Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

THÉORÈME DE BEILINSON EXPLICITE

François Brunault

Tome 135
Fascicule 2

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 215-246

Bull. Soc. math. France
135 (2), 2007, p. 215–246

VALEUR EN 2 DE FONCTIONS *L* DE FORMES MODULAIRES DE POIDS 2 : THÉORÈME DE BEILINSON EXPLICITE

PAR FRANÇOIS BRUNAULT

RÉSUMÉ. — Nous montrons une version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$. Ce résultat est la première étape d'un travail reliant, d'une part, la valeur en 2 de la fonction L d'une forme primitive de poids 2, et d'autre part, la fonction dilogarithme associée à la courbe modulaire correspondante, dans l'esprit de la conjecture de Zagier pour les courbes elliptiques. Comme corollaire de notre théorème, dans le cas où N est premier, nous répondons à une question de Schappacher et Scholl concernant l'image de l'application régulateur de Beilinson.

ABSTRACT (*Value at* 2 *of* L*-functions of modular forms of weight* 2*: an explicit version of Beilinson's theorem*)

We prove an explicit version of Beilinson's theorem for the modular curve $X_1(N)$. This result is the first step of a work linking the value at 2 of the L-function of a newform of weight 2 on the one hand, and the dilogarithm function associated to the corresponding modular curve on the other, in the spirit of Zagier's conjecture for elliptic curves. As a corollary of our theorem, in the case N is prime, we answer a question raised by Schappacher and Scholl concerning the image of Beilinson's regulator map.

Texte reçu le 2 mars 2006, accepté le 15 mai 2006

FRANÇOIS BRUNAULT, Université de Lyon, Unité de mathématiques pures et appliquées, ENS, 69007 Lyon, France • *E-mail :* `brunault@umpa.ens-lyon.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F67, 11G40, 19F27.

Mots clefs. — K-théorie algébrique, conjecture de Beilinson, fonction L, valeur spéciale, régulateur, forme modulaire, courbe modulaire, courbe elliptique, dilogarithme.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2007/215/$ 5.00

1. Introduction

Soient $N \geq 1$ un entier et $X_1(N)$ la courbe modulaire (complète) définie sur $\mathbb{Q}$ associée au sous-groupe de congruence

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N},\ a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}. \tag{1}$$

Bloch et Beilinson [6], [4], [5], [22] ont développé des conjectures générales prédisant en particulier, dans le cas de la courbe $X_1(N)$, la valeur spéciale en $s = 2$ de la fonction $L(h^1(X_1(N)), s)$ à un facteur rationnel près. Ces travaux ont permis à Goncharov et Levin de démontrer la conjecture de Zagier, reliant la valeur spéciale $L(E, 2)$ associée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, et la fonction dilogarithme elliptique [27], [14].

La conjecture de Beilinson fait intervenir une *application régulateur* dont la source est le groupe de K-théorie algébrique $K_2(X_1(N))$ associé à $X_1(N)$. La définition de cette application est la suivante. Soit $F = \mathbb{Q}(X_1(N))$ le corps des fonctions de $X_1(N)$. Pour toutes fonctions rationnelles $u, v \in F^*$, la forme différentielle

$$\eta(u, v) = \log|u| \cdot \mathrm{d}\arg v - \log|v| \cdot \mathrm{d}\arg u \tag{2}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ hors des zéros et pôles de u et v dans $X_1(N)(\mathbb{C})$. On définit

$$\begin{aligned} \widehat{r}_N : K_2(F) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Omega^1(X_1(N)), \mathbb{R}), \\ \{u, v\} &\longmapsto \Big(\omega \mapsto \int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \eta(u, v) \wedge \omega\Big). \end{aligned} \tag{3}$$

L'application régulateur r_N s'obtient alors en composant $\widehat{r}_N$ avec l'homomorphisme naturel $K_2(X_1(N)) \to K_2(F)$. Nous écrirons

$$r_N : K_2\big(X_1(N)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\big(\Omega^1\big(X_1(N)\big), \mathbb{R}\big). \tag{4}$$

Après tensorisation de (4) par $\mathbb{C}$, nous obtenons une application, que nous noterons encore r_N, définie sur $K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ et à valeurs dans le dual de $S_2(\Gamma_1(N))$. Rappelons maintenant les résultats de Beilinson.

Soit $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ une forme parabolique *primitive* (propre pour l'algèbre de Hecke, nouvelle et normalisée), de caractère ψ. Soit χ un caractère de Dirichlet pair de niveau arbitraire. Beilinson a montré (voir [4], [23]) que la quantité $L(f, 2)L(f, \chi, 1)$ est égale à $\big\langle r_N(\gamma_{f,\chi}), f\big\rangle$ pour un certain élément $\gamma_{f,\chi} \in K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ défini à l'aide d'unités modulaires de niveau divisible par N. Un autre ingrédient important est l'existence d'un caractère χ tel que $L(f, \chi, 1)$ soit non nul. Cependant, la méthode de Beilinson souffre des imprécisions suivantes :

1) L'écriture de $\gamma_{f,\chi}$ comme symbole de Milnor n'est pas explicite.

2) Le régulateur associé à $\gamma_{f,\chi}$ est calculé à un facteur algébrique près.

3) Le caractère χ est choisi parmi une infinité de caractères.

Cet article précise les points 1) à 3) ci-dessus. Le résultat principal s'énonce de la manière suivante. Soit $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$ le groupe des unités modulaires définies sur $\mathbb{Q}$ de $X_1(N)$. Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair et non trivial, il existe une unique unité modulaire $u_\chi \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ satisfaisant

$$\log\big|u_\chi(z)\big| = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{s\to 1\\ \mathrm{Re}(s)>1}} \left(\sideset{}{'}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{\chi(n)\cdot \mathrm{Im}(z)^s}{|Nmz+n|^{2s}} \right) \qquad (z\in\mathcal{H}), \tag{5}$$

où le symbole $'$ indique la sommation sur $(m,n) \neq (0,0)$.

Théorème 1.1. — *Soit $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ une forme parabolique primitive, de caractère ψ. Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair, primitif et distinct de 1 et $\overline{\psi}$, le symbole $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ appartient à $K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, et nous avons*

$$L(f,2)L(f,\chi,1) = \frac{N\pi\tau(\chi)}{2\varphi(N)} \big\langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), f\big\rangle. \tag{6}$$

La démonstration du théorème 1.1 reprend la méthode de Beilinson en explicitant chacune de ses étapes. L'intérêt de la formule (6) réside dans le fait qu'elle utilise uniquement des unités modulaires de niveau N. Signalons aussi que Kato [15, § 7] et Scholl [25, Thm. 4.6.3] ont obtenu des formules explicites pour des intégrales de nature analogue. Le lien entre ces formules et la formule (6) n'est pas clair pour l'auteur.

Remarque 1.2. — Pour obtenir une information sur $L(f,2)$ à partir de la formule précédente, il est nécessaire que $L(f,\chi,1)$ soit non nul. Un théorème de Merel (voir l'appendice de [8]) entraîne l'existence d'un caractère pair χ modulo N tel que $L(f,\chi,1) \neq 0$. Il serait donc utile de lever l'hypothèse χ primitif dans le théorème 1.1, et de montrer que le caractère χ vérifiant $L(f,\chi,1) \neq 0$ peut être supposé distinct de 1 et $\overline{\psi}$.

Le membre de droite de (6) est lié [8, Prop. 17] à la fonction *dilogarithme* $G_{1,2}$ associée à $X_1(N)$, définie par Goncharov [13, Def. 9.1, p. 390]. Le théorème 1.1 peut donc être vu comme la première étape d'un travail reliant la valeur en 2 des fonctions L des formes modulaires de poids 2 d'une part, et le dilogarithme associé à $X_1(N)$ d'autre part, dans l'esprit de la conjecture de Zagier pour les courbes elliptiques.

Une idée de Merel (voir [8, Thm. 93]) permet d'exprimer le membre de droite de (6) comme combinaison linéaire explicite de symboles modulaires associés à f. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont essentiellement les périodes de la forme différentielle $\eta(u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi})$. Lorsque f est la forme primitive associée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, on peut alors obtenir une formule pour $L(E,2)$ en divisant les deux membres de (6) par la période réelle de E.

Ces deux résultats feront l'objet de publications ultérieures.

Le théorème 1.1 permet d'apporter une réponse à la question suivante, soulevée par Schappacher et Scholl, concernant l'image de l'application régulateur r_N [23, 1.1.3]. Notons $\widehat{K}_N$ le sous-groupe de $K_2(F)$ engendré par les symboles $\{u,v\}$ avec $u,v \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$, et posons

$$K_N := (\widehat{K}_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cap \big(K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\big). \tag{7}$$

Notons V_N l'espace d'arrivée de l'application régulateur (4).

Question 1.3. — Le groupe $r_N(K_N)$ engendre-t-il l'espace vectoriel réel V_N ?

Théorème 1.4. — *Lorsque $N = p$ est premier, le groupe $r_p(K_p)$ engendre V_p.*

Remarque 1.5. — Notons $\mathbb{T} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_2(\Gamma_1(N)))$ l'algèbre de Hecke, engendrée par les opérateurs de Hecke T_n $(n \geq 1)$ et les opérateurs diamants. Nous proposons les deux problèmes suivants, variantes de la question de Schappacher et Scholl :

1) Le groupe $r_N(K_N)$ engendre-t-il V_N comme $\mathbb{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$-module ?
2) Existe-t-il $\gamma \in K_N$ tel que $r_N(\gamma)$ engendre V_N comme $\mathbb{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$-module ?

Notre travail s'articule de la manière suivante. Les sections 2, 3 et 5 sont essentiellement des rappels sur des notions classiques : fonction de Green, séries d'Eisenstein et unités modulaires. La section 4, consacrée au calcul d'une intégrale par la méthode de Rankin-Selberg, constitue le cœur de la démonstration du théorème 1.1. Dans la section 6, nous construisons des éléments dans le groupe $K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ à partir de certaines unités modulaires de $X_1(N)$. Enfin, les sections 7 et 8 contiennent respectivement la preuve des théorèmes 1.1 et 1.4.

En terminant cette introduction, je souhaite remercier chaleureusement Loïc Merel et Jörg Wildeshaus pour leurs encouragements et conseils quant à la rédaction de cet article.

2. Fonction de Green sur une courbe

Soit X une surface de Riemann compacte, connexe, non vide. Une *forme volume* sur X est une 2-forme différentielle réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, partout non nulle et d'intégrale 1 (voir [18, II, §1], [17, p. 329]). Fixons une forme volume vol_X sur X.

Soient $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ la diagonale de $X \times X$ et $\mathbb{C}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X. Le diviseur d'une fonction méromophe $f \in \mathbb{C}(X)^*$ sera noté

$$(f) = \sum_{x\in X} \mathrm{ord}_x(f)\cdot x. \tag{8}$$

Le *support* de f, noté $\mathrm{Supp}(f)$, est l'ensemble des zéros et des pôles de f, ainsi

$$\mathrm{Supp}(f) = \big\{x \in X \mid \mathrm{ord}_x(f) \neq 0\big\}. \tag{9}$$

Nous rappelons maintenant les propriétés de la *fonction de Green associée à* X. Cette fonction joue le rôle de hauteur archimédienne en géométrie d'Arakelov [18, chap. II].

