Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

Noël Lohoué

Tome 135
Fascicule 3

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 323-341

Bull. Soc. math. France
135 (3), 2007, p. 323–341

ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

PAR NOËL LOHOUÉ

RÉSUMÉ. — On montre que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est de type (p,p) sur certains groupes de Lie et variétés de Cartan-Hadamard.

ABSTRACT (*Estimations of the maximal Hardy-Littlewoord function*)
We prove L^p boundness of Hardy-Littlewood maximal functions on a class of Lie groups and Cartan-Hadamard manifolds.

1. Introduction

On se donne un espace métrique M muni d'une distance δ et d'une mesure $\mathrm{d}\sigma$ qui charge les boules de M de centre arbitraire et de rayon quelconque d'une masse finie. Si $f : M \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathrm{d}\sigma$ mesurable, on s'intéresse à la fonction f^* définie par

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} \big|f(y)\big| \mathrm{d}\sigma(y)$$

où $B_x(r)$ désigne la boule, au sens de δ, de centre x et de rayon r, $|B_x(r)|$ sa mesure.

Texte reçu le 25 octobre 2005, révisé le 19 décembre 2006

NOËL LOHOUÉ, Université de Paris-Sud, Mathématique, bât. 425, UMR 8628 du CNRS, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* `noel.lohoue@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E80 ; 43A90, 60B90.

Mots clefs. — Fonction maximale.

© Société Mathématique de France

On voudrait prouver des estimations du style, pour $1 < p < \infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p.$$

Ceci est un vieux thème et l'on sait bien que cette inégalité ne peut pas être prouvée en toute généralité pour tout triplet $(M, \delta, \mathrm{d}\sigma)$.

On s'intéresse dans cet article à deux situations particulières où l'on veut utiliser la géométrie de $(M, \delta, \mathrm{d}\sigma)$ pour donner une réponse positive à la question ci-dessous.

a) M est un groupe de Lie non moyennable, la distance δ est la distance de contrôle associée à un système de champs de Hörmander invariants à gauche et $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Haar sur G, bi-invariante.
b) M est une variété de Cartan Hadamard avec quelques contraintes sur la courbure ; la distance associée sur M est la distance riemannienne et la mesure est induite par cette structure.

Ces deux exemples ont on point commun ; le volume des boules de grand rayon croît exponentiellement, ce qui rend toutes les techniques usuelles inutilisables : on ne peut faire appel au lemme de recouvrement que pour les boules de rayon plus petit qu'un nombre donné. Par contre, si M est à courbure de Ricci positive ou nulle, on sait qu'alors M est un espace de nature homogène et on a droit à tout.

L'énoncé général suivant indique la direction que l'on veut suivre.

PROPOSITION 1. — *Soit $(M;\delta)$ un espace métrique muni d'une mesure* $\mathrm{d}\sigma$ *comme décrit ci-dessus. On suppose qu'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout couple de point (x, y),*

$$C^{-1} < \frac{|B_x(r)|}{|B_y(r)|} < C \quad et \quad \big|B_x(2r)\big| < C\big|B_x(r)\big|,$$

pour $0 < r < 1$. Soit 0 un point distingué de M. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe pour tout $1 < p < \infty$, une constante $C_\varepsilon(p)$ telle que

$$\left\| \Big(1 + |B_0(\widetilde{\delta})|\Big)^{-\varepsilon} f^* \right\|_p \leq C_\varepsilon(p)\|f\|_p\,.$$

où $\widetilde{\delta}$ est la fonction $\widetilde{\delta}(x) = \delta(x, 0)$.

Les deux résultats sur lesquels on veut s'attarder sont indiqués ci-dessous.

REMARQUE. — La proposition 1 s'applique si G est un groupe unimodulaire, δ une métrique invariante à gauche sur G et $\mathrm{d}\sigma$ la mesure de Haar. Dans le premier résultat on va essayer d'enlever ε pour un cas particulier. Pour énoncer ce premier résultat que l'on veut démontrer on aura besoin de quelques notations.

Notations. — Soit G un groupe de Lie connexe, unimodulaire, non compact, non moyennable. On note

$$G = H \circledS G_0$$

sa décomposition de Levi. On suppose que la partie résoluble distinguée H de G est unimodulaire, à croissance polynomiale, de dimension D à l'infini (voir [9] pour la notion de dimension à l'infini). On suppose aussi que la partie semi-simple G_0 est de centre fini, connexe, de dimension topologique m_0.

On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathcal{H}$ celle de H, $\mathcal{G}_0$ celle de G_0 et σ la représentation de $\mathcal{G}_0$ sur $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i$ où $\sigma_{|\mathcal{H}_i} = \sigma_i$ est une sous-représentation irréductible de $\mathcal{G}_0$ et de poids $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{m_{i,1}}, m_i$. On pose

$$\Theta = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{m,m_i} m_{ij}\alpha_{ij}$$

Par la suite on va considérer une distance de contrôle associée à un système de Hörmander particulier pour des simples raisons d'exposition. La considération d'un système général alourdirait considérablement le texte sans simplifier la compréhension des idées développées.

Notons $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$ une décomposition de Cartan de $\mathcal{G}_0$, K_0 le sous-groupe compact maximal associé à k_0. On considère sur p_0 une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle X, Y\rangle_0 = -B(X, \Theta_0 Y)$ où B est la forme de Killing, Θ_0 l'involution de Cartan.

Soit $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_k$ un système de Hörmander de champs invariants à gauche sur G tels que :

- $X_1, \ldots, X_\ell$ sont dans $\mathcal{H}$ et $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_\ell$ est un système de Hörmander sur H ;
- $X_{\ell+1}, \ldots, X_s$ sont dans k_0 et $X_{s+1}, \ldots, X_k$ dans p_0 et les $X_1, \ldots, X_k$ sont linéairement indépendants.

On considère sur p_0 le produit scalaire $\langle .,. \rangle_1$ tel que $\langle X_i, X_j\rangle_1 = \delta_{ij}$ pour $s+1 \le i, j \le k$. On prolonge ce produit scalaire à $\mathcal{G}$ de telle sorte que p_0 et k_0 soient orthogonaux.

On pose

$$\gamma_0 = \sup_{k' \in K_0} \| \mathrm{Ad}(k')\|,$$

où $\| \mathrm{Ad}(k')\|$ est la norme de $\mathrm{Ad}(k')$ agissant sur p_0 muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_1$.

Soient

$$\|\alpha\| = \sup_{i,j} \|\alpha_{ij}\|, \quad \beta = \gamma_0^2 \|\alpha\| .$$

On note δ_0 la distance sur G_0, invariante à gauche dont la restriction au plan tangent à l'origine correspond au produit scalaire $\langle X, Y\rangle_0$.

