J.-S. VANĚČEK
M.-N. VANĚČEK

Sur les ellipses décrites par les points invariablement liés à un segment constant et sur une surface circulaire du huitième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 76-88
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__76_0>

Sur les ellipses décrites par les points invariablement liés à un segment constant et sur une surface circulaire du huitième ordre; par MM. J.-S. et M.-N. Vaněček.

(Séance du 20 avril 1883.)

1. Considérons deux axes fixes rectilignes A, B dans un plan et une droite D dont deux points a, b glissent sur les axes donnés. On sait que chaque point de la droite D décrit pendant ce mouvement une ellipse.

M. Jules de la Gournerie a démontré que le lieu des sommets de toutes ces ellipses est une courbe du sixième ordre et que leurs foyers se trouvent sur une hyperbole.

M. Chasles a considéré les autres points du plan P dans lequel s'exécute le mouvement de la droite D.

Il a trouvé que chaque point du plan P, invariablement lié à la droite D, décrit une ellipse, excepté les points d'une circonférence, lesquels points parcourent les droites passant par le point d'intersection des droites fixes A, B.

Dans la présente Note nous allons étendre ces recherches et faire connaître une surface du huitième ordre engendrée par une circonférence comme application du mouvement, dont nous avons parlé tout à l'heure, dans l'espace.

I.

2. Joignons le point décrivant c aux extrémités a, b de la longueur constante qui se trouvent en une position donnée et menons une droite perpendiculaire cd du point c à la droite ab.

Quand le triangle abc reste invariable, son sommet c décrit une ellipse. A une division de la longueur ab par le point d et à l'infinité des hauteurs cd correspond une infinité de courbes; de même, à une hauteur constante cd et à l'infinité des divisions de la longueur ab correspond une infinité d'ellipses.

D'après M. Chasles on construit la normale à l'ellipse engendrée par un point c en un de ses points c en élevant les normales en les points a, b de la droite mobile aux axes fixes A, B. La droite qui joint le point de rencontre n de ces normales au point c est la normale demandée.

3. Toutes les ellipses décrites par les points c qui se trouvent sur la droite cd ont leurs centres au point d'intersection s des axes fixes A, B.

De là suit que chaque droite passant par s est un diamètre, en direction, de toutes ces ellipses. Il est clair qu'aux positions parallèles de la droite mobile ab correspondent les extrémités du même diamètre.

On peut demander l'extrémité d'un tel diamètre P.

Par les extrémités a, b d'une position de la droite D et par le point de rencontre s des axes fixes A, B faisons passer la circonférence O d'un cercle. La droite donnée P rencontre O en un point m. Joignons ce point au point c correspondant à la position ab. La droite mc rencontre la circonférence O encore en un point m'.

En portant le segment cm' du point s sur P jusqu'au point e, ce point est l'extrémité du diamètre P.

Cela résulte de ce raisonnement. Les droites am', bm' font le même angle que les axes A, B. Quand nous supposons que les sommets a, b du triangle mobile abc parcourent les droites am', bm', le sommet c décrit une ellipse E' dont le centre est m' et qui est superposable à l'ellipse E décrite par le point c par rapport aux axes A, B. Le segment cm' est la longueur du demi-diamètre d'ellipse E' sur la droite cm.

Quand le point m' vient en s, les droites am', bm', cm' prennent les positions des droites A, B, ms ; le segment cm' est donc la longueur du demi-diamètre ms.

A deux points m_1, m_2 de la circonférence O également éloignés du point c correspondent deux diamètres égaux de l'ellipse E. Au maximum et au minimum de ces distances correspondent les axes de E, qui passent alors par les extrémités du diamètre co de la circonférence O.

On pourra ainsi construire l'ellipse E par les points situés sur les rayons du faisceau (s).

4. Supposons que la circonférence O soit tracée et qu'un dia-

mètre quelconque la coupe en deux points l, m. Les droites lc et mc rencontrent O respectivement en deux autres points l', m' qui déterminent avec le point s les directions des *deux diamètres conjugués* de l'ellipse E; cm est égale au demi-diamètre sur $m's$ et cl est égale au demi-diamètre sur $l's$.

