Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CRIBLE ASYMPTOTIQUE ET SOMMES DE KLOOSTERMAN

Jimena Sivak-Fischler

Tome 137
Fascicule 1

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-62

Bull. Soc. math. France
137 (1), 2009, p. 1–62

CRIBLE ASYMPTOTIQUE ET SOMMES DE KLOOSTERMAN

PAR JIMENA SIVAK-FISCHLER

RÉSUMÉ. — On montre à l'aide de méthodes de crible, de méthodes issues de la théorie des formes automorphes et de géométrie algébrique ainsi qu'à l'aide de la loi de Sato-Tate verticale que le signe des sommes de Kloosterman $\mathrm{Kl}(1,1;n)$ change une infinité de fois pour n parcourant les entiers sans facteur carré ayant au plus 18 facteurs premiers. Ceci améliore un résultat précédent de Fouvry et Michel qui avaient obtenu 23 à la place de 18.

ABSTRACT (*Asymptotic sieve and Kloosterman sums*). — We prove using sieve methods, methods coming from automorphic form theory and algebraic geometry, and Sato-Tate vertical law that the sign of Kloosterman sums $\mathrm{Kl}(1,1;n)$ changes infinitely often as n runs through the square-free integers with at most 18 prime factors. This improves on a previous result of Fouvry and Michel, who had obtained 23 instead of 18.

Texte reçu le 4 juillet 2006, révisé le 30 juin 2008, accepté le 12 septembre 2008

JIMENA SIVAK-FISCHLER, Équipe d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `Jimena.Sivak@math.u-psud.fr` • *Url :* `http://www.math.u-psud.fr/~sivak/`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11N36 ; 11L05.

Mots clefs. — Crible asymptotique de Bombieri, sommes de Kloosterman, conjecture de Sato-Tate.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2009/1/$ 5.00

1. Introduction

On définit la somme de Kloosterman $\mathrm{Kl}(a,b;n)$, pour $a,b,n \geq 1$ entiers, par la formule

$$\mathrm{Kl}(a,b;n) := \sum_{\substack{x \bmod n \\ (x,n)=1}} \exp\Big(2i\pi \frac{ax+b\overline{x}}{n}\Big)$$

où (x,n) est le pgcd de x et n, et $\overline{x}$ l'inverse de x modulo n. Ce sont des nombres réels, non nuls pour $n = p$ premier.

Ces sommes exponentielles s'avèrent d'une importance cruciale en théorie analytique des nombres mais leurs propriétés demeurent mystérieuses. Par exemple, la célèbre estimation $|\mathrm{Kl}(1,1;p)| \leq 2\sqrt{p}$ de A. Weil [10] permet d'écrire $|\mathrm{Kl}(1,1;p)| = 2\sqrt{p}\cos\theta_p$ où $\theta_p \in [0,\pi]$ pour p premier. On peut se demander comment varie θ_p, qui mesure les oscillations des sommes de Kloosterman en amplitude et en signe autour de la taille maximale. Katz a proposé la conjecture suivante (cf. [5] p.493) :

Conjecture 1.1 (Loi de Sato-Tate horizontale). — *Pour $p \to +\infty$, l'ensemble des angles θ_p est équiréparti sur $[0,\pi]$ suivant la mesure μ_{ST} de Sato-Tate définie sur $[0,\pi]$ par $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta$, i.e. pour tous $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, on a pour $X \to +\infty$*

$$\frac{|\{X \leq p \leq 2X | \alpha \leq \theta_p \leq \beta\}|}{|\{X \leq p \leq 2X\}|} \longrightarrow \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta.$$

Cette conjecture reste complètement ouverte. A l'heure actuelle, on ne peut exclure que $\mathrm{Kl}(1,1;p) > 0$ pour tout p premier assez grand, ou que $|\mathrm{Kl}(1,1;p)| < p^c$ avec $c < 1/2$ pour tout p premier assez grand...

Dans cette direction, un résultat de Kuznietsov montre qu'il existe de nombreuses compensations entre les sommes de Kloosterman $\mathrm{Kl}(1,1;n)$ (cf. [6] théorème 3) :

Theorème 1.2. — *Si g est une fonction $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à support inclus dans $[1,2]$, on a*

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\mathrm{Kl}^*(1,1;n) = o_g(X),$$

où $\mathrm{Kl}^*(1,1;n) := \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}$.

On voudrait obtenir des résultats de changement de signe de $\mathrm{Kl}(1,1;n)$ sous certaines conditions multiplicatives sur n, par exemple pour n presque premier (i.e. ayant peu de facteurs premiers). Fouvry et Michel ont montré le résultat suivant à l'aide du crible asymptotique [2] :

THEORÈME 1.3. — *Il existe $X_0 > 0$ et $c_0 > 0$ tels que pour $X \geq X_0$, on ait les minorations*

$$|\{n \in [X, 2X] |\ \mathrm{Kl}^*(1,1;n) > 0,\ \mu^2(n) = 1, \omega(n) \leq 23\}| \geq c_0 \frac{X}{\log X}$$

et

$$|\{n \in [X, 2X] |\ \mathrm{Kl}^*(1,1;n) < 0,\ \mu^2(n) = 1, \omega(n) \leq 23\}| \geq c_0 \frac{X}{\log X},$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de n.

Ceci démontre qu'une infinité d'entiers n (sans facteur carré avec au plus 23 facteurs premiers) sont tels que $\mathrm{Kl}(1,1;n) > 0$ (respectivement $\mathrm{Kl}(1,1;n) < 0$). Il y a donc une infinité de changements de signe des sommes de Kloosterman sur l'ensemble des n sans facteur carré ayant au plus 23 facteurs premiers.

Le résultat principal de cet article est

THEORÈME 1.4. — *Il existe $X_0 > 0$ et $c_0 > 0$ tels que pour $X \geq X_0$, on ait les minorations*

$$|\{n \in [X, 2X] |\ \mathrm{Kl}^*(1,1;n) > 0,\ \mu^2(n) = 1, \omega(n) \leq 18\}| \geq c_0 \frac{X}{\log X}$$

et

$$|\{n \in [X, 2X] |\ \mathrm{Kl}^*(1,1;n) < 0,\ \mu^2(n) = 1, \omega(n) \leq 18\}| \geq c_0 \frac{X}{\log X}.$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise le crible asymptotique (introduit par Fouvry et Michel dans [2]), des résultats issus de la théorie des formes automorphes et de géométrie algébrique, comme dans [2], mais on introduit aussi la loi de Sato-Tate verticale dans la preuve, au lieu de majorer trivialement $\mathrm{Kl}^*(1,1;n)$.

On désigne par $H(\theta)$ pour $0 < \theta \leq 1$ la conjecture (voir [2])

CONJECTURE 1.5 ($H(\theta)$). — *Pour toute fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support inclus dans $[1, 2]$, pour tout $\epsilon > 0$, tout $A \geq 0$ et tout $X \geq 2$, on a*

$$\sum_{d \leq X^{\theta - \epsilon}} \Big| \sum_{d|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \mathrm{Kl}^*(1,1;n) \Big| = \mathrm{O}_{g,\epsilon,A}(X(\log X)^{-A}).$$

Il s'agit en fait d'un théorème pour $\theta \leq \frac{1}{2}$ (cf. [4], Proposition 2.4) issu de la théorie des formes automorphes, que l'on utilise dans la preuve des théorèmes 1.3 et 1.4.

Sous $H(1)$, Fouvry et Michel ont démontré (voir [2]) qu'on peut remplacer 23 par 3 dans le théorème 1.3. Il semble cependant que les méthodes introduites dans le présent texte ne suffisent pas à améliorer ce résultat.

Un résultat légèrement différent du théorème 1.4 a été démontré par l'auteur [8] :

THEORÈME 1.6. — *Il existe $X_0 > 0$ et $c_0 > 0$ tels que pour $X \geq X_0$ et pour $z = X^{\frac{1}{22.29}}$, on ait les minorations*

$$|\{n \in [X, 2X] |\ \mathrm{Kl}^*(1,1;n) > 0,\ p|n \Rightarrow p \geq z\}| \geq c_0 \frac{X}{\log X}$$

et

$$|\{n \in [X, 2X] |\ \mathrm{Kl}^*(1,1;n) < 0,\ p|n \Rightarrow p \geq z\}| \geq c_0 \frac{X}{\log X}.$$

Il s'agit d'une amélioration de [4] (Théorème 2) où 22.29 est remplacé par 23.9, mais qui contrairement aux théorèmes 1.3 et 1.4 donne le bon ordre de grandeur espéré. Pour montrer cela, on utilise un crible de Selberg modifié, le *crible étrange.*

Nous utiliserons les notations suivantes :

- p désigne dans la suite un nombre premier.
- $C_c^\infty([a,b])$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indéfiniment dérivables, à support compact inclus dans $[a,b]$.
- g désigne une fonction positive appartenant à $C_c^\infty([1,2])$.
- La transformée de Mellin d'une fonction $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{C}$, continue à support compact inclus dans $]0, +\infty[$, est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ par

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty f(t) t^{s-1} \mathrm{d}t$$

et sa transformée de Mellin inverse est donnée, pour $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, par

$$f(x) = \int_{\Re x = \alpha} \hat{f}(s) x^{-s} \mathrm{d}s.$$

- Pour $n \geq 1$ et α, β réels, on désigne par $\mathfrak{B}(n, \alpha, \beta)$ le produit de n bandes du plan complexe

$$\mathfrak{B}(n,\alpha,\beta) := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n | \alpha \leq \Re z_i \leq \beta,\ i = 1, \dots, n\}.$$

- On dit, pour $z \geq 2$ réel, que la suite réelle $(\lambda_d)_{d \geq 1}$ vérifie la condition $\mathrm{Sel}(z)$ (pour rappeler la construction des coefficients du crible de Selberg) si on a

$$\mathrm{Sel}(z) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ |\lambda_d| \leq 2 \times 2^{\omega(d)} \\ \lambda_d = 0 \text{ si } d > 2z \text{ ou } \mu(d) = 0. \end{cases}$$

- Pour $N \geq 1$ et pour toute suite complexe $(a_n)_{n\geq 1}$, on note sa norme L^2
$$\|a\|_N := \Big(\sum_{N<n\leq 2N} |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
- Pour tout $k \geq 1$, Λ_k désigne la fonction de Von Mangoldt généralisée
$$\Lambda_k := (\log)^k * \mu, \tag{1}$$
où $*$ désigne la convolution arithmétique et μ la fonction de Möbius.
- Pour tous d, t, n entiers, on pose
$$g_d(t,n) := \begin{cases} 0 \text{ si } (t,d) > 1 \\ 1 - \frac{1}{\varphi(d)} \text{ si } t \equiv n \bmod d \\ -\frac{1}{\varphi(d)} \text{ si } t \not\equiv n \bmod d. \end{cases}$$
- Le symbole $\sum_n^\sharp$ désigne une somme sur les n sans facteurs carrés.

On démontrera le théorème 1.4 comme corollaire du théorème suivant :

Théorème 1.7. — *Soient $k \geq 1$ entier et $g \in C_c^\infty([1,2])$ positive. Soient aussi $0 < \alpha, \beta, \eta < 1$ tels que*
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \beta - 2\alpha - \eta \geq 0 \\ (1-\eta)(1-\beta) - 2\alpha \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$
Il existe $B \geq 0$ tel que si l'on pose pour $X \geq 2$
$$z = X^\alpha (\log X)^{-B} \text{ et } y = X^\beta, \tag{3}$$
alors il existe une suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ vérifiant Sel(z) *et un polynôme homogène P effectivement calculable de degré $k+7$ (ne dépendant que de la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$) tels que l'on ait l'inégalité*
$$\Big|\sum_n^\sharp \mathrm{Kl}^*(1,1;n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Lambda_k(n)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\Big|$$
$$\leq \hat{g}(1) X \frac{P(\log X, \log(2X/y), \log z)}{\log^8 z}(1+\mathrm{o}(1)) + O_{g,\eta,k}(X(\log X)^{k-2}).$$

On remarque en particulier que (2) entraîne $\alpha < \frac{1}{4}$ et $\beta < \frac{1}{2}$.

Pour démontrer ce théorème, on procède en plusieurs étapes. Tout d'abord, on divise la somme considérée en deux (§ 3). La première partie s'avère être négligeable (comme dans [2]) par des résultats issus de la théorie des formes automorphes. La seconde partie est plus délicate. On la divise en trois termes, puis on introduit la loi de Sato-Tate verticale (voir § 3.3.1 et 3.3.3), et on choisit la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ afin de minimiser le terme médian (§ 4). On transforme alors les sommes en intégrales (§ 5) à l'aide de méthodes classiques d'analyse complexe. On peut ainsi estimer ces intégrales en appliquant de façon répétée le théorème des résidus. Pour cela, on applique les résultats de [7](chapitre 3). Il faut alors montrer que les termes d'erreur (apparus lors de l'introduction de la loi de Sato-Tate) sont effectivement négligeables (§ 7). Pour cela, on utilise le théorème de Barban-Davenport-Halberstam en montrant d'abord que la suite que l'on considère vérifie le critère de Siegel-Walfisz. C'est un point essentiel dans notre démonstration. Sans cela, nous ne pourrions pas montrer que nos termes d'erreurs sont bien négligeables. On conclut alors la preuve du théorème 1.7. Pour démontrer le théorème 1.4, on utilise en outre des résultats de géométrie algébrique sur l'équirépartition des angles de certaines sommes d'exponentielles (§ 8). Ceci permet de minorer la somme (§ 9)

$$\sideset{}{^\sharp}\sum_{n} \left|\mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Lambda_k(n)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\right| \tag{4}$$

et d'en déduire le théorème 1.4, en comparant cette minoration à la majoration du théorème 1.7. A ce stade, deux difficultés se posent dans le calcul. D'une part, il est nécessaire d'effectuer des calculs formels pour calculer le polynôme P apparaissant dans le théorème 1.7 (calculs de résidus) ; on les effectue à l'aide de Mathematica 5. Les résidus à calculer correspondent à des pôles $s = u = v = w = w'$ d'ordre cumulé $k + 12$, alors que dans [2] ils correspondent à des pôles $s = u = w = w'$ d'ordre cumulé 11. Cette différence provient du fait qu'on ne majore pas trivialement un facteur $\log^k$ au cours du calcul. D'autre part, on doit calculer numériquement la minoration de (4) à l'aide de Pari (calcul d'intégrales numériques) et trouver les valeurs optimales des paramètres (§ 10).

2. Quelques résultats préliminaires

Dans cette partie, on énonce quelques résultats connus, en adaptant les énoncés pour qu'ils soient directement utilisables dans la suite.

2.1. Une majoration classique. — On énonce maintenant un lemme technique que nous utiliserons à maintes reprises dans la suite (sans y faire référence de manière explicite) :

LEMME 2.1. — *Soit d un entier ≥ 2. Alors pour tout $X \geq 2$, on a*

$$\sum_{n\leq X} d^{\omega(n)}\mu^2(n) = O(X(\log X)^{d-1})$$

et

$$\sum_{n\leq X} \frac{d^{\omega(n)}\mu^2(n)}{n} = O((\log X)^d).$$

2.2. Résultats issus de la théorie des formes automorphes. — Montrons le résultat suivant, qui est une adaptation de la Proposition 2.1 de [4] en faisant la somme uniquement sur les n sans facteurs carrés, et dont nous aurons besoin par la suite :

Corollaire 2.2. — *Pour tout $g \in C_c^\infty([1,2])$, pour tout $A \geq 0$, il existe $B > 0$ tel que l'on ait, pour $X \geq 1$, l'égalité*

$$\sum_{q \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B}} \Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{q|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big| = O_{A,g}(X(\log X)^{-A}).$$

Démonstration. — On écrit la fonction $\mu^2(n)$ sous la forme

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d).$$

En introduisant un paramètre Y, que l'on choisira par la suite, on a

$$C := \sum_{q \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B}} \Big| \sum_{q|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \mu^2(n) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big| \leq C_1 + C_2, \tag{5}$$

avec

$$C_1 := \sum_{q \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B}} \Big| \sum_{d \leq Y} \mu(d) \sum_{[d^2,q]|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big|$$

et

$$C_2 := \sum_{q \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B}} \Big| \sum_{d > Y} \mu(d) \sum_{[d^2,q]|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big|.$$

Si α_q désigne le nombre de solutions (d, q') de l'équation $q = [d^2, q']$ avec $d \leq Y$ et $\mu^2(d) = 1$, on a trivialement

$$\begin{aligned} C_1 &\leq \sum_{q \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B}} \sideset{}{^\sharp}\sum_{d \leq Y} \Big| \sum_{[d^2,q]|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big| \\ &\leq \sum_{q \leq Y^2\sqrt{X}(\log X)^{-B}} \alpha_q \Big| \sum_{q|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big|. \end{aligned}$$

On rappelle maintenant la proposition suivante ([4], Proposition 2.1) :

Proposition 2.3. — *Pour tout $g \in C_c^\infty([1,2])$, pour tout $A \geq 0$, il existe $B > 0$ tel que l'on ait, pour $X \geq 1$, l'égalité*

$$\sum_{q \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B}} \Big| \sum_{q|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}} \Big| = O_{A,g}(X(\log X)^{-A}).$$

Or, comme $\alpha_q \ll Y(\log Y)^2$ car

$$\alpha_q \leq \sideset{}{^\sharp}\sum_{d\leq Y}\Big(\sum_{m|d^2} 1\Big) \leq \sideset{}{^\sharp}\sum_{d\leq Y} 3^{\omega(d)} \ll Y(\log Y)^2,$$

on a d'après la proposition 2.3

$$\begin{aligned} C_1 &\leq \sum_{q\leq Y^2\sqrt{X}(\log X)^{-B}} \alpha_q \Big|\sum_{q|n} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1,n)}{\sqrt{n}}\Big| \\ &\ll_{A,g} Y(\log Y)^2 X(\log X)^{-2A-10} \qquad (6) \end{aligned}$$

pourvu que $Y^2\sqrt{X}(\log X)^{-B} \leq \sqrt{X}(\log X)^{-B(2A+10)}$, autrement dit $Y \leq (\log X)^{\frac{B-B(2A+10)}{2}}$.

D'autre part, on a en majorant trivialement $|\mathrm{Kl}(1,1;n)|$ et en faisant le changement de variable $n \mapsto [d^2,q]m$:

$$\begin{aligned} C_2 &\ll_g \sum_{q\leq\sqrt{X}} \sideset{}{^\sharp}\sum_{d>Y} \sum_{\substack{[d^2,q]|n\\ n\leq 2X}} \Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \\ &\ll_g \sum_{q\leq\sqrt{X}} \sideset{}{^\sharp}\sum_{d>Y} \sum_{\substack{[d^2,q]|n\\ n\leq 2X}} 2^{\omega(n)} \\ &\ll_g \sum_{q\leq\sqrt{X}} \sideset{}{^\sharp}\sum_{d>Y} 2^{\omega([d^2,q])} \sum_{m\leq\frac{2X}{[d^2,q]}} 2^{\omega(m)} \\ &\ll_g X(\log X) \sum_{q\leq\sqrt{X}} \sideset{}{^\sharp}\sum_{d>Y} \frac{2^{\omega([d^2,q])}}{[d^2,q]}. \end{aligned}$$

On pose $m = (q,d^2)$ et on fait le changement de variable $q \mapsto \frac{q}{m}$, d'où

$$\begin{aligned} C_2 &\ll_g X(\log X) \sideset{}{^\sharp}\sum_{Y<d\leq\sqrt{2X}} \frac{2^{\omega(d)}}{d^2} \sum_{m|d^2} \sum_{q\leq\sqrt{X}} \frac{2^{\omega(q)}}{q} \\ &\ll_g X(\log X)^3 \sideset{}{^\sharp}\sum_{Y<d\leq\sqrt{2X}} \frac{2^{\omega(d)}}{d^2} \sum_{m|d^2} 1 \\ &\ll_g X(\log X)^3 \sideset{}{^\sharp}\sum_{Y<d\leq\sqrt{2X}} \frac{6^{\omega(d)}}{d^2} \\ &\ll_g X(\log X)^9 Y^{-1}, \qquad (7) \end{aligned}$$

d'où en regroupant (5), (6) et (7), on a :

$$C \ll_{A,g} Y(\log Y)^2 X(\log X)^{-2A-10} + X(\log X)^9 Y^{-1}.$$

Il suffit de prendre $Y = (\log X)^{A+9}$ et $B \geq 2A+18-B(2A+10)$ pour conclure. □

2.3. Autour de la loi de Sato-Tate verticale. — On définit, pour $a \neq 0$, $\theta_{p,a} \in [0,\pi]$ l'unique angle tel que

$$\cos\theta_{p,a} = \frac{\mathrm{Kl}(1,a;p)}{2\sqrt{p}}.$$

On dit que $\theta_{p,a}$ est l'*angle* de la somme de Kloosterman.