Soient $\mathcal{A}^+$ une chambre de Weyl positive associée à la décomposition de $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$ et 2ρ la somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités relatives à $\mathcal{A}^+$.

Soit $\mathcal{H}^1_{ij}$ l'espace radiciel de poids $\alpha_{ij} \geq 0$ sur $\mathcal{A}$, si $\mathcal{H}^2_{ij}$ est l'espace radiciel de poids $-\alpha_{ij}$; on suppose que K est transitif sur les sphères de $\mathcal{H}^1_{ij} \oplus \mathcal{H}^2_{ij}$.

Sous ces conditons on a l'énoncé suivant :

Théorème 2. — *On suppose qu'il existe* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *tel que*

$$0 < \frac{D\beta}{\|2\rho + \Theta\|_0 - 2\|\rho\|_0(1-\varepsilon)} < 1.$$

Alors pour tout $p > 1/(1-\varepsilon)$ *il existe* $C(p)$ *telle*

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p$$

où $\|2\rho + \Theta\|_0$, $2\|\rho\|_0$ *est la norme de* $2\rho + \Theta$, 2ρ *donnée par le produit scalaire* $\langle .,. \rangle_0$.

Remarque. — L'exemple type où l'hypothèse du théorème s'applique est $\mathbb{R}^2 \circledS \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Les groupes concernés sont non moyennables et non semi-simples. Ils échappent à un contrôle brutal par Kunze-Stein. On va utiliser de la géométrie pour s'y ramener.

Au cours de la preuve du théorème on montrera aussi l'énoncé suivant :

Proposition 3. — *Soit* δ *une métrique comme ci- dessus. Soit* χ_r *la fonction caractéristique de la boule de rayon* r, *notée* B_r ; *on considère* $\beta_r = \chi_r/|B_r|$ *où* $|B_r|$ *est le volume de* B_r. *Si* $1/(1-\varepsilon) < p < 1/\varepsilon$, *il existe* $\alpha(p) > 0$ *telle que*

$$\|\beta_r\|_{p\to p} \leq C_1\, \mathrm{e}^{-\alpha(p)r} \quad \text{où } C_1 \text{ est une constante}$$

La proposition 3 est un cas particulier d'une conjecture de [8].

Théorème 4. — *M est une variété de Cartan-Hadamard et les L^p que l'on considère sont relatifs à la mesure riemannienne. On fait sur M les hypothèses suivantes :*

a) *La courbure de Ricci de M est minorée par $-b^2$ où $b \in \mathbb{R}^*$.*

b) *Pour tout x fixé, on note $\Theta_x(s,\omega)$ la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point x de M et $H_x(r,\omega)$ la courbure moyenne de la sphère de centre x et de rayon r évaluée au point $\exp_x r\omega$, et l'on suppose que*

$$\sigma_0 = \inf_{x,r,\omega} H_x(r,\omega) > 0$$

c) *Soit* $\psi_x(y) = \mathrm{e}^{-\phi_x(\delta(x,y))} = \left[\int_{\Sigma^{n-1}} \Theta_x(r,\omega)\mathrm{d}\omega\right]^{-1}$ *avec* $y = \exp_x r\omega$, *l'inverse de l'aire de la sphère de centre* x *et de rayon* r *pour la mesure induite. On suppose qu'il existe* $0 < \sigma < \sigma_0$ *telle que*

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_x(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_x(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \tau\frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}r} + \sigma^2 \geq 0$$

où $\tau = \sup_{\|\omega\|=1} H_x(r,\omega)$ *et que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x;y)}{G_{\sigma(x,y)}} < C_1$$

où $G_\sigma(x,y)$ *est la fonction de Green de* $\Delta + \sigma^2$ *et* C_1 *une constante qui ne dépend pas de* y.

Sous les hypothèses a), b), c), *il existe une constante* $1 < p_0 < \infty$ *telle que pour tout* $p_0 < p$ *il existe* $C(p)$ *telle que*

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p\,.$$

COROLLAIRE 5. — *On suppose que la courbure* C *de* M *vérifie l'inégalité*

$$-b^2 \leq C \leq -a^2, \quad \textit{avec} \quad 0 < a < b < \frac{5a}{4}\cdot$$

Si $p > p_0 = a/(3a-2b)$ *alors il existe* $C(p)$ *tel que* $\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p$.

Ce corollaire est établi dans [4].

2. Démonstration des résultats

L'idée générale de la preuve consiste à utiliser la troncature de [2] :

$$f^*(x) \leq \sup_{r\leq 1} \frac{1}{|B_x(r)|}\int_{B_x(r)} \bigl|f(y)\bigr|\mathrm{d}\sigma(y) + \sup_{r\geq 1} \frac{1}{|B_x(r)|}\int_{B_x(r)} \bigl|f(y)\bigr|\mathrm{d}\sigma(y) = f_1^*(x) + f_2^*(x).$$

Sous les hypothèses de la proposition 1 d'après les résultats classiques pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que

$$\|f_1^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p\,.$$

Cette inégalité vaut pour les boules du théorème 2 d'après [7] ainsi que pour celles du théorème 4 car M est à géométrie bornée et l'on utilise un lemme de recouvrement pour les boules de rayon plus petit que 1.

Dans les trois cas, il faut s'occuper de $f_2^*(x)$. On remarque dans les trois cas que

$$f_2^*(x) \leq \int_M \inf\left\{\left|B_x(1)\right|^{-1}, \frac{1}{|B_x(\delta(x,y))|}\right\} \left|f(y)\right| \mathrm{d}\sigma(y).$$

Mais par hypothèse $|B_x(1)| \geq C^{-1}|B_0(1)|$ où 0 est un point distingué sur M, comme $|B_x(r)|$ est croissante $|B_x(\delta(x,y)| \geq C^{-1}|B_0(1)|$ pour $\delta(x,y) \geq 2$ et

$$\begin{aligned} f_2^*(x) \leq C_1 &\int_{1<\delta(x,y)\leq 2} \left|f(y)\right| \mathrm{d}\sigma(y) \\ &+ C_2 \int_{\delta(x,y)\geq 2} \frac{1}{|B_x(\delta(x,y))} \left|f(y)\right| \mathrm{d}\sigma(y) = f_3^*(x) + f_4^*(x). \end{aligned}$$

Comme $\|f_3^*\|_p \leq C_p\|f\|_p$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, il faut étudier f_4^*, que l'on note $S(f)$ pour simplifier.

2.1. Preuve de la la proposition 1. — On considère le noyau

$$K(x,y) = \frac{1}{|B_x(\delta(x,y))|}\mathbf{1}_{\delta(x,y)\geq 2}$$

où $\mathbf{1}_{\delta(x,y)\geq 2}$ est la fonction caractéristique de $\{x, y \in M \ ;\ \delta(x,y) \geq 2\}$.