Proposition 2.1 (Arakelov [2]). — *Il existe une unique fonction*

$$G_X : X \times X - \Delta_X \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{10}$$

appelée fonction de Green associée à X (et à vol_X), *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et vérifiant les trois conditions suivantes.*

1) *Pour tout $x \in X$, nous avons*

$$\partial_y\bar{\partial}_y G_X(x,y) = i\pi\,\mathrm{vol}_X \qquad \big(y \in X - \{x\}\big). \tag{11}$$

2) *Pour tout $x \in X$ et pour toute coordonnée holomorphe locale $z(y)$ au point x vérifiant $z(x) = 0$, la fonction*

$$y \longmapsto G_X(x,y) - \log\big|z(y)\big|, \tag{12}$$

définie sur un voisinage épointé de x dans X, s'étend en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de x dans X.

3) *Pour tout $x \in X$, nous avons*

$$\int_{y\in X} G_X(x,y)\cdot \mathrm{vol}_X = 0. \tag{13}$$

Démonstration. — L'existence de G_X est démontrée par Arakelov [2, §1–2]. Coleman [18, II, §4] en a également donné une preuve. L'unicité de G_X résulte quant à elle facilement des propriétés 1), 2) et 3). □

Nous mentionnons maintenant, sans les démontrer, quelques propriétés supplémentaires de la fonction de Green.

4) La fonction G_X est symétrique : nous avons

$$G_X(x,y) = G_X(y,x) \qquad (x,y \in X,\ x \neq y). \tag{14}$$

5) La fonction G_X a une *singularité logarithmique* le long de Δ_X. Cela signifie que pour tout $x_0 \in X$ et pour toute coordonnée locale holomorphe $z(x)$ au point x_0, la fonction

$$(x,y) \longmapsto G_X(x,y) - \log|z(x) - z(y)| \tag{15}$$

s'étend en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de (x_0, x_0) dans $X \times X$.

6) Pour toute fonction méromorphe $f \in \mathbb{C}(X)^*$, il existe une constante $C_f \in \mathbb{R}$ telle que

$$\log\bigl|f(y)\bigr| = C_f + \sum_{x \in \operatorname{Supp}(f)} \operatorname{ord}_x(f) \cdot G_X(x,y) \qquad \bigl(y \in X - \operatorname{Supp}(f)\bigr), \tag{16}$$

Nous avons en outre $C_f = \int_X \log|f| \cdot \operatorname{vol}_X$.

7) En utilisant le langage des courants, nous pouvons condenser les propriétés 1) et 2) de la fonction G_X en une seule équation : pour tout $x \in X$, nous avons

$$\frac{1}{i\pi} \partial\bar{\partial} G_X(x,\cdot) = \operatorname{vol}_X - \delta_x, \tag{17}$$

où δ_x désigne le courant d'évaluation en x.

3. Séries d'Eisenstein

Dans cette section, nous suivons de près l'exposition remarquable de Siegel [26, p. 1–73]. Le lecteur pourra y trouver les démonstrations que nous avons omises.

Nous allons introduire certaines *séries d'Eisenstein*, fonctions analytiques-réelles sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$, invariantes sous l'action d'un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Soit $N \geq 1$ un entier.

Définition 3.1. — Pour $(u,v) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$, $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, posons

$$E_{u,v}(z,s) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{m \equiv u\,(N) \\ n \equiv v\,(N)}} \frac{\operatorname{Im}(z)^s}{|mz+n|^{2s}}, \tag{18}$$

où le symbole $'$ indique que l'on exclut le terme éventuel $(m,n) = (0,0)$.

Nous aurons également besoin de certaines combinaisons linéaires des séries $E_{u,v}$. Les séries suivantes sont un cas très particulier de *fonctions zêta d'Epstein.*

DÉFINITION 3.2. — Pour $(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$, $z \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, posons

$$\zeta_{a,b}(z,s) = \sideset{}{'}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{N}(ma+nb)} \cdot \mathrm{Im}(z)^s}{|mz+n|^{2s}}. \tag{19}$$

Par définition, nous avons

$$\zeta_{a,b} = \sum_{(u,v)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{N}(au+bv)} E_{u,v}. \tag{20}$$

D'autre part, la transformée de Fourier inverse donne

$$E_{u,v} = \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{N}(au+bv)} \zeta_{a,b}. \tag{21}$$

Pour $(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ et $z \in \mathcal{H}$ fixé, la fonction $s \mapsto \zeta_{a,b}(z,s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe [26, th. 3, p. 69]. Lorsque $(a,b) = (0,0)$, le prolongement a un unique pôle en $s = 1$; ce pôle est simple et de résidu égal à π. Lorsque $(a,b) \neq (0,0)$, le prolongement est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

NOTATION 3.3. — Pour $z \in \mathcal{H}$, posons

$$\zeta^*_{a,b}(z) = \begin{cases} \lim_{s\to 1} \left(\zeta_{a,b}(z,s) - \dfrac{\pi}{s-1}\right) & \text{si } (a,b) = (0,0), \\ \zeta_{a,b}(z,1) & \text{si } (a,b) \neq (0,0). \end{cases} \tag{22}$$

D'après (21), les fonctions $s \mapsto E_{u,v}(z,s)$ admettent également un prolongement méromorphe au plan complexe. Elles possèdent un unique pôle en $s = 1$; ce pôle est simple et de résidu égal à π/N^2. En accord avec la notation 3.3, nous posons

$$E^*_{u,v}(z) = \lim_{s\to 1} \left(E_{u,v}(z,s) - \frac{\pi}{N^2(s-1)}\right) \qquad \big((u,v) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2,\ z \in \mathcal{H}\big). \tag{23}$$

Passons maintenant aux deux *formules-limite de Kronecker*. Ces formules donnent une expression de $\zeta^*_{a,b}(z)$. Pour $z \in \mathcal{H}$, nous poserons $y = \mathrm{Im}(z)$. La première formule-limite [26, th. 1, p. 17] s'écrit

$$\zeta^*_{0,0}(z) = 2\pi\big(\gamma - \log 2 - \log\sqrt{y} - 2\log|\eta(z)|\big) \qquad (z \in \mathcal{H}), \tag{24}$$

où γ désigne la constante d'Euler et

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\frac{i\pi z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \mathrm{e}^{2i\pi nz}) \qquad (z \in \mathcal{H}). \tag{25}$$

La deuxième formule-limite de Kronecker [26, th. 2, p. 40] s'écrit de la façon suivante. Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Choisissons un couple de représentants $(\tilde{a},\tilde{b})$ de (a,b) dans $\mathbb{Z}^2$. Alors

$$\zeta^*_{a,b}(z) = \frac{2\pi^2\,\tilde{b}^2}{N^2} y - 2\pi \log \left|\vartheta\left(\frac{\tilde{a}-\tilde{b}z}{N}, z\right)\right|, \tag{26}$$

où nous avons posé, pour $w \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathcal{H}$,

$$\vartheta(w,z) = \mathrm{e}^{\frac{i\pi z}{6}}(\mathrm{e}^{i\pi w} - \mathrm{e}^{-i\pi w}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \mathrm{e}^{2i\pi(w+nz)})(1 - \mathrm{e}^{-2i\pi(w-nz)}). \tag{27}$$

Les séries d'Eisenstein $E_{u,v}$ vérifient la propriété de modularité suivante

$$E_{u,v}(gz,s) = E_{(u,v)g}(z,s) \qquad \big((u,v) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2,\ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big). \tag{28}$$

où $(u,v)g$ désigne le produit du vecteur ligne (u,v) par la matrice g. On déduit de (28)

$$E^*_{u,v}(gz) = E^*_{(u,v)g}(z) \qquad \big((u,v) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2, g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big). \tag{29}$$

En particulier, les séries $E^*_{u,v}(z)$ (et donc les séries $\zeta_{a,b}$) sont invariantes par la transformation $z \mapsto z+N$ et admettent un développement de Fourier (non holomorphe) en la variable $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi z}{N}}$. Ce développement de Fourier se déduit des formules-limite de Kronecker. Pour $z \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, posons $q = \mathrm{e}^{2i\pi z}$ et $q^\alpha = \mathrm{e}^{2i\alpha\pi z}$. Pour tout entier $r \geq 1$, notons $\sigma(r)$ la somme des diviseurs positifs de r. Nous avons alors

$$\zeta^*_{0,0}(z) = \frac{\pi^2 y}{3} - \pi \log y + 2\pi\Big(\gamma - \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sigma(r)}{r}(q^r + \bar{q}^r)\Big) \qquad (z \in \mathcal{H}). \tag{30}$$

Écrivons ensuite le développement de Fourier de $\zeta^*_{a,0}$, avec $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Notons $\zeta_N = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{N}}$. Nous avons alors, pour ,$z \in \mathcal{H}$

$$\zeta^*_{a,0}(z) = \frac{\pi^2 y}{3} - 2\pi \log|1 - \zeta_N^a| + \pi \sum_{r=1}^{\infty} \Big(\sum_{d\,|\,r} \frac{\zeta_N^{da} + \zeta_N^{-da}}{d}\Big)(q^r + \bar{q}^r). \tag{31}$$

Écrivons enfin le développement de Fourier de $\zeta^*_{a,b}$, avec $a,b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. Notons

$$B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

le deuxième polynôme de Bernoulli, et définissons une fonction 1-périodique $\overline{B}_2$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\overline{B}_2(x) = B_2\big(x - \lfloor x \rfloor\big) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{32}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier $\leq x$. Alors la quantité $\overline{B}_2(\tilde{b}/N)$ ne dépend pas du représentant $\tilde{b}$ de b dans $\mathbb{Z}$ et nous avons

$$\zeta^*_{a,b}(z) = 2\pi^2 \overline{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right) y + \pi \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cdot q^{\frac{r}{N}} + \bar{\alpha}_r \cdot \bar{q}^{\frac{r}{N}} \qquad (z \in \mathcal{H}), \tag{33}$$

où les coefficients α_r sont donnés par la formule

$$\alpha_r = \sum_{\substack{d \mid r \\ r/d \equiv b\,(N)}} \frac{\zeta_N^{-da}}{d} + \sum_{\substack{d \mid r \\ r/d \equiv -b\,(N)}} \frac{\zeta_N^{da}}{d} \qquad (r \geq 1). \tag{34}$$

Définition 3.4. — Pour toute fonction $\ell : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, nous définissons les séries d'Eisenstein E_ℓ et E^*_ℓ par

$$E_\ell = \sum_{v \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(v) E_{0,v} \quad \text{et} \quad E^*_\ell = \sum_{v \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(v) E^*_{0,v}. \tag{35}$$

Les propriétés suivantes des séries E_ℓ et E^*_ℓ nous seront utiles.

1) Les séries E_ℓ et E^*_ℓ, vues comme fonctions sur $\mathcal{H}$, sont invariantes sous l'action du groupe $\Gamma_1(N)$. Si M est un diviseur de N et ℓ_M est une fonction de $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, il en va de même des séries E_{ℓ_M} et $E^*_{\ell_M}$, puisque $\Gamma_1(N) \subset \Gamma_1(M)$. En particulier, toutes ces séries induisent des fonctions sur la courbe modulaire $Y_1(N)(\mathbb{C}) := \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$. De plus, ces fonctions admettent des singularités au plus logarithmiques en les pointes de $X_1(N)(\mathbb{C})$.
2) Les applications $\ell \mapsto E_\ell$ et $\ell \mapsto E^*_\ell$ sont $\mathbb{C}$-linéaires.

