.

Pour le lacet $a_3$,

$$u'-u=2A_2-2A_3-(2A_1-2A_2)=G-1,$$

donc

$$H=\frac{\theta(u-\alpha+G-1)}{\theta(u-\alpha)}=e^{-2\pi i D(u-\alpha+G)};$$

car on a

$$\theta\left(u+\frac{1}{D}\right)=\theta(u)\quad\text{et}\quad\theta(u+G)=e^{-2\pi i D(u+G)}\theta(u),$$

donc

$$d\log H=-2\pi i D.du,$$

et, en intégrant, on aura

$$-2\pi i D.2A_3.$$

Pour le lacet $a_4$,

$$u'-u=G,$$

et l'on a, dans l'intégrale,

$$2\pi i D.2A_4.$$

Pour le lacet $a_3$, il vient

$$u' - u = G + \frac{1}{D},$$

et l'on a

$$-2\pi i D . 2 A_5.$$

Il vient enfin, pour le lacet $a_6$,

$$u' - u = G + \frac{1}{D},$$

ce qui donne

$$2\pi i D . 2 A_6.$$

Nous avons donc, en faisant la somme,

$$2\pi i D(-2A_3 + 2A_4 - 2A_5 + 2A_6)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2\pi i D(2A_1 - 2A_2),$$

c'est-à-dire $2\pi i D$.

Le nombre des racines est, par suite, $\frac{2\pi i D}{2\pi i}$ ou D.

12. Considérons maintenant l'équation

$$(1) \qquad \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(P + Qx)\,dx}{y} = u;$$

la fonction $x$ de $u$ sera racine d'une équation algébrique dont les coefficients seront des fonctions doublement périodiques de $u$.

Soit $\operatorname{sn} x$ la fonction elliptique correspondant aux valeurs indiquées précédemment de K et K' et soit $A_1$ avec la même signification que plus haut; nous venons de montrer que le produit

$$\Theta(u)\Theta(2A_1 - u)$$

est une fonction du point $(x, y)$ ayant D racines. Or considérons maintenant l'expression

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(2A_1 - u);$$

il est clair qu'elle est une fonction rationnelle de $x$ et $y$, car elle n'a qu'une valeur pour chaque valeur de ce couple; mais aux deux points analytiques $(x, y)$ et $(x, -y)$ correspond aussi la même valeur, car $u$ et $2A_1 - u$ se permutent simplement. Le produit précédent est une fonction rationnelle de $x$, et, d'après le théorème précédent, le numérateur et le dénominateur de cette fraction rationnelle seront des polynômes de degré D. La fonction $x$ de $u$, définie par l'équation (1), sera donc donnée par une équation de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(2A_1 - u),$$

$f$ et F étant des polynômes de degré D.

On voit, par suite, que l'entier D n'est autre chose que le degré de l'équation algébrique donnant $x$ en fonction de $u$.

13. On peut faire servir la relation précédente elle-même à la détermination des coefficients de la fraction rationnelle $\frac{f}{F}$. Remarquons tout d'abord que P et Q peuvent être considérés comme connus. Dans le cas général, P et Q sont en effet exprimés par des fonctions uniformes de G, H et G', comme on le voit, dans le Mémoire couronné de Rosenhain (*Savants étrangers*, 1851); il suffira de faire $H = \frac{1}{D}$. D'ailleurs, le module et le multiplicateur de la fonction $\operatorname{sn} x$, correspondant aux valeurs indiquées de K et de K', s'exprimeront aussi à l'aide de G par des expressions bien connues.

Or nous pouvons encore, pour simplifier, supposer que $(x_0, y_0)$ coïncide avec (0, 0), et c'est alors l'expression

$$\operatorname{sn}^2\left[\int_0^x \frac{(P + Qx)\,dx}{y}\right]$$

qui est une fonction rationnelle de $x$, dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré D. On développera cette expression suivant les puissances croissantes de $x$. Entre $D+1$ coefficients de ce développement, à partir du second, devra exister une relation récurrente dont on trouvera évidemment les coefficients par des équations du premier degré. La connaissance de cette relation entraînera celle du polynôme $F(x)$, et la méthode des coefficients indéterminés donnera de même, uniquement par des équations du premier degré, les coefficients du polynôme $f(x)$. Le problème se trouvera alors complètement résolu, et d'une manière explicite, car la transformation

$$\frac{f(x)}{F(x)} = z$$

transformera l'intégrale hyperelliptique en une intégrale elliptique. Ajoutons, en terminant, que dans un de ses Mémoires du *Journal de Crelle* et récemment dans son Ouvrage sur la théorie des équations différentielles (Leipzig, 1882), M. Kœnigsberger a donné de nombreux et intéressants exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques et s'est proposé de généraliser le problème de la transformation de Jacobi. On vient de voir que le degré de cette transformation, quand elle est possible, n'est autre que l'entier D qui figure dans les expressions générales que nous avons données de $k^2$, $l^2$ et $m^2$.