La propriété de ces deux diamètres, $l's$, $m's$, d'après laquelle la normale élevée à l'extrémité de l'un d'eux est perpendiculaire à l'autre, nous apprend que ce sont des diamètres conjugués.

5. De cette construction des diamètres conjugués résulte immédiatement la construction des *axes de l'ellipse* E.

Le diamètre co de la circonférence O rencontre cette ligne en deux points m_1, m_2, et les droites $m_1 s$, $m_2 s$ sont les axes en direction de l'ellipse E; les longueurs des demi-axes sont respectivement égales aux segments $m_2 c$, $m_1 c$.

De là, il résulte que les axes de l'ellipse E sont des diamètres conjugués.

Nous voyons que la *somme* ou la *différence des axes* des ellipses E, engendrées par un point c qui change sa position sur la droite cd, le segment ab étant invariable, est *constante* et égale au diamètre de la circonférence O.

Quand le point c est placé au centre o de la circonférence O, les axes des ellipses E deviennent égaux. Donc :

Quand le sommet c d'un triangle mobile abc est le centre de la circonférence O passant par les points a, b, s, ce sommet décrit une circonférence (c) ayant son centre en s et dont le rayon est égal à cs.

6. Considérons une droite quelconque H, passant par le point c, qui coupe la circonférence O en deux points m, n. Puisque nc, mc sont respectivement les longueurs des demi-diamètres ms, ns, nous obtenons, d'après une propriété bien connue sur les transversales d'une circonférence, ce théorème :

On peut faire correspondre tous les diamètres d'une ellipse deux à deux de telle façon que le produit d'un tel couple soit une quantité constante, égale au produit de ses axes.

Quand on peut mener du point c deux tangentes réelles à la circonférence O, on voit qu'il y a deux diamètres égaux, dont chacun se confond avec son diamètre correspondant.

7. Les sommets c des triangles semblables à abc, qui se meuvent sur les droites fixes A, B, décrivent des ellipses concentriques, semblables et semblablement placées.

Nous pouvons appliquer cette propriété à la *construction d'une ellipse, dont on connaît le centre s et trois points p, q, r.*

Pour résoudre ce problème, il faut se rappeler ce théorème :

Le lieu des points dont les distances à deux points fixes m, n sont en un rapport constant est une circonférence qui a son centre sur la droite mn. Cette circonférence divise la droite mn suivant le rapport donné.

Soient donnés trois points p, q, r d'une ellipse et son centre s. Traçons une circonférence O' qui passe par le point s et rencontre les diamètres P, Q, R, passant par p, q, r, respectivement aux points p_1, q_1, r_1.

Si nous construisons un point c_1, qui remplisse la condition

$$c_1p_1 : c_1q_1 : c_1r_1 = \frac{1}{sp} : \frac{1}{sq} : \frac{1}{sr},$$

ce que nous pouvons exécuter au moyen de deux circonférences; le point c_1 appartient à une ellipse E', qui est évidemment semblable à l'ellipse cherchée E, car

$$sp' : sq' : sr' = sp : sq : sr,$$

p', q', r' étant les extrémités des diamètres P, Q, R de l'ellipse E'. On détermine facilement les points p', q', r', quand on connaît la position du point décrivant c_1 et sa circonférence correspondante O'.

Soit o' le centre de la circonférence O'. Si nous déterminons le point o sur $o's$ et le point c sur c_1s, de telle façon que

$$\frac{so}{so'} = \frac{sp}{sp'} = \frac{sc}{sc_1},$$

le point c est celui qui engendre l'ellipse E, et le point o est le centre de la circonférence O, correspondant à la position du triangle mobile, quels que soient les axes fixes A, B.

8. Supposons deux triangles abc, abc', symétriquement placés par rapport à la droite ab. Les sommets c, c' décrivent deux ellipses, que nous appellerons *ellipses conjuguées*.