Katz a démontré le résultat suivant (cf. [5] p.492) :

Théorème 2.4 (Loi de Sato-Tate verticale). — *Pour $p \to +\infty$ premier, l'ensemble des angles $\{\theta_{p,a} | 1 \leq a < p\}$ est équiréparti sur $[0,\pi]$ suivant la mesure μ_{ST} de Sato-Tate i.e. pour tous $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, on a pour $p \to +\infty$*

$$\frac{1}{p-1}|\{1 \leq a < p | \alpha \leq \theta_{p,a} \leq \beta\}| \longrightarrow \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta.$$

On définit aussi pour $(m,n)=1$

$$\mathrm{C}(m,n) := \frac{\mathrm{Kl}(\overline{m},\overline{m};n)}{2^{\omega(n)}\sqrt{n}}.$$

On rappelle le lemme suivant ([3], lemme 2.4) dont la démonstration utilise la loi de Sato-Tate verticale :

Lemme 2.5. — *Pour p premier, on a la relation*

$$\frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{a \bmod p \\ (a,p)=1}} |C(a,p)| = \frac{4}{3\pi} + O(p^{-\frac{1}{4}}).$$

On rappelle aussi la relation triviale

$$\frac{1}{\varphi(p^k)} \sum_{\substack{a \bmod p^k \\ (a,p)=1}} |C(a,p^k)| \leq \begin{cases} 1 \text{ si } p > 2 \text{ ou } p = 2 \text{ et } k = 1 \\ \sqrt{2} \text{ sinon,} \end{cases}$$

donc par multiplicativité croisée, on a, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{a \bmod n \\ (a,n)=1}} |C(a,n)| \leq \kappa(n)$$

où κ est la fonction multiplicative définie par

$$\begin{cases} \kappa(p) = \dfrac{1}{\varphi(p)} \displaystyle\sum_{\substack{a \bmod p \\ (a,p)=1}} |C(a,p)| \\ \kappa(p^k) = \begin{cases} \sqrt{2} \text{ si } p = 2, k \geq 2 \\ 1 \text{ si } p > 2, k \geq 2. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

3. Décomposition du problème

Dans cette partie, on étudie la somme $\Sigma(k)$ définie plus bas dont le théorème 1.7 est une majoration (en valeur absolue) et on scinde le domaine de sommation en plusieurs intervalles. Sur chacun de ces domaines, on fait apparaître un terme principal (noté TP) et un terme d'erreur (noté TE). Cependant, on ne démontrera pas encore que le terme d'erreur est négligeable devant le terme principal : ce sera l'objet des parties 6 et 7 (pour une suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ particulière).

3.1. Introduction du problème. — Soient $X, \alpha, \beta, \eta, k$ et y, z vérifiant les hypothèses (2) et (3). Soit aussi $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ une suite de réels (que l'on choisira au paragraphe 4) vérifiant $\mathrm{Sel}(z)$.

On cherche à évaluer, quand $X \to +\infty$, la quantité

$$\Sigma(k) := \sum_n^{\sharp} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g(\frac{n}{X}) \Lambda_k(n) \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2.$$

Pour cela, on va couper la somme $\Sigma(k)$ en deux parties, notées $\Sigma_1(k)$ et $\Sigma_2(k)$. A cet effet, on définit la fonction de troncature $h_y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$h_y(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } \ 0 < x < y \\ \log(2y/x)/\log 2 \text{ si } y \leq x \leq 2y \\ 0 \text{ si } 2y \leq x \end{cases}$$

et h^y par $h^y := \mathbf{1}_{x>0} - h_y$.

Le lemme suivant donne la tranformée de Mellin ainsi que la transformée de Mellin inverse de h_y et h^y en fonction d'une intégrale.

Lemme 3.1. — *On a pour $y > 0$ et pour $u \in \mathbb{C}$ tel que $\Re u > 0$ l'égalité*

$$\hat{h}_y(u) = \frac{y^u(2^u - 1)}{u^2 \log 2}$$

et pour $x > 0$, les égalités

$$h_y(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re u = 3} \big(\frac{y}{x}\big)^u \frac{2^u - 1}{u^2 \log 2} \mathrm{d}u \tag{9}$$

et

$$h^y(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re u=3}\Big(\frac{x}{y}\Big)^u\frac{1-2^{-u}}{u^2\log 2}\mathrm{d}u. \tag{10}$$

On rappelle que Λ_k a pour support l'ensemble des entiers n tels que $1 \leq \omega(n) \leq k$, et qu'on a l'égalité

$$\Lambda_k(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\log\Big(\frac{n}{d}\Big)^k = \sum_{d|n}\mu(d)(h_y(d)+h^y(d))\log\Big(\frac{n}{d}\Big)^k.$$

On a alors la décomposition

$$\Sigma(k) = \Sigma_1(k) + \Sigma_2(k)$$

avec

$$\Sigma_1(k) := \sum_n^{\sharp}\mathrm{Kl}^*(1,1,n)g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\sum_{d|n}\mu(d)h_y(d)(\log\frac{n}{d})^k\Big)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2$$

et

$$\Sigma_2(k) := \sum_n^{\sharp}\mathrm{Kl}^*(1,1,n)g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\sum_{d|n}\mu(d)h^y(d)(\log\frac{n}{d})^k\Big)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2.$$

On pose par ailleurs

$$L(m) := \sum_{[d_1,d_2]=m}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}$$

et on remarque que si $\mu^2(m) = 0$ alors $L(m) = 0$, d'où en utilisant $\mathrm{Sel}(z)$ l'inégalité

$$|L(m)| \leq 4\mu^2(m)8^{\omega(m)}. \tag{11}$$

3.2. Estimation de $\Sigma_1(k)$. — Dans ce paragraphe, on montre que $\Sigma_1(k)$ est négligeable (quitte à bien choisir la valeur de B qui apparaît dans (3)). C'est le rôle de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Soient X, y et z définis par (3), avec α, β et η vérifiant (2). Alors il existe $B \geq 0$ tel que, uniformément pour toute suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ vérifiant* $\mathrm{Sel}(z)$, *on ait*

$$|\Sigma_1(k)| = O_{g,k}(X(\log X)^{k-2}).$$

Démonstration. — Par définition, on a en développant la puissance k-ième

$$\begin{aligned}\Sigma_1(k) &= \sum_m L(m) \sum_d \mu(d) h_y(d) \sideset{}{^\sharp}\sum_{n\equiv 0 \bmod [d,m]} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\log\frac{n}{X} + \log\frac{X}{d}\Big)^k \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \sum_m L(m) \sum_d \mu(d) h_y(d) (\log\frac{X}{d})^l \\ &\qquad \times \sideset{}{^\sharp}\sum_{n\equiv 0 \bmod [d,m]} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log\frac{n}{X})^{k-l}\end{aligned}$$

d'où, puisque $h_y(d) = 0$ pour $d > 2y$, et en utilisant l'inégalité (11) :

$$\begin{aligned}|\Sigma_1(k)| &\ll_k (\log X)^k \sum_{l=0}^k \sum_{q\le 2yz^2} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{d\le 2y,\, m\le z^2\\ [d,m]=q}} |L(m)| \\ &\qquad \times\Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{n\equiv 0 \bmod q} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log\frac{n}{X})^{k-l}\Big| \\ &\ll_k (\log X)^k \sum_{l=0}^k \sum_{q\le 2yz^2} \sum_{[d,m]=q} \mu^2(d)\mu^2(m) 8^{\omega(m)} \\ &\qquad \times\Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{n\equiv 0 \bmod q} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log\frac{n}{X})^{k-l}\Big|.\end{aligned}$$

Comme, pour tout q, on a en posant $d' = \frac{md}{q}$:

$$\begin{aligned}\sideset{}{^\sharp}\sum_{[d,m]=q} \mu^2(d)\mu^2(m)8^{\omega(m)} &\le \sum_{d'|m} \mu^2(d') \sum_{m|q} \mu^2(m) 8^{\omega(m)} \mu^2(q) \\ &\ll 17^{\omega(q)}\mu^2(q),\end{aligned}$$

on a par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|\Sigma_1(k)| &\ll_k (\log X)^k \sum_{l=0}^k \sideset{}{^\sharp}\sum_{q\le 2yz^2} 17^{\omega(q)} \Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{n\equiv 0 \bmod q} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log\frac{n}{X})^{k-l}\Big| \\ &\ll_k (\log X)^k \sum_{l=0}^k \Big(\sideset{}{^\sharp}\sum_{q\le 2yz^2} 289^{\omega(q)} \sum_{n\equiv 0 \bmod q} 2^{\omega(n)} \Big| g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log\frac{n}{X})^{k-l}\Big|\Big)^{\frac12} \times\end{aligned}$$

$$\Big(\sum_{q\le 2yz^2} \Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{n\equiv 0 \bmod q} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log\frac{n}{X})^{k-l}\Big|\Big)^{\frac12}. \tag{12}$$

Or, pour $0 \leq l \leq k$, on a en majorant trivialement $g(\frac{n}{X})(\log \frac{n}{X})^{k-l}$ et en posant $n = mq$:

$$\begin{aligned}
\sum_{q \leq 2yz^2}^{\sharp} 289^{\omega(q)} \sum_{n \equiv 0 \bmod q} 2^{\omega(n)} \Big| g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log \frac{n}{X})^{k-l} \Big| &\ll_{k,g} \sum_{q \leq 2yz^2}^{\sharp} 578^{\omega(q)} \sum_{m \leq 2X/q} 2^{\omega(m)} \\
&\ll_{k,g} X \log X \sum_{q \leq 2yz^2}^{\sharp} \frac{578^{\omega(q)}}{q} \\
&\ll_{k,g} X (\log X)^{579}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 2.2 appliqué avec $g = g \times \log^{k-l}$, pour $B = B(A)$ donné par ce corollaire avec $A = 583$, on a

$$\sum_{q \leq 2yz^2} \Big| \sum_{n \equiv 0 \bmod q}^{\sharp} \mathrm{Kl}^*(1,1,n) g\Big(\frac{n}{X}\Big)(\log \frac{n}{X})^{k-l} \Big| \ll_{k,g} X (\log X)^{-583} \qquad (14)$$

d'où la proposition 3.2 en regroupant (12), (13) et (14). □

3.3. Décomposition de l'étude de $\Sigma_2(k)$. — Dans ce paragraphe, on découpe la somme $\Sigma_2(k)$ en trois morceaux : $\Sigma_{2,1}(k)$, $\Sigma_{2,2}(k)$ et $\Sigma_{2,3}(k)$.

En faisant le changement de variable $d \mapsto \frac{n}{d}$ et en remarquant que la fonction h^y est croissante, on obtient

$$\begin{aligned}
|\Sigma_2(k)| &\leq \sum_{n}^{\sharp} |\mathrm{Kl}^*(1,1,n)| g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big(\sum_{d|n} h^y(d) \Big(\log(\frac{n}{d}) \Big)^k \Big) \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2 \\
&\leq \sum_{n}^{\sharp} |\mathrm{Kl}^*(1,1,n)| g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big(\sum_{d|n} h^y\Big(\frac{n}{d}\Big) (\log d)^k \Big) \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2 \\
&\leq \sum_{n}^{\sharp} |\mathrm{Kl}^*(1,1,n)| g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big(\sum_{d|n} h^y\Big(\frac{2X}{d}\Big) (\log d)^k \Big) \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2 \\
&\leq \sum_{d} (\log d)^k h^y\Big(\frac{2X}{d}\Big) \sum_{n \equiv 0 \bmod d}^{\sharp} |\mathrm{Kl}^*(1,1,n)| g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big(\sum_{m|n} L(m) \Big). \qquad (15)
\end{aligned}$$

Fouvry et Michel majorent ici trivialement $(\log d)^k$ par $(\log X)^k$. Nous gardons $(\log d)^k$ tout au long des calculs, ce qui permettra d'avoir une majoration plus précise. Mais ceci fait augmenter l'ordre du pôle en lequel il faudra calculer le résidu, donc la complexité des calculs.

Soit $0 < \epsilon < \frac{1}{1000}(\frac{1}{2} - \beta)$. On pose pour $j = 1, 2, 3$,

$$\Sigma_{2,j}(k) := \sum_d (\log d)^k h^y\Big(\frac{2X}{d}\Big) h_j(d) \sideset{}{^\sharp}\sum_{n \equiv 0 \bmod d} |\mathrm{Kl}^*(1,1,n)| g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\sum_{m|n} L(m)\Big)$$

où

$$\begin{cases} h_1 := h_{X^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \\ h_2 := h_{X^{\frac{1}{2}+\epsilon}} - h_{X^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \\ h_3 := h^{X^{\frac{1}{2}+\epsilon}}. \end{cases}$$

En remarquant que $h_1 + h_2 + h_3 = \mathbf{1}_{x>0}$, on obtient

$$|\Sigma_2(k)| \leq \sum_{j=1}^{3} \Sigma_{2,j}(k).$$

On va maintenant étudier séparément les trois termes $\Sigma_{2,j}(k)$ pour $j = 1, 2, 3$. On va montrer qu'avec un choix particulier de $(\lambda_d)_{d\geq 1}$, on a

$$\Sigma_{2,2}(k) \ll \epsilon X (\log X)^{k-1},$$

où la constante implicite ne dépend pas de ϵ. Ce sont donc les parties $\Sigma_{2,1}(k)$ et $\Sigma_{2,3}(k)$ qui sont contributives.

Cette division en trois intervalles n'apparaît pas dans [2] car Fouvry et Michel majorent trivialement $|\mathrm{Kl}^*(1,1,n)|$, pour tout $n \geq 1$.

3.3.1. *Étude de* $\Sigma_{2,1}(k)$. — On étudie d'abord $\Sigma_{2,1}(k)$, en faisant apparaître un terme auquel on pourra appliquer la loi de Sato-Tate verticale (voir § 5.1).

Pour d divisant n, avec n sans facteurs carrés, on fait la majoration suivante par multiplicativité croisée, en majorant trivialement $|C(d, \frac{n}{d})|$ par 1 et en utilisant le fait que $3\pi > 8$:

$$\begin{aligned} (\log d)^k |C(1,n)| &\leq (\log d)^k \Big|C\Big(\frac{n}{d}, d\Big)\Big| \cdot \Big|C\Big(d, \frac{n}{d}\Big)\Big| \\ &\leq (\log d)^k \Big|C\Big(\frac{n}{d}, d\Big)\Big| \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)-1}. \end{aligned}$$

On multiplie ici par $(\frac{3\pi}{8})^{\omega(d)-1}$ afin de compenser l'apparition d'un facteur $\kappa(p) \sim \frac{4}{3\pi}$ (voir le lemme 2.5), pour n'avoir que des puissances de ζ entières quand on transformera la somme en intégrales (voir § 5.1). En remarquant aussi que

$$h_1(d) h^y\Big(\frac{2X}{d}\Big) = h_1(d)$$

car $\beta < \frac{1}{2}$, et en faisant le changement de variable $n \mapsto nd$ puis en sommant sur les classes mod d, on a

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,1}(k) \leq \frac{8}{3\pi} \sum_{d} (\log d)^k h_1(d) & \\
\times \sum_{n \equiv 0 \bmod d}^{\sharp} & 2^{\omega(n)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\sum_{m|n} L(m)\Big)\Big|C\Big(\frac{n}{d}, d\Big)\Big|\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)} \\
\leq \frac{8}{3\pi} & \sum_{d} \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)} (\log d)^k h_1(d) \\
& \times \sum_{n} 2^{\omega(n)} \mu^2(nd) g\Big(\frac{nd}{X}\Big)\Big(\sum_{m|nd} L(m)\Big)|C(n,d)| \\
\leq \frac{8}{3\pi} & \sum_{d} \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)} (\log d)^k h_1(d) \sum_{\substack{n \bmod d \\ (n,d)=1}} |C(n,d)| \\
& \times \sum_{t \equiv n \bmod d} 2^{\omega(t)} \mu^2(td) g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td} L(m)\Big).
\end{aligned}$$

On introduit maintenant le terme

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n \bmod d \\ (n,d)=1}} |C(n,d)|$$

qui apparaît dans le lemme 2.5 :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,1}(k) \leq \frac{8}{3\pi} \sum_{d} \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)} & (\log d)^k h_1(d) \frac{1}{\varphi(d)} \Big(\sum_{\substack{n \bmod d \\ (n,d)=1}} |C(n,d)|\Big) \\
\times \sum_{(t,d)=1} & 2^{\omega(t)} \mu^2(td) g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td} L(m)\Big) \\
+ \frac{8}{3\pi} \sum_{d} \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)} & (\log d)^k h_1(d) \sum_{\substack{n \bmod d \\ (n,d)=1}} |C(n,d)| \\
\times \sum_{t} 2^{\omega(t)} \mu^2(td) & g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td} L(m)\Big) g_d(t,n).
\end{aligned} \tag{16}$$

La première partie de (16) sera le terme principal $TP_{1,1}(k)$, et la seconde partie le terme d'erreur $TE_{1,1}(k)$, définis ci-dessous.

D'où, en insérant la fonction $\kappa(d)$ définie par (8), on a avec le changement de variable $td \mapsto t$:

$$\begin{aligned}
TP_{1,1}(k) &:= \frac{8}{3\pi}\sum_d \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d)\sum_t 2^{\omega(t)}\mu^2(td)g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)\\
&= \frac{8}{3\pi}\sum_d \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d)\sideset{}{^\sharp}\sum_{t\equiv 0 \bmod d} 2^{\omega(t)}g\Big(\frac{t}{X}\Big)\Big(\sum_{m|t}L(m)\Big)\\
&= \frac{8}{3\pi}\sideset{}{^\sharp}\sum_t 2^{\omega(t)}g\Big(\frac{t}{X}\Big)\Big(\sum_{m|t}L(m)\Big)\sum_{d|t}\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d)\\
&= \frac{8}{3\pi}\sum_m L(m)TP_1(m) \qquad (17)
\end{aligned}$$

avec

$$TP_1(m) := \sideset{}{^\sharp}\sum_{t\equiv 0 \bmod m} a_1(t)$$

où

$$a_1(t) := 2^{\omega(t)}g\Big(\frac{t}{X}\Big)\sum_{d|t}\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d).$$

On adopte aussi la notation suivante pour le terme d'erreur de (16) :

$$\begin{aligned}
TE_{1,1}(k) &:= \frac{8}{3\pi}\sum_d \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\sum_{\substack{n \bmod d\\ (n,d)=1}}|C(n,d)|\\
&\quad\times \sum_{t\equiv n \bmod d} 2^{\omega(t)}\mu^2(td)g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n). \qquad (18)
\end{aligned}$$

On étudiera ce terme au § 7.3 grâce à la proposition 7.5.