Notation 3.5. — La transformée de Fourier $\widehat{\ell} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de ℓ est définie par

$$\widehat{\ell}(b) = \sum_{v \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(v) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi bv}{N}} \qquad (b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}). \tag{36}$$

Nous considérerons également ℓ et $\widehat{\ell}$ comme des fonctions N-périodiques définies sur $\mathbb{Z}$. Le développement de Fourier de E^*_ℓ se déduit aisément de celui des séries $\zeta_{a,b}$.

Proposition 3.6. — *Soit $\ell : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction de somme nulle. La série d'Eisenstein E^*_ℓ admet le développement de Fourier*

$$E^*_\ell(z) = \Big(\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\ell(n)}{n^2}\Big) y + \frac{\pi}{N^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \Big(\sum_{d \mid r} d\big(\widehat{\ell}(d) + \widehat{\ell}(-d)\big)\Big)(q^r + \bar{q}^r). \tag{37}$$

Démonstration. — Nous avons

$$\begin{aligned} E_\ell^*(z) &= \sum_{v\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(v) E_{0,v}^*(z) \\ &= \sum_{v\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(v)\frac{1}{N^2} \sum_{(a,b)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi bv}{N}} \zeta_{a,b}^*(z) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{\ell}(b)\Big(\sum_{a\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \zeta_{a,b}^*(z)\Big). \end{aligned}$$

Puisque ℓ est de somme nulle, nous avons $\widehat{\ell}(0) = 0$ et le terme correspondant à $b = 0$ dans la somme ci-dessus disparaît. Nous déduisons de (33) que pour $b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $b \neq 0$, nous avons

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \zeta_{a,b}^*(z) = 2\pi^2 N \bar{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right)\cdot y + \pi\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\Big(\sum_{\substack{d\mid r\\ d\equiv b\,(N)}} d \;+ \sum_{\substack{d\mid r\\ d\equiv -b\,(N)}} d\Big)(q^r+\bar{q}^r).$$

Il en résulte

$$E_\ell^*(z) = \frac{2\pi^2}{N}\Big(\sum_{b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\widehat{\ell}(b)\bar{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right)\Big)\cdot y + \frac{\pi}{N^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\Big(\sum_{d\mid r} d\big(\widehat{\ell}(d)+\widehat{\ell}(-d)\big)\Big)(q^r+\bar{q}^r).$$

La fonction $\bar{B}_2$ est donnée par la série de Fourier suivante, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ [9, (1.56), p. 14] :

$$\bar{B}_2(x) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{\mathrm{e}^{2i\pi nx}}{n^2} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Nous en déduisons aisément

$$\sum_{b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\widehat{\ell}(b)\bar{B}_2(\frac{\tilde{b}}{N}) = \frac{N}{\pi^2}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{\ell(n)}{n^2},$$

ce qui achève de montrer (37). □

Il est amusant de constater que le développement de Fourier de la série d'Eisenstein E_ℓ^* fait intervenir naturellement la transformée de Fourier de ℓ.

4. Calcul d'une intégrale par la méthode de Rankin-Selberg

L'espace $S_2(\Gamma_1(N))$ des formes paraboliques de poids 2 pour le groupe $\Gamma_1(N)$ s'identifie canoniquement à l'espace $\Omega^1(X_1(N)(\mathbb{C}))$ des 1-formes différentielles holomorphes sur la surface de Riemann compacte $X_1(N)(\mathbb{C})$, au moyen de l'application $f \mapsto \omega_f := 2i\pi f(z)\mathrm{d}z$. Dans cette section, nous calculons l'intégrale

$$\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} E_\chi^* \cdot \omega_f \wedge \bar{\partial} E_{\widehat{\chi'}}^*, \tag{38}$$

lorsque f est une forme *primitive* (propre pour l'algèbre de Hecke, nouvelle et normalisée), et χ (resp. χ') est un caractère de Dirichlet pair modulo N (resp. modulo un diviseur M de N). Il n'est pas difficile de montrer que l'intégrale (38) converge absolument, en utilisant la propriété de singularités au plus logarithmiques des fonctions E_χ^* et $E_{\widehat{\chi'}}^*$.

Rappelons que la *série* L associée à une forme parabolique $f \in S_2(\Gamma_1(N))$, avec $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n \mathrm{e}^{2i\pi nz}$, est définie par

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s} \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}\Big). \tag{39}$$

Cette fonction admet un prolongement holomorphe au plan complexe.

Notation 4.1. — Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo $m \geq 1$, la *série* L *de* f *tordue par* χ est définie par

$$L(f,\chi,s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n \chi(n)}{n^s} \qquad \Big(\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}\Big), \tag{40}$$

où par convention $\chi(n) = 0$ lorsque $(n,m) > 1$.

Cette fonction admet aussi un prolongement holomorphe au plan complexe.

Théorème 4.2. — *Soit $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ une forme primitive, de caractère ψ. Soient χ un caractère pair modulo N et χ' un caractère pair modulo un diviseur M de N. Nous avons*

$$\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} E_\chi^* \cdot \omega_f \wedge \bar{\partial} E_{\widehat{\chi'}}^* = \begin{cases} -i\pi \dfrac{\varphi(N)}{M} \cdot L(f,2) L(f,\chi',1) & \textit{si } \psi = \chi \overline{\chi'_N}, \\ 0 & \textit{sinon}, \end{cases} \tag{41}$$

où χ'_N désigne le caractère de Dirichlet modulo N induit par χ'.

Nous allons reformuler le théorème 4.2 en utilisant la *forme modulaire universelle* [21].

Rappelons que l'*algèbre de Hecke* $\mathbb{T} \subset \operatorname{End}_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_1(N))$ est le sous-anneau engendré par tous les opérateurs de Hecke T_n $(n \geq 1)$ et les opérateurs diamants $\langle d \rangle$ $(d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$. Nous avons un isomorphisme canonique [21, lemma 9]

$$\mathbb{T} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(S_2(\Gamma_1(N)), \mathbb{C}), \quad T \longmapsto \big(f \mapsto a_1(Tf)\big),$$

où $a_1(.)$ désigne le premier coefficient de Fourier d'une forme modulaire. La série L (éventuellement tordue) de l'algèbre de Hecke est définie par

$$L(\mathbb{T}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \otimes \frac{1}{n^s}, \quad L(\mathbb{T}, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \otimes \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \Big(\operatorname{Re}(s) > \frac{3}{2}\Big). \tag{42}$$

Elle est à valeurs dans $\mathbb{T} \otimes \mathbb{C}$ et admet un prolongement holomorphe au plan complexe. Via l'isomorphisme (42), on a

$$\big\langle L(\mathbb{T}, s), f \big\rangle = L(f, s) \quad \textit{et} \quad \big\langle L(\mathbb{T}, \chi, s), f \big\rangle = L(f, \chi, s)$$

pour tout $f \in S_2(\Gamma_1(N))$. La fonction $L(\mathbb{T}, s)$ s'interprète aussi comme la fonction L de la forme modulaire universelle Ω définie par

$$\Omega = 2i\pi \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \mathrm{e}^{2i\pi n z} \mathrm{d}z \in \Omega^1\big(X_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}. \tag{43}$$

Pour tout caractère de Dirichlet ψ modulo N, notons

$$\mathbb{T}^{\psi} = \big\{ T \in \mathbb{T} \otimes \mathbb{C} \mid T \circ \langle d \rangle = \psi(d) \cdot T \text{ pour tout } d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \big\}. \tag{44}$$

la *composante ψ-isotypique* de $\mathbb{T} \otimes \mathbb{C}$. Nous avons une décomposition canonique de $\mathbb{T} \otimes \mathbb{C}$ en produit de sous-algèbres

$$\mathbb{T} \otimes \mathbb{C} \cong \prod_{\psi} \mathbb{T}^{\psi}, \tag{45}$$

le produit étant étendu aux caractères de Dirichlet ψ pairs modulo N. Les projections de $L(\mathbb{T}, s)$ et $L(\mathbb{T}, \chi, s)$ sur $\mathbb{T}^{\psi}$ seront notées respectivement $L(\mathbb{T}^{\psi}, s)$ et $L(\mathbb{T}^{\psi}, \chi, s)$.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant, qui entraîne le théorème 4.2.

Théorème 4.3. — *Soient χ un caractère de Dirichlet pair modulo N et χ' un caractère de Dirichlet pair modulo un diviseur M de N. En posant $\psi = \chi \overline{\chi'_N}$, nous avons*

$$\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} E^*_{\chi} \cdot \Omega \wedge \bar{\partial} E^*_{\widehat{\chi'}} = -i\pi \frac{\varphi(N)}{M} \cdot L(\mathbb{T}^{\psi}, 2) L(\mathbb{T}^{\psi}, \chi', 1). \tag{46}$$

Démonstration. — Nous pouvons distinguer deux grandes étapes. La première, de nature globale, utilise la méthode de Rankin-Selberg et exprime l'intégrale (46) en termes d'une convolution de séries de Dirichlet, cf. (54). Pour une introduction à la méthode de Rankin-Selberg, voir [28, 3. B]. La seconde étape, de nature locale, exprime la série de Dirichlet précédente comme un produit eulérien (lemme 4.4). Il est à noter que jusqu'au bout du calcul, nous tiendrons compte des facteurs locaux aux mauvaises places, c'est-à-dire aux nombres premiers divisant N.

Notons I le membre de gauche de (46). Montrons que I appartient à $\mathbb{T}^{\psi}$. Les séries d'Eisenstein E^*_{χ} et $E^*_{\widehat{\chi'}}$ vérifient, avec $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ et $z \in \mathcal{H}$,

$$E^*_{\chi}\big(\langle d\rangle z\big) = \bar{\chi}(d)E^*_{\chi}(z), \quad E^*_{\widehat{\chi'}}\big(\langle d\rangle z\big) = \chi'_N(d)E^*_{\widehat{\chi}}(z). \tag{47}$$

Si nous effectuons le changement de variables $z \mapsto \langle d\rangle z$ dans l'intégrale I, nous obtenons

$$I = \bar{\chi}(d)\chi'_N(d)\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} E^*_{\chi} \cdot \langle d\rangle^*\Omega \wedge \bar{\partial}E^*_{\widehat{\chi'}},$$

où $\langle d\rangle^*\Omega$ désigne l'image réciproque de la forme différentielle Ω par l'automorphisme $\langle d\rangle$. L'isomorphisme (42) étant compatible à l'action des opérateurs diamants, nous avons $\langle d\rangle^*\Omega = \Omega \otimes \langle d\rangle$, où $\langle d\rangle$ agit dans le membre de droite par multiplication sur le facteur $\mathbb{T}$ du produit tensoriel. Il en résulte

$$I \circ \langle d\rangle = \chi(d)\overline{\chi'_N}(d)I = \psi(d)I$$

pour tout $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, d'où $I \in \mathbb{T}^{\psi}$. Dans l'intégrale I, nous pouvons donc remplacer Ω par sa composante de caractère ψ

$$\Omega^{\psi} \in \Omega^1\big(X_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{T}^{\psi}, \tag{48}$$

Remarquons que

$$\langle d\rangle^*\Omega^{\psi} = \psi(d) \cdot \Omega^{\psi}$$

pour $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, c'est-à-dire $\Omega^{\psi} \in S_2(\Gamma_1(N), \psi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{T}^{\psi}$, où $S_2(\Gamma_1(N), \psi)$ désigne le sous-espace des formes de caractère ψ.