La somme ou la différence des axes de l'une est égale respectivement à la somme ou à la différence des axes de l'autre, ou la somme des axes de l'une est égale à la différence des axes de l'autre ellipse.

Quand les deux axes fixes A, B font un angle droit, les deux ellipses conjuguées sont égales et symétriquement placées par rapport aux droites A, B.

Le point c du triangle abc décrit une droite quand le sommet c se trouve sur la circonférence passant par les points a, b, s. Son point symétriquement conjugué c', est situé de même sur cette circonférence quand la droite mobile ab est un diamètre, ce qui arrive quand les deux droites A, B sont perpendiculaires.

Donc :

Quand l'angle que font les axes fixes A, B est aigu, il n'y a qu'un couple d'ellipses dont une devient une droite, et quand A, B font un angle droit, il y a un seul couple d'ellipses qui deviennent des droites.

Dans le cas où les deux points c, c' se confondent ou, en d'autres termes, que le point c est situé sur la droite ab, les ellipses conjuguées correspondantes se confondent de même.

9. Examinons le lieu des sommets des ellipses qui correspondent aux points d'une droite perpendiculaire à la droite mobile ab en un de ses points.

Les normales menées en ces points a, b aux axes fixes A, B se rencontrent en un point n dont le lieu est, comme on sait, une circonférence (n) de centre s.

Nous avons vu que tous les axes des ellipses passent par le point s. On construira le sommet sur une droite passant par s, comme il suit :

De son point de rencontre n avec la circonférence (n), abaissons des normales sur les droites A, B. Leurs pieds a, b déterminent la position correspondante du segment ab. Exécutons convenablement la division donnée de ce segment par le point d. La perpendiculaire élevée en ce point à la droite ab rencontre le rayon ns

au sommet cherché v. Nous obtenons deux tels points sur la droite ns, symétriquement placés par rapport au centre s.

Parmi ces ellipses, il y en a deux dont chacune se réduit à une droite terminée; par conséquent, deux des sommets de chacune d'elles se réunissent au point s.

De là suit que le centre s est un point quadruple de la courbe qui est le lieu des sommets. Et comme, sur une droite passant par s, il n'y a que deux points distincts de s, il s'ensuit que le lieu (v) des sommets des ellipses considérées est une courbe du *sixième* ordre.

Pour trouver les points à l'infini de la courbe (v), plaçons la droite ab de telle façon que $sa = sb$. La perpendiculaire ns à la droite ab divise l'angle (A, B) en deux parties égales, et elle est parallèle à la normale élevée au point d à ab. Leur point d'intersection v est donc à l'infini. Par conséquent, la courbe (v) a ses points à l'infini, sur les bissectrices de l'angle des droites A, B.

La courbe (v) a deux points doubles à l'infini.

10. Sur chaque droite P, passant par s, il y a deux points qui sont les sommets d'une ellipse E dont un axe est situé sur P. Les foyers d'une telle ellipse sont situés sur P, et le point s est le milieu de leur distance.

Le lieu des foyers des ellipses E est, par conséquent, une conique (f) ayant s pour centre.

Cette conique touche la courbe (v) aux quatre extrémités x, x', y, y' des droites suivant lesquelles sont dégénérées deux ellipses de la série; de plus elle passe par les points doubles, à l'infini, de la courbe (v).

La conique (f) est une hyperbole équilatère parce que ses deux points, à l'infini, sont situés sur les bissectrices de l'angle des droites A, B; les asymptotes se coupent donc à angle droit.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Les ellipses engendrées par les points d'une droite C perpendiculaire et invariablement liée à la droite ab dont les points a, b parcourent deux axes fixes A, B ont leurs sommets sur une courbe (v) du sixième ordre ayant deux points doubles à l'infini et le point s comme point quadruple.

Le lieu des foyers de ces ellipses est une hyperbole équilatère (f) qui coupe la courbe (v) aux points doubles à l'infini et la touche en quatre points. Les asymptotes de cette hyperbole sont les bissectrices de l'angle des droites A, B.

II.

