Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MESURES INVARIANTES ERGODIQUES

Albert Raugi

Tome 135
Fascicule 2

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 247-258

Bull. Soc. math. France
135 (2), 2007, p. 247–258

MESURES INVARIANTES ERGODIQUES POUR DES PRODUITS GAUCHES

PAR ALBERT RAUGI

RÉSUMÉ. — Soit $(X, \mathfrak{X})$ un espace mesurable muni d'une transformation bijective bi-mesurable τ. Soit φ une application mesurable de X dans un groupe localement compact à base dénombrable G. Nous notons τ_φ l'extension de τ, induite par φ, au produit $X \times G$. Nous donnons une description des mesures positives τ_φ-invariantes et ergodiques. Nous obtenons aussi une généralisation du théorème de réduction cohomologique de O. Sarig [5] à un groupe LCD quelconque.

ABSTRACT (*Ergodic invariant measures for group-extensions fo dynamical systems*)
Let $(X, \mathfrak{X})$ be a measurable space. Let τ be a bi-measurable bijection from X onto X. Let φ be a measurable application from X to a second countable locally compact group G. We denote by τ_φ the extension of τ, induced by φ, to the product space $X \times G$. We describe the positive τ_φ-invariant and ergodic measures on $X \times G$. We also obtain a generalization of the cocycle reduction theorem of O. Sarig [5] to a general second countable locally group.

1. Résultats principaux

1.1. Notations. — Nous désignons par $(X, \mathfrak{X})$ un espace mesurable, par τ une transformation bijective bi-mesurable de X et par φ une application mesurable

Texte reçu le 11 avril 2006, révisé le 24 octobre 2006

ALBERT RAUGI, IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France • *E-mail :* `Albert.Raugi@univ-rennes1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 28D05, 37A05, 37A20, 37A40.

Mots clefs. — Produits gauches, mesures invariantes ergodiques, relations d'équivalence ergodiques, réduction cohomologique.

de X dans un groupe G localement compact à base dénombrable (LCD). Nous savons (voir [4]) que tout groupe LCD est métrisable ; nous choisissons une métrique d sur G définissant la même topologie que celle de G.

Nous introduisons alors la transformation τ_φ de l'espace produit $X \times G$ définie par

$$\forall (x,g) \in X \times G, \quad \tau_\varphi(x,g) = \big(\tau(x), g\varphi(x)\big).$$

Pour tout groupe LCD H, nous notons m_H (resp. $\widetilde{m}_H$) une mesure de Haar à droite (resp. à gauche) sur les boréliens de H. Pour tout $u \in H$, nous appelons δ_u la mesure de Dirac au point u. Nous notons e l'élément neutre de H. Nous désignons par Δ_H la fonction modulaire de H définie par

$$\forall g \in H, \quad \widetilde{m}_H * \delta_g = \Delta_H(g)\widetilde{m}_H.$$

La mesure $\Delta_H \widetilde{m}_H$ est alors une mesure de Haar à droite sur H. Si ρ et μ sont deux mesures de Radon positives sur H, on note $\rho * \mu$ leur convolée (i.e. l'image par l'application $(x,g) \in H \times H \mapsto xg \in H$ de la mesure produit $\rho \otimes \mu$). Nous appelons *exponentielle sur* H toute application continue χ de H dans $]0,+\infty[$ vérifiant

$$\forall (g,g') \in H \times H, \quad \chi(gg') = \chi(g)\chi(g').$$

Pour toute application mesurable u de X dans G, nous désignons par φ_u l'application de X dans G définie par

$$\varphi_u(x) = u(x)\varphi(x)\big(u(\tau(x))\big)^{-1}$$

et par θ_u la transformation de $X \times G$ définie par

$$\theta_u(x,g) = (x, g(u(x))^{-1}).$$

1.2. Définition. — Soit λ une mesure positive σ-finie sur $(X \times G, \mathfrak{X} \otimes \mathcal{B}(G))$. On dit que λ vérifie l' hypothèse (P) si λ s'écrit

$$\lambda(\mathrm{d}x, \mathrm{d}g) = \mu(\mathrm{d}x) N(x, \mathrm{d}g),$$

noté $\mu \otimes N$, où :

i) μ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathfrak{X})$;

ii) N est un noyau de Radon positif de $(X, \mathfrak{X})$ dans $(G, \mathcal{B}(G))$; i.e. pour tout $x \in X$, $N(x,.)$ est une mesure de Radon positive sur les boréliens de G, que l'on peut supposer non nulle, et pour tout borélien B de G, l'application qui à $x \in X$ associe $N(x,B) \in [0,+\infty]$ est mesurable.