Pour calculer I, nous pouvons considérer l'intégrale étendue au domaine $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$. Nous allons remplacer E^*_{χ} par une somme indexée par $\Gamma_{\infty}\backslash\Gamma_0(N)$, où Γ_{∞} est le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices $\left(\begin{smallmatrix}\pm 1 & k\\ 0 & \pm 1\end{smallmatrix}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La fonction E^*_{χ} est définie en appliquant le procédé (23) à la fonction E_{χ}. Remarquons que le résidu en $s = 1$ de la fonction $s \mapsto E_{\chi}(z, s)$ est indépendant de z. Or

$$\int_{Y_1(N)(\mathbb{C})} \Omega^{\psi} \wedge \bar{\partial}E^*_{\widehat{\chi'}} = \int_{Y_1(N)(\mathbb{C})} \mathrm{d}\big(-E^*_{\widehat{\chi'}} \cdot \Omega^{\psi}\big) = 0,$$

d'après la formule de Stokes. Pour calculer I, nous pouvons donc remplacer E_χ^* par $E_\chi(.\,,s)$, puis faire $s=1$:

$$I = \big(I(s)\big)_{s=1} = \left(\int_{Y_1(N)(\mathbb{C})} E_\chi(.\,,s)\cdot\Omega^\psi \wedge \bar\partial E^*_{\widehat{\chi'}}\right)_{s=1}.$$

Le caractère analytique de la fonction $I(s)$ pour $s\neq 1$, et la possibilité d'intervertir le signe $\int$ et l'opération $(.)_{s=1}$, résultent du fait qu'en chaque pointe de $X_1(N)(\mathbb{C})$, la fonction $z\mapsto E_\chi(z,s)$ possède un développement de Fourier qui converge uniformément sur tout compact par rapport à s. Maintenant, nous avons

$$E_\chi(z,s) = \sum_{v\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(v)E_{0,v}(z,s) = \sum_{\substack{m\equiv 0\,(N)\\(n,N)=1}} \frac{\chi(n)y^s}{|mz+n|^{2s}}.$$

En introduisant le p.g.c.d. $d=(m,n)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
E_\chi(z,s) &= \sum_{\substack{d\geq 1\\(d,N)=1}} \sum_{\substack{m\equiv 0\,(N)\\(n,N)=1\\(m,n)=d}} \frac{\chi(n)y^s}{|mz+n|^{2s}}\\
&= \sum_{\substack{d\geq 1\\(d,N)=1}} \sum_{\substack{(\mu,\nu)=1\\d\mu\equiv 0\,(N)\\(d\nu,N)=1}} \frac{\chi(d)}{d^{2s}}\cdot\frac{\chi(\nu)y^s}{|\mu z+\nu|^{2s}}\\
&= L(\chi,2s)\sum_{\substack{(\mu,\nu)=1\\\mu\equiv 0\,(N)\\(\nu,N)=1}} \frac{\chi(\nu)y^s}{|\mu z+\nu|^{2s}}.
\end{aligned}$$

Or nous avons une bijection

$$\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N) \xrightarrow{\cong} \big\{(\mu,\nu)=1 \mid \mu\equiv 0\,(N)\big\}/\pm 1, \qquad \left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right] \longmapsto \big[(c,d)\big].$$

Puisque -1 agit sans point fixe sur l'ensemble des couples (μ,ν) ci-dessus, il vient

$$E_\chi(z,s) = 2L(\chi,2s)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \chi(\gamma)\,\mathrm{Im}(\gamma z)^s,$$

où nous avons posé $\chi(\gamma)=\chi(d)$ pour $\gamma=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(N)$. Pour $z\in\mathcal{H}$, notons $z=x+iy$ et posons

$$\Omega^\psi\wedge\bar\partial E^*_{\widehat{\chi'}} = F(z)\cdot\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}, \tag{49}$$

avec $F:\mathcal{H}\to\mathbb{T}^{\psi}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. La forme différentielle $\Omega^{\psi}\wedge\bar{\partial}E^{*}_{\widehat{\chi'}}$ est de caractère $\chi=\psi\,\overline{\chi'_N}$, tandis que $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y/y^2$ est invariante sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Nous avons donc

$$F(\gamma z)=\chi(\gamma)F(z)\qquad(\gamma\in\Gamma_0(N),\ z\in\mathcal{H}).\tag{50}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}I(s)&=2L(\chi,2s)\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\chi(\gamma)\,\mathrm{Im}(\gamma z)^s\cdot F(z)\cdot\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}\\&=2L(\chi,2s)\int_{\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\mathrm{Im}(\gamma z)^s\cdot F(\gamma z)\cdot\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}.\end{aligned}$$

L'espace $S_2(\Gamma_1(N))$ étant trivial pour $N=1$ ou 2, nous pouvons supposer $N\geq 3$; par suite le morphisme $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}\to\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$ est fini, de degré $\frac{1}{2}\varphi(N)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}I(s)&=\varphi(N)L(\chi,2s)\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\mathrm{Im}(\gamma z)^s\cdot F(\gamma z)\cdot\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}\\&=\varphi(N)L(\chi,2s)\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}\mathrm{Im}(z)^s\cdot F(z)\cdot\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}.\end{aligned}$$

La dernière égalité est le point-clé de la méthode de Rankin-Selberg.

Développons maintenant F en série de Fourier

$$F(x+iy)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{F}_m(y)\mathrm{e}^{2i\pi mx}.\tag{51}$$

Un calcul simple utilisant la définition de Ω^{ψ} et $E^{*}_{\widehat{\chi'}}$, ainsi que le développement de Fourier (37), donne

$$\widehat{F}_0(y)=-\frac{16i\pi^3}{M}y^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-4\pi ny}\qquad(y>0),\tag{52}$$

$$\text{avec}\quad c_n=T_n^{\psi}\cdot\sum_{d\,|\,n}d\chi'(d)\in\mathbb{T}^{\psi}\qquad(n\geq 1),\tag{53}$$

où nous notons T_n^{ψ} l'image de T_n dans $\mathbb{T}^{\psi}$ pour tout $n\geq 1$. Noter que dans l'unique cas $M=1$, la formule (37) ne s'applique pas à $f=\widehat{\chi'}$, mais (30) permet quand même de mener le calcul, aboutissant au même résultat. Il vient

$$\begin{aligned}I(s) &= \varphi(N)L(\chi,2s)\int_0^1\int_0^\infty y^s\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{F}_m(y)\mathrm{e}^{2i\pi mx}\cdot\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= \varphi(N)L(\chi,2s)\int_0^\infty y^s\widehat{F_0}(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\\ &= -\frac{16i\pi^3\varphi(N)}{M}L(\chi,2s)\sum_{n=1}^\infty c_n\int_0^\infty y^s\mathrm{e}^{-4\pi ny}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Puisque $\int_0^\infty y^s\mathrm{e}^{-4\pi ny}\mathrm{d}y = \Gamma(s+1)/(4\pi n)^{s+1}$, nous obtenons

$$I(s) = -\frac{16i\pi^3\varphi(N)}{M}\cdot\frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}}L(\chi,2s)\sum_{n=1}^\infty\frac{c_n}{n^{s+1}}, \tag{54}$$

les coefficients c_n étant donnés par (53). Nous voici arrivés au terme de la première étape du calcul.

Lemme 4.4 (une convolution de séries de Dirichlet). — *Soient ψ un caractère de Dirichlet modulo N et χ_1, χ_2 deux caractères de Dirichlet arbitraires. Posons*

$$\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n) = \sum_{d\,|\,n} d\chi_1(d)\chi_2\Big(\frac{n}{d}\Big) \qquad (n\geq 1). \tag{55}$$

Nous avons alors pour $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>\frac{5}{2}$

$$\sum_{n=1}^\infty T_n^\psi\cdot\frac{\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n)}{n^s} = \frac{L(\mathbb{T}^\psi,\chi_2,s)\cdot L(\mathbb{T}^\psi,\chi_1,s-1)}{L(\psi\chi_1\chi_2,2s-2)}, \tag{56}$$

où nous avons posé $L(\psi\chi_1\chi_2,s) = \sum_{n=1}^\infty\psi(n)\chi_1(n)\chi_2(n)/n^s$.

Démonstration. — Nous avons pour tout $\epsilon>0$ les estimations $T_n = O(n^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ et $\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n) = O(n^{1+\epsilon})$, ce qui montre la convergence absolue de la série du membre de gauche de (56) pour $\mathrm{Re}(s)>\frac{5}{2}$. La fonction arithmétique σ_{χ_1,χ_2} est convolution de deux fonctions multiplicatives. Elle est donc faiblement multiplicative *i.e.* vérifie

$$\sigma_{\chi_1,\chi_2}(mn) = \sigma_{\chi_1,\chi_2}(m)\sigma_{\chi_1,\chi_2}(n) \qquad \big((m,n)=1\big).$$

Il en va de même de la fonction $n\mapsto T_n^\psi\cdot 1/n^s$. Il suit que le membre de gauche de (56) admet l'expression en produit eulérien

$$\prod_{p\text{ premier}}\left(\sum_{a=0}^\infty T_{p^a}^\psi\cdot\frac{\sigma_{\chi_1,\chi_2}(p^a)}{p^{as}}\right). \tag{57}$$

D'autre part, nous avons formellement

$$L_p(\mathbb{T}^\psi, X) := \sum_{a=0}^{\infty} T^\psi_{p^a} \cdot X^a = \frac{1}{1 - T^\psi_p \cdot X + p\psi(p) \cdot X^2} \in \mathbb{T}^\psi[[X]], \tag{58}$$

où 1 désigne l'élément unité de $\mathbb{T}^\psi$. Nous pouvons calculer $\sigma_{\chi_1,\chi_2}(p^a)$ grâce à la multiplicativité de χ_1 et χ_2. Nous trouvons

$$\sigma_{\chi_1,\chi_2}(p^a) = \begin{cases} \dfrac{\chi_2(p)^{a+1} - (p\chi_1(p))^{a+1}}{\chi_2(p) - p\chi_1(p)} & \text{si } \chi_1(p) \neq 0 \text{ ou } \chi_2(p) \neq 0; \\ 1 & \text{si } \chi_1(p) = \chi_2(p) = 0 \text{ et } a = 0; \\ 0 & \text{si } \chi_1(p) = \chi_2(p) = 0 \text{ et } a \geq 1. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour p premier tel que $\chi_1(p) \neq 0$ ou $\chi_2(p) \neq 0$, le facteur local en p du produit eulérien (57) est donné par

$$\begin{aligned} &\frac{\chi_2(p)}{\chi_2(p) - p\chi_1(p)} \cdot \frac{1}{1 - T^\psi_p \cdot \chi_2(p)p^{-s} + \psi(p)\chi_2(p)^2 p^{1-2s}} \\ &\qquad - \frac{p\chi_1(p)}{\chi_2(p) - p\chi_1(p)} \cdot \frac{1}{1 - T^\psi_p \cdot \chi_1(p)p^{1-s} + \psi(p)\chi_1(p)^2 p^{3-2s}}, \end{aligned}$$

soit après simplifications

$$\bigl(1 - \psi(p)\chi_1(p)\chi_2(p) \cdot p^{2-2s}\bigr) \cdot L_p\bigl(\mathbb{T}^\psi, \chi_2(p)p^{-s}\bigr) \cdot L_p\bigl(\mathbb{T}^\psi, \chi_1(p)p^{1-s}\bigr), \tag{59}$$

et ce dernier résultat est encore valable lorsque $\chi_1(p) = \chi_2(p) = 0$. Pour tout caractère de Dirichlet ϵ, nous avons

$$\prod_{p \text{ premier}} L_p\bigl(\mathbb{T}^\psi, \epsilon(p)p^{-s}\bigr) = L(\mathbb{T}^\psi, \epsilon, s) \qquad \bigl(\mathrm{Re}(s) > \tfrac{3}{2}\bigr). \tag{60}$$

