Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ 1 SUR LES SOLIDES DE POONEN

Jean-Louis Colliot-Thélène

Tome 138
Fascicule 2

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scienti que
pages 249-257

Bull. Soc. math. France
138 (2), 2010, p. 249–257

ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ 1 SUR LES SOLIDES DE POONEN

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

RÉSUMÉ. — B. Poonen a récemment exhibé des exemples de variétés projectives et lisses de dimension 3 sur un corps de nombres qui n'ont pas de point rationnel et pour lesquelles il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin après revêtement fini étale. Je montre que les variétés qu'il construit possèdent des zéro-cycles de degré 1.

ABSTRACT (*Zero-cycles of degree 1 on Poonen threefolds*). — B. Poonen recently produced smooth threefolds over a number field which do not have a rational point but have no Brauer–Manin obstruction even after descent to a finite étale cover. I show that the varieties he produces have zero-cycles of degree 1.

Introduction

Soit k un corps de nombres. Dans son article [10], B. Poonen construit des exemples de variétés projectives et lisses de dimension 3 sur k qui ont les propriétés suivantes : elles ont des points dans tous les complétés de k, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel, mieux, il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin après descente par revêtements finis étales, et cependant les variétés ne possèdent pas de point k-rationnel. C. Demarche [5] vient de montrer que ceci implique qu'aucune obstruction de

Texte reçu le 22 septembre 2008, révisé le 16 février 2009 et accepté le 26 mai 2009

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G05, 14G25, 11G35 ; 14J20, 14F22.

Mots clefs. — Points rationnels, zéro-cycles, principe de Hasse, obstruction de Brauer-Manin.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2010/249/$ 5.00

descente sous un groupe algébrique ne saurait rendre compte de l'inexistence de point rationnel. La situation est donc tout à fait différente de celle de l'exemple historique de Skorobogatov ([12], [9]).

Dans [3] j'ai conjecturé que pour toute variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 est la seule obstruction.

Je montre ici que la conjecture vaut pour les variétés construites par Poonen : elles ont toutes un zéro-cycle de degré 1. La question reste entière pour l'exemple de Skorobogatov.

Au paragraphe 1 je rappelle brièvement la construction des variétés. Au paragraphe 2 je donne une démonstration alternative du calcul du groupe de Brauer de ces variétés. Le résultat de ce calcul permet de montrer ([10]) qu'il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel, et *a fortiori* pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1. Au paragraphe 3, logiquement indépendant du précédent, j'établis l'existence de zéro-cycles de degré 1. La méthode utilisée dans ce paragraphe est une variante pour les zéro-cycles d'une méthode connue dans le cas des points rationnels (voir les remarques 3.2 et 3.3 ci-dessous).

Cet article a été conçu à l'occasion d'exposés donnés en avril 2008 à l'université Emory (Atlanta, Géorgie).

1. Les variétés

Soit k un corps de caractéristique nulle. Les variétés considérées dans [10] s'insèrent dans le diagramme suivant, que nous allons détailler.

$$\begin{array}{ccc} X & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Dans ce diagramme, toutes les variétés sont des k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes. La variété C est une courbe de genre quelconque. Dans [10], les courbes C utilisées n'ont qu'un nombre fini de points rationnels, nous ne faisons pas cette restriction ici.

Les flèches verticales inférieures sont données par la projection sur le premier facteur. La variété V est de dimension 3, elle est fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Le lieu de dégénérescence de cette fibration (le lieu où la conique fibre est singulière) est une k-courbe projective, lisse, *géométriquement intègre*

$Z_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. La projection sur le premier facteur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ induit un revêtement ramifié $Z_1 \to \mathbb{P}^1$, le lieu de ramification dans $\mathbb{P}^1$ ne contient pas le point $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$.

Le morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ est un revêtement ramifié, son lieu de ramification dans $\mathbb{P}^1$ ne rencontre pas le lieu de ramification de $Z_1 \to \mathbb{P}^1$.

La partie verticale gauche du diagramme est obtenue par rétrotirette à partir de la partie verticale droite (produits fibrés via le morphisme $C \to \mathbb{P}^1$).

Pour tout point schématique $w \in \mathbb{P}^1$, de corps résiduel $k(w)$, la fibre V_w est une surface géométriquement intègre sur $k(w)$ qui contient un ouvert affine d'équation

$$y^2 - az^2 = P_w(x)$$

avec $a \in k \setminus k^2$ et $P_w(x) \in k(w)[x]$ un polynôme non nul, de degré 4 en la variable x, séparable pour w non dans le lieu de ramification de $Z_1 \to \mathbb{P}^1$. Sur un ouvert convenable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Z_1 est défini par l'équation $P_w(x) = 0$, la projection $Z_1 \to \mathbb{P}^1$ étant donnée par $(w, x) \mapsto w$.