Alors pour x fixé (resp. y fixé), $K(x,y)$ comme fonction de y (resp. fonction de x) est dans $L^{1,\infty}(M)$ uniformément en x (resp. en y). On a en effet

$$\left|\{y \ ;\ K(x,y) > \alpha\}\right| \leq \left|B_x\left(\gamma_x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right| = \frac{1}{\alpha}$$

où γ_x est l'inverse de la fonction $r \mapsto |B_x(r)|$. On a de même

$$\left|\{x \ ;\ K(x,y) > \alpha\}\right| = \left|B_x\left[\gamma_y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]\right|$$

et par hypothèse

$$\left|B_x(r)\right| \leq C\left|B_y(r)\right| \quad \text{et} \quad \left|B_x\left[\gamma_y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]\right| \leq C\left|B_y\left[\gamma_y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]\right| = \frac{C}{\alpha}\cdot$$

d'où le résultat annoncé.

Comme $|K(x,y)| \leq C$, pour tout x (resp. tout y fixé), $K(x,y)$ comme fonction de y (resp. fonction de x) est dans $L^p(M)$ pour tout $1 < p \leq \infty$, il s'ensuit d'après [3] que

$$\left\|S(f)\right\|_q \leq C\|f\|_p$$

si $1/q = 1/p + 1/r - 1 = 1/p - 1/r'$. Choisissons r' tel que $\varepsilon > 1/r'$ et $r \gg 1$, Alors d'après ce qui a été dit précédemment la fonction de x, $(1+|B_0(\delta(0,x)|)^{-\varepsilon}$, est dans $L^{r'}$(M) et

$$\left\|\,(1 + |B_0[\delta(0,x)])^{-\varepsilon}\, S(f)\right\| \leq C\|f\|_p$$

d'où le résultat de la proposition.

2.2. Preuve du théorème 2. — La proposition suivante sera déterminante par la suite.

PROPOSITION 6. — *Soit $G = H \circledS G_0$ comme ci-dessus. On considère $z_0 = (x_1, y_1)$ avec x_1 dans H et y_1 dans G_0. Alors si δ_H désigne la distance de contrôle associée au système de Hörmander dans H,*

$$\log\left[\delta_H(x_1, e)\right] \leq \beta\delta_G(z_0, e) + C$$

où C est une constante, pourvu que $\delta_H(x_{,1}, e) \geq C_2$ et $\delta_{G_0}(e, y_1) \geq C_2$ où C_2 est une constante suffisamment grande.

Preuve de la proposition. — Soient $X_1, \ldots, X_k$ comme précédemment. Si X_j est dans $\mathcal{H}$, on a $\widetilde{X}_j f(x,y) = \mathrm{d}f(x\cdot y \exp tX_j, y)/\mathrm{d}t_{\,|t=0}$ pour toute fonction C^∞ $f : G \to \mathbb{C}$. Alors

$$\widetilde{X}_j f(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x \cdot \exp \tau_y t X_j, y)_{\,|t=0}$$

où τ_y désigne la différentielle de l'automorphisme $y \mapsto \tau_y : t_y(x) = x \cdot y$.

En particulier, si $y = \exp H_0$ avec $H_0 \in \mathcal{A}_0$ où $\mathcal{A}_0$ désigne le sous-espace abélien maximal de p_0 correspondant à $\mathcal{A}_0^+$ et si X est dans un espace radiciel $\mathcal{H}_{ij}$, on a

$$\widetilde{X} f(x, \exp H_0) = \alpha_{ij}(H_0)\widetilde{X}^{(1)}_{j|x} f(x, \exp H_0)$$

où $\widetilde{X}^{(1)}_j$ désigne le champ des vecteurs invariant à gauche sur H induit par X_j.

Soit $\psi : [0,T] \to G$ une courbe minimisante pour la distance dans G. On a

$$\begin{aligned}
&\psi(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t)) \quad \text{avec} \quad \omega_1 \in H \text{ et } \omega_2 \in G_0,\\
&\psi(0) = e, \quad \psi(T) = (x_1, y_1), \quad y_1 = k_1 \exp ak_2,\\
&\psi'(t) = (\omega_1'(t)\omega_2'(t)) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t)\widetilde{X}_j\,|\psi'(t) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n |\psi_j(t)|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Soient $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞ et $1 \leq j \leq \ell$. On a

$$\widetilde{X}_{j|\psi(t)} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\psi(t)\exp sX_j)_{\,|s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f\left(\omega_1(t), \omega_2(t)\right)(\exp sX_j, e)_{\,|s=0}$$

où on a posé $\omega_2(t) = k_1(t)\exp a(t)k_2(t)$,

$$\begin{aligned}
f\left[\omega_1(t), \omega_2(t))(\exp sX_j, e)\right] &= f\left[(\omega_1(t)\cdot\omega_2(t)\cdot\exp sX_j, \omega_2(t)\right]\\
&= f\left[(\omega_1(t)\cdot \exp s\tau_{\omega_2(t)}X_j, \omega_2(t)\right],\\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\left[\psi(t)(\exp sX_j, e)\right]_{\,|s=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f\left[(\omega_1(t)\exp s\tau_{\omega_2(t)}X_j, \omega_2(t)\right]\\
&= \widetilde{\tau_{\omega_2(t)}X_j}_{\,|\psi(t)} f\left[\omega_1(t), \omega_2(t)\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

On considère enfin une base $Y_1, \dots, Y_{m_0}$ de $\mathcal{H}$ de vecteurs radiciels et H_0 dans $\mathcal{A}$ $\exp H_0 \cdot Y_j = \mathrm{e}^{\alpha_{\ell,j}(H_0)} Y_j$. Si $1 \le j \le \ell$, on a

$$\begin{aligned}
\tau_{\omega_2(t)} X_j &= \tau_{k_1(t)} \tau_{a(t)} \tau_{k_2(t)} X_j \\
&= a_{j,\ell_1} \tau_{k_1(t)} \tau_{a(t)} Y_{\ell_1} \\
&= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_2(t)\right) \tau_{a(t)} Y_{\ell_2} \\
&= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_2(t)\right) \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(at))} \varphi_{\ell_1,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) Y_{\ell'_2} \\
&= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_2(t)\right) a^{\ell'_2,\ell'_3} \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(at))} \varphi_{\ell_1,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) X^0_{\ell'_3}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la sommation muette. Par ailleurs si $\ell + 1 \le j \le k$, on a

$$(*) \quad \widetilde{X}_j|_{\psi(t)} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f\left(\omega_1(t), \omega_2(t) \exp sX_j\right)_{s=0} = \widetilde{X}^0_j f$$

Mais $\psi'(t) = \left(\omega'_1(t), \omega'_2(t)\right)$; l'expression de $\widetilde{X}_j|\psi(t)$ pour $1 \le j \le \ell$ prend la forme

$$a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_1(t)\right) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \widetilde{X}^{0(1)}_{\ell'_3}.$$