Remarques. — Le couple (μ, N) n'est défini qu'à “densité près". Si h est une fonction mesurable strictement positive sur X telle que $\int_X h(x)\mu(\mathrm{d}x) = 1$, on peut remplacer le couple (μ, N) par le couple $(h\mu, h^{-1}N)$

Lorsque $(X,\mathfrak{X})$ est un espace polonais muni de sa tribu des boréliens, toute mesure positive λ sur $(X\times G,\mathfrak{X}\otimes\mathcal{B}(G))$ pour laquelle il existe une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de boréliens croissant vers X telle que, pour tout entier $n\geq 0$ et tout compact K de G, $\lambda(A_n\times K)<+\infty$, vérifie la propriété (P).

Théorème 1.3. — *Soit λ une mesure positive σ-finie sur $X\times G$ vérifiant l'hypothèse (P). Si λ est τ_φ-invariante ergodique (i.e. toute fonction mesurable positive λ-presque partout τ_φ-invariante est λ-presque partout constante) alors :*

i) *Il existe un sous-groupe fermé H de G et une application mesurable u de X dans G, avec $u(X)=\{e\}$ si $H=G$, tels que, pour μ-presque tout $x\in X$, $\varphi_u(x)$ est à valeurs dans H, et la mesure $\theta_u(\lambda)$ est une mesure sur $X\times H$ vérifiant l'hypothèse (P) et τ_{φ_u}-invariante ergodique.*

ii) *Il existe une exponentielle χ sur H telle que*

$$\theta_u(\lambda)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}g)=\widetilde{\mu}(\mathrm{d}x)\ \chi(g)m_H(\mathrm{d}g)$$

où $\widetilde{\mu}$ est une mesure positive σ-finie, équivalente à μ, vérifiant

$$\tau(\widetilde{\mu})(\mathrm{d}x)=\chi\big(\varphi_u\big(\tau^{-1}(x)\big)\big)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}x).$$

Remarques. — 1) Lorsque $(X,\mathfrak{X})$ est un espace polonais et la mesure positive λ est finie sur les compacts de $X\times G$, la mesure positive σ-finie $\widetilde{\mu}$ n'est pas nécessairement finie sur les compacts de X.

Considérons le cas $X=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\tau:\overline{x}\mapsto\overline{x+\alpha}$, pour un nombre réel α irrationnel, $G=\mathbb{Z}$ et $\varphi:\overline{x}\mapsto 1$. La mesure

$$\lambda=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{\overline{k\alpha}}*\delta_k$$

est finie sur les compacts, mais

$$\widetilde{\mu}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{\overline{k\alpha}}$$

ne l'est pas. Si u est une application borélienne de X dans $\mathbb{Z}$ telle que $u(\overline{k\alpha})=k$, alors pour $\widetilde{\mu}$-presque tout $\overline{x}\in X$, $u(\overline{x})+\varphi(\overline{x})-u(\tau(\overline{x}))=\overline{0}$ et $\theta_u(\lambda)=\widetilde{\mu}\otimes\delta_{\overline{0}}$.

2) Lorsque λ est une mesure finie, on peut se ramener à une mesure de probabilité. Si elle est τ_φ-invariante ergodique, alors le groupe H du théorème est nécessairement compact et l'exponentielle χ est triviale. Pour les extensions abéliennes compactes d'un système dynamique (voir [2] et [3]).

La méthode de démonstration de ce résultat permet aussi d'obtenir la généralisation du théorème de réduction cohomologique de O. Sarig [5] suivante.

1.4. Notations. — Soient $(X, \mathcal{B}(X))$ un espace polonais muni d'une relation d'équivalence $\mathfrak{S}$ à classes dénombrables et G un groupe LCD. On appelle $\mathfrak{S}$-*holonomie* toute application bijective bi-mesurable κ d'un borélien A de X sur un borélien B de X, vérifiant, pour tout $x \in X, (x, \kappa(x)) \in \mathfrak{S}$; le borélien A est appelé *domaine de* κ *et noté* $\operatorname{dom}(\kappa)$. Une mesure positive σ-finie μ sur les boréliens de X est dite $\mathfrak{S}$-*invariante* si, pour toute $\mathfrak{S}$-holonomie κ, les restrictions des mesures $\mu \circ \kappa$ et μ au domaine de κ coïncident. Une mesure positive σ-finie μ sur les boréliens de X est dite $\mathfrak{S}$-*ergodique* si toute fonction borélienne positive sur X, μ-presque partout invariante par les holonomies, est constante μ-presque partout.