Étudions maintenant $TP_1(m)$ pour l'écrire comme intégrale d'un produit eulérien. En intervertissant les sommes puis par le changement de variable $t \mapsto \frac{tdm}{(d,m)}$, on a

$$\begin{aligned}
TP_1(m) &= \sideset{}{^\sharp}\sum_{t\equiv 0 \bmod m} 2^{\omega(t)}g\Big(\frac{t}{X}\Big)\sum_{d|t}\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d)\\
&= \sum_d \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d)\sum_{t\equiv 0 \bmod [d,m]} 2^{\omega(t)}\mu^2(t)g\Big(\frac{t}{X}\Big)\\
&= \sum_d \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\kappa(d)\sum_t 2^{\omega\left(\frac{tdm}{(d,m)}\right)}\mu^2\Big(\frac{tdm}{(d,m)}\Big)g\Big(\frac{tdm}{(d,m)X}\Big).
\end{aligned}$$

Or, pour $d \geq 1$, on a

$$(\log d)^k = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\Re v=2} \frac{d^v}{v^{k+1}} \mathrm{d}v, \tag{19}$$

par le lemme 3.1 :

$$h_1(d) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re u=3} \frac{2^u - 1}{u^2 \log u} \Big(\frac{X^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{d}\Big)^u \mathrm{d}u,$$

et, d'après la formule d'inversion de Mellin, pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re s=3} \hat{g}(s) x^{-s} \mathrm{d}s = \frac{x}{2i\pi} \int_{\Re s=2} \hat{g}(1+s) x^{-s} \mathrm{d}s. \tag{20}$$

On a donc

$$\begin{aligned} TP_1(m) = {} & \frac{k! X}{(2i\pi)^3} \int_{\Re u=3} \frac{2^u - 1}{u^2 \log u} X^{(\frac{1}{2}-\epsilon)u} \int_{\Re s=2} \hat{g}(1+s) X^s \int_{\Re v=2} \frac{1}{v^{k+1}} \\ & \times \sum_d \frac{1}{d^{u-v}} \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)} \kappa(d) \\ & \times \sum_t 2^{\omega\left(\frac{tdm}{(d,m)}\right)} \mu^2\Big(\frac{tdm}{(d,m)}\Big) \Big(\frac{(d,m)}{dmt}\Big)^{1+s} \mathrm{d}v \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}u \\ = {} & \frac{k! X}{(2i\pi)^3} \int_{\Re u=3} \frac{2^u - 1}{u^2 \log u} X^{(\frac{1}{2}-\epsilon)u} \int_{\Re s=2} \hat{g}(1+s) X^s \\ & \times \int_{\Re v=2} \frac{1}{v^{k+1}} f_1(m,v,s,u) \mathrm{d}v \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{21}$$

avec

$$f_1(m,v,s,u) := \sum_d \frac{1}{d^{u-v}} \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)} \kappa(d) \sum_t 2^{\omega\left(\frac{tdm}{(d,m)}\right)} \mu^2\Big(\frac{tdm}{(d,m)}\Big) \Big(\frac{(d,m)}{dmt}\Big)^{1+s}.$$

Or, on a en transformant la somme sur t en produit :

$$\begin{aligned} f_1(m,v,s,u) &= \frac{2^{\omega(m)}}{m^{1+s}} \sum_d \frac{(d,m)^{1+s}}{d^{1+s+u-v}} \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)} \kappa(d) 2^{\omega(\frac{d}{(d,m)})} \sum_t \frac{2^{\omega(t)}}{t^{1+s}} \mu^2\Big(\frac{tdm}{(d,m)}\Big) \\ &= \frac{2^{\omega(m)}}{m^{1+s}} \sum_d \frac{(d,m)^{1+s}}{d^{1+s+u-v}} \Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)} \kappa(d) 2^{\omega(\frac{d}{(d,m)})} \\ & \quad \times \mu^2\Big(\frac{dm}{(d,m)}\Big) \prod_{p \nmid \frac{dm}{(d,m)}} \Big(1 + \frac{2}{p^{1+s}}\Big) \end{aligned}$$

$$= \zeta^2(1+s)G_{1,1}(s)\frac{2^{\omega(m)}}{m^{1+s}}\prod_{p|m}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)^{-1}$$
$$\times \sum_d \frac{(d,m)^{1+s}}{d^{1+s+u-v}}\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(d)}\kappa(d)2^{\omega(\frac{d}{(d,m)})}$$
$$\times \mu^2\Big(\frac{dm}{(d,m)}\Big)\prod_{p|\frac{d}{(d,m)}}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)^{-1}$$

où

$$G_{1,1}(s) := \prod_p \Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{1+s}}\Big)^2.$$

D'où, en transformant à nouveau la somme sur d en produit,

$$f_1(m,v,s,u) = \zeta^2(1+s)G_{1,1}(s)\frac{2^{\omega(m)}}{m^{1+s}}\mu^2(m)\prod_{p|m}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{\frac{3\pi}{8}\kappa(p)}{p^{u-v}}\Big)$$
$$\times \prod_{p\nmid m}\Big(1+\frac{\frac{3\pi}{4}\kappa(p)}{p^{1+s+u-v}}(1+\frac{2}{p^{1+s}})^{-1}\Big)$$
$$= \zeta^2(1+s)G_{1,1}(s)\zeta(1+s+u-v)G_{1,2}(v,s,u)\frac{2^{\omega(m)}}{m^{1+s}}\mu^2(m)$$
$$\times \prod_{p|m}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{\frac{3\pi}{8}\kappa(p)}{p^{u-v}}\Big)\Big(1+\frac{\frac{3\pi}{4}\kappa(p)}{p^{1+s+u-v}\big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\big)}\Big)^{-1}$$
$$= \zeta^2(1+s)G_{1,1}(s)\zeta(1+s+u-v)G_{1,2}(v,s,u)\frac{\mu^2(m)}{m^{1+s}}\nu_1(v,s,u,m) \tag{22}$$

avec

$$G_{1,2}(v,s,u) := \prod_p \Big(1+\frac{\frac{3\pi}{4}\kappa(p)}{p^{1+s+u-v}}(1+\frac{2}{p^{1+s}})^{-1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{1+s+u-v}}\Big)$$

et

$$\nu_1(v,s,u,m) := 2^{\omega(m)}\prod_{p|m}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{\frac{3\pi}{8}\kappa(p)}{p^{u-v}}\Big)\Big(1+\frac{\frac{3\pi}{4}\kappa(p)}{p^{1+s+u-v}\big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\big)}\Big)^{-1}.$$

Si l'on pose

$$\eta_1(v,s,u,c) := \nu_1(v,s,u,c)\prod_{p|c}\Big(1-\frac{\nu_1(v,s,u,p)}{p^{1+s}}\Big)$$

et

$$\xi_1(v,s,u,c) := \sum_d \frac{\nu_1(v,s,u,d)}{d^{1+s}}\lambda_{cd},$$

on a alors par définition

$$Q_1(v,s,u) := \sum_m L(m)\frac{\mu^2(m)}{m^{1+s}}\nu_1(v,s,u,m) = \sum_c \frac{\eta_1(v,s,u,c)}{c^{1+s}}\xi_1(v,s,u,c)^2 \tag{23}$$

car $L(m)=0$ si $\mu^2(m)=0$. Ce sont les relations classiques du crible de Selberg.

Finalement, en regroupant (17), (21), (22) et (23), on a :

$$\begin{aligned} TP_{1,1}(k) = \frac{8}{3\pi}\frac{k!X}{(2i\pi)^3}\int_{\Re u=3}\frac{2^u-1}{u^2\log u}X^{(\frac12-\epsilon)u}\int_{\Re s=2}\hat g(1+s)X^s \\ \int_{\Re v=2}\frac{1}{v^{k+1}}G_{1,1}(s)G_{1,2}(v,s,u) \\ \times\zeta^2(1+s)\zeta(1+s+u-v)Q_1(v,s,u)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{24}$$

3.3.2. *Étude de* $\Sigma_{2,2}(k)$. — Étudions maintenant $\Sigma_{2,2}(k)$. On utilise dans cette partie la majoration triviale suivante :

$$|C(1,n)|\mu^2(n) \le \mu^2(n).$$

On procède de manière analogue au § 3.3.1, en remarquant que

$$h_2(d)h^y\Big(\frac{2X}{d}\Big) = h_2(d),$$

car $0<\epsilon<\frac{1}{1000}(\frac12-\beta)$, et que pour $d\ge 1$ on a par définition

$$h_2(d) = h_{X^{\frac12+\epsilon}}(d) - h_{X^{\frac12-\epsilon}}(d),$$

avec

$$h_Y(d) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re u=3}\frac{2^u-1}{u^2\log u}\Big(\frac{Y}{d}\Big)^u\mathrm{d}u \tag{25}$$

par le lemme 3.1.

Dans le cas de $\Sigma_{2,2}(k)$, il n'y a pas de décomposition en terme principal et terme d'erreur. En effet, $\Sigma_{2,2}(k)$ sera majorée par le crible au paragraphe 6.2, grâce à un choix particulier de $(\lambda_d)_{d\ge1}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,2}(k) \le \frac{k!X}{(2i\pi)^3}\int_{\Re u=3}\frac{2^u-1}{u^2\log u}\Big(X^{(\frac12+\epsilon)u}-X^{(\frac12-\epsilon)u}\Big)\int_{\Re s=2}\hat g(1+s)X^s \\ \int_{\Re v=2}\frac{1}{v^{k+1}}G_{2,1}(s)G_{2,2}(v,s,u) \\ \times\zeta^2(1+s)\zeta^2(1+s+u-v)Q_2(v,s,u)\mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{26}$$

avec

$$G_{2,1}(s) := \prod_p\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{1+s}}\Big)^2,$$

$$G_{2,2}(v,s,u) := \prod_p \Big(1 + \frac{2}{p^{1+s+u-v}}(1+\frac{2}{p^{1+s}})^{-1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p^{1+s+u-v}}\Big)^2$$

et
(27)

$$Q_2(v,s,u) := \sum_m L(m)\frac{\mu^2(m)}{m^{1+s}}\nu_2(v,s,u,m) = \sum_c \frac{\eta_2(v,s,u,c)}{c^{1+s}}\xi_2(v,s,u,c)^2$$

où

$$\nu_2(v,s,u,m) := 2^{\omega(m)}\prod_{p|m}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{1}{p^{u-v}}\Big)\Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u-v}(1+\frac{2}{p^{1+s}})}\Big)^{-1},$$

$$\eta_2(v,s,u,c) := \nu_2(v,s,u,c)\prod_{p|c}\Big(1 - \frac{\nu_2(v,s,u,p)}{p^{1+s}}\Big)$$

et

$$\xi_2(v,s,u,c) := \sum_d \frac{\nu_2(v,s,u,d)}{d^{1+s}}\lambda_{cd}.$$

3.3.3. *Étude de* $\Sigma_{2,3}(k)$. — Étudions enfin $\Sigma_{2,3}(k)$; cette étude est parallèle à celle de $\Sigma_{2,1}(k)$ (§ 3.3.1), sauf que les rôles de d et n sont échangés dans une partie du calcul.

On fait la majoration suivante pour d divisant n, par multiplicativité croisée et en majorant trivialement $|C(\frac{n}{d},d)|$ par 1 :

$$|C(1,n)|\mu^2(n) \leq |C(d,\frac{n}{d})|\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)^{\omega(\frac{n}{d})}\mu^2(n)$$

car $3\pi > 8$, afin par la suite de n'avoir que des puissances de ζ entières (comme dans l'étude de $\Sigma_{2,1}(k)$).

En remarquant que, pour $t \geq 1$,

$$h_3(t)h^y\Big(\frac{2X}{t}\Big) = h^y\Big(\frac{2X}{t}\Big) - h_{X^{\frac12+\epsilon}}(t)$$

avec

$$h^y\Big(\frac{2X}{t}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re u=3}\frac{1-2^{-u}}{u^2\log 2}\Big(\frac{2X}{yt}\Big)^u \mathrm{d}u,$$

$$h_{X^{\frac12+\epsilon}}(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re u=3}\frac{2^u-1}{u^2\log 2}\Big(\frac{X^{\frac12+\epsilon}}{t}\Big)^u \mathrm{d}u$$

grâce au lemme 3.1 et car $0 < \epsilon < \frac{1}{1000}(\frac12 - \beta)$, on a

$$\Sigma_{2,3}(k) \leq TP_{3,1}(k) + TE_{3,1}(k)$$

avec

$$
\begin{aligned}
TP_{3,1}(k) := \frac{k!X}{(2i\pi)^3} \int_{\Re u=3} & \Big(\frac{1-2^{-u}}{u^2\log 2}\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u - \frac{2^u-1}{u^2\log 2}X^{(\frac12+\epsilon)u}\Big) \\
& \times \int_{\Re s=2} \hat{g}(1+s)X^s \int_{\Re v=2} \frac{1}{v^{k+1}} G_{3,1}(v,s,u)G_{3,2}(v,s,u) \\
& \times \zeta(1+s)\zeta^2(1+s+u-v)Q_3(v,s,u)\mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}u \qquad (28)
\end{aligned}
$$

où

$$
G_{3,1}(v,s,u) := \prod_p \Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u-v}}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{1+s+u-v}}\Big)^2, \qquad (29)
$$

$$
G_{3,2}(v,s,u) := \prod_p \left(1+\frac{\frac{3\pi}{4}\kappa(p)}{p^{1+s}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u-v}}\Big)}\right)\Big(1-\frac{1}{p^{1+s}}\Big), \qquad (30)
$$

$$
Q_3(v,s,u) := \sum_m L(m)\frac{\mu^2(m)}{m^{1+s}}\nu_3(v,s,u,m) = \sum_c \frac{\eta_3(v,s,u,c)}{c^{1+s}}\xi_3(v,s,u,c)^2
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\nu_3(v,s,u,m) := \frac{2^{\omega(m)}}{m^{u-v}} \prod_{p|m} & \Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u-v}}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{3\pi}{8}\kappa(p)p^{u-v}\Big) \\
& \times \left(1+\frac{\frac{3\pi}{4}\kappa(p)}{p^{1+s}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u-v}}\Big)}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\eta_3(v,s,u,c) := \nu_3(v,s,u,c)\prod_{p|c}\Big(1-\frac{\nu_3(v,s,u,p)}{p^{1+s}}\Big)
$$

et

$$
\xi_3(v,s,u,c) := \sum_d \frac{\nu_3(v,s,u,d)}{d^{1+s}}\lambda_{cd},
$$

et

$$
\begin{aligned}
TE_{3,1}(k) := \sum_n \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(n)} & \sum_{\substack{d \bmod n\\(d,n)=1}} |C(d,n)| \sum_t 2^{\omega(t)}(\log t)^k \\
& \times h_3(t)h^y\Big(\frac{2X}{t}\Big)\mu^2(nt)g\Big(\frac{nt}{X}\Big)g_n(t,d)\Big(\sum_{m|nt}L(m)\Big) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

que l'on étudiera au § 7.3 à travers la proposition 7.6.

4. Définition et propriétés de la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$

On construit maintenant la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ du théorème 1.7.

4.1. Définition. — Pour que l'on puisse négliger le terme médian $\Sigma_{2,2}(k)$, on est obligé de prendre les coefficients d'un crible de dimension 4, plus précisément ceux minimisant la partie médiane, même si ils ne sont pas optimaux pour les parties extrêmes.

On pose

$$\begin{aligned}\nu(c) &:= \prod_{p|c} \frac{4p}{p+4} = \nu_2(0,0,0,c),\\ \tilde{\nu}(c,w) &:= \prod_{p|c} \Big(1+\frac{4}{p^w}\Big),\\ \eta(c) &:= \nu(c)\prod_{p|c}\Big(1-\frac{\nu(p)}{p}\Big) = \eta_2(0,0,0,c),\\ \tilde{\eta}(c) &:= \prod_{p|c}\Big(1-\frac{\nu(p)}{p}\Big)\end{aligned}$$

et

$$\xi(c) := \sum_d \frac{\nu(c)}{c}\lambda_{cd} = \xi_2(0,0,0,c).$$

Les parties extrêmes sont de dimension 2. Si l'on avait choisi un crible de dimension 2, $\Sigma_{2,2}(k)$ ne serait plus $\ll \epsilon X(\log X)^{k-1}$ mais $\gg X(\log X)^{k+1}$.

On pose alors

$$\lambda_d := \frac{\lambda_d^0}{\lambda_1^0} \tag{32}$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda_d^0 &:= \sum_{d_1} \frac{\mu(d_1)\nu(d_1)}{d_1}\,\frac{\mu(dd_1)\nu(dd_1)}{\eta(dd_1)} h_z(dd_1)\\ &= \frac{\mu(d)}{\prod_{p|d}\Big(1-\frac{\nu(p)}{p}\Big)} \sum_{(d_1,d)=1} \frac{1}{d_1}\,\frac{\nu(d_1)}{\tilde{\eta}(d_1)} h_z(dd_1).\end{aligned} \tag{33}$$

On a trivialement $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_d = 0$ si $d > 2z$ ou $\mu(d) = 0$. D'autre part, comme h_z est décroissante, on a l'inégalité

$$|\lambda_d^0| \leq \frac{\mu^2(d)}{\tilde{\eta}(d)} \sum_{(d_1,d)=1}^{\sharp} \frac{1}{d_1}\,\frac{\nu(d_1)}{\tilde{\eta}(d_1)} h_z(d_1) \leq \frac{\lambda_1^0}{\tilde{\eta}(d_1)}$$

ce qui entraîne la relation

$$|\lambda_d| \leq \frac{1}{\tilde{\eta}(d_1)} \leq 2 \times 2^{\omega(d)}$$

car

$$\Big(1 - \frac{\nu(p)}{p}\Big)^{-1} = 1 + \frac{4}{p}.$$

Ainsi, la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ vérifie bien $\mathrm{Sel}(z)$.

On peut alors par le lemme 3.1 écrire λ_d^0 sous forme intégrale

$$\lambda_d^0 = \frac{\mu(d)}{\tilde{\eta}(d)} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w=3} \Big(\frac{z}{d}\Big)^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \sideset{}{^\sharp}\sum_{(d_1,d)=1} \frac{1}{d_1^{1+w}} \frac{\nu(d_1)}{\tilde{\eta}(d_1)} \mathrm{d}w. \tag{34}$$

4.2. Équivalent de λ_1^0. — On énonce maintenant le lemme suivant :

Lemme 4.1. — *On a pour $z \geq 2$*

$$\lambda_1^0 = \frac{G_0(0)}{4!} \log^4 z + O(\log^3 z)$$

avec

$$G_0(w) := \prod_p \Big(1 + \frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p^{1+w}}\Big)^4.$$

Démonstration. — D'après (34), on a

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w=3} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \sideset{}{^\sharp}\sum_{d_1} \frac{1}{d_1^{1+w}} \frac{\nu(d_1)}{\tilde{\eta}(d_1)} \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w=3} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} G_0(w)\zeta^4(1+w)\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\nu(p)}{(1-\frac{\nu(p)}{p})} = 4,$$

le produit eulérien définissant G_0 est normalement convergent sur le demi-plan $\Re w > -2\delta_0$ pour un certain $0 < \delta_0 < \frac{1}{4}$ donc la fonction G_0 y est holomorphe. Par le théorème des résidus, on a alors

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 &= \operatorname*{Res}_{w=0} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} G_0(w)\zeta^4(1+w) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w=-\delta_0} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} G_0(w)\zeta^4(1+w)\mathrm{d}w \\ &= \operatorname*{Res}_{w=0} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} G_0(w)\zeta^4(1+w) + O(z^{-\delta_0}).\end{aligned}$$

Or, on a

$$\operatorname*{Res}_{w=0} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} G_0(w)\zeta^4(1+w) = \frac{G_0(0)}{4!} \log^4 z + O(\log^3 z)$$

d'où le lemme 4.1. □

4.3. Équivalent de λ_q. — On a d'abord besoin d'un lemme auxiliaire :

LEMME 4.2. — *Pour tout $0 < \epsilon \le \frac{1}{2}$, il existe $D(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $0 < \delta \le \epsilon$ et pour tout $j \ge 2$, on ait la majoration*

$$\prod_{p|j} \Big(1 + \frac{1}{p^{1-\delta}}\Big) \le \exp(D(\epsilon)(\log j)^{\epsilon}).$$

Démonstration. — On remarque que pour $p|j$, on a la majoration

$$1 + \frac{1}{p^{1-\delta}} \le 1 + \frac{1}{p^{1-\epsilon}}. \tag{35}$$

Or, comme on a l'égalité

$$\prod_{p|j} \Big(1 + \frac{1}{p^{1-\epsilon}}\Big) = \exp\Big(\sum_{p|j} \log\big(1 + \frac{1}{p^{1-\epsilon}}\big)\Big), \tag{36}$$

il suffit de majorer

$$\sum_{p|j} \log\big(1 + \frac{1}{p^{1-\epsilon}}\big). \tag{37}$$

Or, comme pour $0 \le x \le 1$, $0 \le \log(1+x) \le x$, on a par le théorème des nombres premiers

$$(37) \le \sum_{p|j} \frac{1}{p^{1-\epsilon}} \le \sum_{\substack{p|j \\ p \le \log j}} \frac{1}{p^{1-\epsilon}} + \frac{1}{(\log j)^{1-\epsilon}} \sum_{p|j} 1 \ll_{\epsilon} (\log j)^{\epsilon} \tag{38}$$

d'où le lemme par (35), (36) et (38). □

On démontre maintenant un lemme permettant d'estimer les $(\lambda_d)_{d\ge1}$:

LEMME 4.3. — *Pour tout $\delta > 0$ et pour tout entier $q < z^{1-\delta}$ sans facteur carré, on a*

$$\lambda_q = \mu(q)\frac{\log^4(z/q)}{\log^4 z} + \mathrm{O}\Big(\frac{\log^3(z/q)}{\log^4 z}\Big),$$

où la constante implicite est indépendante de z et de q.