En prenant le produit sur tous les nombres premiers à partir de l'expression (59), nous obtenons le résultat souhaité. □

Suite et fin de la démonstration du théorème 4.3. Reprenons l'égalité (54). Utilisons le lemme 4.4 avec $\chi_1 = \chi'$ (modulo M) et $\chi_2 = 1$ (modulo 1). Il vient

$$\begin{aligned} I(s) &= -\frac{16i\pi^3\varphi(N)}{M} \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}} L(\chi, 2s) \frac{L(\mathbb{T}^\psi, s+1) \cdot L(\mathbb{T}^\psi, \chi', s)}{L(\psi\chi', 2s)} \\ &= -\frac{16i\pi^3\varphi(N)}{M} \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}} L(\mathbb{T}^\psi, s+1) \cdot L(\mathbb{T}^\psi, \chi', s), \end{aligned}$$

puisque $L(\psi\chi', s) = L(\psi\chi'_N, s) = L(\chi, s)$. La fonction

$$s \longmapsto N^{\frac{1}{2}s}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(\mathbb{T}, s)$$

admettant un prolongement *holomorphe* au plan complexe, il en va de même de la fonction $s \mapsto I(s)$. En évaluant en $s=1$, il vient finalement

$$I = I(1) = -i\pi\frac{\varphi(N)}{M} \cdot L(\mathbb{T}^{\psi}, 2)L(\mathbb{T}^{\psi}, \chi', 1).$$

Cela achève la démonstration du théorème 4.3. □

REMARQUE 4.5. — Il n'y a pas de raison *a priori* de se limiter à la torsion par un caractère dans le théorème 4.3. La formule (46) reste-t-elle valable si l'on remplace χ' par une application paire quelconque de $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$?

5. Unités modulaires

En vue d'obtenir une version explicite du théorème de Beilinson, il est nécessaire d'établir un lien précis entre les séries d'Eisenstein introduites dans la section 3 et les unités modulaires. Les résultats que nous présentons ici sont classiques [16].

Soit P_N l'ensemble des pointes de la courbe modulaire $X_1(N)(\mathbb{C})$, de sorte que $X_1(N)(\mathbb{C}) = Y_1(N)(\mathbb{C}) \sqcup P_N$. Par définition, une *unité modulaire* est une fonction méromorphe $u \in \mathbb{C}(X_1(N))^*$ vérifiant $\operatorname{Supp}(u) \subset P_N$ (par abus de langage, nous dirons que u est à support dans P_N). Le groupe des unités modulaires sera noté $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big)$. Notons $\operatorname{Div}^0(P_N)$ le groupe des diviseurs de degré 0 sur P_N. Le théorème de Manin-Drinfel′d [12] énonce que l'application naturelle

$$\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Div}^0(P_N) \otimes \mathbb{Q}, \quad u \otimes 1 \longmapsto (u) \otimes 1$$

est surjective. Nous en déduisons une suite exacte

$$0 \to \mathbb{C}^* \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \operatorname{Div}^0(P_N) \otimes \mathbb{C} \to 0. \tag{61}$$

L'ensemble P_N est décrit par $P_N = \Gamma_1(N)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbb{Q})$. Par définition, la *pointe infinie* $\infty \in P_N$ est la classe de $\infty \in \mathbf{P}^1(\mathbb{Q})$. Nous choisissons le modèle de $X_1(N)$ sur $\mathbb{Q}$ tel que cette pointe soit définie sur $\mathbb{Q}$ [10, 9.3.6].

Le groupe Γ_∞ opère par multiplication à droite sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et nous avons une bijection

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma_\infty \xrightarrow{\cong} \mathbf{P}^1(\mathbb{Q}), \qquad \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right] \longmapsto \frac{a}{c}.$$

Soit E_N l'ensemble des éléments d'ordre N du groupe additif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. On dispose d'une bijection $E_N \cong \Gamma_1(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ faisant correspondre à $x \in E_N$ la classe d'une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $(c,d) \equiv x \pmod N$. On en déduit les identifications suivantes

$$P_N \cong \Gamma_1(N)\backslash\mathbf{P}^1(\mathbb{Q}) \cong \Gamma_1(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma_\infty \cong E_N/\Gamma_\infty. \tag{62}$$

NOTATION 5.1. — Pour tout $(u,v) \in E_N$, nous notons $[u,v] \in P_N$ l'image par la bijection (62) de la classe de (u,v) dans E_N/Γ_∞.

LEMME 5.2. — *Pour toute application $\ell : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de somme nulle, la série d'Eisenstein E_ℓ^* induit une fonction $Y_1(N)(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, qui vérifie $\partial\bar{\partial}E_\ell^* = 0$.*

Démonstration. — Nous avons vu dans la section 3 que $E_\ell^* : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et induit une fonction sur $Y_1(N)(\mathbb{C})$. Montrons que cette dernière fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'identité (37) nous permet d'écrire $E_\ell^* = E_1 + E_2$, où E_1 (resp. E_2) est une fonction holomorphe (resp. antiholomorphe) sur $\mathcal{H}$. Notons $\pi : \mathcal{H} \to Y_1(N)(\mathbb{C})$ la projection naturelle. Soit $z_0 \in \mathcal{H}$. D'après [7, Ex. i), p. 75], nous pouvons trouver une coordonnée locale holomorphe u (resp. v) au point $z_0 \in \mathcal{H}$ (resp. $\pi(z_0) \in Y_1(N)(\mathbb{C})$), de telle sorte que la fonction π soit donnée au voisinage de z_0 par $v = \pi(u) = u^n$, où n est un entier ≥ 1 (l'indice de ramification de π en z_0). Dans ces coordonnées, nous avons donc

$$E_\ell^*(v) = E_1(u) + E_2(u). \tag{63}$$

Soit $\zeta_n = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Nous avons $E_1(u\zeta_n) + E_2(u\zeta_n) = E_1(u) + E_2(u)$ d'après l'équation (63). Par conséquent, la fonction

$$u \longmapsto E_1(u\zeta_n) - E_1(u) = E_2(u\zeta_n) - E_2(u)$$

est holomorphe et antiholomorphe, donc constante au voisinage de 0. Cette constante vaut $E_1(0) - E_1(0) = 0$, d'où $E_1(u\zeta_n) = E_1(u)$ et $E_2(u\zeta_n) = E_2(u)$. Donc E_1 (resp. E_2) induit une fonction holomorphe (resp. antiholomorphe) de v. D'après (63), la fonction E_ℓ^* est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\pi(z_0)$ dans $Y_1(N)(\mathbb{C})$ et vérifie $\partial\bar{\partial}E_\ell^* = 0$ sur ce voisinage. □

Toute unité modulaire $u \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big)$ induit une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$ et ne s'annulant pas. Cette fonction est invariante par $z \mapsto z+1$ et admet donc un développement de Fourier

$$u(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n \qquad (z \in \mathcal{H},\ q = \mathrm{e}^{2i\pi z}) \tag{64}$$

avec $a_{n_0} \neq 0$, de sorte que $n_0 = \mathrm{ord}_\infty(u)$. Nous définissons alors

$$\widehat{u}(\infty) := a_{n_0}, \tag{65}$$

et nous dirons que u est *normalisée* lorsque $\widehat{u}(\infty) = 1$. Par $\mathbb{C}$-linéarité, les définitions de (u), $\log|u|$ et $\widehat{u}(\infty)$ s'étendent au cas où u appartient au groupe $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes \mathbb{C}$. Remarquons que l'application $u \mapsto \widehat{u}(\infty)$ scinde la suite exacte (61).

Proposition 5.3. — *Soit $\ell : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction de somme nulle. Il existe une unique unité modulaire $u_\ell \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes \mathbb{C}$ vérifiant*

$$\log|u_\ell| = \frac{1}{\pi} \cdot E_\ell^* \quad \textit{et} \quad \widehat{u_\ell}(\infty) = 1 \in \mathbb{C}^* \otimes \mathbb{C}. \tag{66}$$

L'ordre de u_ℓ en une pointe $P = [u,v] \in P_N$ est donné par

$$\operatorname{ord}_P(u_\ell) = -\frac{1}{N \cdot (u,N)} \sum_{(a,b)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \widehat{\ell}(au+bv) \cdot \bar{B}_2\Big(\frac{\tilde{b}}{N}\Big). \tag{67}$$

De plus, l'application $\ell \mapsto u_\ell$ ainsi définie est $\mathbb{C}$-linéaire.

Démonstration. — Soit $P = [u,v] \in P_N$ une pointe, avec $(u,v) \in E_N$, et $g = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ une matrice telle que $(\gamma,\delta) \equiv (u,v) \pmod N$. D'après (29), nous avons

$$\begin{aligned} E_\ell^*(gz) &= \sum_{w\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(w) E_{0,w}^*(gz) \\ &= \sum_{w\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(w) E_{uw,vw}^*(z) \\ &= \sum_{w\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \ell(w) \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{N}(auw+bvw)} \cdot \zeta_{a,b}^*(z) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{(a,b)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \widehat{\ell}(au+bv) \cdot \zeta_{a,b}^*(z). \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\ell}(0) = 0$, nous pouvons omettre le terme $(a,b) = (0,0)$ dans la somme précédente. D'après les développements de Fourier (31) et (33), nous voyons que $E_\ell^*(gz)$ admet un développement de Fourier de la forme

$$E_\ell^*(gz) = K_P y + \alpha_{g,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{g,r} q^{\frac{r}{N}} + \beta_{g,r} \bar{q}^{\frac{r}{N}}, \tag{68}$$

où K_P, $\alpha_{g,r}$ et $\beta_{g,r}$ sont des nombres complexes (K_P ne dépend pas du choix de la matrice g). La constante K_P est donnée par

$$K_P = \frac{2\pi^2}{N^2} \sum_{(a,b)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \widehat{\ell}(au+bv) \cdot \bar{B}_2\big(\frac{\tilde{b}}{N}\big). \tag{69}$$

Un paramètre local en la pointe $P \in P_N$ est donné par

$$q_P = q^{\frac{(u,N)}{N}} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi(u,N)}{N} z}. \tag{70}$$

Fixons une forme volume $\mathrm{vol}_{X_1(N)}$ sur $X_1(N)(\mathbb{C})$ et notons $G_{X_1(N)}$ la fonction de Green associée, définie dans la section 2. Notons $\pi : \mathcal{H} \to Y_1(N)(\mathbb{C})$ la projection naturelle. D'après (12) et (70), nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} G_{X_1(N)}\big(P,\pi(gz)\big) &= \log|q_P| + O_{y\to\infty}(1) \\ &= -\frac{2\pi(u,N)}{N}\cdot y + O_{y\to\infty}(1) \qquad (z\in\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{71}$$

Définissons une fonction ϕ sur $Y_1(N)(\mathbb{C})$ par

$$\phi = E_\ell^* + \frac{N}{2\pi}\sum_{P\in P_N}\frac{K_P}{(u,N)}\cdot G_{X_1(N)}(P,.). \tag{72}$$