Soit Φ un $\mathfrak{S}$-cocycle à valeurs dans G ; i.e. $\Phi : \mathfrak{S} \to G$ telle que

$$\forall (x,y), (y,z) \in \mathfrak{S}, \quad \Phi(x,y)\Phi(y,z) = \Phi(x,z).$$

En posant, pour $(x,g), (y,t) \in X \times G$,

$$\big((x,g_1),(y,g_2)\big) \in \mathfrak{S}_\Phi \overset{\text{def}}{\iff} (x,y) \in \mathfrak{S} \text{ et } g_1 = g_2\Phi(x,y)$$

on obtient une relation d'équivalence $\mathfrak{S}_\Phi$ sur $X \times G$.

Si Φ est un $\mathfrak{S}$-cocycle à valeurs dans G et u une application mesurable de X dans G, nous notons Φ_u le cocycle défini par

$$\forall (x,y) \in \mathfrak{S}, \quad \Phi_u(x,y) = u(x)\Phi(x,y)\big(u(y)\big)^{-1}.$$

Nous disons qu'un $\mathfrak{S}$-cocycle Φ à valeurs dans G est μ-presque partout à valeurs dans un sous-groupe H si le borélien de X,

$$\big\{x \in X : \Phi(x,y) \in H, \forall y \in X, (x,y) \in \mathfrak{S}\big\}$$

est de μ-mesure 1.

Théorème 1.5. — *Soit λ une mesure positive σ-finie sur $X \times G$ vérifiant les hypothèses (P). Si λ est $\mathfrak{S}_\Phi$-invariante ergodique alors :*

i) *Il existe un sous-groupe fermé H de G et une application mesurable u de X dans G, avec $u(X) = \{e\}$ si $H = G$, tels que : le cocycle Φ_u est μ-presque partout à valeurs dans H et la mesure $\theta_u(\lambda)$ est une mesure sur $X \times H$ vérifiant l'hypothèse (P) et $\mathfrak{S}_{\Phi_u}$-invariante ergodique.*

ii) *Il existe une exponentielle χ sur H telle que*

$$\theta_u(m)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}h) = \widetilde{\mu}(\mathrm{d}x)\,\chi(g)\widetilde{m}_H(\mathrm{d}g)$$

où $\widetilde{\mu}$ est une mesure positive σ-finie, équivalente à μ et telle que, pour toute $\mathfrak{S}$-holonomie κ et pour μ-presque tout x,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mu} \circ \kappa}{\mathrm{d}\widetilde{\mu}}(x) = \chi\big(\Phi_u\big(\kappa(x), x\big)\big).$$

2. Démonstrations des résultats

Lemme préliminaire. — Nous notons $C_K^+(G)$ l'espace des fonctions continues positives à support compact sur G. Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

LEMME 2.1. — *Soit σ une mesure de Radon positive sur les boréliens de G dont le support (topologique) est noté* $\operatorname{Supp}\sigma$.

i) *Pour tout $\alpha \in C_K^+(G)$ et tout $u \in G$, la fonction continue sur G,*

$$\xi_{\alpha,u}(g) = \int_G \alpha(gu^{-1}s^{-1})\sigma(\mathrm{d}s)$$

est la version continue de la dérivée de Radon-Nikodym de la convolée

$$(\alpha m_G) * \sigma * \delta_u$$

relativement à m_G.

ii) *Pour tout $\alpha \in C_K^+(G)$, nous notons ξ_α la fonction $\xi_{\alpha,e}$. Nous avons*

$$\{\xi_\alpha > 0\} = \{\alpha > 0\} \operatorname{Supp}\sigma$$

et pour toute fonction $\beta \in C_K^+(G)$ vérifiant $\overline{\{\alpha > 0\}} \subset \{\beta > 0\}$, la fonction

$$\Psi_{\alpha,\beta}(g) = \begin{cases} \xi_\alpha(g)/\xi_\beta(g) & \text{si } \xi_\beta(g) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur G.

iii) *Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $C_K^+(G)$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_G \alpha_n(g) m_G(\mathrm{d}g) = 1$$

et dont les supports décroissent vers un élement u_0 de G. Alors la suite de mesures $(\alpha_n m_G * \sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers la mesure $\delta_{u_0} * \sigma$.