REMARQUE. — On a $\lambda_q = 0$ pour $q > 2z$.

Démonstration. — On rappelle que $\lambda_q = \frac{\lambda_q^0}{\lambda_1^0}$ avec

$$\lambda_q^0 = \frac{\mu(q)}{\tilde{\eta}(q)} \sum_{(d,q)=1}^{\sharp} \frac{1}{d}\frac{\nu(d)}{\tilde{\eta}(d)} h_z(qd).$$

Or, on remarque que $h_z(qd) = h_{z/q}(d)$ d'où

$$\lambda_q^0 = \mu(q) \prod_{p|q} \left(1 + \frac{4}{p}\right) \sum_{(d,q)=1}^{\sharp} \frac{1}{d}\frac{\nu(d)}{\tilde{\eta}(d)} h_{z/q}(d).$$

Or, on a

$$\sum_{(d,q)=1}^{\sharp} \frac{1}{d}\frac{\nu(d)}{\tilde{\eta}(d)} h_{z/q}(d) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w=3} \left(\frac{z}{q}\right)^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{4}{p^{1+w}}\right) \mathrm{d}w$$

donc, comme précédemment, par le théorème des résidus, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_q^0 &= \operatorname*{Res}_{w=0} \left(\frac{z}{q}\right)^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \mu(q) \frac{\tilde{\nu}(q,1)}{\tilde{\nu}(q,1+w)} G_0(w)\zeta^4(1+w) \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w=-\delta_0} \left(\frac{z}{q}\right)^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \mu(q) \frac{\tilde{\nu}(q,1)}{\tilde{\nu}(q,1+w)} G_0(w)\zeta^4(1+w) \mathrm{d}w \\
&= \operatorname*{Res}_{w=0} \left(\frac{z}{q}\right)^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \mu(q) \frac{\tilde{\nu}(q,1)}{\tilde{\nu}(q,1+w)} G_0(w)\zeta^4(1+w) + O(z^{\frac{-\delta_0}{2}})
\end{aligned}$$

par le lemme 4.2, et

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{w=0} \left(\frac{z}{q}\right)^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \tilde{\nu}(q,1+w)^{-1} G_0(w)\zeta^4(1+w) \\
&= \frac{G_0(0)}{4!} \tilde{\nu}(q,1)^{-1} \log^4(z/q) + O(\log^3(z/q))
\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_q^0 = \mu(q) \frac{G_0(0)}{4!} \log^4(z/q) + O(\log^3(z/q)).$$

Comme

$$\lambda_1^0 = \frac{G_0(0)}{4!} \log^4 z + O(\log^3 z)$$

par le lemme 4.1, on en déduit le lemme. □

5. Transformation des sommes en intégrales

On utilise maintenant le choix particulier de la suite $(\lambda_d)_{d \geq 1}$ effectué au paragraphe 4 pour exprimer sous forme intégrale les sommes $TP_{1,1}(k)$ et $TP_{3,1}(k)$, et un majorant de $\Sigma_{2,2}(k)$. Ceci nous permettra d'étudier leurs comportements asymptotiques au paragraphe 6.

5.1. Transformation du terme principal de $\Sigma_{2,1}(k)$. — On transforme d'abord le terme principal de $\Sigma_{2,1}(k)$. Par définition de la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$, on a d'après (34)
(39)
$$Q_1(v,s,u)=\frac{1}{(2i\pi\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3} z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\cdot\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\tilde{Q}_1(v,s,u,w,w')\mathrm{d}w\mathrm{d}w'$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1(v,s,u,w,w') := &\sum_c^\sharp \frac{\eta_1(v,s,u,c)}{c^{1+s+w+w'}\tilde{\eta}(c)^2}\\ &\times\sum_{\substack{d,d'\\(dd',c)=1}}\frac{\mu(d)\mu(d')\nu_1(v,s,u,d)\nu_1(v,s,u,d')}{d^{1+s+w}d'^{1+s+w'}\tilde{\eta}(d)\tilde{\eta}(d')}\\ &\times\sum^\sharp_{\substack{(d_1,cd)=1\\(d_1',cd')=1}}\frac{\nu(d_1)\nu(d_1')}{d_1^{1+w}d_1'^{1+w'}\tilde{\eta}(d_1)\tilde{\eta}(d_1')}.\end{aligned}$$

Or, en transformant les sommes de $\tilde{Q}_1$ en produits, en obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1(v,s,u,w,w') = &\prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\\ &\prod_p\Big(1-\frac{\nu_1(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)\\ &\prod_p\Big(1-\frac{\nu_1(v,s,u,p)}{p^{1+s+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)\\ &\prod_p\Big(1+\frac{\eta_1(v,s,u,p)}{p^{1+s+w+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})^2\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\times\\ &\Big(1-\frac{\nu_1(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)^{-1}\times\\ &\Big(1-\frac{\nu_1(v,s,u,p)}{p^{1+s+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)^{-1}\Big).\end{aligned}\tag{40}$$

On a

$$\prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)=\prod_p\Big(1+\frac{4}{p^{1+w}}\Big)=G_0(w)\zeta^4(1+w),$$

où G_0 est définie dans le lemme 4.1. D'autre part, on a

$$\prod_p \Big(1 - \frac{\nu_1(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big) \\ = G_{1,3}(v,s,u,w)\zeta^{-2}(1+s+w)\zeta^{-1}(1+s+u-v+w).$$

Le dernier produit eulérien de (40) peut s'écrire sous la forme

$$G_{1,4}(v,s,u,w,w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta(1+s+u-v+w+w').$$

Pour $n \geq 1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, posons $\mathfrak{B}'(n,\alpha,\beta) := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n | -\infty < \Re x_1 \leq \beta$ et $\alpha \leq \Re x_i \leq \beta$, pour tout $i = 2,\dots,n\}$. Par le lemme 2.5, la fonction $G_{1,3}$ est holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w) \in \mathbb{C}^4 \,|\, \Re w, \Re s > -\frac{1}{16}, \Re(s+u-v) > -\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(4,-\delta_{1,3},\delta_{1,3})$ pour un certain $0 < \delta_{1,3} < \frac{1}{16}$. De même, par le lemme 2.5, la fonction $G_{1,4}$ est holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w,w') \in \mathbb{C}^5 \,|\, \Re w, \Re w', \Re s > -\frac{1}{16}, \Re(s+u-v) > -\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(5,-\delta_{1,4},\delta_{1,4})$ pour un certain $0 < \delta_{1,4} < \frac{1}{20}$. Enfin, $G_{1,1}$ est holomorphe sur un voisinage ouvert de $\mathfrak{B}(1,-\frac{1}{4},+\infty)$ et non nulle sur $\mathfrak{B}(1,-\delta_{1,1},\delta_{1,1})$ pour un certain $0 < \delta_{1,1} < \frac{1}{4}$ et, à nouveau par le lemme 2.5, la fonction $G_{1,2}$ est holomorphe sur

$$\{(v,s,u) \in \mathbb{C}^3 \,|\, \Re s > -\frac{1}{4}, \Re(s+u-v) > -\frac{1}{4}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(3,-\delta_{1,2},\delta_{1,2})$ pour un certain $0 < \delta_{1,2} < \frac{1}{12}$.

Le terme d'erreur en $\mathrm{O}(p^{-\frac{1}{4}})$ dans le lemme 2.5 (qui découle de la loi de Sato-Tate verticale) est très important. Si on n'avait eu qu'une erreur en $\mathrm{O}(\frac{1}{\log p})$, les fonctions $G_{1,2}$, $G_{1,3}$ et $G_{1,4}$ auraient été holomorphes sur des domaines trop petits pour pouvoir ensuite repousser les droites d'intégration.

Finalement, si l'on pose

$$G_1(v,s,u,w,w') := \\ G_0(w)G_0(w')G_{1,1}(s)G_{1,2}(v,s,u)G_{1,3}(v,s,u,w)G_{1,3}(v,s,u,w')G_{1,4}(v,s,u,w,w')$$

et

$$\delta_1 := \min(\delta_0,\delta_{1,1},\delta_{1,2},\delta_{1,3},\delta_{1,4},1/250) > 0, \tag{41}$$

alors G_1 est holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w,w') \in \mathbb{C}^5 \,|\, \Re w, \Re w', \Re s > -\frac{1}{16}, \Re(s+u-v) > -\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(5,-\delta_1,\delta_1)$. On a donc l'égalité suivante par (24), (39) et (40) :

$$\begin{aligned}\mathrm{TP}_{1,1}(k) = \frac{k!X}{(2i\pi)^5(\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}\int_{\Re v=2}\hat{g}(1+s)G_1(v,s,u,w,w')\\ \times z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\frac{2^u-1}{u^2\log u}\frac{1}{v^{k+1}}X^{(\frac{1}{2}-\epsilon)u}X^s\zeta^2(1+s)\zeta(1+s+u-v)\\ \times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta(1+s+w+u-v)\zeta^2(1+s+w')\zeta(1+s+w'+u-v)}\\ \mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}w\mathrm{d}w'.\end{aligned}\tag{42}$$

5.2. Transformation de $\Sigma_{2,2}(k)$. — On transforme maintenant $\Sigma_{2,2}(k)$ en intégrale. D'après (34), on a

$$Q_2(v,s,u) = \frac{1}{(2i\pi\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3} z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\tilde{Q}_2(v,s,u,w,w')\mathrm{d}w\mathrm{d}w'\tag{43}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_2(v,s,u,w,w') := \sideset{}{^\sharp}\sum_{c}\frac{\eta_2(v,s,u,c)}{c^{1+s+w+w'}\tilde{\eta}(c)^2}\\ \times\sum_{\substack{d,d'\\(dd',c)=1}}\frac{\mu(d)\mu(d')\nu_2(v,s,u,d)\nu_2(v,s,u,d')}{d^{1+s+w}d'^{1+s+w'}\tilde{\eta}(d)\tilde{\eta}(d')}\\ \times\sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{(d_1,cd)=1\\(d_1',cd')=1}}\frac{\nu(d_1)\nu(d_1')}{d_1^{1+w}d_1'^{1+w'}\tilde{\eta}(d_1)\tilde{\eta}(d_1')}.\end{aligned}$$

Or, en transformant les sommes de $\tilde{Q}_2$ en produits, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_2(v,s,u,w,w') = \prod_p\left(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\right)\prod_p\left(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\right)\\ \prod_p\left(1-\frac{\nu_2(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\right)\\ \prod_p\left(1-\frac{\nu_2(v,s,u,p)}{p^{1+s+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\right)\\ \prod_p\left(1+\frac{\eta_2(v,s,u,p)}{p^{1+s+w+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})^2\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\right)\times\end{aligned}\tag{44}$$

$$\Big(1-\frac{\nu_2(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)^{-1}\times$$
$$\Big(1-\frac{\nu_2(v,s,u,p)}{p^{1+s+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)^{-1}\Big).$$

C'est exactement la même formule que (40), mais avec l'indice 1 remplacé par 2.

On a

$$\prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)=\prod_p\Big(1+\frac{4}{p^{1+w}}\Big)=G_0(w)\zeta^4(1+w),$$

$$\prod_p\Big(1-\frac{\nu_2(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Big)=G_{2,3}(v,s,u,w)\zeta^{-2}(1+s+w)\zeta^{-2}(1+s+u-v+w),$$

et le dernier produit eulérien de (44) peut s'écrire sous la forme

$$G_{2,4}(v,s,u,w,w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+u-v+w+w').$$

Ici, $G_{2,3}$ est une fonction holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w)\in\mathbb{C}^4\mid \Re w,\Re s>-\frac{1}{16},\Re(s+u-v)>-\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(4,-\delta_{2,3},\delta_{2,3})$ pour un certain $0<\delta_{2,3}<\frac{1}{16}$, et $G_{2,4}$ est une fonction holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w,w')\in\mathbb{C}^5\mid \Re w,\Re w',\Re s>-\frac{1}{16},\Re(s+u-v)>-\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(5,-\delta_{2,4},\delta_{2,4})$ pour un certain $0<\delta_{2,4}<\frac{1}{20}$. De même, la fonction $G_{2,1}$ est holomorphe sur un voisinage ouvert de $\mathfrak{B}(1,-\frac{1}{4},+\infty)$ et non nulle sur $\mathfrak{B}(1,-\delta_{2,1},\delta_{2,1})$ pour un certain $0<\delta_{2,1}<\frac{1}{4}$, et la fonction $G_{2,2}$ est holomorphe sur

$$\{(v,s,u)\in\mathbb{C}^3\mid \Re s>-\frac{1}{4},\Re(s+u-v)>-\frac{1}{4}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(3,-\delta_{2,2},\delta_{2,2})$ pour un certain $0<\delta_{2,2}<\frac{1}{12}$.

C'est ici que l'on voit l'importance du choix de $(\lambda_d)_{d\geq1}$. Avec un autre choix, on aurait eu des puissances différentes de ζ, qui feraient apparaître par la suite des puissances plus importantes de $\log X$.

Finalement, si l'on pose

$$G_2(v,s,u,w,w'):=$$
$$G_0(w)G_0(w')G_{2,1}(s)G_{2,2}(v,s,u)G_{2,3}(v,s,u,w)G_{2,3}(v,s,u,w')G_{2,4}(v,s,u,w,w')$$

et

$$\delta_2:=\min(\delta_0,\delta_{2,1},\delta_{2,2},\delta_{2,3},\delta_{2,4},1/250)>0, \tag{45}$$

alors G_2 est holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w,w')\in\mathbb{C}^5 \mid \Re w, \Re w', \Re s > -\frac{1}{16}, \Re(s+u-v) > -\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(5,-\delta_2,\delta_2)$, et on a la majoration

$$\Sigma_{2,2}(k) \le \Sigma^+_{2,2}(k) - \Sigma^-_{2,2}(k)$$

d'après (26), (43) et (44), avec

$$\begin{aligned}\Sigma^{\pm}_{2,2}(k) = {} & \frac{k!X}{(2i\pi)^5(\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}\int_{\Re v=2}\hat{g}(1+s)G_2(v,s,u,w,w') \\ & \times z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\frac{2^u-1}{u^2\log u}\frac{1}{v^{k+1}}X^{(\frac12\pm\epsilon)u}X^s\zeta^2(1+s)\zeta^2(1+s+u-v) \\ & \times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u-v)\zeta^2(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u-v)} \\ & \mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}w\mathrm{d}w'.\end{aligned}\tag{46}$$

5.3. Transformation des termes principaux de $\Sigma_{2,3}(k)$. — On transforme enfin $\Sigma_{2,3}(k)$ en intégrale. On a par (34)

(47)

$$Q_3(v,s,u) = \frac{1}{(2i\pi\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3} z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\tilde{Q}_3(v,s,u,w,w')\mathrm{d}w\mathrm{d}w'$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_3(v,s,u,w,w') := {} & \sum_c^{\sharp}\frac{\eta_3(v,s,u,c)}{c^{1+s+w+w'}\tilde{\eta}(c)^2} \\ & \times\sum_{\substack{d,d'\\(dd',c)=1}}\frac{\mu(d)\mu(d')\nu_3(v,s,u,d)\nu_3(v,s,u,d')}{d^{1+s+w}d'^{1+s+w'}\tilde{\eta}(d)\tilde{\eta}(d')} \\ & \times\sum^{\sharp}_{\substack{(d_1,cd)=1\\(d_1',cd')=1}}\frac{\nu(d_1)\nu(d_1')}{d_1^{1+w}d_1'^{1+w'}\tilde{\eta}(d_1)\tilde{\eta}(d_1')}.\end{aligned}$$

Or, en transformant les sommes de $\tilde{Q}_3$ en produits, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_3(v,s,u,w,w') = {} & \prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big) \\ & \prod_p\Bigg(1-\frac{\nu_3(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Bigg) \\ & \prod_p\Bigg(1-\frac{\nu_3(v,s,u,p)}{p^{1+s+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Bigg)\end{aligned}$$

$$\prod_p \Bigg(1+\frac{\eta_3(v,s,u,p)}{p^{1+s+w+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})^2\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\times$$
$$\Bigg(1-\frac{\nu_3(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Bigg)^{-1}\times$$
$$\Bigg(1-\frac{\nu_3(v,s,u,p)}{p^{1+s+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w'}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Bigg)^{-1}\Bigg). \tag{48}$$

C'est exactement la même formule que (40) et (44), avec l'indice 3 à la place de 1 ou 2.

On a

$$\prod_p\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)=\prod_p\Big(1+\frac{4}{p^{1+w}}\Big)=G_0(w)\zeta^4(1+w).$$

D'autre part, on a

$$\prod_p\Bigg(1-\frac{\nu_3(v,s,u,p)}{p^{1+s+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})\Big(1+\frac{\nu(p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(p)}{p})}\Big)}\Bigg)=$$
$$G_{3,3}(v,s,u,w)\zeta^{-1}(1+s+w)\zeta^{-2}(1+s+u-v+w),$$

et le dernier produit eulérien de (48) peut s'écrire sous la forme

$$G_{3,4}(v,s,u,w,w')\zeta(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+u-v+w+w').$$

Ici, par le lemme 2.5, la fonction $G_{3,3}$ est holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w)\in\mathbb{C}^4\,|\,\Re w,\Re s>-\frac{1}{16},\Re(s+u-v)>-\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}(4,-\delta_{3,3},\delta_{3,3})$ pour un certain $0<\delta_{3,3}<\frac{1}{16}$, et $G_{3,4}$ est une fonction holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w,w')\in\mathbb{C}^5\,|\,\Re w,\Re w',\Re s>-\frac{1}{16},\Re(s+u-v)>-\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(5,-\delta_{3,4},\delta_{3,4})$ pour un certain $0<\delta_{3,4}<\frac{1}{20}$.

De même, les fonctions $G_{3,1}$ et $G_{3,2}$ sont holomorphes (en utilisant le lemme 2.5 pour $G_{3,2}$) sur

$$\{(v,s,u)\in\mathbb{C}^3\,|\,\Re s>-\frac{1}{4},\Re(s+u-v)>-\frac{1}{4}\}$$

et non nulles sur $\mathfrak{B}'(3,-\delta_{3,1},\delta_{3,1})$ pour un certain $0<\delta_{3,1}<\frac{1}{12}$.

C'est le fait que $\kappa(p)\sim\frac{4}{3\pi}$ et l'introduction du facteur $\frac{3\pi}{8}$ qui permettent de ne faire apparaître que des puissances entières de ζ.