D'après (*),

$$\omega'_1(t) = \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_1(t)\right) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) \widetilde{X}^{0(1)}_{\ell'_3}.$$

Si $\mathcal{X}$ désigne la projection sur le plan engendré par $(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\ell_1})$

$$\begin{aligned}
\omega'_1(t) &= \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) \mathcal{X}\widetilde{(X^0_{\ell'_3})}^{(1)} \\
&= \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_1(t)\right) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) U_{\ell'_3,\ell_4} \widetilde{X}^{(1)}_{\ell_4}
\end{aligned}$$

soit

$$\omega'_{\ell_4} = \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} \mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}\left(k_1(t)\right) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}\left(k_2(t)\right) U_{\ell_3,\ell_4}.$$

Comme K_0 est compact, $\sup_{k \in k_0} |\varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t))| = a_1$ est fini. Mais

$$\left|\psi_j(t)_{a_j,\ell_1}\right| \le \left(\sum |a_{j,\ell_1}|^2\right)^{1/2} = a_2, \quad \sup |U_{\ell_3,\ell_4}| = a_3$$

et

$$(**) \quad |\omega'_{\ell_4}|(t) \le a_1^2 a_2^2 a_3 \,\mathrm{e}^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))}.$$

Puisque $\psi'(t) = \sum_{j=1}^m \theta_j(t) \widetilde{X}_{j\,|\psi(t)} = \omega'_1(t) + \omega'_2(t)$, on a

$$\omega'_1(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \omega'_{j,1}(t) \widetilde{X}^{(1)}_j|_{\omega(t)}.$$

La majoration (**) montre que

$$\left|\omega'_j(t)\right| \le c\mathrm{e}^{\|\alpha\| \cdot \|a(t)\|}$$

où $\|a(t)\|$ est la norme donnée par la forme de Killing.

On voudrait montrer que

$$\|a(t)\| \leq \gamma^2 t.$$

Les X_i, $\ell+1 \leq i \leq k$ engendrent un système de Hörmander sur G_0 d'où une distance associée notée δ_1. Alors $\delta_1(e_2, \omega_2(t)) \leq \delta(e, \psi(t)) \leq \int_0^t \mathrm{d}s = t$.

On désigne l'élément neutre de G par $e = (e_1, e_2)$. Soit $\eta(s)$ une courbe dans G_0 qui joint e_2 à $\omega_2(t)$ telle que

$$\eta'(s) = \sum_{i=\ell+1}^{k} \eta_i'(s) \widetilde{X}_{i\,|\eta(s)} \quad \text{avec} \quad \sum \left|\eta_i'(s)\right|^2 = 1,$$
$$\eta(\tau) = \omega_2(t), \quad \delta_1\left(e_2, \omega_2(t)\right) = \tau,$$
$$\eta(s) = \exp X(s) k(s).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\omega_2(t) &= k_1(t) \exp a(t) k_2(t) = k_1(t) \exp a(t) k_1^{-1}(t) k_1(t) k_2(t), \\
&\qquad\qquad\qquad = \exp \mathrm{Ad}\left(k_1(t)\right) a(t) k_1(t) k_2(t), \\
X(\tau) &= \mathrm{Ad}\left(k_1(t)\right) a(t), \quad k(\tau) = k_1(t) k_2(t) \\
\eta'(s) &= \mathrm{Ad}\widetilde{(k^{-1}(s))X'}(s)_{|\exp X(s)k(s)} + \widetilde{Z}(s)
\end{aligned}$$

où $\widetilde{Z}$ provient des champs sur K_0, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\eta'(s)\right\|_1^2 &= \sum_{i=\ell+1}^{k} \left|\eta_i(s)\right|^2 \cdot \left\|\widetilde{X}_i|\eta(s)\right\|^2 \\
&= \left\|\mathrm{Ad}\widetilde{(k^{-1}(s))X'}(s)_{|\exp X(s)k(s)} + \widetilde{Z}(s)\right\|_1^2 \\
&= \left\|\mathrm{Ad}(k^{-1}(s))X'(s)\right\|_1^2 + \left\|\widetilde{Z}(s)\right\|_1^2
\end{aligned}$$

et $\|X'(s)\|_1 \leq \|\mathrm{Ad}(k(s))\eta_0'(s)\|_1$ avec $\eta_0'(s) = \sum_{i=\ell+1}^{k} \eta_i(s) X_i$, d'où

$$\left\|X'(s)\right\|_1 \leq \sup_{k \in K_0} \left\|\mathrm{Ad}(k)\right\| \cdot \|\eta_0'\|_1 = \gamma_0.$$

Alors

$$\left\|X(\tau)\right\|_1 \leq \int_0^\tau \left\|X'(s)\right\|_1 \mathrm{d}s \leq \gamma_0 \tau = \gamma_0 \delta_1\left(e, \omega_2(t)\right)$$

$a(t) = \mathrm{Ad}(k^{-1}(t)) X(\tau)$

$$\left\|a(t)\right\|_1 \leq \gamma_0 \left\|X(t)\right\|_1 \leq \gamma_0^2 \delta_1\left(e, \omega_2(t)\right) \leq \gamma_0^2 t.$$

2.3. Preuve de la proposition 3. — Écrivons

$$\frac{1}{|B(r)|}\int \chi_r(hg)\mathrm{d}h = \frac{1}{|B(r)|}\int_{\delta(hg,e)\le 1}\chi_r(hg)\mathrm{d}h + \frac{1}{|B(r)|}\int_{\delta(hg,e)\ge 1}\chi_r(hg)\mathrm{d}h$$
$$= F_1(g) + F_2(g).$$

La norme de F_1 comme opérateur de convolution de $L^p(G_0)$ est dominée par $c/|B(r)|$; par conséquent, il suffit d'estimer celle de F_2. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\begin{aligned} F_2(g) &= \frac{1}{|B(r)|^{\varepsilon}}\int_{\delta(hg,e)\ge 1}\frac{\chi_r(hg)\mathrm{d}h}{|B(r)|^{1-\varepsilon}} \\ &\le \frac{C}{|B(r)|^{\varepsilon}}\int_{\delta(hg,e)\ge 1}\frac{\chi_r(hg)\mathrm{d}h}{c_1 + |B^{1-\varepsilon}(\delta(hg,e))|} \\ &= \frac{C}{|B(r)|^{\varepsilon}}F_{2,\varepsilon}(g) \le c\mathrm{e}^{-\beta_\varepsilon r}F_{2,\varepsilon}(g) \end{aligned}$$

où C_1 est une constante qu'on choisira comme il convient.