Démonstration. — L'assertion i) est évidente.

ii) Si $\xi_\alpha(g) > 0$, alors il est clair qu'il existe $s_0 \in \operatorname{Supp}\sigma$ tel que $\alpha(gs_0^{-1}) > 0$, ce qui montre que $g \in \{\alpha > 0\} \operatorname{Supp}\sigma$. Réciproquement, soit $g = us_0$ avec $\alpha(u) > 0$ et $s_0 \in \operatorname{Supp}\sigma$. Il existe un voisinage ouvert symétrique V de l'élément neutre e de G tel que pour tout $y \in V$, $\alpha(uy) \geq \frac{1}{2}\alpha(u)$. Nous avons alors :

$$\xi_\alpha(g) \geq \int_{Vs_0} \alpha(gs^{-1})\sigma(\mathrm{d}s) \geq \tfrac{1}{2}\alpha(u)\sigma(Vs_0) > 0.$$

Pour la seconde affirmation, il suffit de noter que $\overline{\{\alpha > 0\}}$ est compact et le produit d'un compact par un fermé est fermé. On a alors

$$\{\xi_\beta > 0\} = \{\beta > 0\} \operatorname{Supp}\sigma \supset \overline{\{\alpha > 0\}} \operatorname{Supp}\sigma = \overline{\{\xi_\alpha > 0\}}.$$

iii) Soit f une fonction continue à support compact S sur G. Nous avons

$$\left|\alpha_n m_G * \sigma(f) - \delta_{u_0} * \sigma(f)\right| \leq \int_G F_n(g)\sigma(\mathrm{d}g)$$

avec

$$F_n(g) = \int_G \left|f(ug) - f(u_0 g)\right| \alpha_n(u) m_G(\mathrm{d}u).$$

Pour tout $g \in G$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(g) = 0$ et pour tout $g \in G$, on a

$$F_n(g) \leq 2 \sup_{y \in S} |f(y)| 1_{V_0^{-1} S}(g).$$

Le résultat est alors une conséquence du théorème de convergence dominée. □

Démonstration du théorème 1.3. — Nous commençons par établir un lemme.

LEMME 2.2. — *Soit λ est une mesure positive σ-finie sur $X \times G$ vérifiant les hypothèses (P). La mesure λ est τ_φ-invariante si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *μ et $\tau(\mu)$ sont des mesures équivalentes ;*

ii) *pour μ-presque tout $x \in X$,*

$$N(x, .) = \frac{\mathrm{d}\tau(\mu)}{\mathrm{d}\mu}(x) N\big(\tau^{-1}(x), .\big) * \delta_{\varphi(\tau^{-1}(x))},$$

où $N(\tau^{-1}(x), .) * \delta_{\varphi(\tau^{-1}(x))}$ désigne la convolée de la mesure $N(\tau^{-1}(x), .)$ par la mesure de Dirac au point $\varphi(\tau^{-1}(x))$.

Démonstration. — λ est τ_φ-invariante si et seulement si, pour tout $(A, B) \in \mathfrak{X} \times \mathcal{B}(G)$,

$$\begin{aligned} \int_X 1_A(x) N(x, B) \mu(\mathrm{d}x) &= \int 1_A(\tau(x))\ N(x, .) * \delta_{\varphi(x)}(B) \mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_X 1_A(x) N(\tau^{-1}(x), .) * \delta_{\varphi(\tau^{-1}(x))}(B) \tau(\mu)(\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

Ce qui montre d'une part que, pour tout $A \in \mathfrak{X}$, $\mu(A) = 0$ équivaut à $\tau(\mu)(A) = 0$ (i.e. i)) et d'autre part ii). □