Finalement, si l'on pose

$$G_3(v,s,u,w,w') :=$$
$$G_0(w)G_0(w')G_{3,1}(v,s,u)G_{3,2}(v,s,u)G_{3,3}(v,s,u,w)G_{3,3}(v,s,u,w')G_{3,4}(v,s,u,w,w')$$

et

$$\delta_3 := \min(\delta_0, \delta_{3,1}, \delta_{3,3}, \delta_{3,4}, 1/250) > 0 \tag{49}$$

alors G_3 est holomorphe sur

$$\{(v,s,u,w,w') \in \mathbb{C}^5 \mid \Re w, \Re w', \Re s > -\frac{1}{16}, \Re(s+u-v) > -\frac{1}{8}\}$$

et non nulle sur $\mathfrak{B}'(5,-\delta_3,\delta_3)$, et on a les égalités suivantes d'après (28), (47) et (48) :

$$\mathrm{TP}_{3,1}(k) = \mathrm{TP}_{3,1}\Big(\frac{2X}{y}, k\Big) + \mathrm{TP}_{3,1}(X^{(\frac{1}{2}+\epsilon)}, k)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{TP}_{3,1}(Y,k) := &\frac{k!X}{(2i\pi)^5(\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}\int_{\Re v=2}\hat{g}(1+s)G_3(v,s,u,w,w')\\ &\times z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\frac{2^u-1}{u^2\log u}\frac{1}{v^{k+1}}Y^uX^s\zeta(1+s)\zeta^2(1+s+u-v)\\ &\times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u-v)\zeta(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u-v)}\\ &\hspace{20em}\mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}w\mathrm{d}w'.\end{aligned} \tag{50}$$

6. Étude asymptotique des termes principaux

Dans cette partie, on utilise le théorème principal du chapitre 3 de [7] (énoncé dans l'appendice) pour étudier le comportement asymptotique des termes principaux de $\Sigma_2(k)$. Cela revient à décaler successivement les droites d'intégration par la méthode des résidus, et donc à calculer finalement un résidu multiple qui ne fait plus apparaître la fonction ζ de Riemann, mais à la place une fraction rationnelle. On utilise de manière cruciale le domaine d'holomorphie des fonctions G_1, G_2 et G_3 déterminé au paragraphe 5 grâce au lemme 2.5 (loi de Sato-Tate verticale).

6.1. Asymptotique du terme principal de $\Sigma_{2,1}(k)$. — On a l'équivalent suivant pour $TP_{1,1}(k)$:

LEMME 6.1. — *On a*

$$\mathrm{TP}_{1,1}(k) = \frac{8}{3\pi}\frac{X(4!)^2}{\log^8 z}\hat{g}(1)P_1(\log X, \log X^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \log z) + O_g(X(\log X)^{k-2})$$

avec P_1 polynôme homogène de degré $k+7$ défini par

$$\begin{aligned}
&P_1(X_1, X_2, X_3) := \\
&\operatorname*{Res}_{w'=0}\operatorname*{Res}_{w=0}\operatorname*{Res}_{u=0}\operatorname*{Res}_{s=0}\operatorname*{Res}_{v=0} \frac{k!}{v^{k+1}}\frac{\exp(X_1 s)\exp(X_2 u)\exp(X_3(w+w'))}{ww'u} \\
&\quad\times\zeta^2(1+s)\zeta(1+s+u-v) \\
&\quad\times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta(1+s+w+u-v)\zeta^2(1+s+w')\zeta(1+s+w'+u-v)}.
\end{aligned}$$

Démonstration. — On sait que $TP_{1,1}(k)$ s'écrit comme une intégrale quintuple par (42). Par le théorème des résidus, on a (par absence de pôles)

$$\begin{aligned}
\mathrm{TP}_{1,1}(k) = \frac{8}{3\pi}\frac{k!X}{(2i\pi)^5(\lambda_1^0)^2}&\int_{\Re w'=\delta_1}\int_{\Re w=\delta_1}\int_{\Re u=\delta_1}\int_{\Re s=\delta_1}\int_{\Re v=\delta_1}\hat{g}(1+s) \\
&\times G_1(v,s,u,w,w')z^{w+w'}\frac{2^w-1}{w^2\log 2}\frac{2^{w'}-1}{w'^2\log 2}\frac{2^u-1}{u^2\log 2}\frac{1}{v^{k+1}} \\
&\times X^{(\frac{1}{2}-\epsilon)u}X^s\zeta^2(1+s)\zeta(1+s+u-v) \\
&\times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta(1+s+w+u-v)\zeta^2(1+s+w')\zeta(1+s+w'+u-v)} \\
&\qquad\mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}w\mathrm{d}w'
\end{aligned}$$

avec δ_1 donnée par (41).

Il suffit donc d'appliquer le théorème A.1 avec

$$x_1 = w', x_2 = w, x_3 = u, x_4 = s \text{ et } x_5 = v,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha, \gamma_3 = \frac{1}{2}-\epsilon, \gamma_4 = 1, \gamma_1' = \gamma_2' = -B, \gamma_3' = \gamma_4' = 0,$$

$$G(x_1,\ldots,x_5) = \frac{2^{x_1}-1}{x_1\log 2}\frac{2^{x_2}-1}{x_2\log 2}\frac{2^{x_3}-1}{x_3\log 2}\hat{g}(1+x_4)G_1(x_5,\ldots,x_1),$$

$$R(x_1,\ldots,x_5) = \frac{1}{x_1x_2x_3x_5^{k+1}},$$

$$\begin{aligned}
&Z(x_1,\ldots,x_5) = \zeta(1+x_3+x_4-x_5)\zeta^2(1+x_4) \\
&\times\frac{\zeta^4(1+x_1)\zeta^4(1+x_2)\zeta^2(1+x_1+x_2+x_4)\zeta(1+x_1+x_2+x_3+x_4-x_5)}{\zeta^2(1+x_1+x_4)\zeta(1+x_1+x_3+x_4-x_5)\zeta^2(1+x_2+x_4)\zeta(1+x_2+x_3+x_4-x_5)},
\end{aligned}$$

$$\delta = \delta_1, \delta' = (1-\eta)\delta_1,$$

d'où

$$\mathrm{TP}_{1,1}(k) = \frac{8}{3\pi}\frac{X}{(\lambda_1^0)^2}\Big(\hat{g}(1)G_1(0,0,0,0,0)P_1(\log X, \log X^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \log z) + O_g((\log X)^{k+6})\Big).$$

Or, on remarque que

$$G_1(0,0,0,0,0) = G_0(0)^2$$

car

$$G_{1,1}(0)G_{1,2}(0,0,0) = \prod_p \Big(1 - \frac{\nu_1(0,0,0,p)}{p}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^3,$$

$$G_{1,3}(0,0,0,0) = \prod_p \Big(1 - \frac{\nu_1(0,0,0,p)}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-3}$$

et

$$G_{1,4}(0,0,0,0,0) = \prod_p \Big(1 - \frac{\nu_1(0,0,0,p)}{p}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^3.$$

Finalement, comme

$$\lambda_1^0 = \frac{G_0(0)}{4!}\log^4 z + O(\log^3 z)$$

par le lemme 4.1, on conclut. □

Remarque. — *Nous verrons dans la partie 10 que* $P_1(\log X, \log X^{\frac{1}{2}}, \log z)$ *n'est pas nul pour certains choix de paramètres, mais, a priori, ce n'est pas évident.*

6.2. Asymptotique des termes principaux de $\Sigma_{2,2}(k)$. — On énonce ensuite le lemme suivant :

Lemme 6.2. — *On a*

$$\Sigma_{2,2}(k) \le \frac{X(4!)^2}{\log^8 z}\hat{g}(1)(P_2(\log X, \log X^{\frac{1}{2}+\epsilon}, \log z) - P_2(\log X \log, X^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \log z)) + O_g(X(\log X)^{k-2})$$

avec P_2 polynôme homogène de degré $k+7$ défini par

$$P_2(X_1, X_2, X_3) := \operatorname*{Res}_{w'=0}\operatorname*{Res}_{w=0}\operatorname*{Res}_{u=0}\operatorname*{Res}_{s=0}\operatorname*{Res}_{v=0}\frac{k!}{v^{k+1}}\frac{\exp(X_2 u)\exp(X_1 s)\exp(X_3(w+w'))}{ww'u} \times\zeta^2(1+s)\zeta^2(1+s+u-v) \times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u-v)\zeta^2(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u-v)}.$$

Démonstration. — On procède de manière analogue à la preuve du lemme 6.1 avec δ_2 donnée par (45) et en partant de (46). □

6.3. Asymptotique des termes principaux de $\Sigma_{2,3}(k)$. — On a enfin l'équivalent suivant pour $TP_{3,1}(k)$:

LEMME 6.3. — *On a*

$$\begin{aligned}\mathrm{TP}_{3,1}(k) = \frac{X(4!)^2}{\log^8 z}\hat{g}(1)(P_3(\log X, \log\Big(\frac{2X}{y}\Big), \log z)\\ - P_3(\log X, \log X^{\frac{1}{2}+\epsilon}, \log z)) + O_g(X(\log X)^{k-2})\end{aligned}$$

avec P_3 polynôme homogène de degré $k+7$ défini par

$$\begin{aligned}&P_3(X_1, X_2, X_3) :=\\ &\operatorname*{Res}_{w'=0}\operatorname*{Res}_{w=0}\operatorname*{Res}_{u=0}\operatorname*{Res}_{s=0}\operatorname*{Res}_{v=0}\frac{k!}{v^{k+1}}\frac{\exp(X_1 s)\exp(X_2 u)\exp(X_3(w+w'))}{ww'u}\\ &\quad\times\zeta^2(1+s)\zeta(1+s+u-v)\\ &\quad\times\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta(1+s+w+w'+u-v)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta(1+s+w+u-v)\zeta^2(1+s+w')\zeta(1+s+w'+u-v)}.\end{aligned}$$

Démonstration. — De même, on procède comme dans la preuve du lemme 6.1, pour δ_3 donnée par (49) et en partant de (50). □

7. Traitement des termes d'erreur et preuve du théorème 1.7

Dans cette partie, on applique (§ 7.3) le théorème de Barban-Davenport-Halberstam (énoncé au paragraphe 7.1), ce qui permet d'estimer les termes d'erreur et de conclure la preuve du théorème 1.7 (§ 7.4).

7.1. Autour du théorème de Barban-Davenport-Halberstam. — Le théorème de Barban-Davenport-Halberstam sera utilisé sous la forme du théorème ci-dessous, ce qui permettra de traiter les termes d'erreur qui apparaissent dans la preuve du théorème 1.7 et dont la preuve suit essentiellement celle de [5] (p. 425) :

THEORÈME 7.1. — *Soit $(\beta_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe vérifiant le critère de Siegel-Walfisz sous la forme*

$$\Big|\sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ n\equiv a \bmod q}}\beta_n - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ (n,q)=1}}\beta_n\Big| \leq c_A\Delta_N(\log 2N)^{-A},$$

avec $\Delta_N \geq 1$ et

$$\|\beta\|_N \ll \Delta_N N^{-\frac{1}{2}}.$$

Alors, pour tout $A > 0$, il existe $B_A > 0$ et $c'_A > 0$ tels que pour $N \geq 2$ et $Q \leq N(\log N)^{-B_A}$, on ait l'inégalité

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a \bmod q \\ (a,q)=1}} \Big| \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ n \equiv a \bmod q}} \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ (n,q)=1}} \beta_n \Big|^2 \leq c'_A (1 + c_{9A+18}) \Delta_N^2 (\log N)^{-A}.$$

Remarque Dans cet énoncé, contrairement à [5], on ne fait pas d'hypothèse de la forme $c_A(\log 2N)^{-A} \leq 1$, car nous ne serons pas toujours dans ce cas. En outre, on a besoin de connaître explicitement la dépendance en c_A (ici, c_{9A+18}).

7.2. Vérification du critère de Siegel-Walfisz. — On énonce d'abord un lemme technique :

Lemme 7.2. — *Pour tout entier t sans facteur carré, pour tous réels $z \geq 1000$ et w, on a les majorations uniformes :*

$$f_z(t,w) := \prod_{p \mid t} \Big(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{\log z} + iw}} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\big)^{-1}\Big) \leq 2 \cdot 10^{\omega(t)} \tag{51}$$

et

$$\tilde{f}_z(t,w) := \sum_{\substack{m \mid t \\ m \leq 2z}} \frac{\mu(m)}{m^{\frac{1}{\log z} + iw}} \prod_{p \mid m} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\big)^{-1} \leq 2 \cdot 10^{\omega(t)}. \tag{52}$$

Démonstration. — Pour p premier divisant t, on a

$$\begin{aligned} &\Big|1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{\log z} + iw}} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\big)^{-1}\Big| \\ &\qquad \leq 1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{\log z}}} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\Big|1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big|^{-1}. \end{aligned} \tag{53}$$

Or, pour $p \geq 5$, on a

$$\Big|1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big| \geq 1 - \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z}}}$$

d'où

$$\begin{aligned} (53) &\leq 1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{\log z}}} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 - \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z}}}\big)^{-1} \\ &\leq 1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{\log z}}} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 + \frac{20}{p^{1 + \frac{1}{\log z}}}\big) \leq 10 \end{aligned}$$

car $\frac{1}{1-x} \leq 1 + 5x$ pour $0 \leq x \leq \frac{4}{5}$. Par ailleurs, pour $p = 2, 3$, on a

$$\Big|1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big| \geq \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z}}} - 1 \geq \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log 1000}}} - 1$$

d'où

$$(53) \leq \begin{cases} 5 \text{ pour } p = 2 \\ 18 \text{ pour } p = 3, \end{cases}$$

d'où (51).

De même, comme précédemment, on remarque que

$$|\tilde{f}_z(t,w)| \leq 2 \sum_{m|t} 9^{\omega(t)} \leq 2 \prod_{p|t} 10 \leq 2 \cdot 10^{\omega(t)}$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

On vérifie maintenant que la suite $2^{\omega(t)}\mu^2(t)t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')$ vérifie le critère de Siegel-Walfisz :

Proposition 7.3. — *Soient $A \geq 0$, $k \geq 0$ et $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ vérifiant (2). Soient aussi des réels x, w, w' et $z \geq 1000$ vérifiant (3) avec $X \geq 2$. Il existe alors $c_A(\alpha, k) > 0$ tel que pour $\sqrt{X} \leq N \leq 2X$, pour $1 \leq d < N$ et pour $(n,d) = 1$, on ait les inégalités suivantes uniformément en x, w, w'*

$$\begin{aligned} &\Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\leq 2N} 2^{\omega(t)} t^{-1+ix} (\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w') g_d(t,n) \Big| \\ &\leq c_A(\alpha,k)(1+x^2)(\log X)^{k+20000-A} \end{aligned} \tag{54}$$

et

$$\|2^{\omega(t)}\mu^2(t)t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')\|_N \ll (\log X)^{k+20000} N^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. — Si $(\log X)^{2A} \leq d \leq N$, on a par (52) et par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} &\Big| \sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{N<t\leq 2N \\ t\equiv n \bmod d}} 2^{\omega(t)} t^{-1+ix} (\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w) \Big| \\ &\leq 4\frac{(\log X)^k}{N} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{N<t\leq 2N \\ t\equiv n \bmod d}} 200^{\omega(t)} \ll \frac{(\log X)^{k+\frac{39999}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

et par (52) et la formule de Mertens

$$\begin{aligned} &\Big| \frac{1}{\varphi(d)} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{N<t\leq 2N \\ (t,d)=1}} 2^{\omega(t)} t^{-1+ix} (\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w) \Big| \\ &\leq 4\frac{(\log X)^k}{\varphi(d)} \sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\leq 2N} \frac{200^{\omega(t)}}{t} \ll \frac{(\log X)^{k+201}}{d}. \end{aligned}$$

Ceci démontre la première inégalité de la proposition pour $(\log X)^{2A} \leq d \leq N$.

D'autre part, on a l'inégalité suivante par (52)

$$\begin{aligned}&\sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{N<t\leq 2N\\ t\equiv n \bmod d}} |2^{\omega(t)}t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w)|^2\\ &\ll \frac{(\log X)^{2k}}{N^2} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{N<t\leq 2N\\ t\equiv n \bmod d}} 200^{2\omega(t)} \ll \frac{(\log X)^{2k+39999}}{N},\end{aligned}$$

ce qui démontre la seconde inégalité de la proposition.

Il reste à démontrer la première inégalité de la proposition pour $d \leq (\log X)^{2A}$. On remarque que

$$\begin{aligned}&\sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\leq 2N} 2^{\omega(t)}t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w)g_d(t,n)\\ (55)\quad &= \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi\neq\chi_0}} \overline{\chi}(n) \sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\leq 2N} 2^{\omega(t)}\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w).\end{aligned}$$

Estimons d'abord

$$\sum_{t\leq Y} 2^{\omega(t)}\mu^2(tt')\chi(t)$$

pour $\chi \neq \chi_0$, $N \leq Y \leq 2N$ et pour $t' \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, grâce au lemme suivant :

Lemme 7.4. — *Pour $\chi \neq \chi_0$, $N \leq Y \leq 2N$ et $t' \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, on a*

$$\sum_{t\leq Y} 2^{\omega(t)}\mu^2(tt')\chi(t) \ll 9^{\omega(t')}Y^{8/9}.$$

Démonstration. — On a par la formule de Perron :

$$\sum_{t\leq Y} 2^{\omega(t)}\mu^2(tt')\chi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re s=1+(\log Y)^{-1}} F(s,t',\chi)\frac{Y^s}{s}\mathrm{d}s$$

où

$$\begin{aligned}F(s,t',\chi) &:= \sum_t 2^{\omega(t)}\mu^2(tt')\chi(t)t^{-s}\\ &= \prod_{p\nmid t'}\Big(1+\frac{2}{p^s}\chi(p)\Big) = \prod_{p\mid t'}\Big(1+\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-2} L^2(s,\chi)\tilde{F}(s,t',\chi)\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{F}(s,t',\chi) := \prod_{p\nmid t'}\Big(1+\frac{2}{p^s}\chi(p)\Big)\Big(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^2$$

qui est holomorphe pour $\Re s > 1/2$ car χ n'est pas principal ; ici $L(s,\chi)$ est la fonction L de Dirichlet associée au caractère χ. On pose pour $T \geq 2$

$$J(Y,T,t',\chi) := \frac{1}{2i\pi}\int_{1+(\log Y)^{-1}-iT}^{1+(\log Y)^{-1}+iT} F(s,t',\chi)\frac{Y^s}{s}\mathrm{d}s.$$

On rappelle que (cf. [1] p.105) pour $c > 0$, $a > 0$ et $T \geq 1$, on a

$$\Big|\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^s}{s}\mathrm{d}s - \frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a^s}{s}\mathrm{d}s\Big| < \begin{cases} a^c\min(1, T^{-1}|\log a|^{-1}) \text{ si } a \neq 1 \\ cT^{-1} \text{ si } a = 1. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\Big|\sum_{t\leq Y} 2^{\omega(t)}\mu^2(tt')\chi(t) - J(Y,T,t',\chi)\Big|$$

$$\ll Y\sum_{t\neq Y}\frac{2^{\omega(t)}\mu^2(t)}{t^{1+(\log Y)^{-1}}}\min(1, T^{-1}|\log(Y/t)|^{-1}). \tag{56}$$

Pour $t \leq \frac{3}{4}Y$ ou $t \geq \frac{5}{4}Y$, $|\log(Y/t)|^{-1} = \mathrm{O}(1)$, et ainsi, la contribution de ces termes à (56) est

$$\ll Y(\log Y)^2T^{-1}, \tag{57}$$

car si $Z \geq Y$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned}\sum_{t\leq Z}^{\sharp}\frac{2^{\omega(t)}}{t^{1+(\log Y)^{-1}}} &= \Big(\sum_{t\leq Z}^{\sharp}\frac{2^{\omega(t)}}{t}\Big)Z^{-(\log Y)^{-1}} \\ &\quad - (\log Y)^{-1}\int_1^Z\Big(\sum_{t\leq u}\frac{2^{\omega(t)}\mu^2(t)}{t}\Big)\frac{\mathrm{d}u}{u^{1+(\log Y)^{-1}}} \\ &\ll (\log Z)^2Z^{-(\log Y)^{-1}} + (\log Y)^{-1}\int_1^Z\frac{(\log u)^2}{u^{1+(\log Y)^{-1}}}\mathrm{d}u \\ &\ll (\log Y)^2 + (\log Z)^2Z^{-(\log Y)^{-1}}\end{aligned}$$

d'où (57) en faisant tendre Z vers $+\infty$.