D'après le lemme 5.2, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après (12), (68) et (71), la fonction ϕ s'étend en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $X_1(N)(\mathbb{C})$. Nous avons sur $Y_1(N)(\mathbb{C})$ (et donc sur $X_1(N)(\mathbb{C})$)

$$\begin{aligned} \partial\bar\partial\phi &= \partial\bar\partial E_\ell^* + \frac{N}{2\pi}\sum_{P\in P_N}\frac{K_P}{(u,N)}\cdot i\pi\,\mathrm{vol}_{X_1(N)} \\ &= \frac{Ni}{2}\sum_{P\in P_N}\frac{K_P}{(u,N)}\cdot \mathrm{vol}_{X_1(N)}\,. \end{aligned}$$

D'après la formule de Stokes $\int_{X_1(N)(\mathbb{C})}\partial\bar\partial\phi = \int_{X_1(N)(\mathbb{C})}\mathrm{d}(\bar\partial\phi) = 0$. Comme $\mathrm{vol}_{X_1(N)}$ est d'intégrale 1, nous en déduisons

$$\sum_{P\in P_N}\frac{K_P}{(u,N)} = 0. \tag{73}$$

Il en résulte $\partial\bar\partial\phi = 0$, c'est-à-dire que ϕ est constante sur $X_1(N)(\mathbb{C})$. D'après la suite exacte scindée (61) et (73), il existe une unique unité modulaire $u_\ell \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbb{C}))\otimes\mathbb{C}$ telle que

$$\operatorname{div} u_\ell = -\frac{N}{2\pi^2}\sum_{P\in P_N}\frac{K_P}{(u,N)}\cdot[P] \quad \text{et} \quad \widehat{u_\ell}(\infty) = 1 \in \mathbb{C}^*\otimes\mathbb{C}. \tag{74}$$

D'après (16), il existe une constante $C\in\mathbb{C}$ telle que

$$\log|u_\ell| = C - \frac{N}{2\pi^2}\sum_{P\in P_N}\frac{K_P}{(u,N)}\cdot G_{X_1(N)}(P,\cdot). \tag{75}$$

Nous déduisons de (72) et (75) l'existence d'une constante $C'\in\mathbb{C}$ telle que

$$\log|u_\ell| = C' + \frac{E_\ell^*}{\pi}. \tag{76}$$

Pour déterminer C', considérons les développements de Fourier des deux membres de (76). D'après la définition (65) de $\widehat{u_\ell}(\infty)$, le terme constant du développement de Fourier de $\log|u_\ell|$ vaut $\log|\widehat{u_\ell}(\infty)|$, c'est-à-dire 0. Or, le terme constant du développement de Fourier (37) de E_ℓ^* est nul. Nous avons donc $C'=0$. L'identité (67) résulte de la définition de u_ℓ. D'après cette même identité, l'application $\ell \mapsto \operatorname{div} u_\ell$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Or, u_ℓ n'est autre que l'image de $\operatorname{div} u_\ell$ par l'application linéaire

$$\operatorname{Div}^0(P_N) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}^*(Y_1(N)(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C}$$

scindant la suite exacte (61). Donc $\ell \mapsto u_\ell$ est $\mathbb{C}$-linéaire. □

Nous appliquons maintenant la proposition 5.3 dans le cas où ℓ est un caractère de Dirichlet χ pair modulo N. Nous convenons d'étendre χ par 0 en une application de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. La *somme de Gauß* de χ est définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{v \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(v) \mathrm{e}^{\frac{2i\pi v}{N}}. \tag{77}$$

La condition que χ soit de somme nulle équivaut à ce que χ soit non trivial. Dans ce cas, l'unité modulaire u_χ est donc bien définie. La proposition 5.3 peut être précisée de la manière suivante.

Proposition 5.4. — *Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair et non trivial, le diviseur de u_χ est donné par*

$$(u_\chi) = -\frac{L(\chi,2)}{\pi^2} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(v) \cdot [0,v]. \tag{78}$$

Démonstration. — Calculons $\operatorname{ord}_P(u_\chi)$ pour $P = [u,v] \in P_N$. Nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_P(u_\chi) &= -\frac{1}{N \cdot (u,N)} \sum_{(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \widehat{\chi}(au+bv) \cdot \overline{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right) \\ &= -\frac{1}{N \cdot (u,N)} \sum_{(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \sum_{w \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(w) \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi(au+bv)w}{N}} \cdot \overline{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right).\end{aligned}$$

Or nous avons $\sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi auw}{N}} = 0$ si $u \neq 0$. Il en résulte $\operatorname{ord}_P(u_\chi) = 0$ si $u \neq 0$. Supposons maintenant $u = 0$, c'est-à-dire $P = [0,v]$ avec $v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_P(u_\chi) &= -\frac{1}{N} \sum_{b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \sum_{w \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(w) \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi bvw}{N}} \cdot \overline{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right) \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{\chi}(bv) \cdot \overline{B}_2\left(\frac{\tilde{b}}{N}\right) = -\overline{\chi}(v) \frac{L(\chi,2)}{\pi^2},\end{aligned}$$

comme dans la démonstration de la proposition 3.6. Il en résulte (78). □

REMARQUE 5.5. — Pour tout $v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\pm 1$, la pointe $[0,v]$ n'est autre que l'image de la pointe ∞ par l'opérateur diamant $\langle v \rangle$. Elle est donc définie sur $\mathbb{Q}$. De manière générale, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ agit sur P_N par la règle suivante [23, 3.0.2]

$$[u,v]^\sigma = [\epsilon(\sigma)^{-1}u, v] \qquad \big((u,v) \in E_N, \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\big), \tag{79}$$

où $\epsilon : \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ est le caractère cyclotomique, défini par

$$\sigma(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{N}}) = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi\epsilon(\sigma)}{N}}.$$

Nous allons maintenant étudier le corps de définition et le corps des coefficients de l'unité modulaire u_χ. Pour cela, nous aurons besoin de la définition suivante. Notons $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$ le groupe des unités de l'anneau des fonctions régulières de $Y_1(N)$. Il est naturellement inclus dans $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big)$. Pour tout sous-corps K de $\mathbb{C}$, désignons par $Y_1(N)_K$ l'extension des scalaires de $Y_1(N)$ à K.

DÉFINITION 5.6. — Soient $u \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ et K, L deux sous-corps de $\mathbb{C}$. Nous dirons que u est *définie sur* K et *à coefficients dans* L lorsque

$$u \in \mathcal{O}^*(Y_1(N)_K) \otimes_{\mathbb{Z}} L \subset \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

LEMME 5.7. — *Pour toute fonction de somme nulle $\ell : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, l'unité modulaire u_ℓ est définie sur $\mathbb{Q}$ et à coefficients dans $\mathbb{Q}(\widehat{\ell})$, le corps engendré par les valeurs de $\widehat{\ell}$.*

Démonstration. — Posons $L = \mathbb{Q}(\widehat{\ell})$. Notons $\mathrm{Div}^0_{\mathbb{Q}} P_N$ le sous-groupe de $\mathrm{Div}^0 P_N$ formé des diviseurs qui sont globalement invariants par $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathbb{Q}^* \otimes L & \longrightarrow & \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big) \otimes L & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0_{\mathbb{Q}} P_N \otimes L & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \mathbb{C}^* \otimes L & \longrightarrow & \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes L & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0 P_N \otimes L & \to 0, \end{array} \tag{80}$$

où les flèches verticales sont injectives et les lignes sont exactes (l'exactitude à droite de la ligne du haut résulte du théorème Hilbert 90). L'application $u \mapsto \widehat{u}(\infty)$ scinde de manière compatible les deux suites exactes du diagramme (80).

D'après (67), nous avons $\mathrm{ord}_P(u_\ell) \in L$ pour toute pointe $P \in P_N$. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Le changement de variables $a = \epsilon(\sigma)a'$ dans la formule (67) montre que

$$\mathrm{ord}_{P^\sigma}(u_\ell) = \mathrm{ord}_P(u_\ell) \qquad (P \in P_N, \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})).$$

En conséquence $D = \operatorname{div} u_\ell \in \operatorname{Div}^0_{\mathbb{Q}} P_N \otimes L$ et u_ℓ n'est autre que l'image de D par l'une des deux compositions du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Div}^0_{\mathbb{Q}} P_N \otimes L & \longrightarrow & \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big) \otimes L \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{Div}^0 P_N \otimes L & \longrightarrow & \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)(\mathbb{C})\big) \otimes L. \end{array}$$

Par suite, nous avons $u_\ell \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big) \otimes L$. □

6. K_2 de la courbe modulaire $X_1(N)$

Le groupe de K-théorie de Quillen $K_2(X_1(N))$ associé à la courbe $X_1(N)$ admet, après tensorisation par $\mathbb{Q}$, la description explicite suivante. Notons $F = \mathbb{Q}(X_1(N))$ le corps des fonctions de $X_1(N)$. L'application *symbole modéré*

$$K_2(F) \xrightarrow{\partial = (\partial_P)_P} \bigoplus_{P \in X_1(N)(\overline{\mathbb{Q}})} \mathbb{Q}(P)^*, \tag{81}$$

où $\mathbb{Q}(P)$ désigne le corps de définition de P, est définie par

$$\begin{aligned} \partial_P : K_2(F) &\longrightarrow \mathbb{Q}(P)^*, \\ \{f, g\} &\longmapsto (-1)^{\operatorname{ord}_P(f)\operatorname{ord}_P(g)} \big(f^{\operatorname{ord}_P(g)} / g^{\operatorname{ord}_P(f)}\big)(P). \end{aligned} \tag{82}$$

La localisation en K-théorie algébrique entraîne alors un isomorphisme [11]

$$K_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ker}(\partial \otimes \mathbb{Q}). \tag{83}$$

Étant données deux unités modulaires $u, v \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$, nous pouvons former le symbole de Milnor $\{u, v\} \in K_2(F)$. Dans la proposition suivante, nous donnons une condition suffisante sur u et v pour que $\{u, v\}$ appartienne à $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}$. Notons $D_N \subset X_1(N)(\mathbb{Q})$ l'orbite de la pointe infinie sous l'action des opérateurs diamants. Rappelons qu'une unité modulaire u est normalisée lorsque le développement de Fourier de u s'écrit $u(z) = \mathrm{e}^{2i\pi mz} + \sum_{n>m} a_n \mathrm{e}^{2i\pi nz}$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

Proposition 6.1. — *Soient $u, v \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$ des unités modulaires à support dans D_N et normalisées. Alors le symbole modéré de l'élément $2\{u, v\} \in K_2(F)$ est trivial. En particulier, on a $\{u, v\} \in K_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}$.*

Démonstration. — Il suffit d'établir $\partial_P\{u, v\} = \pm 1$ en tout point $P \in D_N$. Lorsque $P = \infty$, c'est évident puisque u et v sont supposées normalisées. D'autre part, nous avons

$$\partial_{[0,\lambda]}\{u, v\} = \partial_\infty\big\{\langle\lambda\rangle^* u, \langle\lambda\rangle^* v\big\} \qquad \big(\lambda \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\pm 1\big).$$