2.3. — Pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in C_K^+(G)$ nous appelons $\xi_\alpha(x,.)$ la version continue de la dérivée de Radon-Nikodym de la convolée $\alpha m_G * N(x,.)$ relativement à la mesure de Haar m_G. D'après le lemme préliminaire et le lemme 2.2, nous avons, pour μ-presque tout $x \in X$, tous $\alpha, \beta \in C_K^+(G)$ telles que $\overline{\{\alpha > 0\}} \subset \{\beta > 0\}$ et pour tout $g \in G$,

$$\xi_\alpha(x,g) = \frac{d\tau(\mu)}{d\mu}(x)\xi_\alpha\big(\tau^{-1}(x), g\big(\varphi(\tau^{-1}(x))\big)^{-1}\big) = \frac{d\tau(\mu)}{d\mu}(x)\xi_\alpha \circ \tau_\varphi^{-1}(x,g);$$

et par suite, $\Psi_{\alpha,\beta}(x,g) = \Psi_{\alpha,\beta} \circ \tau_\varphi^{-1}(x,g)$, où

$$\Psi_{\alpha,\beta}(x,g) = \begin{cases} \xi_\alpha(x,g)/\xi_\beta(x,g) & \text{si } \xi_\beta(x,g) > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.4. — Supposons à présent que λ soit ergodique. D'après 2.3, pour tout $t \in G$, il existe un réel positif $c_{\alpha,\beta}(t)$ tel que, pour λ-presque tout $(x,g) \in X \times G$,

$$\Psi_{\alpha,\beta}(x,tg) = c_{\alpha,\beta}(t).$$

On en déduit que, pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\forall g \in \mathrm{Supp}(N(x,.)),\ \forall t \in G, \quad \Psi_{\alpha,\beta}(x,tg) = c_{\alpha,\beta}(t).$$

Pour tout $x \in X$, nous notons S_x le support de la mesure de Radon $N(x,.)$. Pour $g_1, g_2 \in S_x$, nous avons, pour tout $t \in G$,

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha,\beta}(x,tg_1g_2^{-1}g) &= c_{\alpha,\beta}(tg_1g_2^{-1}) = \Psi_{\alpha,\beta}(x,tg_1g_2^{-1}g_2)\\ &= \Psi_{\alpha,\beta}(x,tg_1) = c_{\alpha,\beta}(t) = \Psi_{\alpha,\beta}(x,tg).\end{aligned}$$

Autrement dit, si on appelle H_x le sous-groupe fermé de G engendré par $S_xS_x^{-1}$, alors, pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\forall (t,u,g) \in G \times H_x \times S_x, \quad \Psi_{\alpha,\beta}(x,tug) = c_{\alpha,\beta}(t).$$

D'après l'assertion ii) du lemme 2.2, nous avons

$$S_x = S_{\tau^{-1}(x)}\varphi(\tau^{-1}(x))$$

et par suite, pour μ-presque tout $x \in X$, $H_{\tau(x)} = H_x$. On en déduit alors que :

LEMME 2.5. — *Il existe un sous-groupe fermé H de G tel que, pour μ-presque tout $x \in X$, $H_x = H$.*

Démonstration. — Nous munissons l'ensemble des fermés $\mathfrak{F}$ de G de sa topologie naturelle (cf. [1]). Les ouverts pour cette topologie sont les ensembles $U(\mathcal{O}, C)$ définis par

$$U(\mathcal{O},C) = \big\{S \in \mathfrak{F} : \forall U \in \mathcal{O},\ S \cap U \neq \varnothing \text{ et } S \cap C = \varnothing\big\},$$

où $\mathcal{O}$ est une famille finie d'ouverts de G et C un sous-ensemble compact de G. La structure borélienne associée à cette topologie est engendrée par les ensembles $\{S \in \mathfrak{F} : S \subseteq F\}$ où F est un fermé de G. Pour tout $g \in G$ et $S \in \mathfrak{F}$, nous posons $d(g,S) = \inf_{x\in S} d(g,x)$, où d désigne la métrique choisie sur G (cf. section 1.1). Pour tout $g \in G$, la fonction $d(g,.)$ est continue sur $\mathfrak{F}$ et pour toute suite dense $\{g_i : i \geq 1\}$ d'éléments de G, la famille de fonctions $\{d(g_i,.) : i \geq 1\}$ sépare les points de $\mathfrak{F}$.

On choisit une fonction mesurable h de $X \times G$ dans $]0,+\infty[$ telle que, pour tout $x \in X$, $P(x,\mathrm{d}g) = h(x,g)N(x,\mathrm{d}g)$ soit une probabilité de transition de $(X,\mathfrak{X})$ dans $(G,\mathcal{B}(G))$. Par exemple, si V est un voisinage relativement compact de l'élément neutre de G tel que $G = \bigcup_{n\geq 1} V^n$ nous pouvons choisir

$$h(x,g) = \big(c(x)\big)^{-1} f(x,g)$$

avec, en convenant que V^0 désigne la partie vide de G,

$$f(x,g) = \sum_{n\geq 1} \big(2^n \max\{N(x,V^n \setminus V^{n-1}),1\}\big)^{-1} 1_{V^n\setminus V^{n-1}}(g) \text{ et}$$
$$c(x) = \int_G f(x,g)N(x,\mathrm{d}g).$$