Pour $\frac{3}{4}Y < t < \frac{5}{4}Y$, on a

$$\sum_{\frac{3}{4}Y<t<\frac{5}{4}Y}^{\sharp}\frac{2^{\omega(t)}}{t^{1+(\log Y)^{-1}}}\min(1, T^{-1}|\log Y/t|^{-1}) \tag{58}$$

$$\ll \frac{1}{Y}\sum_{\frac{3}{4}Y<t<\frac{5}{4}Y}^{\sharp} 2^{\omega(t)}T^{-1}|\log Y/t|^{-1},$$

car on peut supposer Y de la forme $Y = [Y] + \frac{1}{2}$.

Pour $t > Y$, $\log(t/Y)$ a pour valeur respectivement

$$\log\frac{Y+\frac{1}{2}}{Y}, \log\frac{Y+\frac{3}{2}}{Y}, \log\frac{Y+\frac{5}{2}}{Y}, \ldots$$

et puisque $Y < t < \frac{5}{4}Y$, $|\log(Y/t)|^{-1}$ prend pour valeur, à une constante multiplicative $\mathrm{O}(1)$ près :

$$2Y, \frac{2}{3}Y, \frac{2}{5}Y, \ldots,$$

dont la somme vaut $\mathrm{O}(Y\log Y)$.

Par symétrie, on en déduit la majoration

$$(58) \ll (\log Y)T^{-1} \max_{\frac{3}{4}Y<t<\frac{5}{4}Y} 2^{\omega(t)} \ll Y^{\frac{1}{20}}T^{-1}.$$

Finalement, en prenant $T = Y^{\frac{1}{4}}$ et en regroupant (57) et (58), on a

$$(56) \ll Y^{\frac{4}{5}}.$$

D'autre part, on a par le théorème des résidus car on ne rencontre pas de pôle

$$J(Y,T,t',\chi) = \frac{1}{2i\pi}\int_{1+(\log Y)^{-1}+iT}^{3/4+iT} F(s,t',\chi)\frac{Y^s}{s}\mathrm{d}s \tag{59}$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_{3/4+iT}^{3/4-iT} F(s,t',\chi)\frac{Y^s}{s}\mathrm{d}s \tag{60}$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_{3/4-iT}^{1+(\log Y)^{-1}-iT} F(s,t',\chi)\frac{Y^s}{s}\mathrm{d}s \tag{61}$$

car $F(s,t',\chi)$ est holomorphe pour $\Re s > 1/2$.

On sait (cf. [9] p. 268) que si χ est non principal mod d, alors pour $0 \le \Re s \le 1$ on a l'inégalité suivante pour tout $\epsilon > 0$

$$L(s,\chi) \ll_\epsilon (\max(2,|\Im s|)d)^{1-\sigma+\epsilon}.$$

D'autre part, on sait que pour $\Re s \ge 1$ (cf. [9] p.259),

$$L(s,\chi) \ll \log(1+d+|\Im s|).$$

Finalement, pour $\frac{3}{4} \le \Re s \le \frac{5}{4}$, on a la majoration (en prenant par exemple $\epsilon = \frac{1}{4}$)

$$L(s,\chi) \ll (\max(2,|\Im s|)d)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, pour $\frac{3}{4} \le \Re s \le \frac{5}{4}$, on a

$$\Big|\prod_{p|t'}\Big(1+\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-2}\Big| \le \prod_{p|t'}\Big(1+\frac{3}{p^{\frac{3}{4}}}\Big)^2 \le 9^{\omega(t')}$$

car $|\chi(p)| = 1$ et $(1-u)^{-1} \le 1+3u$ pour $0 \le u \le \frac{4}{3}$.

Donc, on a les majorations

$$(59), (61) \ll 9^{\omega(t')} Y (Td)^{\frac{1}{2}} T^{-1} \ll 9^{\omega(t')} Y^{\frac{8}{9}}$$

car $d \leq (\log Y)^{2A}$ et

$$(60) \ll 9^{\omega(t')} Y^{\frac{3}{4}} (Td)^{\frac{1}{2}} (\log T) \ll 9^{\omega(t')} Y^{\frac{8}{9}},$$

ce qui entraîne

$$J(Y, T, t', \chi) \ll 9^{\omega(t')} Y^{\frac{8}{9}}.$$

On en déduit la majoration voulue :

$$\sum_{t \leq Y} 2^{\omega(t)} \mu^2(tt') \chi(t) \ll 9^{\omega(t')} Y^{\frac{8}{9}}. \tag{62}$$

□

Revenons à la preuve de la proposition 7.3. En utilisant le lemme 7.4, et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{N < t \leq 2N} 2^{\omega(t)} \mu^2(tt') \chi(t) t^{-1+ix} (\log t)^k \\ &\ll \Big| \sum_{N < t \leq 2N} 2^{\omega(t)} \mu^2(tt') \chi(t) \Big| \frac{(\log X)^k}{N} \qquad (63) \\ &\quad + (1 + |x|)(\log X)^k \int_N^{2N} \Big| \sum_{N < n \leq u} 2^{\omega(t)} \mu^2(tt') \chi(t) \Big| \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &\ll (1 + |x|) 9^{\omega(t')} (\log X)^k N^{-\frac{1}{9}}. \qquad (64) \end{aligned}$$

On transforme maintenant la somme suivante en utilisant la définition de $\tilde{f}_z$ et en intervertissant les sommes :

$$\begin{aligned} &\sideset{}{^\sharp}\sum_{N < t \leq 2N} 2^{\omega(t)} \chi(t) t^{-1+ix} (\log t)^k \tilde{f}_z(t, w) \tilde{f}_z(t, w) \\ &= \sideset{}{^\sharp}\sum_{N < t \leq 2N} 2^{\omega(t)} \chi(t) t^{-1+ix} (\log t)^k \\ &\quad \times \sum_{\substack{m \mid t \\ m \leq 2z}} \frac{\mu(m)}{m^{\frac{1}{\log z} + iw}} \tilde{\nu}(m, 1) \tilde{\nu}(m, 1 + \frac{1}{\log z} + iw)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{\substack{m' \mid t \\ m' \leq 2z}} \frac{\mu(m')}{m'^{\frac{1}{\log z} + iw'}} \tilde{\nu}(m', 1) \tilde{\nu}(m', 1 + \frac{1}{\log z} + iw')^{-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m\le 2z} \frac{\mu(m)}{m^{\frac{1}{\log z}+iw}} \tilde{\nu}(m,1)\tilde{\nu}(m,1+\frac{1}{\log z}+iw)^{-1}$$
$$\times \sum_{m'\le 2z} \frac{\mu(m')}{m'^{\frac{1}{\log z}+iw'}} \tilde{\nu}(m',1)\tilde{\nu}(m',1+\frac{1}{\log z}+iw')^{-1}$$
$$\times \sideset{}{^\sharp}\sum_{\substack{N<t\le 2N\\ t\equiv 0 \bmod [m,m']}} 2^{\omega(t)}\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^k.$$

On fait le changement de variable $t \mapsto t[m,m']$ d'où

$$\sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\le 2N} 2^{\omega(t)}\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w)$$
$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} \sum_{m\le 2z} \frac{\mu(m)}{m^{\frac{1}{\log z}+iw}} \tilde{\nu}(m,1)\tilde{\nu}(m,1+\frac{1}{\log z}+iw)^{-1}$$
$$\times \sum_{m'\le 2z} \frac{\mu(m')}{m'^{\frac{1}{\log z}+iw'}} \tilde{\nu}(m',1)\tilde{\nu}(m',1+\frac{1}{\log z}+iw')^{-1}$$
$$\times 2^{\omega([m,m'])}\mu^2([m,m'])\chi([m,m'])[m,m']^{-1+ix}(\log[m,m'])^{k-j}$$
$$\times \sum_{N/[m,m']<t\le 2N/[m,m']} 2^{\omega(t)}\mu^2(t[m,m'])\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^j.$$

Ainsi, en majorant la valeur absolue et par (64), on a

$$\sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\le 2N} 2^{\omega(t)}\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^k \tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w)$$
$$\ll \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} \sideset{}{^\sharp}\sum_{m\le 2z} \left|\tilde{\nu}(m,1)\tilde{\nu}(m,1+\frac{1}{\log z}+iw)^{-1}\right|$$
$$\times \sideset{}{^\sharp}\sum_{m'\le 2z} \left|\tilde{\nu}(m',1)\tilde{\nu}(m',1+\frac{1}{\log z}+iw')^{-1}\right|$$
$$\times 2^{\omega([m,m'])}\mu^2([m,m'])[m,m']^{-1}(\log[m,m'])^{k-j}$$
$$\times \left|\sum_{N/[m,m']<t\le 2N/[m,m']} 2^{\omega(t)}\mu^2(t[m,m'])\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^j\right|$$

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sideset{}{^\sharp}\sum_{m\le 2z} \left|\tilde{\nu}(m,1)\tilde{\nu}(m,1+\frac{1}{\log z}+iw)^{-1}\right| \\
&\quad\times \sideset{}{^\sharp}\sum_{m'\le 2z} \left|\tilde{\nu}(m',1)\tilde{\nu}(m',1+\frac{1}{\log z}+iw')^{-1}\right| \\
&\quad\times 2^{\omega([m,m'])}\mu^2([m,m'])[m,m']^{-1}(\log[m,m'])^{k-j} \\
&\quad\times (1+|x|)9^{\omega([m,m']}(\log(X/[m,m'])^{j}(N/[m,m'])^{-\frac{1}{9}} \\
&\ll_k (\log X)^k(1+|x|)(N/z^2)^{-\frac{1}{9}} \\
&\quad\times \sum_{m\le 2z}\mu(m)162^{\omega(m)} \sideset{}{^\sharp}\sum_{m'\le 2z} 162^{\omega(m')}\mu^2([m,m'])[m,m']^{-1}.
\end{aligned}$$

On pose $m''=(m,m')$ et on fait le changement de variable $m'\mapsto \frac{m'}{m''}$ d'où

$$\begin{aligned}
&\sideset{}{^\sharp}\sum_{N<t\le 2N} 2^{\omega(t)}\chi(t)t^{-1+ix}(\log t)^k\tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w) \\
&\ll_k (\log X)^k(1+|x|)(N/z^2)^{-\frac{1}{9}} \\
&\quad\times \sideset{}{^\sharp}\sum_{m\le 2z}\frac{1}{m}162^{\omega(m)}\sum_{m''|m}\sideset{}{^\sharp}\sum_{m'\le 2z}\frac{1}{m'}162^{\omega(m')} \\
&\ll_k (\log X)^{k+162}(1+|x|)(N/z^2)^{-\frac{1}{9}}\sideset{}{^\sharp}\sum_{m\le 2z}\frac{1}{m}324^{\omega(m)} \\
&\ll_k (\log X)^{k+486}(1+|x|)(N/z^2)^{-\frac{1}{9}}.
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{X}\le N\le 2X$, $N/z^2\ge X^{\frac{1}{2}-2\alpha}$ et $0<\alpha<\frac{1}{4}$, on conclut la preuve par (55). □

7.3. Applications du théorème de Barban-Davenport-Halberstam.

— Les propositions 7.5 et 7.6 vont nous permettre de traiter directement les termes d'erreur. On traite d'abord $TE_{1,1}(k)$:

Proposition 7.5. — *Soient $A\ge 0$, $k\in\mathbb{N}$ et $0<\alpha<\frac{1}{4}$ vérifiant (2). Soient aussi $z\ge 1000$ vérifiant (3) avec $X\ge 2$ et $0<\epsilon<\frac{\alpha}{500}$. On a alors l'inégalité*

$$\sum_{d}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d) \tag{65}$$
$$\sum_{\substack{n \bmod d\\(n,d)=1}}\left|\sum_t 2^{\omega(t)}\mu^2(td)g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)\right|$$

$$\ll_{g,A,k,\epsilon,\alpha} X(\log X)^{-A}.$$

Démonstration. — On a par Cauchy-Schwarz l'inégalité

$$\begin{aligned}
(66)\qquad & \sum_{d}\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d) \\
& \qquad \sum_{\substack{n \bmod d\\(n,d)=1}}\Big|\sum_{t} 2^{\omega(t)}\mu^2(td)g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)\Big| \\
& \leq \sum_{d}^{\sharp}\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(d)}(\log d)^k h_1(d)\Big(\sum_{\substack{n \bmod d\\(n,d)=1}} 1\Big)^{\frac12} \\
(67)\qquad & \qquad \times\Big(\sum_{\substack{n \bmod d\\(n,d)=1}}\Big|\sum_{t}^{\sharp} 2^{\omega(t)}g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)\Big|^2\Big)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Or, comme $d \leq 2X^{\frac12-\epsilon}$ et $X \leq td \leq 2X$, on a $\sqrt{X} \leq t \leq 2X$ et

$$\begin{aligned}
& \Big|\sum_{\sqrt{X}\leq t\leq 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)}g\Big(\frac{td}{X}\Big)\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)\Big| \\
& = \frac{X}{2\pi d}\Big|\sum_{\sqrt{X}\leq t\leq 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)}\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)\int_{-\infty}^{+\infty}\hat g(1-ix)\Big(\frac{td}{X}\Big)^{ix}t^{-1}\mathrm{d}x\Big| \\
& \leq \frac{X}{2\pi d}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat g(1-ix)|\Big|\sum_{\sqrt{X}\leq t\leq 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)}\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)t^{ix-1}\Big|\mathrm{d}x \\
& \leq \frac{X}{2\pi d}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat g(1-ix)|\mathrm{d}x\Big)^{\frac12} \\
(68)\qquad & \times\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat g(1-ix)|\Big|\sum_{\sqrt{X}\leq t\leq 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)}\Big(\sum_{m|td}L(m)\Big)g_d(t,n)t^{ix-1}\Big|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac12}
\end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz et par transformée de Mellin inverse car pour $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$g(\theta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re x=1}\hat g(x)\theta^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat g(1-ix)\theta^{ix}\mathrm{d}x.$$

D'autre part, en utilisant (32) et (34) et en transformant les sommes en produits, on a pour $\mu^2(td) = 1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m|td} \lambda_m &= \frac{1}{2i\pi\lambda_1^0} \int_{\Re w = \frac{1}{\log z}} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \sum_{m|td} \frac{\mu(m)}{\tilde{\eta}(m) m^w} \sum_{(m',m)=1}^{\sharp} \frac{1}{m'^{1+w}} \frac{\nu(m')}{\tilde{\eta}(m')} \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2i\pi\lambda_1^0} \int_{\Re w = \frac{1}{\log z}} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \sum_{m|td} \frac{\mu(m)}{\tilde{\eta}(m) m^w} \prod_{p\nmid m} \Big(1 + \frac{\nu(p)}{p^{1+w}\big(1 - \frac{\nu(p)}{p}\big)}\Big) \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2i\pi\lambda_1^0} \int_{\Re w = \frac{1}{\log z}} z^w \frac{2^w - 1}{w^2 \log 2} \prod_{p} \Big(1 + \frac{4}{p^{1+w}}\Big) \prod_{p|td} \Big(1 - \frac{1}{p^w}\big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 + \frac{4}{p^{1+w}}\big)^{-1}\Big) \mathrm{d}w \\
&= \frac{e}{2\pi\lambda_1^0} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{iw} \frac{2^{\frac{1}{\log z} + iw} - 1}{\big(\frac{1}{\log z} + iw\big)^2 \log 2} \prod_{p} \Big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big) f_z(td, w) \mathrm{d}w \\
&= \frac{e}{2\pi\lambda_1^0} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{iw} \frac{2^{\frac{1}{\log z} + iw} - 1}{\big(\frac{1}{\log z} + iw\big)^2 \log 2} \prod_{p} \Big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big) f_z(d, w) f_z(t, w) \mathrm{d}w \\
&= \frac{e}{2\pi\lambda_1^0} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{iw} \frac{2^{\frac{1}{\log z} + iw} - 1}{\big(\frac{1}{\log z} + iw\big)^2 \log 2} \prod_{p} \Big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big) f_z(d, w) \tilde{f}_z(t, w) \mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

car

$$
f_z(t, w) = \sum_{m|t} \frac{\mu(m)}{m^{\frac{1}{\log z} + iw}} \prod_{p|m} \big(1 + \frac{4}{p}\big)\big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\big)^{-1}
$$

et les termes correspondant à $m > 2z$ ont une contribution nulle par définition de h_z (qui apparaît sous la forme du lemme 3.1).