Les calculs pour $F_{2,\varepsilon}$ sont les mêmes que pour la fonction E_1 que nous allons définir ci-dessous. On va d'ailleurs voir que

$$\sup_{k_1,k_2} F_{2,\varepsilon}(k_1 \exp ak_2) \le F_{2,\varepsilon}(\exp a) \quad \text{avec de bonnes propriétés.}$$

3. Suite de la preuve du théorème 2

Soit

$$E(x) = \frac{1}{|B[\delta(0,x)]|}\mathbf{1}_{B_1^c}(x) \simeq \frac{1}{|B(\delta(x,0))| + C}$$

où $\mathbf{1}_{B_1^c}(x)$ est la fonction caractéristique du complémentaire de la boule de rayon 1 centrée à l'origine de G. D'après [6] et le théorème de Kunze-Stein [6], il suffit de voir que la fonction

$$E_1(x) = \int_H E(hx)\mathrm{d}h$$

est dans $L^p(G_0)$ pour une valeur de p inférieure à celle de l'énoncé. En effet comme H est moyennable, E donne lieu à un opérateur borné sur $L^{p_1}(G)$ si et seulement si E_1 donne lieu à un opérateur borné de $L^{p_1}(G_0)$ (ceci résulte de [6]) et il en est ainsi si E_1 est dans $L^p(G_0)$.

On veut d'abord estimer $E_1(x)$ pour $\delta_1(e,\dot{x})$ très grand. On pose

$$x = k \exp ak_1$$

et l'on voit que

$$(***) \quad \delta(hk \exp ak_1, e) \ge \delta(hk \exp a, e) - C$$

car par hypothèse $\delta_1(e,\dot{x})$ est très grand comme c'est une distance quotient $\delta(hk\exp ak_1,e)\geq\delta_1(e,\dot{x})$ qui est très grand. Alors

$$\frac{1}{|B[\delta(hk\exp ak_1,e)]|}\leq\frac{C_1}{|B[\delta(hk\exp a,e)]|}.$$

En effet, soient $r,s>0$; alors $B(r+s)=\bigcup_{y\in B(r)}B_y(s)$. Si Y est un sous-ensemble fini de $B(r)$ dont deux points y_1,y_2 avec $y_1\neq y_2$ satisfont l'inégalité $\delta(y_1,y_2)>b$ où b est une constante positive

$$\bigcup_{y\in Y}B_y\left(\tfrac{1}{2}b\right)\subset B\left(r+\tfrac{1}{2}b\right)$$

et $\operatorname{Card}(Y)|B_y(\frac{1}{2}b)|=\operatorname{Card}Y\ C_b\leq|B(r+\frac{1}{2}b)|$. Soit $Y\subset B(r)$ fini, maximal pour la propriété : tous les points y_1,y_2 de Y avec $y_1\neq y_2$ satisfont $\delta(y_1,y_2)>b$. D'après la maximalité de Y, on a l'inclusion $B(r+s)\subset\bigcup_{y\in Y}B(y,s+b)$ et

$$|B(r+s)|\leq\operatorname{Card}(Y)\,|B(s+b)|\leq C_b^{-1}\left|B\left(r-\tfrac{1}{2}b\right)\right|\cdot|B(s+b)|\,.$$

Si l'on pose $r+\frac{1}{2}b=r_1$ et $s-\frac{1}{2}b=s_1$, on a

$$|B(r_1-s_1)|\leq C_b^{-1}B(r_1)B\left(s_1+\tfrac{3}{2}b\right)$$

pour $r_1>\frac{1}{2}b$ et $s\geq-\frac{1}{2}b$; en particulier pour $s_1\geq 0$, on trouve avec l'inégalité $\delta(hk\exp a,e)\leq c+\delta(hk\exp ak_1,e)$

$$\begin{aligned}|B\left[\delta(hk\exp a,e)\right]|&\leq\left|B\left(\delta(hk\exp ak_1,e)\right)+c\right)\\&\leq C_b^{-1}\left|B\left[\left(\delta(hk\exp a,e\right]\right|\cdot\left|B(c+\tfrac{3}{2}b)\right|\end{aligned}$$

d'où l'inégalité ci-dessus.

Soit r très grand ; on veut estimer $|B_e(r)|=|B(r)|$. Soit $\gamma_1=\sup_{k\in K_0}\delta(k,e)$; si $\delta(g,e)$ est très grand et que $g=k_1\exp Xk_2$, $k_i\in K$, X dans a, $g\in G_0$

$$\delta(\exp X,e)-2\gamma_1<\delta(g,e)\leq\delta(\exp X,e)+2\gamma_1$$

Par ailleurs $\delta(\exp X,e)\leq\delta_{G_0}(\exp X,e_1)$ où δ_{G_0} est la distance induite sur G_0.

Comme

$$\delta_{G_0}(\exp X,e)\leq\|X\|\delta(g,e)\leq\|X\|+\gamma_1,$$

on a

$$B'=\{g=k_1\exp Xk_2,\ \|X\|\leq r-1-2\gamma\}\,,$$

$$B'\cdot B(1)\subset B(r),\quad B'\cdot B(1)=\{(g\cdot x,g\cdot y),\ g\in B',\delta(x,y,e)\leq 1\}\,,$$

$$\int_{B_r}\mathrm{d}x\geq\int_{B'\cdot B(1)}\mathrm{d}x.$$

La trace de la boule $B(1)$ sur H sera notée $B''(1)$. Alors

$$B'\circ B''(1)\subset B(r)\quad\text{et}\quad B'\circ B''(1)=\{(g,x),\ g\in B',\, x\in B''(1)\}\,,$$

$$\int_{B_r}\mathrm{d}x\geq\int_{B'}\mathrm{d}g\int_{gB''(1)}\mathrm{d}u.$$

Quitte à diminuer l'intégrale ci-dessus, on peut trouver des boules $D^0_{j,n}$ dans H^i de petit rayon, pour une bonne m étrique K invariante, telle que pour tout $x_j\subset D^0_{j,n}$, $\exp x_i\in B'(1)$ et $x=\prod_{j=1}^m\exp x_j\in B''(1)$. Si $a\in\mathfrak{A}^+$, alors $\exp a\cdot x=\prod_{j=1}^m\exp\mathrm{Ad}\,ax_j$.