Pour toute probabilité ν sur G nous notons $\widehat{\nu}$ son image par l'application $g \mapsto g^{-1}$. Nous avons

$$S_x = \operatorname{Supp} P(x,.) \text{ et } H_x = \operatorname{Supp} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\big(P(x,.) * \widehat{P(x,.)}\big)^{*n}.$$

Pour tout fermé F de G, nous avons alors

$$\big\{x \in X : H_x \subseteq F\big\} = \Big\{x \in X : \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\big(P(x,.) * \widehat{P(x,.)}\big)^{*n}(F^c) = 0\Big\},$$

ce qui montre que l'application $x \in X \mapsto H_x \in \mathfrak{F}$ est mesurable. Comme, pour μ-presque tout $x \in X$, on a $H_x = H_{\tau(x)}$, pour tout $i \geq 1$, la fonction positive $f_i(x,g) = f_i(x) = d(g_i,H_x)$ est τ_φ-invariante. De l'ergodicité de λ il résulte, alors que cette fonction est μ-presque partout constante. Il s'ensuit que H_x est μ-p.p. constant. □

Lorsque $G = H$ le résultat découle de la proposition suivante.

Proposition 2.6. — *Soit $\lambda = \mu \otimes N$ une mesure positive σ-finie sur $X \times G$ vérifiant l'hypothèse (P) telle que, pour μ-presque tout $x \in X$, le sous-groupe fermé de G engendré par $\operatorname{Supp} N(x,.)\big(\operatorname{Supp} N(x,.)\big)^{-1}$ soit égal à G.*

Si la mesure λ est τ_φ-invariante ergodique, alors il existe une exponentielle χ sur G telle que,

$$\lambda(\mathrm{d}x,\mathrm{d}g) = \tilde{\mu}(\mathrm{d}x)\chi(g)m_G(\mathrm{d}g)$$

où $\tilde{\mu}$ est une mesure positive σ-finie, équivalente à la mesure μ, vérifiant pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\frac{\mathrm{d}\tau(\tilde{\mu})}{\mathrm{d}\tilde{\mu}}(x) = \chi\big(\varphi\big(\tau^{-1}(x)\big)\big).$$

Démonstration. — Nous reprenons les notations de 2.3 et 2.4. Si $H = G$ alors, pour tous $\alpha, \beta \in C_K^+(G)$ tels que $\overline{\{\alpha > 0\}} \subset \{\beta > 0\}$, la fonction $\psi_{\alpha,\beta}$ est constante. Il existe donc un réel strictement positif $c_{\alpha,\beta}$ tel que

$$(\alpha m_G) * N(x, .) = c_{\alpha,\beta}\ (\beta m_G) * N(x, .).$$

Soit $g \in G$. Considérons une suite de fonctions de $C_K^+(G)$, $(\alpha_n^e)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(\alpha_n^g)_{n\in\mathbb{N}}$), d'intégrales 1 et dont les supports compacts sont des voisinages de e (resp. de $g \in G$) qui décroissent vers $\{e\}$ (resp. vers $\{g\}$).

Choisissons une fonction β de $C_K^+(G)$ telle que

$$\{\beta > 0\} \supset \overline{\{\alpha_0^e > 0\}} \cup \overline{\{\alpha_0^g > 0\}}$$

et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big\{\beta > 0\big\} \supset \overline{\{\alpha_n^e > 0\}} \ \text{ et } \ \{\beta > 0\} \supset \overline{\{\alpha_n^g > 0\}}.$$

Il existe alors deux suites réelles positives $(c_{\alpha_n^e,\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{\alpha_n^g,\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

(1) $$\forall n \in \mathbb{N},\ (\alpha_n^e m_G) * N(x, .) = c_{\alpha_n^e,\beta}\ (\beta m_G) * N(x, .)$$

et

(2) $$\forall n \in \mathbb{N},\ (\alpha_n^g m_G) * N(x, .) = c_{\alpha_n^g,\beta}\ (\beta m_G) * N(x, .).$$