Le lieu de dégénérescence de la fibration en coniques $X \to C \times \mathbb{P}^1$ est l'image inverse Z de Z_1 par $C \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Le polynôme $P_w(x)$ est choisi tel que que $Z \subset C \times \mathbb{P}^1$ est une k-courbe projective, lisse, *géométriquement intègre* ([10], Lemma 7.1).

Par ailleurs la description des fibres de l'application composée $V \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ (première projection) montre que l'on a :

Proposition 1.1. — *Sous les hypothèses faites ci-dessus, pour tout point schématique P de C, la fibre $X_P/k(P)$ du morphisme $X \to C$ au point P est une $k(P)$-variété géométriquement intègre.*

D'après [4, I, p. 43], [11, p. 208-209], [1, §3.2]), ceci a le corollaire suivant, qui sera utilisé au paragraphe 3.

Corollaire 1.2. — *Soient k un corps de nombres et $X \to C$ comme ci-dessus. Il existe un ensemble fini S de places de k tel que, pour toute extension finie L de k et toute place w de L non située au-dessus d'une place de S, l'application $X(L_w) \to C(L_w)$ induite par $X \to C$ sur les points de X à valeurs dans le complété L_w soit surjective.*

2. Leur groupe de Brauer

Le résultat suivant est établi dans [10] au moyen d'une étude de l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique de X. Nous proposons une démonstration un peu plus courte. La différence entre la démonstration de [10] et la présente démonstration est essentiellement la même que celle entre les propositions 7.1.1 et 7.1.2 de [13].

PROPOSITION 2.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, la flèche naturelle de groupes de Brauer* $\mathrm{Br}\, C \to \mathrm{Br}\, X$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Notons $B = C \times \mathbb{P}^1$. La fibration en coniques $X \to B$ est dégénérée en *un seul point* de codimension 1 de B, correspondant à la courbe *géométriquement intègre* Z.

Soit η le point générique de B et X_η la fibre générique de $X \to B$. C'est une conique lisse.

De façon générale, étant donné un k-morphisme plat $X \to B$ de k-variétés lisses géométriquement intègres, on dispose d'un diagramme commutatif de suites exactes de groupes de cohomologie étale :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Br}\, B & \to & \mathrm{Br}\, k(B) & \xrightarrow{\oplus_b \partial_b} & & \bigoplus_{b \in B^{(1)}} H^1(k(b), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow e_{x/b}.\mathrm{Res}_{k(b)/k(x)} \\ 0 \to & \mathrm{Br}\, X & \to & \mathrm{Br}\, X_\eta & \xrightarrow{\oplus_x \partial_x} & \bigoplus_{x \in B^{(1)}} & \bigoplus_{x \in X^{(1)},\ x \to b} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Dans ce diagramme, b parcourt les points de codimension 1 de B, et x parcourt les points de codimension 1 de X qui ne sont pas situés sur X_η. Pour $x \in X$ d'image $b \in B$, on a l'inclusion des corps résiduels $k(b) \subset k(x)$. L'entier $e_{x/b}$ est l'indice de ramification de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$ sur l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{B,b}$, c'est-à-dire la valuation dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de l'image d'une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ par l'inclusion $\mathcal{O}_{B,b} \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Les flèches ∂ sont les flèches de résidu.

On peut extraire un tel diagramme des exposés de Grothendieck sur le groupe de Brauer ([7], voir GB II, Cor. 1.10, GB III, Prop. 2.1, GB III, Thm. 6.1). Pour plus de détails, voir par exemple [2, §3] et [6, Chapter 6]. La démonstration combine les suites de localisation, leur fonctorialité et le théorème de pureté pour le groupe de Brauer.

Dans la présente situation, la fibre générique est une conique sur $k(B)$. Soit $\beta \in \mathrm{Br}\, k(B)$ la classe de l'algèbre de quaternions associée à cette conique. Cette classe β est non triviale, elle admet un unique résidu non trivial, au point générique de Z, et la classe correspondante est la classe de $a \in k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \subset H^1(k(Z), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Pour la conique X_η sur $k(B)$ sans point rationnel, on dispose de la suite exacte classique (cf. [12] p. 138)

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Br}\, k(B) \to \mathrm{Br}\, X_\eta \to 0,$$

où la flèche $\mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Br}\, k(B)$ envoie 1 sur la classe β. Le diagramme ci-dessus montre alors que l'application $\mathrm{Br}\, B \to \mathrm{Br}\, X$ est injective.

