BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur certains développements en série de puissances

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 65-69

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__65_1>

Sur certains développements en série de puissances;

Par M. Appell.

(Séance du 18 février 1883).

Les développements en série dont je me suis occupé (*Mathematische Annalen*, t. XXI, p. 118, et *Acta mathematica*, t. I, p. 145) conduisent aux remarques suivantes :

I. Soient deux cercles C et C′ qui ne sont pas entièrement intérieurs l'un à l'autre. Alors toute fonction $f(x)$, holomorphe en tous les points du plan extérieurs à la fois aux deux cercles, est, en ces points, représentée par une série de la forme

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{A'_\nu}{(x-a')^\nu} \right];$$

a et a' désignant les affixes des centres des deux cercles. Cela posé :

1° Si les deux cercles n'ont aucun point commun, ce développement (1) n'est possible que d'*une manière;* les coefficients A_ν et A'_ν sont *déterminés* par les formules

$$2\pi i A_\nu = \int_C f(x)(x-a)^{\nu-1}\,dx, \quad 2\pi i A'_\nu = \int_{C'} f(x)(x-a')^{\nu-1}\,dx.$$

2° Si les deux cercles se coupent ou seulement se touchent, le développement (1) est possible d'*une infinité de manières;* en d'autres termes, on peut former une infinité de séries de la forme (1) ayant pour somme *zéro*. Il suffit pour cela de prendre une fonction $\varphi(x)$ holomorphe en tous les points non communs aux deux cercles; cette fonction $\varphi(x)$ sera, à l'extérieur de C, développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{(x-a)^\nu};$$

à l'extérieur de C′, cette même fonction sera développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{B'_\nu}{(x-a')^\nu}; \quad B'_0 = B_0 = \varphi(\infty);$$

la différence de ces deux séries

$$S(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{B_\nu}{(x-a)^\nu} - \frac{B'_\nu}{(x-a')^\nu} \right]$$

est une série convergente en dehors des deux cercles C et C′ et *ayant pour somme zéro*. On peut donc ajouter cette série $S(x)$ au développement (1) sans que ce développement cesse de représenter $f(x)$.

Mais on peut préciser davantage l'indétermination du développement (1) et montrer que, dans ce développement, les coefficients A_1, A_2, ..., A_ν, ... peuvent être pris *arbitrairement* pour toutes les valeurs de ν inférieures à un nombre déterminé $n+1$, si grand soit-il. Pour mettre ce fait en évidence, considérons la série $S'(x)$ obtenue en prenant les dérivées des termes de la série $S(x)$

$$S'(x)=\sum_1^\infty\left[\frac{-\nu B_\nu}{(x-a)^{\nu+1}}+\frac{\nu B_\nu}{(x-a')^{\nu+1}}\right];$$

cette série est aussi convergente en dehors des cercles C et C', et elle a aussi *pour somme zéro*. D'une façon générale désignons par $S^{(k)}(x)$ la série formée par les dérivées d'ordre k des termes de la série $S(x)$: cette série sera convergente aux mêmes points que $S(x)$ et aura *pour somme zéro*. Nous pouvons de plus supposer que, dans $S(x)$, le coefficient B_1 est différent de zéro; par exemple, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre pour la fonction $\varphi(x)$ qui a servi à former $S(x)$,

$$\varphi(x)=\frac{1}{x-\alpha},$$

α étant un point commun aux deux cercles; alors $B_1=1$.

Cela posé, nous pouvons, sans changer la somme de la série (1), lui ajouter le développement

$$\lambda_0 S(x)+\lambda_1 S'(x)+\ldots+\lambda_{n-1}S^{(n-1)}(x),$$

dont la somme est nulle; mais on pourra déterminer les paramètres

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}$$

de façon que, dans la nouvelle série

$$f(x)+\lambda_0 S(x)+\lambda_1 S'(x)+\ldots+\lambda_{n-1}S^{(n-1)}(x),$$

les coefficients de

$$\frac{1}{x-a},\quad \frac{1}{(x-a)^2},\quad \ldots,\quad \frac{1}{(x-a)^n}$$

prennent des valeurs données d'avance. Donc ces coefficients peuvent être pris arbitrairement, comme nous l'avons annoncé.

Les coefficients de $\frac{1}{x-a'}, \frac{1}{(x-a')^2}, \ldots, \frac{1}{(x-a')^n}$ sont alors déterminés par les formules suivantes dans lesquelles l'indice CC′ indique que les intégrales qui en sont affectées sont prises sur une courbe fermée enveloppant les deux cercles C et C′.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_0 = f(\infty),\\
&\int_{\mathrm{CC}'} f(x)\,dx = 2\pi i(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_1),\\
&\int_{\mathrm{CC}'} x f(x)\,dx = 2\pi i(a\mathrm{A}_1 + a'\mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_2),\\
&\int_{\mathrm{CC}'} x^2 f(x)\,dx = 2\pi i(a^2\mathrm{A}_1 + a'^2\mathrm{A}'_1 + 2a\mathrm{A}_2 + 2a'\mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}'_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

II. Supposons que les deux cercles C et C′ ne soient pas entièrement extérieurs l'un à l'autre ; alors toute fonction $f(x)$, holomorphe aux points situés à la fois à l'intérieur du cercle C et à l'extérieur du cercle C′, est développable en une série de la forme

$$f(x) = \mathrm{A}_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\mathrm{A}_\nu(x-a)^\nu + \frac{\mathrm{A}'_\nu}{(x-a')^\nu}\right]; \tag{2}$$

comme précédemment, ce développement est possible d'une infinité de manières ou d'une seule manière, suivant que les cercles C et C′ se coupent ou ne se coupent pas.

III. Ces résultats s'étendent aisément aux cas où l'on considère un plus grand nombre de cercles.

Une fonction $f(x)$ holomorphe en tous les points situés à la fois à l'*intérieur* d'un cercle de centre a et à l'*extérieur* de n cercles de centres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est développable en ces points en une série convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\mathrm{A}_\nu(x-a)^\nu + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{\mathrm{A}_\nu^{(k)}}{(x-a_k)^\nu}. \tag{3}$$

1° Si les cercles en question n'ont aucun point commun, ce développement n'est possible que d'une seule manière ; les coefficients sont déterminés par les équations

$$(4)\quad 2\pi i\,A_\nu = \int_C \frac{f(x)}{(x-a)^{\nu+1}}\,dx, \qquad 2\pi i\,A_\nu^{(k)} = \int_{C_k} f(x)(x-a_k)^{\nu-1}\,dx,$$

les indices C et C_k indiquant que les intégrales sont prises sur les circonférences C ou C_k de centres a ou a_k.

2° Si au contraire deux ou plusieurs des cercles en question se coupent ou seulement se touchent, le développement en série (3) est possible d'une infinité de manières; le degré d'indétermination des coefficients A_ν et $A_\nu^{(k)}$ est fixé par les conditions suivantes : si le cercle C ou l'un des cercles C_k n'est rencontré par aucun autre cercle, les coefficients A_ν ou $A_\nu^{(k)}$ relatifs à ce cercle sont toujours déterminés par les formules (4) et ne sont susceptibles que d'une valeur; ce ne sont que les coefficients relatifs aux cercles qui se rencontrent qui sont susceptibles d'une infinité de valeurs.