D'après l'assertion iii) du lemme 2.1, la suite de mesures de Radon non nulles (voir 1.2) $((\alpha_n^e m_G) * N(x, .))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers la mesure de Radon non nulle $\delta_e * N(x, .) = N(x, .)$. Des égalités (1), il s'ensuit que la suite de mesures de Radon $(c_{\alpha_n^e,\beta}\ (\beta m_G) * N(x, .))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement. La mesure $(\beta m_G) * N(x, .)$ étant fixe, cette convergence ne peut avoir lieu que si la suite réelle positive $(c_{\alpha_n^e,\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En appelant $c_{e,\beta}$ la limite de cette suite, on obtient

(3) $$N(x, .) = c_{e,\beta}\ (\beta m_G) * N(x, .),$$

qui montre que $c_{e,\beta} \neq 0$ car la mesure $N(x, .)$ est non nulle.

Remarque. — On peut aussi raisonner sur $[0, +\infty[$, au lieu de raisonner sur les mesures de Radon, en choisissant une fonction $f \in C_K^+(G)$ telle que

$$(\beta m_G) * N(x, .)(f) > 0 \quad \text{et} \quad N(x, .)(f) > 0$$

(i.e. f non nulle sur chacun des fermés $\operatorname{Supp}\beta\ \operatorname{Supp} N(x, .)$ et $\operatorname{Supp} N(x, .)$ de G). La suite réelle positive

$$(c_{\alpha_n^e,\beta} = (\alpha_n^e m_G) * N(x, .)(f)/(\beta m_G) * N(x, .)(f)$$

converge alors vers le réel strictement positif $N(x,.)(f)/(\beta m_G) * N(x,.)(f)$.

De la même façon, à partir des égalités (2) et de l'assertion iii) du lemme 2.1, on obtient l'existence d'un réel strictement positif $c_{g,\beta}$ tel que

$$\delta_g * N(x,.) = c_{g,\beta}\ (\beta m_G) * N(x,.). \tag{4}$$

De (3) et (4) il résulte que

$$\delta_g * N(x,.) = \frac{c_{g,\beta}}{c_{e,\beta}}\ N(x,.).$$

Nous venons donc de montrer que, pour tout $g \in G$, la mesure de Radon $\delta_g * N(x,.)$ est égale à une constante fois la mesure de Radon $N(x,.)$. Il existe donc une application χ' de G dans $]0,+\infty[$ telle que

$$\forall g \in G, \quad \delta_g * N(x,.) = \chi'(g)\ N(x,.).$$

L'application χ' est manifestement continue et possède la propriété pour tout $(g,g') \in G$, $\chi'(gg') = \chi(g)\chi(g')$; c'est donc une exponentielle sur G.

Pour tout $g \in G$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\delta_g * \big(\chi'(t)N(x,\mathrm{d}t)\big) &= \chi'(g^{-1}t)\ \ \delta_g * N(x,\mathrm{d}t)\\ &= \chi'(g^{-1}t)\chi'(g)\ N(x,\mathrm{d}t) = \chi'(t)N(x,\mathrm{d}t).\end{aligned}$$

Par conséquent la mesure $\chi' N(x,.)$ est G-invariante à gauche et donc une mesure de Haar à gauche. Il existe donc une fonction mesurable strictement positive h sur X telle que, pour μ-presque tout $x \in \mathfrak{X}$,

$$\chi'(t)N(x,\mathrm{d}t) = h(x)\widetilde{m}_G(\mathrm{d}t) = h(x)\Delta_G(t)\ m_G(\mathrm{d}t).$$

En posant $\chi = \chi'^{-1}\Delta_G$ et $\tilde{\mu} = h\mu$, on obtient le résultat énoncé. $\square$

2.7. — Envisageons à présent le cas $H \neq G$. Nous désignons par π l'application naturelle de G dans $H\backslash G$. Soit $g_0 \in S_x$, pour tout $g \in S_x$, nous avons $gg_0^{-1} \in H$ et par suite $g \in Hg_0$. Ce qui montre que $\pi(S_x)$ est réduit à un point. En choisissant une section mesurable η de π, on obtient une application mesurable u de X dans G telle que, pour μ-presque tout $x \in X$, $\pi(S_x) = \pi(u(x))$ et par suite, pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\varphi_u(x) = u(x)\varphi(x)\big(u(\tau(x))\big)^{-1} \in H.$$

On notera que, pour tout borélien B de G,

$$u^{-1}(B) = \big\{x \in X : N\big(x, \pi^{-1} \circ \eta^{-1}(B^c)\big) = 0\big\}.$$

La mesure

$$\theta_u(\lambda)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}g) = \mu(\mathrm{d}x)M(x,\mathrm{d}g) = \mu(\mathrm{d}x)N(x,\mathrm{d}g) * \delta_{(u(x))^{-1}}$$

est alors une mesure sur $G \times H$ vérifiant les hypothèses (P) et τ_{φ_u}-invariante ergodique. De plus, pour μ-presque tout $x \in X$, le sous-groupe fermé de H

engendré par Supp $M(x,.)$ (Supp $M(x,.))^{-1}$ est égal à H. Nous sommes alors en mesure d'appliquer la proposition 2.6.