Les unités modulaires $\langle\lambda\rangle^* u$ et $\langle\lambda\rangle^* v$ sont à supports dans D_N. Il nous suffit donc de montrer l'assertion suivante : pour toute unité modulaire normalisée u, l'unité modulaire $u_\lambda := \langle\lambda\rangle^* u$ est plus ou moins normalisée *i.e.* vérifie $\widehat{u_\lambda}(\infty) = \pm 1$. Considérons le diviseur de u comme une fonction paire de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ dans $\mathbb{C}$, et décomposons cette fonction suivant les caractères de Dirichlet (pairs) modulo N

$$(u) = \sum_{\chi} a_\chi \cdot \ell_\chi \quad \text{avec} \quad \ell_\chi := \sum_{v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\pm 1} \chi(v) \cdot [0, v]. \tag{84}$$

Puisque le diviseur de u est de degré 0, la somme porte sur les caractères non triviaux. D'après la proposition 5.4 et puisque $L(\chi, 2) \neq 0$ pour tout caractère de Dirichlet χ, nous pouvons écrire

$$(u) = \sum_{\chi \neq 1} a'_\chi \cdot (u_\chi) \qquad (a'_\chi \in \mathbb{C}). \tag{85}$$

Dans le groupe $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big) \otimes \mathbb{C}$ noté multiplicativement, nous avons donc

$$u = C \cdot \prod_{\chi \neq 1} u_\chi \otimes a_\chi \qquad (C \in \mathbb{Q}^* \otimes \mathbb{C}). \tag{86}$$

Puisque les unités modulaires u et u_χ sont normalisées, on a $C = 1$ et

$$u_\lambda = \prod_{\chi \neq 1} u_{\chi,\lambda} \otimes a_\chi \qquad \big(u_{\chi,\lambda} = \langle\lambda\rangle^* u_\chi\big). \tag{87}$$

Le noyau du morphisme naturel $\mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^* \otimes \mathbb{C}$ étant réduit à $\{\pm 1\}$, il suffit de montrer que $u_{\chi,\lambda}$ est normalisée. Puisque $(u_{\chi,\lambda}) = \langle\lambda\rangle^*(u_\chi) = \overline{\chi}(\lambda) \cdot (u_\chi)$, nous pouvons écrire

$$u_{\chi,\lambda} = C_{\chi,\lambda} \cdot u_\chi \otimes \overline{\chi}(\lambda) \qquad (C_{\chi,\lambda} \in \mathbb{Q}^* \otimes \mathbb{C}). \tag{88}$$

Mais alors, pour $\lambda, \mu \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\pm 1$, on a d'une part

$$u_{\chi,\lambda\mu} = C_{\chi,\lambda\mu} \cdot u_\chi \otimes \overline{\chi}(\lambda\mu) \tag{89}$$

et d'autre part

$$u_{\chi,\lambda\mu} = \langle\mu\rangle^* u_{\chi,\lambda} = C_{\chi,\lambda} C_{\chi,\mu} \cdot u_\chi \otimes \overline{\chi}(\lambda)\,\overline{\chi}(\mu), \tag{90}$$

ce qui entraîne $C_{\chi,\lambda\mu} = C_{\chi,\lambda} C_{\chi,\mu}$. L'application $\lambda \mapsto C_{\chi,\lambda}$ est donc un homomorphisme de groupes. Puisque $\mathbb{Q}^* \otimes \mathbb{C}$ est un groupe sans torsion, on en déduit $C_{\chi,\lambda} = 1$, ce qui montre que $u_{\chi,\lambda} = u_\chi \otimes \overline{\chi}(\lambda)$ est normalisée. □

7. Démonstration du théorème 1.1

Donnons-nous une forme primitive $f \in S_2(\Gamma_1(N),\psi)$ et un caractère χ modulo N, pair, primitif et distinct de 1 et $\overline{\psi}$. Les unités modulaires $u_{\overline{\chi}}$ et $u_{\psi\chi}$ sont normalisées, et à support dans D_N d'après la proposition 5.4. Par conséquent, la proposition 6.1 s'applique et $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ appartient à $K_2(X_1(N))\otimes\mathbb{C}$. Le régulateur associé à cet élément s'exprime à l'aide d'une intégrale de Rankin-Selberg, comme le montre le calcul suivant.

$$\begin{aligned}\langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), f\rangle &= \int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \eta(u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}) \wedge \omega_f \\ &= \int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \big(\log|u_{\overline{\chi}}|\cdot \mathrm{d}\arg u_{\psi\chi} - \log|u_{\psi\chi}|\cdot \mathrm{d}\arg u_{\overline{\chi}}\big)\wedge\omega_f.\end{aligned}$$

Pour toute fonction rationnelle $u \neq 0$, on a

$$\mathrm{d}\arg u = \mathrm{d}\,\mathrm{Im}(\log u) = \mathrm{d}\left(\frac{\log u - \overline{\log u}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{\mathrm{d}\bar u}{\bar u}\right)$$
$$\mathrm{d}\log|u| = \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\left(\log u) = \mathrm{d}(\frac{\log u + \overline{\log u}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}\bar u}{\bar u}\right)$$

et par suite

$$\mathrm{d}\arg u \wedge \omega_f = -\frac{1}{2i}\frac{\mathrm{d}\bar u}{\bar u}\wedge\omega_f = i\mathrm{d}\big(\log|u|\cdot\omega_f\big).$$

Pour toutes fonctions rationnelles $u, v \neq 0$, une intégration par parties et la formule de Stokes donnent

$$\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \log|u|\cdot \mathrm{d}\big(\log|v|\cdot\omega_f\big) = -\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \log|v|\cdot\mathrm{d}\big(\log|u|\cdot\omega_f\big).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), f\rangle &= -2i\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \log|u_{\psi\chi}|\cdot\mathrm{d}\big(\log|u_{\overline{\chi}}|\cdot\omega_f\big) \\ &= 2i\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \log|u_{\psi\chi}|\cdot\omega_f\wedge\bar\partial\log|u_{\overline{\chi}}| \\ &= \frac{2i}{\pi^2}\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} E^*_{\psi\chi}\cdot\omega_f\wedge\bar\partial E^*_{\overline{\chi}}.\end{aligned}$$

Le caractère χ étant primitif, nous avons $\widehat{\chi} = \tau(\chi)\overline{\chi}$, d'où $E^*_{\widehat{\chi}} = \tau(\chi)E^*_{\overline{\chi}}$. On utilise alors le théorème 4.2 avec $M = N$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), f\rangle &= \frac{2i}{\pi^2\tau(\chi)}\int_{X_1(N)(\mathbb{C})} E^*_{\psi\chi}\cdot\omega_f\wedge\bar\partial E^*_{\widehat{\chi}} \\ &= \frac{2\varphi(N)}{N\pi\tau(\chi)}L(f,2)L(f,\chi,1).\end{aligned}$$

Cela montre (6) et achève la démonstration du théorème 1.1.

8. Question de Schappacher et Scholl

Schappacher et Scholl ont soulevé le problème suivant [23, 1.1.3] concernant l'image de l'application régulateur r_N définie en (4).

Rappelons que $F = \mathbb{Q}(X_1(N))$ désigne le corps des fonctions de $X_1(N)$. Notons $\widehat{K}_N$ le sous-groupe de $K_2(F)$ engendré par les symboles $\{u, v\}$ avec $u, v \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$ et posons

$$K_N := (\widehat{K}_N \otimes \mathbb{Q}) \cap \big(K_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}\big), \tag{91}$$

où l'intersection est définie via (83). De manière informelle, K_N est formé des éléments de $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}$ que l'on peut écrire en termes de symboles de Milnor associés à des unités modulaires de niveau N. Notons V_N l'espace d'arrivée de r_N.

QUESTION 1.3. — Le groupe $r_N(K_N)$ engendre-t-il l'espace vectoriel réel V_N ?

THÉORÈME 1.4. — Lorsque $N = p$ est premier, le groupe $r_p(K_p)$ engendre V_p.

Démonstration. — Rappelons succintement la définition des symboles de Manin [20]. Pour tous points $\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, notons $\{\alpha, \beta\}$ le chemin géodésique reliant α à β dans le demi-plan de Poincaré. Pour tout $x \in E_N$, choisissons une matrice $g_x = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $(c, d) \equiv x \pmod{N}$, et notons $\xi(x)$ l'image dans $X_1(N)(\mathbb{C})$ du chemin $\{g_x 0, g_x \infty\}$ (elle ne dépend pas du choix de la matrice g_x). Le cycle $\xi(x)$ est appelé *symbole de Manin* associé à x. D'après [20, 1.6], les symboles de Manin engendrent le groupe d'homologie relative $H_1(X_1(N)(\mathbb{C}), P_N, \mathbb{Z})$. Ils vérifient les *relations de Manin*

$$\xi(x) + \xi(x\sigma) = 0 \quad \text{et} \quad \xi(x) + \xi(x\tau) + \xi(x\tau^2) = 0 \qquad (x \in E_N), \tag{92}$$

avec $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, matrices d'ordres respectifs 2 et 3 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Supposons maintenant $N = p$ premier. L'ensemble des pointes de $X_1(p)(\mathbb{C})$ s'écrit

$$P_p = \big\{[0, \lambda], \lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\pm 1\big\} \sqcup \big\{[\lambda, 0], \lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\pm 1\big\}. \tag{93}$$

L'involution d'Atkin-Lehner $W_p : z \mapsto -1/(pz)$ sur $X_1(p)(\mathbb{C})$ échange les pointes $[0, \lambda]$ et $[\lambda, 0]$. Pour tout $\lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\pm 1$, notons $u_\lambda \in \mathcal{O}^*(Y_1(p)) \otimes \mathbb{Q}$ l'unique unité modulaire vérifiant

$$\operatorname{div} u_\lambda = [0, \lambda] - [0, 1] \quad \text{et} \quad \widehat{u_\lambda}(\infty) = 1, \tag{94}$$

ce qui est possible d'après le théorème de Manin-Drinfel'd [12] ou bien la proposition 5.4. D'après la proposition 6.1, nous avons

$$\{u_\lambda, u_\mu\} \in K_2\big(X_1(p)\big) \otimes \mathbb{Q} \qquad \big(\lambda, \mu \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\pm 1\big).$$

En particulier $\{u_\lambda, u_\mu\} \in K_p$. Notons 1_p le caractère trivial modulo p. Soient $\chi, \chi' \neq 1_p$ deux caractères pairs modulo p. Par linéarité et d'après (78), nous avons la formule suivante dans $V_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$$r_p\big(\{u_\chi, u_{\chi'}\}\big) = \frac{L(\chi,2)L(\chi',2)}{\pi^4} \sum_{\lambda,\mu \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\pm 1} \overline{\chi}(\lambda)\overline{\chi'}(\mu) r_p\big(\{u_\lambda, u_\mu\}\big).$$

Puisque $r_p\big(\{u_\chi, u_{\chi'}\}\big) \in r_p(K_p) \otimes \mathbb{C}$, il suffit de montrer que l'espace vectoriel complexe V engendré par les $r_p\big(\{u_\chi, u_{\chi'}\}\big)$ est égal à $V_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Les unités modulaires u_χ étant propres pour l'action des opérateurs diamants, il en va de même des symboles $\{u_\chi, u_{\chi'}\}$. L'application régulateur étant compatible aux diamants, il suit que l'espace V est stable sous l'action de ces opérateurs. Il suffit donc de montrer que pour tout caractère ψ modulo p, les composantes ψ-isotypiques de V et $V_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sont égales. Or nous avons $(V_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\psi \cong S_2(\Gamma_1(p), \psi)^\vee$, et puisque p est premier, l'espace $S_2(\Gamma_1(p), \psi)$ est engendré par les formes primitives de caractère ψ. Pour toute telle forme f, nous avons d'après le théorème 1.1

$$\big\langle r_p\big(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}\big), f\big\rangle = \frac{2(p-1)}{p\pi \cdot \tau(\chi)} \cdot L(f,2)L(f,\chi,1) \qquad (\chi \neq 1_p, \overline{\psi}).$$

Pour toute forme primitive f, on a $L(f,2) \neq 0$. L'endomorphisme de $S_2(\Gamma_1(p), \psi)$ associant à une forme primitive f la forme $L(f,2)f$ est donc un isomorphisme. On est finalement ramenés au problème suivant : montrer que les formes linéaires $f \mapsto L(f,\chi,1)$, avec χ caractère pair modulo p et $\chi \neq 1_p, \overline{\psi}$, engendrent le dual de $S_2(\Gamma_1(p), \psi)$.