11. Considérons deux droites A, B qui ne sont pas dans un même plan, et un segment constant ab dont les extrémités a, b glissent sur ces droites.

Un point quelconque c, dans l'espace, est invariablement lié aux points a, b de telle façon qu'il engendre une circonférence C dont le rayon est cd, le point d étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point c sur la droite ab. Les distances ab, ac, bc sont donc constantes, et par conséquent de même la division de la longueur ab par le point d.

Nous pouvons déterminer la circonférence C, en construisant une sphère α qui a son centre en a et dont le rayon est égal à ac; cette sphère est rencontrée par une autre sphère β de centre b, ayant son rayon égal à bc, suivant la circonférence C.

Quand la droite ab change de position, les sphères α, β le font aussi; la circonférence C engendre une surface (C).

Déterminons l'ordre de cette surface. A cet effet, cherchons les points de rencontre d'une droite quelconque C avec (C).

La surface (ab) engendrée par le segment constant ab est, comme on sait, du quatrième degré, et admet comme droites doubles les droites A, B et la droite I à l'infini. Coupons la droite A par une sphère décrite d'un point c de la droite C comme centre, avec le segment constant ac pour rayon et la droite B avec le segment bc, et joignons les points d'intersection sur A avec ceux sur B. La surface auxiliaire ainsi engendrée est du huitième degré et admet les droites A, B, I pour lignes quadruples. Cette surface rencontre la surface (C) seulement suivant des droites, et, puisqu'elles se rencontrent encore en huit autres droites, auxquelles correspondent huit points de la surface (C) sur la droite C,

La surface (C) est du huitième ordre.

12. Nous allons nous occuper d'abord de la surface qui provient du mouvement d'une circonférence C, qui a son centre d sur un segment constant ab, dont les extrémités a, b glissent sur deux droites A, B situées dans un plan P.

Si les droites A, B font un angle quelconque, la surface (C) est symétrique seulement par rapport au plan P.

Dans le cas où les droites A, B sont perpendiculaires, la surface (C) possède trois plans de symétrie rectangulaires deux à deux : le plan P et deux plans passant par les droites A, B.

Cependant la surface (C) a toujours un centre réel, qui est le point de rencontre s des droites A, B.

13. Supposons que les extrémités du diamètre situé dans le plan P de la circonférence C soient c, c'. Ces points décrivent, d'après le n° 8, deux ellipses conjuguées dans le plan P, qui fournissent la section réelle du plan P avec la surface (C).

Chaque plan P_1, parallèle au plan P, dont la distance à ce plan est plus petite que le rayon de la circonférence C, rencontre la surface (C) suivant une courbe réelle.

Cherchons le caractère d'une telle section.

Le plan P_1 coupe la circonférence mobile C en deux points c, c' qui se projettent orthogonalement sur le plan P en deux points situés sur une droite C_1, projection de la circonférence C, dont le milieu est le point d.

Comme les éléments de notre figure en projection restent les mêmes, c'est-à-dire la longueur ab et la division de ce segment par le point d, les points c_1, c'_1 décrivent deux ellipses conjuguées (c_1), (c'_1), qui sont les projections de la courbe (c), (c') provenant de la section de la surface (C) par le plan P_1. Par conséquent, cette section consiste en deux ellipses conjuguées.

Un autre plan P'_1, symétrique de P_1 par rapport au plan P, rencontre la surface (C) de même suivant deux ellipses conjuguées respectivement superposables à (c) et (c').

Donc :

Un plan parallèle au plan P *des droites A, B rencontre la surface (C) suivant deux ellipses conjuguées.*

Nous avons vu, au n° 8, que l'une des deux ellipses conjuguées peut devenir une droite; ce qui arrive deux fois. Quand les droites A, B font un angle droit, si l'une de ces ellipses devient une droite, la deuxième est aussi une droite.

Il y en a ainsi quatre sur la surface (C). Ce sont des droites doubles de la surface (C).