Démonstration du théorème 1.5. — La $\mathfrak{S}_\Phi$-invariance de $\lambda = \mu \otimes N$ se traduit par : pour toute $\mathfrak{S}$-holonomie κ,

$$\lambda \circ \kappa_{\Phi \mid \mathrm{dom}(\kappa) \times G} = \lambda_{\mid \mathrm{dom}(\kappa) \times G},$$

où

$$\kappa_\Phi : (x,g) \in \mathrm{dom}(\kappa) \times G \longrightarrow \big(\kappa(x), g\Phi(x,\kappa(x))\big).$$

LEMME 2.8. — $\lambda \circ \kappa_{\Phi \mid \mathrm{dom}(\kappa) \times G} = \lambda_{\mid \mathrm{dom}(\kappa) \times G}$ *si et seulement si :*

i) $\mu_{\mid \mathrm{dom}_\kappa}$ *et* $\mu \circ \kappa_{\mid \mathrm{dom}_\kappa}$ *sont équivalentes ;*

ii) *pour μ-presque tout $x \in \mathrm{dom}(\kappa)$,*

$$N(x,.) = \frac{\mathrm{d}\mu \circ \kappa}{\mathrm{d}\mu}(x) N(\kappa(x),.) * \delta_{\Phi(\kappa(x),x)}.$$

Démonstration. — Appelons D le domaine de κ et L l'image de D par κ. Pour tous boréliens A et B respectivement de X et G, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{D\times G} 1_{A\times B}(x,g) \lambda \circ \kappa_\Phi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}g)\\
&= \int_{L\times G} 1_{A\times B}(\kappa^{-1}(x), g\Phi(x,\kappa^{-1}(x)))\lambda(\mathrm{d}x,\mathrm{d}g)\\
&= \int_{D\times G} 1_{A\times B}\big(x, g\Phi(\kappa(x),x)\big)\ N(\kappa(x),\mathrm{d}g)\mu\circ\kappa(\mathrm{d}x)\\
&= \int_{D\times G} 1_{A\times B}(x,g)\ N(x,\mathrm{d}g)\mu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

À partir de ce lemme, on montre, avec des notations évidentes :

PROPOSITION 2.9. — *Pour toute $\mathfrak{S}$-holonomie κ, pour μ-presque tout x dans* $\mathrm{dom}(\kappa)$ *et pour toutes fonctions $\alpha, \beta \in C_K^+(G)$ telles que* $\overline{\{\alpha > 0\}} \subset \{\beta > 0\}$,

$$\forall (t,g) \in G \times G, \quad \Psi_{\alpha,\beta}(x,tg) = \Psi_{\alpha,\beta} \circ \kappa_\Phi(x,tg).$$

Lorsque λ est ergodique, pour tout $t \in G$, il existe un réel positif $c_{\alpha,\beta}(t)$ tel que, pour λ-presque tout $(x,g) \in X \times G$,

$$\Psi_{\alpha,\beta}(x,tg) = c_{\alpha,\beta}(t);$$

ou encore, tel que pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\forall g \in \mathrm{Supp}(N(x,.)), \quad \Psi_{\alpha,\beta}(x,tg) = c_{\alpha,\beta}(t).$$

Et comme auparavant, on aboutit au théorème 1.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Auslander & C. C. Moore – *Unitary representations of solvable lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 62, 1966.

[2] H. Furstenberg – « Strict ergodicity and transformation of the torus », *Amer. J. Math.* **83** (1961), p. 573–601.

[3] R. Jones & W. Parry – « Compact abelian group extensions of dynamical systems. II », *Compositio Math.* **25** (1972), p. 135–147.

[4] D. Montgomery & L. Zippin – *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[5] O. Sarig – « Invariant Radon measures for horocycle flows on abelian covers », *Invent. Math.* **157** (2004), p. 519–551.