Notons $H^\psi = H_1(X_1(p)(\mathbb{C}), P_p, \psi)$ la composante ψ-isotypique du groupe d'homologie relative $H_1(X_1(p)(\mathbb{C}), P_p, \mathbb{C})$. Notons également $H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}), .)$ le sous-espace invariant par la conjugaison complexe agissant sur $X_1(p)(\mathbb{C})$. L'intégration induit un isomorphisme

$$S_2\big(\Gamma_1(p), \psi\big)^\vee \cong H_1^+\big(X_1(p)(\mathbb{C}), \psi\big). \tag{95}$$

L'image de la forme linéaire $f \mapsto L(f,\chi,1)$ par cet isomorphisme s'exprime en termes de symboles de Manin. Un calcul classique [20, th. 3.9 et 4.2.b)] donne que la forme linéaire $f \mapsto L(f,\chi,1)$ correspond au cycle

$$\theta_\chi = -\frac{\tau(\chi)}{p} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \overline{\chi}(v) \left\{\frac{v}{p}, \infty\right\}^\psi \qquad (\chi \neq 1_p, \overline{\psi}), \tag{96}$$

où l'on note c^ψ la projection d'un cycle c sur la composante ψ-isotypique. Nous avons $W_p\{v/p,\infty\} = \xi(1,v)$, d'où

$$W_p\theta_\chi = -\frac{\tau(\chi)}{p}\xi(1,\overline{\chi})^{\overline{\psi}} \quad \text{avec} \quad \xi(1,\overline{\chi}) := \sum_{v\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \overline{\chi}(v)\xi(1,v). \tag{97}$$

Notons A^ψ le sous-espace de $H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$ engendré par les cycles $\xi(1,\chi)^\psi$, avec $\chi \neq 1_p, \overline{\psi}$. Il suffit de montrer $A^\psi = H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$.

D'après le théorème de Manin, l'espace H^ψ est engendré par les cycles $\xi(x)^\psi$, où $x \in E_p$. Puisque $\xi(\lambda x)^\psi = \psi(\lambda)\xi(x)^\psi$ pour tout $\lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, il suit que H^ψ est engendré par les cycles $\xi(0,1)^\psi$ et $\xi(1,v)^\psi$, avec $v \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. D'après la première relation de Manin $\xi(1,0) = -\xi(0,1)$, et H^ψ est encore engendré par les $\xi(1,v)^\psi$, avec $v \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le bord de $\xi(1,0)^\psi$ étant non nul (par un calcul direct), et la conjugaison complexe envoyant $\xi(1,v)$ sur $\xi(1,-v)$, il suit que $H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$ est contenu dans le sous-espace de H^ψ engendré par les cycles $\xi(1,v)^\psi + \xi(1,-v)^\psi$, avec $v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Or, nous avons la formule

$$\xi(1,\chi)^\psi = \sum_{v\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \chi(v)\xi(1,v)^\psi \qquad (\chi \text{ caractère modulo } p).$$

Par transformée de Fourier inverse, l'espace $H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$ est contenu dans le sous-espace de H^ψ engendré par A^ψ, $\xi(1,1_p)^\psi$ et $\xi(1,\overline{\psi})^\psi$. Pour nous débarasser de ces deux derniers cycles, nous utilisons la première relation de Manin :

$$\begin{aligned}
\xi(1,1_p)^\psi &= \frac{1}{p-1}\sum_{v\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}\sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \overline{\psi}(\lambda)\xi(\lambda,\lambda v)\\
&= -\frac{1}{p-1}\sum_{v\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}\sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \overline{\psi}(\lambda)\xi(\lambda v,-\lambda)\\
&= -\frac{1}{p-1}\sum_{w\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}\sum_{\mu\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \overline{\psi}(\mu w)\xi(\mu,\mu w) = -\xi(1,\overline{\psi})^\psi.
\end{aligned}$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas. Si $\psi = 1_p$, alors $\xi(1,1_p)^\psi = 0$ et l'on a bien $A^\psi = H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$. Supposons maintenant $\psi \neq 1_p$. Nous savons que $H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$ est contenu dans le sous-espace de H^ψ engendré par A^ψ et $\xi(1,1_p)^\psi$. Mais le calcul du bord donne

$$\partial\xi(1,1_p)^\psi = \sum_{\lambda\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \overline{\psi}(\lambda)[\lambda,0] \neq 0,$$

ce qui entraîne $A^\psi = H_1^+(X_1(p)(\mathbb{C}),\psi)$. □

REMARQUE 8.1. — La question 1.3 admet une généralisation naturelle pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que la courbe modulaire associée à Γ soit définie sur $\mathbb{Q}$. Pour $\Gamma = \Gamma_0(p)$, avec p premier tel que le genre de $X_0(p)$ est non nul, l'analogue du théorème 1.4 est faux [23, 1.1.3 (i)]. On voit donc que les propriétés d'engendrement des groupes K_2 associés aux courbes modulaires $X_0(N)$ et $X_1(N)$ diffèrent sensiblement. En particulier, étant donnée une courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$ de conducteur N, il semble plus naturel de paramétrer E par $X_1(N)$ pour obtenir des informations sur la valeur spéciale $L(E,2)$.

Le théorème 1.4 suggère également la question suivante. Soit $X_1(N)_{\mathbb{Z}}$ un modèle propre et régulier de $X_1(N)$ sur $\mathbb{Z}$. Un tel modèle existe d'après la résolution des singularités [1], [19], [3]. On définit un sous-groupe $K_2(X_1(N))_{\mathbb{Z}}$ de $K_2(X_1(N))$ par

$$K_2(X_1(N))_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Image}\big(K_2'(X_1(N)_{\mathbb{Z}}) \to K_2(X_1(N))\big). \tag{98}$$

D'après [24, rem. p. 13], ce sous-groupe ne dépend pas du choix du modèle (propre et régulier) $X_1(N)_{\mathbb{Z}}$. L'inclusion $K_2(X_1(N))_{\mathbb{Z}} \subset K_2(X_1(N))$ identifie alors $K_2(X_1(N))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ à un sous-espace vectoriel de $K_2(X_1(N)) \otimes \mathbb{Q}$. Conjecturalement [11], l'espace vectoriel $K_2(X_1(N))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie égale à $g_1(N) :=$ genre$(X_1(N))$. D'autre part, Schappacher et Scholl ont démontré [23, 1.1.2 (iii)] que $K_N \subset K_2(X_1(N))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$.

Par souci de simplicité, supposons maintenant $N = p$ premier impair. Au cours de la démonstration du théorème 1.4, nous avons construit des éléments $\{u_\lambda, u_\mu\} \in K_p$ pour $\lambda, \mu \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/\pm 1$. Par antisymétrie, ces éléments sont en nombre $\frac{1}{8}(p-1)(p-3)$. D'autre part, nous avons l'estimation $g_1(p) \sim \frac{1}{24}p^2$ lorsque p tend vers l'infini [10, 9.1.6]. Ceci impose des relations (conjecturales) entre les symboles $\{u_\lambda, u_\mu\}$. Est-il possible de les expliciter ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. S. Abhyankar – « Resolution of singularities of arithmetical surfaces », in *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, Harper & Row, 1965, p. 111–152.

[2] S. J. Arakelov – « An intersection theory for divisors on an arithmetic surface », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974), p. 1179–1192, traduction de l'article original russe.

[3] M. Artin – « Lipman's proof of resolution of singularities for surfaces », in *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, Springer, 1986, p. 267–287.

[4] A. A. Beĭlinson – « Higher regulators and values of L-functions », in *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., 1984, p. 181–238.

[5] ———, « Higher regulators of modular curves », in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., 1986, p. 1–34.

[6] S. Bloch – « Algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, 1980, p. 511–515.

[7] J.-B. Bost – « Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, 1992, p. 64–211.

[8] F. Brunault – « Étude de la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une courbe elliptique », Thèse, Université Paris 7, décembre 2005.

[9] P. Cartier – « An introduction to zeta functions », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, 1992, p. 1–63.

[10] F. Diamond & J. Im – « Modular forms and modular curves », in *Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 1993–1994)*, CMS Conf. Proc., vol. 17, Amer. Math. Soc., 1995, p. 39–133.

[11] T. Dokchitser, R. de Jeu & D. Zagier – « Numerical verification of Beilinson's conjecture for K_2 of hyperelliptic curves », à paraître dans Compositio Mathematica.

[12] V. G. Drinfel'd – « Two theorems on modular curves », *Functional analysis and its applications* **7** (1973), p. 155–156, traduction de l'article original russe.

[13] A. B. Goncharov – « Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, 2001, p. 361–392.

[14] A. B. Goncharov & A. Levin – « Zagier's conjecture on $L(E, 2)$ », *Invent. Math.* **132** (1998), p. 393–432.

[15] K. Kato – « p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms », *Astérisque* (2004), p. 117–290, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III.

[16] D. S. Kubert & S. Lang – *Modular units*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 244, Springer, 1981.

[17] S. Lang – *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer, 1983.

[18] ———, *Introduction to Arakelov theory*, Springer, 1988.

[19] J. Lipman – « Desingularization of two-dimensional schemes », *Ann. Math. (2)* **107** (1978), p. 151–207.

[20] J. I. Manin – « Parabolic points and zeta functions of modular curves », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **36** (1972), p. 19–66.

[21] L. Merel – « Universal Fourier expansions of modular forms », in *On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations*, Lecture Notes in Math., vol. 1585, Springer, 1994, p. 59–94.

[22] J. Nekovář – « Beilinson's conjectures », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., 1994, p. 537–570.

[23] N. Schappacher & A. J. Scholl – « Beilinson's conjectures on special values of L-functions », in *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspectives in Mathematics, vol. 4, Academic Press Inc., 1988, Edited by M. Rapoport, N. Schappacher and P. Schneider, p. 373.

[24] P. Schneider – « Introduction to the Beĭlinson conjectures », in *Beĭlinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, 1988, p. 1–35.

[25] A. J. Scholl – « An introduction to Kato's Euler systems », in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 379–460.

[26] C. L. Siegel – *Lectures on advanced analytic number theory*, Notes by S. Raghavan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23, Tata Institute of Fundamental Research, 1965.

[27] J. Wildeshaus – « On an elliptic analogue of Zagier's conjecture », *Duke Math. J.* **87** (1997), p. 355–407.

[28] D. Zagier – « Introduction to modular forms », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, 1992, p. 238–291.