Si x_j est dans l'espace radiciel d'indice n, x_j, on l'indexe $x_{n,j}$ et on a

$$\prod_{j=1}^m\exp[\mathrm{e}^{\alpha_{n,j}(a)}x_{n,j}].$$

Si $k\in K$, on a

$$k\cdot\prod_{j=1}^m\exp\mathrm{e}^{\alpha_{n,j}(a)}x_{n,j}=\prod_{j=1}^m\exp\mathrm{e}^{\alpha_{n,j}(a)}\,\mathrm{Ad}\,k\cdot x_{n,j}.$$

Comme on a supposé qu'il existe des sous-ensembles $D_{j,n}$ dans l'espace radiciel $H_{j,n}$ tels que pour tout $x_{j,n}\in D_{j,n}$

$$\|x_{j,n}\|\leq 1,\quad [x_{j,n},a]=\alpha_{j,n}(a)x_{j,n}\quad\text{avec}\ \ \alpha_{j,n}(a)\geq 0,$$

on a

$$\int_{\prod_{j=1}^n K\cdot\prod_{n=1}^{m_j}\exp D^+_{j,n}}\mathrm{d}x>C_1>0,$$

$$\begin{aligned}\int_{B'}\mathrm{d}g\int_{gB''(1)}\mathrm{d}x&\geq\int_{\substack{a\in a^+\\ \|a\|\leq r-1-2\gamma}}\prod_{\alpha\in\Sigma^+}Sh^{m_\alpha}(a)\\&\qquad\times\int_K\mathrm{d}k\int_{k\cdot\prod_{j=1}^n K\cdot\prod_{n=1}^{m_j}\exp\mathrm{e}^{\alpha_{j,n}(a)}D^+_{j,n}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a\\&=\int_{\substack{a\in a^+\\ \|a\|\leq r-1-2\gamma}}\prod_{\alpha\in\Sigma^+}Sh^{m_\alpha}(a)\mathrm{d}a\int_{\prod_{j=1}^n K\cdot\prod_{n=1}^{m_j}\exp\mathrm{e}^{\alpha_{j,n}(a)}D^+_{j,n}}\mathrm{d}x\\&=\int_{\substack{a\in a^+\\ \|a\|\leq r-1-2\gamma}}\prod_{\alpha\in\Sigma^+}Sh^{m_\alpha}(a)\mathrm{d}a\,\mathrm{e}^{\Sigma\alpha_{j,n}(a)}\int_{\prod_{j=1}^n K\cdot\prod_{n=1}^{m_j}\exp D^+_{j,n}}\mathrm{d}x\\&\geq C_0\int_{\substack{a\in a^+\\ \|a\|\leq r-1-2\gamma}}\prod_{\alpha\in\Sigma^+}Sh^{m_\alpha}(a)\,\mathrm{e}^{\Sigma m_{ij}\alpha_{ij}(a)}\mathrm{d}a\\&\geq C_0\int_{\substack{a\in a^+\\ \alpha(a)\geq\sqrt{2}\\ \|a\|\leq r-1-2\gamma}}\mathrm{e}^{2\rho(a)+\theta(a)}\mathrm{d}a\geq C^{\mathrm{te}}\,\mathrm{e}^{r\|2\rho+\theta\|}r^{\ell}.\end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à estimer

$$\begin{aligned}\int_H \frac{\mathbf{1}_{B^c}(hk\exp a)\mathrm{d}h}{|B\{\delta(hk\exp a),e]\}|+C_1} &= \int_H \frac{\mathrm{d}h}{|B[\delta\{(kk^{-1}hk\exp a),e\}]|+C_1}\\ &\leq \int_H \frac{\mathrm{d}h'}{|B(\delta(kh'\exp a),e))|+C_1}\\ &\leq C_2\int_H \frac{\mathrm{d}h}{|B(\delta(h\exp a,e))|+C_1}\quad \text{(d'après (***))}.\end{aligned}$$

Si $\delta_H(h,e_2)\leq 1\cdot\delta(h,e)\leq 1$, d'après [9] et

$$\begin{aligned}\int_{\delta_H(h,e_2)\leq 1} &\frac{\mathrm{d}h}{|B(\delta(h\exp a),e))|+C_1}\\ &\leq C\frac{1}{|B[\delta(\exp a),e)]|+C_1} = F_0'(\exp a).\end{aligned}$$

La restriction de δ à G_0 est une distance invariante à gauche ; par conséquent, F_0' est dans $L^p(G_0)$ pour tout $1<p\leq\infty$ et

$$\int_H \frac{\mathbf{1}_{B^c}(hgk)\mathrm{d}h}{|B(\delta(hgk,e))|+C} \leq C\int_H \frac{\mathrm{d}h}{|B[\delta(hg,e)]|+C_1}.$$

Pour estimer E_1, il suffit donc d'estimer

$$\int_{\delta_H(h,e)\geq 1} \frac{\mathrm{d}h}{|B\{\delta(h\exp a,e)\}|+C} = F_0'(a).$$

Mais si $\varepsilon>0$, on a

$$\begin{aligned}\tau(a) &= \int_{\delta_H(h,e_2)\geq 1} \frac{\delta^{\ell}(h\exp a,e)\delta^{-\ell}(h\exp a,e)\,\mathrm{e}^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h\exp a,e_2)}}{\mathrm{e}^{2|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h\exp a,e_2)}|B(\delta(h\exp a,e_2))|+C}\\ &\leq \delta_{G_0}^{-\ell}(\exp a,e)\,\mathrm{e}^{-2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta_{G_0}(\exp a,e)}\\ &\qquad\times\int_{\delta_H(e,h)\geq 1}\frac{\mathrm{e}^{2|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h\exp a,e_2)}}{|B(\delta(h\exp a,e))|+C}\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière intégrale, on va utiliser l'estimation

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h\exp a,e)}\,&\mathrm{e}^{-\|2\rho+\theta\|\delta(h\exp a,e)}\delta^{\ell}(h\exp a,e)\\ &\leq \mathrm{e}^{-\{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}\delta(h\exp a,e)},\quad \varepsilon\approx\varepsilon\end{aligned}$$

puisque $\|2\rho+\theta\|>2\|\rho\|(1-\varepsilon)$.

Mais d'après la proposition 1, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h\exp a,e)}\,&\mathrm{e}^{-\|2\rho+\theta\|\delta(h\exp a,e)}\delta^{\ell}(h\exp a,e)\\ &\leq C\,(\delta_H(h,e_2))^{-\{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}/\beta}.\end{aligned}$$

Mais par hypothèse

$$\left|\left\{h; \delta_H^{-\gamma}(h, e_2) > \alpha\right\}\right| = \left|B(\alpha^{-1/\gamma})\right\| \leq C\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{D/\gamma}$$

et

$$\int_{\delta_H(e,h)\geq 1} \frac{\mathrm{d}h}{\{\delta_H(h, e_2)\}^{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}/\beta}} \\ \leq C\int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{D\beta/(\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon'))}} < \infty$$

d'où la finitude de l'intégrale si $p_1(\varepsilon) = 1/(1-\varepsilon)$. Il s'ensuit que

$$F_{2,0}(k \exp ak') \leq c\delta_{G_0}^{-\ell}(\exp a, e)\,\mathrm{e}^{-2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta_{G_0}(\exp a, e)}.$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux a grands, $F_{2,0}$ est dans $L^{p_1-\varepsilon_0}(G_0)$ et d'après [6], l'opérateur de convolution associé est borné sur $L^p(G_0$ et d'après [5], E donne lieu à un opérateur borné sur $L^p(G)$.