Quand les droites A, B font un angle quelconque, les droites doubles ne sont pas deux à deux dans un plan parallèle au plan P; seulement quand les droites A, B font un angle droit, il y a deux plans également éloignés du plan P dans lesquels se trouvent deux à deux les droites doubles de la surface (C). Mais, en tout cas, toutes ces droites sont parallèles au plan P. Les droites, symétriquement conjuguées, sont parallèles.

De là suit que :

Sur la surface (C) il y a quatre droites doubles qui peuvent être deux à deux dans un même plan. Ces deux plans sont symétriquement placés par rapport au plan P.

Le plan des deux droites doubles symétriquement conjuguées par rapport à P rencontre la surface (C) encore suivant deux circonférences.

Quand le plan sécant P_1 est à une distance de P égale au rayon de la circonférence mobile C, les deux ellipses conjuguées provenant de cette section se confondent en une seule. Il touche alors la surface (C) suivant cette ellipse. Il y a deux plans qui remplissent cette condition.

Donc :

Deux plans parallèles au plan P *sont tangents à la surface (C) tout le long d'une ellipse; ces deux ellipses sont superposables.*

Si le point d est le milieu du segment ab et si les axes fixes A, B font un angle droit, les ellipses conjuguées réunies en une seule courbe deviennent une circonférence.

Les autres plans, dont la distance au plan P est plus grande que le rayon cd de la circonférence C, rencontrent la surface (C) en des ellipses conjuguées imaginaires; de même le plan de l'infini.

14. Nous avons trouvé, au n° 9, que les sommets des ellipses conjuguées sont situés sur une courbe (ν) du sixième ordre. Pour la surface (C), cette courbe est terminée par les sommets des ellipses situés dans le plan P.

Comme la courbe plane (ν) est la projection orthogonale d'une courbe dont toute projetante contient deux points, la courbe, sur la surface, est du douzième ordre.

Les quatre droites doubles sur la surface (C) sont des ellipses dont deux sommets se confondent. De là suit que la courbe (ν) a quatre points doubles, situés sur une droite passant par le centre s de (C), et deux points doubles imaginaires à l'infini.

Nous pouvons énoncer ce théorème :

Si les droites A, B font un angle droit, les points doubles réels se confondent deux à deux, et la courbe (ν) possède deux points quadruples réels et deux points doubles imaginaires à l'infini.

Considérons une surface générale (C). Soit P un plan parallèle aux droites A, B qui ne sont pas dans un même plan. Cherchons la ligne provenant de l'intersection du plan P avec (C). La surface (C) a un de ses points sur P quand le sommet c du triangle invariable abc, dont deux sommets a, b glissent sur les droites A, B, est dans le plan P. Projetons orthogonalement sur le plan P en $a_1 b_1 c_1$, $a'_1 b'_1 c'_1$ les triangles abc, $a'b'c'$ qui satisfont à cette condition. Les triangles $a_1 b_1 c_1$, $a'_1 b'_1 c'_1$ sont superposables, ainsi que tous les autres obtenus par le même procédé. Leurs sommets a_1, a'_1, ...; b_1, b'_1, ... se trouvent respectivement sur les projections A_1, B_1 des droites A, B sur le plan P, et les troisièmes sommets ont pour lieu la courbe cherchée. Il résulte alors de ce qui précède que :

La courbe d'intersection d'un plan P, *parallèle aux droites A, B, avec la surface (C) consiste en deux ellipses conjuguées.*

15. On trouvera, par le même raisonnement que dans le numéro précédent, que :

Le lieu des foyers des sections coniques sur la surface (C) est une courbe (f) du quatrième ordre, partagée en deux parties, qui se projette orthogonalement sur le plan P *suivant une hyperbole équilatère.*

16. Quand deux circonférences C de la surface (C) se coupent en un point, ce point est double. Le lieu de ces points est une courbe sur la surface qui se projette sur le plan P suivant une courbe dont la construction est la suivante :

D'un point a de la droite A fixe, traçons les deux droites ab, ab_1 ayant la longueur constante donnée et élevons en leurs points d, d_1 les perpendiculaires à ces droites jusqu'à leur point de rencontre m. Ce point est la projection des deux points cherchés sur la surface.