Comme

$$
\sum_{m|td} L(m) = \Big(\sum_{m|td} \lambda_m\Big)^2,
$$

on a par (51) et car $\lambda_1^0 \gg 1$

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{\sqrt{X} \le t \le 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)} \Big(\sum_{m|td} L(m)\Big) g_d(t, n) t^{ix-1} \Big| \\
&\le \Big(\frac{e}{2\pi\lambda_1^0}\Big)^2 \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{i(w+w')} \frac{2^{\frac{1}{\log z} + iw} - 1}{\big(\frac{1}{\log z} + iw\big)^2 \log 2} \frac{2^{\frac{1}{\log z} + iw'} - 1}{\big(\frac{1}{\log z} + iw'\big)^2 \log 2} \\
&\quad \times \prod_{p} \Big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw}}\Big) \Big(1 + \frac{4}{p^{1 + \frac{1}{\log z} + iw'}}\Big) \\
&\quad \times \sum_{\sqrt{X} \le t \le 2X} 2^{\omega(t)} \mu^2(t) g_d(t, n) t^{ix-1} f_z(d, w) f_z(d, w') \tilde{f}_z(t, w) \tilde{f}_z(t, w') \mathrm{d}w \mathrm{d}w' \Big|
\end{aligned}
$$

$$\ll 100^{\omega(d)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w'^2}\prod_p\left(1+\frac{4}{p^{1+\frac{1}{\log z}}}\right)^2$$

$$\times \Big| \sum_{\sqrt{X}\le t\le 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)} g_d(t,n) t^{ix-1}\tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')\Big| \mathrm{d}w\mathrm{d}w'. \tag{69}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz à l'intégrale double, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w'^2}$$

$$\times \Big| \sum_{\sqrt{X}\le t\le 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)} g_d(t,n) t^{ix-1}\tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')\Big| \mathrm{d}w\mathrm{d}w'$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2}\mathrm{d}w\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w'^2}\right.$$

$$\left.\times \Big| \sum_{\sqrt{X}\le t\le 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)} g_d(t,n) t^{ix-1}\tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')\Big|^2 \mathrm{d}w\mathrm{d}w'\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{70}$$

On a finalement la majoration suivante, en utilisant Cauchy-Schwarz, (67), (68), (69) et (70) :

$$(66) \ll_g X(\log X)^{k+8} \sum_{d\le 2X^{\frac{1}{2}-\epsilon}} 300^{\omega(d)}\mu^2(d) d^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(1-ix)| \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w'^2}\right.$$

$$\left.\times \sum_{\substack{n \bmod d\\(n,d)=1}} \Big| \sum_{\sqrt{X}\le t\le 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)} g_d(t,n) t^{ix-1}\tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')\Big|^2 \mathrm{d}w\mathrm{d}w'\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll_g X(\log X)^{k+8}\left(\sum_{d\le\sqrt{X}} 90000^{\omega(d)}\mu^2(d) d^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(1-ix)| \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w'^2}\right.$$

$$\left.\times \sum_{d\le 2X^{\frac{1}{2}-\epsilon}}\sum_{\substack{n \bmod d\\(n,d)=1}} \Big| \sum_{\sqrt{X}\le t\le 2X}^{\sharp} 2^{\omega(t)} g_d(t,n) t^{ix-1}\tilde{f}_z(t,w)\tilde{f}_z(t,w')\Big|^2 \mathrm{d}w\mathrm{d}w'\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On divise l'intervalle $[\sqrt{X}, 2X]$ en intervalles dyadiques. Pour $[N, 2N]$ avec $\sqrt{X} \leq N \leq X$, on a en appliquant le théorème 7.1 (grâce à la proposition 7.3 avec $k = 0$) avec $A = 2a + 110022$,

$$\sum_{d \leq 2X^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \sum_{\substack{n \bmod d \\ (n,d)=1}} \Big| \sum_{\sqrt{N} \leq t \leq 2N}^{\sharp} 2^{\omega(t)} g_d(t,n) t^{ix-1} \tilde{f}_z(t,w) \tilde{f}_z(t,w') \Big|^2$$
$$\leq c'_A(1 + c_{9A+18}(\alpha))(1 + x^2)(\log X)^{20000}(\log X)^{-A}$$
$$\leq c'_A(1 + c_{9A+18}(\alpha))(1 + x^2)(\log X)^{-90022-2a}.$$

Comme il y a $\mathrm{O}(\log X)$ intervalles de cette forme, on a finalement

$$\begin{aligned}(66) \ll_{g,a,\alpha} & X(\log X)^{k+45008}(\log X)^{-45011-a}(\log X) \\ & \times \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(1 - ix)|(1 + x^2) \\ & \qquad \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\log z}\right)^2 + w'^2} \mathrm{d}w \mathrm{d}w' \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \\ \ll_{g,a,\alpha} & X(\log X)^k (\log X)^{-a}\end{aligned}$$

car pour tout x réel,

$$\hat{g}(1 - ix) = \int_0^{+\infty} g(t) t^{-ix} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(e^u) e^u e^{-ixu} du$$

d'où $x \mapsto |\hat{g}(1 - ix)|(1 + x^2)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, car $(g \times Id) \circ \exp$ est à support compact donc dans l'espace $S(\mathbb{R})$ de Schwarz qui est stable par multiplication par un polynôme et par la transformée de Fourier. Pour conclure, il suffit de prendre $a = A + k$. □

On traite ensuite $TE_{3,1}(k)$:

Proposition 7.6. — *Soient $A \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ vérifiant (2). Soient aussi $z \geq 1000$, y vérifiant (3) avec $X \geq 2$ et $0 < \epsilon < \frac{\alpha}{500}$. On a alors l'inégalité*

(71)
$$\sum_n \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\omega(n)} \sum_{\substack{d \bmod n \\ (d,n)=1}} \Big| \sum_t 2^{\omega(t)} \mu^2(tn)(\log t)^k h_3(t) h^y\left(\frac{2X}{t}\right) g\left(\frac{tn}{X}\right) \Big(\sum_{m|tn} L(m) \Big) g_n(t,d) \Big|$$
$$\ll_{g,A,k,\alpha,\epsilon} X(\log X)^{-A}.$$

Démonstration. — On a

$$h_3(t)h^y\Big(\frac{2X}{t}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \\ \frac{\log X^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{\log 2} - \frac{\log t}{\log 2} & \text{si } X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \leq t \leq 2X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \\ 1 & \text{si } 2X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \leq t \leq \frac{X}{y} \\ \frac{\log(\frac{2X}{y})}{\log 2} - \frac{\log t}{\log 2} & \text{si } \frac{X}{y} \leq t \leq \frac{2X}{y} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{2X}{y}. \end{cases}$$

Donc

$$\sum_n \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(n)} \sum_{\substack{d \bmod n \\ (d,n)=1}} \Big| \sum_t 2^{\omega(t)}\mu^2(tn)(\log t)^k h_3(t)h^y\Big(\frac{2X}{t}\Big) g\Big(\frac{tn}{X}\Big)\Big(\sum_{m|tn} L(m)\Big) g_n(t,d)\Big|$$

$$\leq \sum_{n \leq X^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{\omega(n)} \sum_{\substack{d \bmod n \\ (d,n)=1}}$$

$$\Big[\frac{\log X^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{\log 2}\Big| \sum_{X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \leq t \leq 2X^{\frac{1}{2}+\epsilon}} 2^{\omega(t)}\mu^2(tn)(\log t)^k g\Big(\frac{tn}{X}\Big)\Big(\sum_{m|tn} L(m)\Big) g_n(t,d)\Big|$$

$$+ \frac{1}{\log 2}\Big| \sum_{X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \leq t \leq 2X^{\frac{1}{2}+\epsilon}} 2^{\omega(t)}\mu^2(tn)(\log t)^{k+1} g\Big(\frac{tn}{X}\Big)\Big(\sum_{m|tn} L(m)\Big) g_n(t,d)\Big|$$

$$+ \Big| \sum_{2X^{\frac{1}{2}+\epsilon} \leq t \leq \frac{X}{y}} 2^{\omega(t)}\mu^2(tn)(\log t)^k g\Big(\frac{tn}{X}\Big)\Big(\sum_{m|tn} L(m)\Big) g_n(t,d)\Big|$$

$$+ \frac{\log\big(\frac{2X}{y}\big)}{\log 2}\Big| \sum_{\frac{X}{y} \leq t \leq \frac{2X}{y}} 2^{\omega(t)}\mu^2(tn)(\log t)^k g\Big(\frac{tn}{X}\Big)\Big(\sum_{m|tn} L(m)\Big) g_n(t,d)\Big|$$

$$+ \frac{1}{\log 2}\Big| \sum_{\frac{X}{y} \leq t \leq \frac{2X}{y}} 2^{\omega(t)}\mu^2(tn)(\log t)^{k+1} g\Big(\frac{tn}{X}\Big)\Big(\sum_{m|tn} L(m)\Big) g_n(t,d)\Big|\Big].$$

La preuve est maintenant similaire à celle de la proposition 7.5, morceau par morceau, en appliquant la proposition 7.3 avec $k > 0$. On a, en quelque sorte, échangé les rôles de t et n, la variable la plus petite étant maintenant n. □

7.4. Fin de la démonstration du théorème 1.7. — En utilisant le fait que $|C(n,d)|\mu^2(d) \leq 1$ et en appliquant la proposition 7.5 à (18), on obtient

$$\mathrm{TE}_{1,1}(k) = O_g(X(\log X)^{k-2}).$$

De même, (31) et la proposition 7.6 donnent

$$\mathrm{TE}_{3,1}(k) = O_g(X(\log X)^{k-2}).$$

Cela entraîne, par les lemmes 6.1 et 6.3,

$$\Sigma_{2,1}(k) \leq \frac{8}{3\pi}\frac{X(4!)^2}{\log^8 z}\hat{g}(1)P_1(\log X, \log X^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \log z) + O_g(X(\log X)^{k-2})$$

et

$$\Sigma_{2,3}(k) \leq \frac{X(4!)^2}{\log^8 z}\hat{g}(1)(P_3(\log X, \log\Big(\frac{2X}{y}\Big), \log z) - P_3(\log X, \log X^{\frac{1}{2}+\epsilon}, \log z)) + O_g(X(\log X)^{k-2}).$$

Par ailleurs, le lemme 6.2 donne

$$\Sigma_{2,2}(k) \ll_g \epsilon X(\log X)^{k-1}.$$

D'où, en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient

$$|\Sigma_2(k)| \leq \frac{X}{\log^8 z}\hat{g}(1)(1+\mathrm{o}(1)) \times P(\log X, \log\Big(\frac{2X}{y}\Big), \log z) + O_g(X(\log X)^{k-2}) \tag{72}$$

où l'on a posé

$$P(X_1, X_2, X_3) := (4!)^2(\frac{8}{3\pi}P_1(X_1, \frac{1}{2}X_1, X_3) + P_3(X_1, X_2, X_3) - P_3(X_1, \frac{1}{2}X_1, X_3)).$$

En utilisant la proposition 3.2, cela conclut la preuve du théorème. □

8. Équirépartition des angles de certaines sommes d'exponentielles

Dans cette partie, on énonce des propriétés d'équirépartition qui découlent de résultats de géométrie algébrique, et nous permettent (§ 9) d'obtenir une minoration menant à la preuve du théorème 1.4.

8.1. Définitions. — On définit pour $Y = \exp(\sqrt{\log X})$, avec $X \geq 2$ et $u, \delta > 0$, les ensembles suivants (dont certains ne dépendent pas de δ) :

$$\mathfrak{P}_{3,0}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3 \leq 2X \mid X^{\frac{1}{u}} < p_3 < p_2 < p_2Y < p_1, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2\}$$

$$\mathfrak{P}_{3,1}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_3 < X^{\frac{1}{u}} < p_2 < p_2Y < p_1, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2\}$$

$$\mathfrak{P}_{4,0}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4 \leq 2X \mid X^{\frac{1}{u}} < p_4 < p_3 < p_3Y < p_2 < p_2Y < p_1, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3\}$$

$$\mathfrak{P}_{4,1}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_4 < X^{\frac{1}{u}} < p_3 < p_3Y < p_2 < p_2Y < p_1, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3\}$$

$$\mathfrak{P}_{4,2}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_4 < p_3 < \frac{X^{\frac{1}{u}}}{p_4} < X^{\frac{1}{u}} < p_2 < p_2Y < p_1,$$
$$p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3\}$$
$$\mathfrak{P}_{4,3}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_4 < p_3 < p_3Y < X^{\frac{1}{u}} < p_2 < p_2Y < p_1,$$
$$p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3, X^{\frac{1}{u}} < p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,0}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\frac{1}{u}} < p_5 < p_4 < p_3 < p_2 < p_2Y < p_1,$$
$$(p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,1}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < X^{\frac{1}{u}} < p_4 < p_3 < p_2 < p_2Y < p_1,$$
$$(p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,2}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < \frac{X^{\frac{1}{u}}}{p_5} < X^{\frac{1}{u}} < p_3 < p_2$$
$$< p_2Y < p_1, (p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,3}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < X^{\frac{1}{u}} < p_3 < p_2 < p_2Y < p_1,$$
$$(p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4, X^{\frac{1}{u}} < p_4p_5\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,4}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < p_3 < \frac{X^{\frac{1}{u}}}{p_4p_5} < X^{\frac{1}{u}} < p_2$$
$$< p_2Y < p_1, (p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,5}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < p_3 < \frac{X^{\frac{1}{u}}}{p_4} < X^{\frac{1}{u}} < p_2$$
$$< p_2Y < p_1, (p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4, X^{\frac{1}{u}} < p_3p_4p_5\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,6}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < p_3 < \frac{X^{\frac{1}{u}}}{p_5} < X^{\frac{1}{u}} < p_2$$
$$< p_2Y < p_1, (p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4, X^{\frac{1}{u}} < p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,7}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < \frac{X^{\frac{1}{u}}}{p_5} < p_3 < X^{\frac{1}{u}} < p_2$$
$$< p_2Y < p_1, (p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4\}$$
$$\mathfrak{P}_{5,8}(X,u,\delta) := \{p_1p_2p_3p_4p_5 \leq 2X \mid X^{\delta} < p_5 < p_4 < p_3 < X^{\frac{1}{u}} < p_2 < p_2Y < p_1,$$
$$(p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4, X^{\frac{1}{u}} < p_4p_5\}.$$

8.2. Propriétés d'équirépartition. — On travaille maintenant sur $[-1,1]$ muni de la mesure $\mu^{(1)}$, image directe de la mesure μ_{ST} par l'application

$$\begin{aligned}[0,\pi] &\to [-1,1]\\ \theta &\mapsto \cos\theta\end{aligned}$$

et ainsi $\mathrm{d}\mu^{(1)} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. On note, plus généralement, pour tout entier $w \geq 1$, $\mu^{(w)}$ la mesure sur $[-1,1]$, image de la mesure $\mu^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mu^{(1)}$ sur $[-1,1]^w$ par l'application

$$\begin{aligned}[-1,1]^w &\to [-1,1]\\ (x_1,\ldots,x_w) &\mapsto x_1 \times \cdots \times x_w.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a les formules pour $0 \leq x \leq 1$

$$\mu^{(1)}([-x,x]) = \frac{4}{\pi}\int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

et

$$\mu^{(w+1)}([-x,x]) = \mu^{(w)}([-x,x]) + \frac{4}{\pi}\int_x^1 \mu^{(w)}([-x/t,x/t])\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

Les notations introduites au § 8.1 nous permettent d'énoncer les résultats suivants, qui figurent dans [4] (propositions 6.2, 6.3 et 6.4) et dont les preuves utilisent des résultats de géométrie algébrique liés au $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau de Kloosterman :

Proposition 8.1. — *Si u et δ sont des réels tels que $u > 3$ et $0 < \delta < \frac{1}{u}$, alors pour X tendant vers l'infini, chacun des ensembles*

$$\{C(p_1,p_2p_3) \mid p_1p_2p_3 \in \mathfrak{P}_{3,i}(X,u,\delta)\}$$

et

$$\{C(p_2p_3,p_1) \mid p_1p_2p_3 \in \mathfrak{P}_{3,i}(X,u,\delta)\}$$

est équiréparti sur $[-1,1]$, respectivement pour les mesures $\mu^{(2)}$ et $\mu^{(1)}$ et pour $i = 0,1$.

Proposition 8.2. — *Si u et δ sont des réels tels que $u > 4$ et $0 < \delta < \frac{1}{2u}$, alors pour X tendant vers l'infini, chacun des ensembles*

$$\{C(p_1,p_2p_3p_4) \mid p_1p_2p_3p_4 \in \mathfrak{P}_{4,i}(X,u,\delta)\}$$

et

$$\{C(p_2p_3p_4,p_1) \mid p_1p_2p_3p_4 \in \mathfrak{P}_{4,i}(X,u,\delta)\}$$

est équiréparti sur $[-1,1]$, respectivement pour les mesures $\mu^{(3)}$ et $\mu^{(1)}$ et pour $i = 0,\ldots,3$.

PROPOSITION 8.3. — *Si u et δ sont des réels tels que $u > 6$ et $0 < \delta < \frac{1}{3u}$, alors pour X tendant vers l'infini, chacun des ensembles*

$$\{C(p_1, p_2p_3p_4p_5) \mid p_1p_2p_3p_4p_5 \in \mathfrak{P}_{5,i}(X,u,\delta)\}$$

et

$$\{C(p_2p_3p_4p_5, p_1) \mid p_1p_2p_3p_4p_5 \in \mathfrak{P}_{5,i}(X,u,\delta)\}$$

est équiréparti sur $[-1,1]$, respectivement pour les mesures $\mu^{(4)}$ et $\mu^{(1)}$ et pour $i = 0,\dots,8$.

9. Minoration de $\sum_n^\sharp \left|g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)\mathrm{Kl}^*(1,1,n)\left(\sum_{d|n}\lambda_d\right)^2\right|$

Le résultat principal de cette partie est le suivant :

PROPOSITION 9.1. — *Sous les hypothèses (2) et (3), pour la suite $(\lambda_d)_{d\geq 1}$ construite au paragraphe 4 et pour $0 < \delta < \alpha$, il existe $c(\alpha,\delta,k) > 0$ effectivement calculable tel que l'on ait*

$$\sum_n^\sharp \left|g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)\mathrm{Kl}^*(1,1,n)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\right| \geq c(\alpha,\delta,k)(1-\mathrm{o}(1))\hat{g}(1)X(\log X)^{k-1}.$$

REMARQUE. — *La preuve ci-dessous donne une expression explicite de $c(\alpha,\delta,k)$.*

Démonstration. — On pose $u = \frac{1}{\alpha}$. On a par multiplicativité croisée

$$\begin{aligned}
&\sum_n^\sharp g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)|\mathrm{Kl}^*(1,1,n)|\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\\
&\quad\geq \sum_{i=3}^5\sum_j 2^i \sum_{n\in\mathfrak{P}_{i,j}(X,u,\delta)} g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)|C(1,n)|\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\\
&\quad\geq \sum_{i=3}^5\sum_j 2^i x_i y_i \sum_{n\in\mathfrak{Q}_{i,j}(X,u,\delta)} g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2
\end{aligned}$$

pour tous réels positifs x_3, x_4, x_5, y_3, y_4 et y_5, avec

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_{3,j}(X,u,\delta) &:= \{p_1p_2p_3 \in \mathfrak{P}_{3,j}(X,u,\delta) \,|\, |C(p_1,p_2p_3)| \geq x_3 \\
&\qquad \text{et } |C(p_2p_3,p_1)| \geq y_3\},\\
\mathfrak{Q}_{4,j}(X,u,\delta) &:= \{p_1p_2p_3p_4 \in \mathfrak{P}_{4,j}(X,u,\delta) \,|\, |C(p_1,p_2p_3p_4)| \geq x_4 \\
&\qquad \text{et } |C(p_2p_3p_4,p_1)| \geq y_4\},\\
\mathfrak{Q}_{5,j}(X,u,\delta) &:= \{p_1\dots p_5 \in \mathfrak{P}_{5,j}(X,u,\delta) \,|\, |C(p_1,p_2p_3p_4p_5)| \geq x_5 \\
&\qquad \text{et } |C(p_2p_3p_4p_5,p_1)| \geq y_5\}.
\end{aligned}$$

On minore $(\sum_{d|n}\lambda_d)^2$ grâce au lemme 4.3, ce qui fait apparaître des facteurs que nous allons noter l_i. De même, en développant $\Lambda_k(n)$ des facteurs apparaissent ; nous allons les noter l'_i.