3.1. Démonstration du théorème 4

1) Comme la courbure de Ricci est $\geq -b^2$, si l'on note Δ le laplacien de M, on a d'après le théorème de comparaison (voir [1])

$$\frac{1}{n-1}\Delta r \leq \Delta_b r_b$$

où r désigne la fonction distance sur M d'un point distingué et r_b la fonction distance sur la variété simplement connexe hyperbolique de courbure de Ricci $-b^2$ et de dimension n. Si $\theta(s, w)$ désigne la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point x de M, on en déduit que

$$\frac{1}{n-1}\theta'(s, w) \leq c\theta(s, w)$$

pour $s \geq 1$, et tout point w de la sphère-unité de T_xM. Alors

$$\int_1^r \theta'(s, w)\mathrm{d}s \leq c\int_0^r \theta(s, w)\mathrm{d}s,$$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} [\theta(r, w) - \theta(1, w)]\,\mathrm{d}w \leq c\int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(s, w)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}w$$

si r est assez grand, $\frac{1}{10}\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w)\mathrm{d}w > \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(1, w)\mathrm{d}w$ alors

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w)\mathrm{d}w \leq c\int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(s, w)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}w.$$

Il s'ensuit que pour r assez grand,

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w)\mathrm{d}w \leq c\,|B_r(x)|$$

où $B_r(x)$ désigne la boule riemannienne de centre x et de rayon r et $|B_r(x)|$ son volume.

On commence la preuve du théorème comme pour celle de [1]. En effet

$$f^*(x) \leq \mathrm{Sup}_{r\leq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y) \\ + \mathrm{Sup}_{r\geq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \mathrm{d}\sigma(y).$$

On choisit r_0 très grand pour que l'inégalité

$$\frac{1}{10} \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r,w)\mathrm{d}w > \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(1,w)\mathrm{d}w$$

soit vérifiée pour tout $r > r_0$.

On continue comme précédemment et l'on s'intéresse à

$$\begin{aligned} f_2^0(x) &= \mathrm{Sup}_{r\geq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y) \\ &\leq \int_M \mathrm{Inf}\left(1, \frac{1}{|B_{\delta(x,y)}(x)|}\right) |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y) \\ &\leq \int_{\delta(x,y)\leq r_0} |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y) + \int_{\delta(x,y)\geq r_0} \frac{1}{B_{\delta(x,y)}(x)} |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y) \\ ??? &\int_M \left| \int_{\delta(x,y)\leq \mathbb{C}} |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y) \right|^p \mathrm{d}\sigma(x) \leq C\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Car M est à géométrie bornée. Il ne nous reste plus que la fonction

$$f_2(x) = \int_{\delta(x,y)\geq r_0} \frac{1}{(|B_{\delta(x,y)}(x)|} |f|(y)\mathrm{d}\sigma(y).$$

D'après la première partie le noyau intéressant à étudier est

$$K^{-1}\left(\delta(x,y)\right) = \int_{\Sigma_{n-1}} \theta\left[\delta(x,y), w\right] \mathrm{d}w\, \mathbf{1}_{\delta(x,y)\geq r_0}$$

puisque

$$f_2(x) \leq \int_M K(x,y)\, |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y).$$

On se propose d'estimer $K(x,y)$. On considère un système de coordonnées polaires au point x dans T_xM. On note (r,w) un système de coordonnées polaires en x_0, $r = \delta(x,y)$ le volume de la boule de centre x de rayon r vaut

$|B_r(x)| = \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}^{\theta(r,w)\mathrm{d}w}}$ et l'aire de la sphère $\mathrm{e}^{\varphi(r)} = \int_{\Sigma_{n-1}^{\theta(r,w)\mathrm{d}w}}$ pour $\delta(x,y)$ suffisamment grand, le laplacien de la fonction $\psi_x(y) = \mathrm{e}^{-\varphi_x(\delta(x,y))}$ vaut

$$\Delta_y \psi_x(y) = \left[-\frac{\mathrm{d}^2\phi_x(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\phi_{(r)}}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{\theta_x'(r,w)}{\theta_x(r,w)}\frac{\mathrm{d}\phi_x(r)}{\mathrm{d}r}\right] \mathrm{e}^{-\varphi_x[\delta(x,y)]}.$$

Mais $\theta_x'(r,w)/\theta(r,w) = H(r,w)$ où $H(r,w)$ est la courbure moyenne de la sphère centrée en x et de rayon r évaluée au point de coordonnées polaires (r,w).

Il existe par hypothèse σ telle que $0 < \sigma < \sigma_0$ et

$$(*) \qquad \left[-\frac{d^2\phi_x(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left[\frac{d\phi_x(r)}{\mathrm{d}r}\right]^2 - \tau\frac{d\phi_x(r)}{\mathrm{d}r} + \sigma^2\right] \mathrm{e}^{-\phi_x(r)} \geq 0.$$

Alors

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_x(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left[\frac{\mathrm{d}\varphi_x(r)}{\mathrm{d}r^2}\right]^2 - H(r,w)\frac{\mathrm{d}\varphi_x(r)}{\mathrm{d}r} + \sigma^2\right] \mathrm{e}^{-\varphi_x(r)} \geq 0$$

et la fonction $\psi_x(y) = \mathrm{e}^{-\varphi_x(\delta(x,y)}$ est $\Delta + \sigma$ sous harmonique.

Mais si f est une fonction $M \to \mathbb{C}$, C^∞ à support compact, $f(x_0) = 0$

$$\int_0^\infty |f(r,w)|^2\,\theta(r,w)\mathrm{d}r \leq \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty |f(r,w)|^2\,\theta'(r,w)\mathrm{d}r,$$

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^\infty \left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,w)\right| \cdot |f(r,w)|\,\theta(r,w)\mathrm{d}r$$
$$\leq \frac{1}{\sigma}\left(\int_0^\infty \left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,w)\right|^2\theta(r,w)\mathrm{d}r\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^\infty |f(r,w)|^2\theta(r,w)\mathrm{d}r\right)^{1/2},$$

$$\int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} |f(r,w)|^2\,\theta(r,w)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}w \leq \frac{1}{\sigma_0^2}\int_0^\infty\int_{\Sigma_{n-1}} \left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,w)\right|^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}w$$

et $\|f\|_2^2 \leq -\frac{1}{\sigma_0^2}\langle \Delta f, f\rangle$

$$\big\langle(-\Delta - \sigma_0^2)f, f\big\rangle \geq 0$$

et si $\varepsilon > 0$, $\langle -\Delta - (\sigma^2)f, f\rangle \gg (\sigma^2 - \sigma^2)\|f\|_2^2$.

Par conséquent

$$\Delta + \sigma^2 \text{ est inversible sur } L^2(M)$$

d'où l'existence d'une fonction de Green pour $\Delta + \sigma^2$: G_σ.