Nous obtenons ainsi, dans le plan P, deux parties d'une hyperbole dont une asymptote est la droite A, et l'autre est perpendiculaire à la droite B. Le centre de cette hyperbole est le point s. Si l'on effectue la même construction par rapport à la droite B, on obtiendra une autre hyperbole ayant le même centre s et la droite B pour asymptote; l'autre asymptote est normale à la droite A.

Quand les droites A, B font un angle droit, les deux hyperboles se réduisent à ces droites.

Les axes de ces deux hyperboles, qui sont semblables, ont les mêmes directions que les axes de l'hyperbole (f).

En portant ces résultats sur la surface (C), nous voyons qu'il y a deux courbes doubles sur cette surface, dont chacune est du quatrième ordre.

Reprenons la construction de la surface (C). La sphère α, dont le centre est en a sur A et le rayon est égal à ac, rencontre la sphère β, ayant son centre b sur B et de rayon égal à bc, en une circonférence C réelle et en une autre imaginaire à l'infini. Cette circonférence est double sur la surface (C).

De là suit que :

La surface (C) *possède une courbe double réelle du douzième ordre, dont quatre parties sont des droites, et deux autres parties consistent en deux courbes, chacune du quatrième ordre; la circonférence imaginaire de l'infini est de même une ligne double de cette surface.*

17. Une sphère S ayant son centre sur la droite A ou B, et dont le rayon est respectivement ac ou bc, rencontre la surface

(C) en deux circonférences C réelles, en la circonférence imaginaire de l'infini, et en une courbe de huitième ordre.

Quand la sphère S a son centre au point s, les circonférences C réelles sont dans deux plans parallèles.

Supposons que le segment constant ab se trouve dans la position perpendiculaire à la droite B au point b. La sphère S, ayant son centre en a et de rayon égal à ac, touche la surface, suivant la circonférence C correspondant à la position du segment mobile. La même chose a lieu par rapport à la droite A.

18. Considérons une circonférence C de la surface (C) et cherchons l'ordre de la normalie de la surface tout le long de cette ligne.

La normale N de la surface en un point c de la circonférence C est la droite d'intersection du plan normal au point c à la circonférence C, et du plan normal en ce point à l'ellipse de la surface passant par ce point.

Tous les plans normaux aux points c de la circonférence C passent par la droite ab correspondante à cette ligne. La droite ab, étant située dans le plan P, est le lieu des pieds des normales N sur P.

Les plans normaux aux ellipses de la surface (C) passant par les points c de la circonférence C sont perpendiculaires au plan P, et leurs traces passent par le point de rencontre m des normales issues des points a, b sur A, B.

Par conséquent, ces plans normaux passent par la droite M perpendiculaire au plan P au point m. De là suit que les normales N rencontrent aussi la droite M.

Puisque les droites N rencontrent les droites ab, M, et la circonférence C, elles engendrent une surface du quatrième ordre.

Donc :

La normalie à la surface (C) le long d'une circonférence C est une surface du quatrième degré.

19. Supposons que les axes fixes A, B fassent un angle droit, et qu'une droite quelconque cc' perpendiculaire au segment mobile

ab rencontre la circonférence passant par les points a, b, s aux points c, c'.

A ces points correspondent deux ellipses conjuguées réduites à des droites A', B' passant par le point s.

La surface engendrée par la circonférence C ayant cc' pour diamètre peut être aussi regardée comme engendrée par le mouvement d'une circonférence C, dont le plan est perpendiculaire au plan P, et dont les extrémités c, c' du diamètre cc', situé dans P, glissent sur deux droites fixes A', B'.

Le plan P rencontre cette surface suivant les droites A', B' qui sont lignes doubles de la surface, dont les nappes se touchent le long de ces droites. Le point s de rencontre des droites A', B' est le centre de la surface et son point quadruple.

Toutes les autres propriétés de la surface (C) restent les mêmes.