Ainsi, en utilisant le théorème des nombres premiers, les propositions 8.1, 8.2 et 8.3, et les remarques ci-dessus, on a les minorations suivantes quand $X \to \infty$, pour tous (i,j) :

$$\sum_{n\in\mathfrak{Q}_{i,j}(X,u,\delta)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Lambda_k(n)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2$$
$$\geq (1-o(1))\hat{g}(1)(1-\mu^{(1)}([-x_i,x_i])-\mu^{(i-1)}([-y_i,y_i]))A_{i,j}(u,\delta,k)X(\log X)^{k-1}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{3,0}(u,\delta,k) &:= \int_{1/u}^{1/3}\int_{\max(x,\frac{1-x}{3})}^{\frac{1-x}{2}} \frac{l_3(x,y,k)}{xy(1-x-y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
A_{3,1}(u,\delta,k) &:= \int_{\delta}^{1/u}\int_{\frac{1-x}{3}}^{\frac{1-x}{2}} \frac{l_3(x,y,k)l'_1(x,u)}{xy(1-x-y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
A_{4,0}(u,\delta,k) &:= \int_{1/u}^{1/4}\int_{x}^{\frac{1-x}{3}}\int_{\max(y,\frac{1-x}{3}-y)}^{\frac{1-x-y}{2}} \frac{l_4(x,y,z,k)}{xyz(1-x-y-z)}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
A_{4,1}(u,\delta,k) &:= \int_{\delta}^{1/u}\int_{1/u}^{\frac{1-x}{3}}\int_{\max(y,\frac{1-x}{3}-y)}^{\frac{1-x-y}{2}} \frac{l_4(x,y,z,k)l'_1(x,u)}{xyz(1-x-y-z)}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
A_{4,2}(u,\delta,k) &:= \int_{\delta}^{1/2u}\int_{x}^{1/u-x}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y)}^{\frac{1-x-y}{2}} \frac{l_4(x,y,z,k)l'_2(x,y,u)}{xyz(1-x-y-z)}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$A_{4,3}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/u}\int_{\max(x,1/u-x)}^{1/u}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y)}^{\frac{1-x-y}{2}} \frac{l_4(x,y,z,k)l_3'(x,y,u)}{xyz(1-x-y-z)}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,0}(u,\delta,k) := \int_{1/u}^{1/6}\int_{x}^{\frac{1-2x}{4}}\int_{y}^{\min(\frac{1-x-y}{3},1/2-x-y)}\int_{\max(z,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,1}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/u}\int_{1/u}^{\frac{1-2x}{4}}\int_{y}^{\min(\frac{1-x-y}{3},1/2-x-y)}\int_{\max(z,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l_1'(x,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,2}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/2u}\int_{x}^{1/u-x}\int_{1/u}^{\min(\frac{1-x-y}{3},1/2-x-y)}\int_{\max(z,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l_2'(x,y,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,3}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/u}\int_{\max(x,1/u-x)}^{1/u}\int_{1/u}^{\min(\frac{1-x-y}{3},1/2-x-y)}\int_{\max(z,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l_3'(x,y,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,4}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/3u}\int_{x}^{\frac{1/u-x}{2}}\int_{y}^{1/u-x-y}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l_4'(x,y,z,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,5}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/2u}\int_{x}^{1/2u}\int_{\max(y,1/u-x-y)}^{1/u-y}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l_5'(x,y,z,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,6}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/2u}\int_{x}^{1/u-x}\int_{\max(y,1/u-x-y)}^{1/u-x}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l_6'(x,y,z,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,7}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/2u}\int_{x}^{1/u-x}\int_{1/u-x}^{1/u}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}}$$

$$\frac{l_5(x,y,z,t,k)l'_7(x,y,z,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$A_{5,8}(u,\delta,k) := \int_{\delta}^{1/u}\int_{max(x,1/u-x)}^{1/u}\int_{y}^{1/u}\int_{\max(1/u,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{l_5(x,y,z,t,k)l'_8(x,y,z,u)}{xyzt(1-x-y-z-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
l_3(x,y,k) &:= 1+x^k+y^k+(1-x-y)^k-(x+y)^k-(1-x)^k-(1-y)^k \\
l_4(x,y,z,k) &:= 1-x^k-y^k-z^k-(1-x-y-z)^k \\
&\quad +(x+y)^k+(x+z)^k+(y+z)^k \\
&\quad +(1-x-y)^k+(1-x-z)^k+(1-y-z)^k \\
&\quad -(x+y+z)^k-(1-x)^k-(1-y)^k-(1-z)^k \\
l_5(x,y,z,t,k) &:= 1+x^k+y^k+z^k+t^k+(1-x-y-z-t)^k \\
&\quad -(x+y)^k-(x+z)^k-(x+t)^k-(y+z)^k-(y+t)^k-(z+t)^k \\
&\quad -(1-x-y-z)^k-(1-x-y-t)^k \\
&\quad -(1-x-z-t)^k-(1-y-z-t)^k \\
&\quad +(x+y+z)^k+(x+y+t)^k+(x+z+t)^k+(y+z+t)^k \\
&\quad +(1-x-y)^k+(1-x-z)^k+(1-x-t)^k \\
&\quad +(1-y-z)^k+(1-y-t)^k \\
&\quad +(1-z-t)^k-(x+y+z+t)^k \\
&\quad -(1-x)^k-(1-y)^k-(1-z)^k-(1-t)^k
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
l'_1(x,u) &:= (1-(1-xu)^4)^2 \\
l'_2(x,y,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4+(1-xu-yu)^4)^2 \\
l'_3(x,y,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4)^2 \\
l'_4(x,y,z,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4-(1-zu)^4+(1-xu-yu)^4 \\
&\quad +(1-xu-zu)^4+(1-yu-zu)^4-(1-xu-yu-zu)^4)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l'_5(x,y,z,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4-(1-zu)^4+(1-xu-yu)^4 \\
&\qquad +(1-xu-zu)^4+(1-yu-zu)^4)^2 \\
l'_6(x,y,z,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4-(1-zu)^4+(1-xu-yu)^4 \\
&\qquad +(1-xu-zu)^4)^2 \\
l'_7(x,y,z,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4-(1-zu)^4+(1-xu-yu)^4)^2 \\
l'_8(x,y,z,u) &:= (1-(1-xu)^4-(1-yu)^4-(1-zu)^4)^2.
\end{aligned}$$

On parvient donc à l'inégalité

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Lambda_k(n)\mu^2(n)|\mathrm{Kl}^*(1,1,n)|\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2 \\
\geq c(u,\delta,k)(1-o(1))\hat{g}(1)X(\log X)^{k-1}$$

avec

$$c(u,\delta,k) := \sum_{i=3}^{5} 2^i\Xi^{(i)}(x_i,y_i)\sum_j A_{i,j}(u,\delta,k)$$

où

$$\Xi^{(i)}(x,y) := xy(1-\mu^{(1)}([-x,x])-\mu^{(i-1)}([-y,y]))$$

pour x_3, x_4, x_5, y_3, y_4 et y_5 réels compris entre 0 et 1.

Par calcul numérique, à l'aide du logiciel Pari, on trouve les valeurs optimales de x_i et y_i et on obtient

$$\Xi^{(3)}(0.222, 0.102) \geq 0.006284,$$

$$\Xi^{(4)}(0.192, 0.041) \geq 0.001879,$$

$$\Xi^{(5)}(0.140, 0.023) \geq 0.000572,$$

ce qui termine la preuve (effective) de la proposition. □

10. Preuve du théorème 1.4

Dans cette partie, on choisit des valeurs pour les paramètres ce qui permet de démontrer le théorème 1.4. Après de nombreux essais, il semble que ce choix de paramètres soit essentiellement optimal. En particulier, pour remplacer 18 dans le théorème 1.4 par un entier inférieur, une nouvelle idée semble nécessaire.

10.1. Minoration effective. — Pour $k=18$, en prenant $\delta=0.0001$ et $u=21.7$, on trouve (à l'aide du logiciel Pari [1])

$$A_{3,0}(u,\delta,k)\geq 1.279863$$

$$A_{3,1}(u,\delta,k)\geq 0.333414$$

$$A_{4,0}(u,\delta,k)\geq 1.399807$$

$$A_{4,1}(u,\delta,k)\geq 0.875769$$

$$A_{4,2}(u,\delta,k)\geq 0.021511$$

$$A_{4,3}(u,\delta,k)\geq 0.067381$$

$$A_{5,0}(u,\delta,k)\geq 0.506009$$

$$A_{5,1}(u,\delta,k)\geq 0.684032$$

$$A_{5,2}(u,\delta,k)\geq 0.052619$$

$$A_{5,3}(u,\delta,k)\geq 0.158098$$

$$A_{5,4}(u,\delta,k)\geq 0.000189$$

$$A_{5,5}(u,\delta,k)\geq 0.000720$$

$$A_{5,6}(u,\delta,k)\geq 0.001602$$

$$A_{5,7}(u,\delta,k)\geq 0.004021$$

$$A_{5,8}(u,\delta,k)\geq 0.008150.$$

Finalement, la proposition 9.1 donne donc la minoration suivante (pour $\alpha=\frac{1}{u}$)

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Lambda_k(n)\mu^2(n)|\mathrm{Kl}^*(1,1,n)|\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\geq 0.178\hat{g}(1)X(\log X)^{k-1}.$$

[1] Le programme utilisé est disponible sur `http://www.math.u-psud.fr/~sivak/c_udk.rtf`.

10.2. Calcul effectif du polynôme P intervenant dans le théorème 1.7 et fin de la preuve. — On prend $\alpha = 1/u = 1/21.7$, $\beta = \frac{1}{2} - 2\alpha \simeq 0.408$, $\eta = \frac{1}{6}$ et $k \geq 18$. En majorant trivialement (15), on obtient

$$\Sigma_2(k) \leq \left(\log\left(\frac{2X}{y}\right)\right)^{k-18} \Sigma_2(18).$$

Or (72) appliqué avec $k = 18$ fournit alors un polynôme P (homogène de degré 25) tel que

$$\Big|\sum_n^\sharp g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Lambda_k(n)\mathrm{Kl}^*(1,1,n)\Big(\sum_{d|n}\lambda_d\Big)^2\Big| \leq R(\beta)\,(1-\beta)^{k-18}(1+o(1))\hat{g}(1)X\,(\log X)^{k-1}$$

avec $R(\beta) = P(1, 1-\beta, \alpha)\alpha^{-8}$.

Si

$$R(\beta)(1-\beta)^{k-18}(1+o(1)) < c(\alpha,\delta,k)(1-o(1)) \tag{73}$$

alors en comparant avec la minoration de la proposition 9.1, on obtient pour $X \to +\infty$

$$\frac{\left|\sum_n^\sharp g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)\mathrm{Kl}^*(1,1,n)\left(\sum_{d|n}\lambda_d\right)^2\right|}{\sum_n^\sharp \left|g\left(\frac{n}{X}\right)\Lambda_k(n)\mathrm{Kl}^*(1,1,n)\left(\sum_{d|n}\lambda_d\right)^2\right|} < 1$$

d'où le théorème. Nous allons donc maintenant démontrer (73). Comme $c(\alpha,\delta,k)$ est croissante en la troisième variable, il suffit de démontrer qu'on a

$$R(\beta)(1-\beta)^{k-18} < c(u,\delta,18). \tag{74}$$

Or (74) équivaut à

$$k > \frac{\log\frac{c(u,\delta,18)}{R(\beta)}}{\log(1-\beta)} + 18,$$

ce que nous allons maintenant vérifier.

On calcule le polynôme P par un calcul de résidus grâce au logiciel de calcul formel Mathematica 5 [(2)]. On trouve

$$P_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{242272800}(-201894x_2^{20}x_3^5 + 212520x_1x_2^{19}x_3^5 + 141680x_2^{19}x_3^6 - 5x_1x_3^{24} + 3x_3^{25})$$

et

$$P_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{242272800}(201894x_2^{20}x_3^5 + 141680x_2^{19}x_3^6 + 3x_3^{25})$$

d'où

(2) Le programme utilisé est disponible sur http://www.math.u-psud.fr/~sivak/calculresidu.nb.

$$
\begin{aligned}
R(\beta) = \frac{1}{2709775397683200(-1+2\beta)^3\pi}\Big(&(308266663919 + 97848456169390080\pi) \\
&- (148562247040 + 1971575475740344320\pi)\beta \\
&+ (-11400 + 18868708049147658240\pi)\beta^2 \\
&+ (127680 - 114044691297054228480\pi)\beta^3 \\
&+ (-1007760 + 488227820771695656960\pi)\beta^4 \\
&+ (5953536 - 1573650251298914697216\pi)\beta^5 \\
&+ (-27287040 + 3962428690321008230400\pi)\beta^6 \\
&+ (99225600 - 7981463504789459435520\pi)\beta^7 \\
&+ (-290234880 + 13061863147022466416640\pi)\beta^8 \\
&+ (687964160 - 17538464131682748334080\pi)\beta^9 \\
&+ (-1324331008 + 19427221807402428923904\pi)\beta^{10} \\
&+ (2063892480 - 17783757336321667891200\pi)\beta^{11} \\
&+ (-2579865600 + 13429802953980845752320\pi)\beta^{12} \\
&+ (2540175360 - 8321100249674117283840\pi)\beta^{13} \\
&+ (-1905131520 + 4188853186910780129280\pi)\beta^{14} \\
&+ (1016070144 - 1686862499593800646656\pi)\beta^{15} \\
&+ (-317521920 + 530682413882277888000\pi)\beta^{16} \\
&- 125698893327410135040\pi\beta^{17} \\
&+ (49807360 + 21088556054929735680\pi)\beta^{18} \\
&- (20971520 + 2234452268978012160\pi)\beta^{19} \\
&+ (3145728 + 112452826608697344\pi)\beta^{20}\Big).
\end{aligned}
$$

Pour $\beta \simeq 0.408$, on trouve $R(\beta) \simeq 0.145$ donc il suffit d'avoir $k > 17.47$ pour que (74) soit vérifiée. C'est bien le cas puisque $k \geq 18$ et on constate que cette méthode est plus efficace que celle de [4] qui nécessitait de prendre $k \geq 23$. □

Appendice A

Appendice : énoncé technique sur le calcul d'intégrales quintuples

Soit $X \geq 2$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, 4\}$, soient $\gamma_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma_i' \in \mathbb{R}$ et $\gamma_5 = \gamma_5' = 0$. On pose :

$$X_i := X^{\gamma_i} (\log X)^{\gamma_i'}, 1 \leq i \leq 5.$$

Soient $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pour $i \in \{1, \ldots, 5\}$. On pose

$$R(x_1, \ldots, x_5) := x_1^{\alpha_1} \cdots x_5^{\alpha_5}.$$

De même, soient $K, K' \in \mathbb{N}$, $(L_{i,1}, \ldots, L_{i,5}), (L'_{i',1}, \ldots, L'_{i',5}) \in (\{0,1\}^4 - \{0\}) \times \{0, -1\}$ deux à deux distincts et $\beta_i, \beta'_{i'} \in \mathbb{N}^*$ pour $i \in \{1, \ldots, K\}$ et $i' \in \{1, \ldots, K'\}$. On pose

$$Z(x_1, \ldots, x_5) := \frac{\prod_{i=1}^{K} \zeta(1 + L_{i,1}x_1 + \cdots + L_{i,5}x_5)^{\beta_i}}{\prod_{i'=1}^{K'} \zeta(1 + L'_{i',1}x_1 + \cdots + L'_{i',5}x_5)^{\beta'_{i'}}},$$

$$S(x_1, \ldots, x_5) := \frac{\prod_{i=1}^{K'} (L'_{i,1}x_1 + \cdots + L'_{i,5}x_5)^{\beta'_i}}{\prod_{i'=1}^{K} (L_{i',1}x_1 + \cdots + L_{i',5}x_5)^{\beta_{i'}}}.$$

Soient enfin $0 < \delta' < \delta$, G une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de $\mathfrak{B}'(5, -\delta', \delta)$ et non nulle sur $\mathfrak{B}(5, -\delta', \delta)$.

L'énoncé suivant est le théorème 11.1 du chapitre 3 de [7] :

Theorème A.1. — *On suppose que :*

- *On a*

$$\delta' \sum_{i=1}^{K} \beta_i \leq \frac{1}{4}.$$

- *La fonction $m \mapsto D(RS, 5, m)$ est strictement décroissante pour $1 \leq m < 5$, avec pour $0 \leq m < 5$:*

$$D(RS, m) := -\alpha_{m+1} - \cdots - \alpha_5 \\ - \Big(\sum_{\substack{1 \leq i \leq K' \\ (L'_{i,1}, \ldots, L'_{i,m}) = (0, \ldots, 0)}} \beta'_i \Big) + \Big(\sum_{\substack{1 \leq i \leq K \\ (L_{i,1}, \ldots, L_{i,m}) = (0, \ldots, 0)}} \beta_i \Big) - 5 + m.$$

- *La fonction G vérifie la majoration suivante : pour tout $(x_1, \ldots, x_5) \in \mathfrak{B}'(5, -\delta', \delta)$ et pour tout $(a_1, \ldots, a_5) \in \mathbb{N}^5$ tel que $a_1 + \cdots + a_5 \leq \max(0, D(RS, 0))$,*

$$G^{(a_1, \ldots, a_5)}(x_1, \ldots, x_5) \ll \prod_{i=1}^{5} \log(2 + |x_i|)^{A_i} (1 + |x_i|)^{B_i}$$

avec $A_i \in \mathbb{N}$ et $B_i \in \mathbb{Q}$ tels que $B_i + \alpha_i \leq -\frac{3}{2}$.

- *On a :*
  - *$(L'_{i,1}, L'_{i,2}) \neq (0,0)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, K'\}$.*
  - *Il existe $i \in \{1, \ldots, K'\}$ tel que $L'_{i,2} \neq 0$.*

– *On a*

$$\Big(\prod_{\substack{1\le i\le 2\\ \alpha_i<0}}\frac{1}{x_i}\Big)\Big(\prod_{\substack{i\in\{1,\dots,K\}\\ (L_{i,1},L_{i,2})\neq(0,0)}}\frac{1}{(L_{i,1}x_1+L_{i,2}x_2)}\Big)=\frac{1}{x_1^{a_1}x_2^{a_2}(x_1+x_2)^{c_1}}$$

avec $a_1,a_2\in\mathbb{N}^*$, $c_1\in\mathbb{N}$ *tels que si* $c_1>0$ *alors soit* $\gamma_1-\gamma_2>0$ *soit* $\gamma_1-\gamma_2=0$ *et* $\gamma_1'-\gamma_2'\ge 0$.

– *On a avec la convention* $0\times\infty=\infty$ *:*

 – *Ou bien*

$$\max_{2<m\le 5}\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i\delta-\gamma_m\delta'\Big)<0$$

 – *Ou bien*

$$\max_{2<m\le 5}\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i\delta-\gamma_m\delta'\Big)=0$$

et

$$\max_{\substack{2<m\le 5\\ \sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i\delta-\gamma_m\delta'=0}}\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i'\delta-\gamma_m'\delta'\Big)\le\max(1,D(RS,0))-1.$$

Alors on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2i\pi)^5}\int_{\Re x_1=\delta_1}\cdots\int_{\Re x_5=\delta_5}&X_1^{x_1}\cdots X_5^{x_5}G(x_1,\dots,x_5)R(x_1,\dots,x_5)Z(x_1,\dots,x_5)\mathrm{d}x_5\cdots\mathrm{d}x_1\\ &=\big(\operatorname*{Res}_{x_1=0}\cdots\operatorname*{Res}_{x_5=0}X_1^{x_1}\cdots X_5^{x_5}RS(x_1,\dots,x_5)\big)G(0,\dots,0)+O_G\big((\log X)^{\max(1,D(RS,0))-1}\big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{x_1=0}\cdots\operatorname*{Res}_{x_5=0}X_1^{x_1}\cdots X_5^{x_5}RS(x_1,\dots,x_5)\\ &\qquad=\sum_{(l_1,\dots,l_5)\in\mathcal{L}}\mu(l_1,\dots,l_5)(\log X_1)^{l_1}\dots(\log X_5)^{l_5}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}:=\{(l_1,\dots,l_5)\in\mathbb{N}^5|l_1+\dots+l_5=\max(0,D(RS,0))\},\\ &\quad\mu(l_1,\dots,l_5)\in\mathbb{R},\ \textit{pour}\ (l_1,\dots,l_5)\in\mathcal{L}.\end{aligned}$$

En outre, si il existe $i\in\{1,\dots,5\}$ *tel qu'on ne rencontre pas de pôle en* $x_i=0$, *alors* $\mu(l_1,\dots,l_5)=0$ *pour tout* $(l_1,\dots,l_5)$.

Remerciements. — Je tiens à remercier mon directeur de thèse E. Fouvry, ainsi que Ph. Michel, pour m'avoir permis de travailler sur ce sujet et pour leurs conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Davenport – *Multiplicative number theory*, second éd., Graduate Texts in Math., vol. 74, Springer, 1980.

[2] E. Fouvry & P. Michel – « Crible asymptotique et sommes de Kloosterman », in *Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations*, Bonner Mathematische Schriften, 360, Universität Bonn Mathematisches Institut, 2003.

[3] ———, « Sommes de modules de sommes d'exponentielles », *Pacific J. Math.* **209** (2003), p. 261–288.

[4] ———, « Sur le changement de signe des sommes de Kloosterman », *Ann. of Math.* **165** (2007), p. 675–715.

[5] H. Iwaniec & E. Kowalski – *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, Amer. Math. Soc., 2004.

[6] N. V. Kuznecov – « The Petersson conjecture for cusp forms of weight zero and the Linnik conjecture. Sums of Kloosterman sums », *Mat. Sb. (N.S.)* **111 (153)** (1980), p. 334–383, 479.

[7] J. Sivak-Fischler – « Méthodes de crible appliquées aux sommes de Kloosterman et aux petits écarts entre nombres premiers », Thèse, Université Paris XI, 2005.

[8] ———, « Crible étrange et sommes de Kloosterman », *Acta Arith.* **128** (2007), p. 69–100.

[9] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, second éd., Cours Spécialisés, vol. 1, Soc. Math. France, 1995.

[10] A. Weil – « On some exponential sums », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **34** (1948), p. 204–207.