On peut appliquer le principe du maximum à ψ et G_σ avec l'opérateur elliptique $\Delta + \sigma^2$. Malheureusement la constante σ est positive et on ne peut l'appliquer brutalement.

a) Comme M est à géométrie bornée pour $\delta(x,y) = r_0 > 0$, $C_\sigma^{-1} < G_\sigma(x,y) \leq C_\sigma$ où C_σ est une constante finie qui ne dépend ni de x, ni de y.

b) On considère l'opérateur

$$(G_\sigma^x)^{-1}(\Delta+\sigma)G_\sigma^x = \Delta + \nabla \log G_\sigma^x = \Delta_\sigma^x$$

où $G_\sigma^x(y) = G_\sigma(x,y)$.

c) Pour $\delta(x,y) > r_0$, $\Delta_\sigma^x G_\sigma^x = 0$. Si $\psi^x(y) = \mathrm{e}^{-\varphi_x(y)}$, $\Delta_\sigma^x(\frac{\psi^x}{G_\sigma^x}) \geq 0$ d'après ce qui a été dit précédemment.

d) De plus Δ_σ^x est sans terme constant et par hypothèse

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\psi^x(y)}{G_\sigma(y)} \leq C$$

le principe du maximum appliqué à 1 et ψ^x/G_σ^x pour Δ_σ^x dit que

$$\psi^x(y) \leq C_\sigma G_\sigma^x(y) = C_\sigma G_\sigma(x,y)$$

pour tout y avec $\delta(x,y) \geq r_0$. Il existe p_0, $1 < p_0 \leq 2$ tel que

$$\Big\| \int_M G_\sigma(x,y) \mathbf{1}_{\delta(x,y)\geq r_0}(y) f(y) \mathrm{d}\sigma(y) \Big\|_{p_0} \leq C(p,\sigma)\|f\|_{p_0}.$$

Soit $\mu^2 = -\operatorname{Inf}\langle \Delta f, f\rangle/(f \in C_0^\infty(M), \|f\|_2)$ soit

$$G_\sigma(x,y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\sigma^2 t} P_t(x,y)\mathrm{d}t$$

où P_t est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On a déjà vu que G_σ est fini partout, elle est même C^∞ en dehors de la diagonale.

On considère l'ensemble $\Gamma = \{z, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. On définit

$$G_z(x,y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mu^2-\varepsilon)zt} P_t(x,y)\mathrm{d}t$$

Alors pour $\operatorname{Re} z = 1$, $\| \int_M G_z(x,y) f(y) \mathrm{d}\sigma(y)\|_2 \leq c\|f\|_2$.

Pour $\operatorname{Re} z = 0$, $\| \int_M G_z(x,y) f(y) \mathrm{d}\sigma(y)\|_p \leq c\|f\|_p$ pour tout $1 < p \leq 2$. En effet

$$\Big| \int_M \int_0^\infty \mathrm{e}^{(u^2-\varepsilon)it} P_t(x,y)\mathrm{d}t f(y)\mathrm{d}\sigma(y)\Big| \leq \int_M \int_0^\infty P_t(x,y)\, |f(y)|\, \mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}t.$$

Comme $\mu^2 > 0$, on a $\|P_t\|_{2\to 2} \leq \mathrm{e}^{-\mu^2 t}$ pour $t > 1$ et par interpolation

$$\|P_t\|_{p\to p} \leq \mathrm{e}^{-2\mu^2/p' t} \quad \text{pour } t > 1.$$

Il s'ensuit que

$$\|G_s f\|_{p_s} \leq C(s)\|f\|_{p_s} \quad \text{où} \quad G_s = \int_0^\infty \mathrm{e}^{+(\mu^2-\varepsilon)s} P_t(x,y)\mathrm{d}t,$$

$1/p_s = \frac{1}{2}(1-s) + 1/p$; on peut choisir

$$s = \frac{\sigma^2}{\mu^2-\varepsilon}, \quad \frac{1}{p_s} = \frac{1-\sigma^2}{\frac{1}{2}(\mu^2-2)} + \frac{\sigma^2}{(\mu^2-\varepsilon)p}.$$

Comme p est voisin de 1 et ε arbitraire, on voit que pour tout p tel que $p_0 > \frac{1}{2}[1+\sigma^2/\mu^2]$, on a

$$\Big\| \int_M G_\sigma(x,y) f(y) \mathrm{d}\sigma(y) \Big\|_{p_0} \leq C_\sigma \|f\|_{p_0}.$$

Alors

$$\Big\| \int_M G_\sigma(x,y) \mathbf{1}_{\delta(x,y)\geq r_0}(y) f(y) \mathrm{d}\sigma(y) \Big\|_{p_0} \leq C_\sigma(p_0) \|f\|_{p_0},$$

$$\Big\| \int_M \psi_\sigma(x,y) \mathbf{1}_{\delta(x,y)\geq r_0}(y) f(y) \mathrm{d}\sigma(y) \Big\|_{p_0} \leq C(\sigma,p_0) \|f\|_{p_0}.$$

Par conséquent

$$\|f_2\|_{p_0} \leq C(p,p_0)\|f\|_{p_0} \quad \text{et} \quad \|f^*\|_{p_0} \leq C(p_0)\|f\|_{p_0}.$$

Comme l'inégalité est vraie pour $p=+\infty$, il s'ensuit que $\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p$ pour tout $p \geq p_0$.

Ce qui termine la preuve du théorème.

3.2. Démonstration du corollaire. — Nous n'insisterons pas sur la preuve de ce corollaire qui est une conséquence facile des théorèmes de comparaison — voir [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Chavel – *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.

[2] J. L. Clerc & E. M. Stein – « L^p-multipliers for noncompact symmetric spaces », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **71** (1974), p. 3911–3912.

[3] G. B. Folland & E. M. Stein – « Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group », *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), p. 429–522.

[4] N. Lohoué – « Fonction maximale de Hardy-Littlewood sur les variétés de Cartan-Hadamard », *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** (1885).

[5] ———, « Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution », *Adv. in Math.* **38** (1980), p. 178–221.

[6] ———, « Sur les représentations uniformément bornées et le théorème de convolution de Kunze-Stein », *Osaka J. Math.* **18** (1981), p. 465–480.

[7] A. Nagel, E. M. Stein & S. Wainger – « Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties », *Acta Math.* **155** (1985), p. 103–147.

[8] A. Nevo – « Radial geometric analysis on groups », in *Proceedings of first SAM Symposium on Discrete Geometric Analysis, Sendai 12-20 (Japan)*, 2002.

[9] N. T. Varopoulos, L. Saloff-Coste & T. Coulhon – « Analysis and geometry on groups », *Cambridge Tracts in Math.* **100** (1992), p. 156.