Soit $\alpha \in \mathrm{Br}\, X$. L'image de α dans $\mathrm{Br}\, X_\eta$ est l'image d'un élément $\gamma \in \mathrm{Br}\, k(B)$, défini à addition près de β.

Le lieu de dégénérescence de $X \to B$ est réduit à l'unique courbe $Z \subset B$. Ceci implique que pour $b \in B^{(1)}$ différent du point générique de Z, et x l'unique point de $X^{(1)}$ au-dessus de b, qui définit une conique lisse donc géométriquement intègre sur le corps $k(b)$, la flèche $e_{x/b}.\mathrm{Res}_{k(b)/k(x)} = \mathrm{Res}_{k(b)/k(x)} : H^1(k(b), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est une injection. Quant à la flèche $e_{x/b}.\mathrm{Res}_{k(b)/k(x)} = \mathrm{Res}_{k(b)/k(x)}$ associée au point générique b de Z et à l'unique x au-dessus de ce point, son noyau est le noyau de la flèche de restriction $H^1(k(Z), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k(Z)(\sqrt{a}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ce noyau est d'ordre 2, engendré par la classe de a dans $k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$.

Du diagramme ci-dessus on conclut que les résidus de γ aux points autres que le point générique de Z sont nuls, et qu'au point générique de Z le résidu est soit trivial soit égal au résidu de β. Quitte à remplacer éventuellement γ par $\gamma + \beta$, ce qui est loisible, on voit que $\gamma \in \mathrm{Br}\, k(B)$ est dans l'image de $\mathrm{Br}\, B$. Comme l'application $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, X_\eta$ est injective, ceci achève de montrer que l'application $\mathrm{Br}\, B \to \mathrm{Br}\, X$ est un isomorphisme.

L'inclusion du point générique de C dans C définit un diagramme commutatif de morphismes de schémas réguliers intègres

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_{k(C)} & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, k(C) & \to & C, \end{array}$$

où la donnée d'un k-point de $\mathbb{P}^1_k$ induit des sections compatibles des flèches verticales. Ce diagramme induit un diagramme commutatif d'inclusions de groupes de Brauer

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}\, B & \subset & \mathrm{Br}\, \mathbb{P}^1_{k(C)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}\, C & \subset & \mathrm{Br}\, k(C) \end{array}$$

pour lequel la donnée d'un k-point de $\mathbb{P}^1_k$ induit des rétractions compatibles des flèches verticales. Le groupe de Brauer de la droite projective sur un corps est égal à l'image du groupe de Brauer de ce corps. On voit ainsi que $\mathrm{Br}\, C \to \mathrm{Br}\, B$ est un isomorphisme.

Ainsi la flèche composée $\mathrm{Br}\, C \to \mathrm{Br}\, B \to \mathrm{Br}\, X$ est un isomorphisme. □

3. Existence de zéro-cycles de degré 1

THÉORÈME 3.1. — *Soit k un corps de nombres. Soient $V \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $C \to \mathbb{P}^1$ et $X \to C \times \mathbb{P}^1$ comme ci-dessus. Faisons les deux hypothèses :*

(i) *la fibre (lisse) V_∞ de la fibration composée $V \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ (première projection) a des points dans tous les complétés de k ;*

(ii) *il existe un k-point P de C dont l'image par $C \to \mathbb{P}^1$ est le point ∞.*

Alors pour tout entier $n \geq 2g+1$, où g désigne le genre de C, la k-variété X possède un point dans un corps extension de k de degré n. En particulier X possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration. — Soit n comme dans l'énoncé. Le système linéaire associé au diviseur nP de C est alors très ample. Soit $C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ le plongement associé, et soit $\check{\mathbb{P}}^N$ l'espace projectif dual de $\mathbb{P}^N$.

La variété d'incidence $W \subset \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$ définie par l'annulation de la forme bihomogène $\sum_{i=0}^{N} X_i Y_i$ est un diviseur très ample. La projection $W \to \mathbb{P}^N$ définit un fibré (lisse) en espaces projectifs $\mathbb{P}^{N-1}$.

Soit $W_Z \subset Z \times \check{\mathbb{P}}^N$ l'image inverse de la correspondance d'incidence via le morphisme composé

$$Z \times \check{\mathbb{P}}^N \to C \times \check{\mathbb{P}}^N \to \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N.$$

C'est un fibré (lisse) en espaces projectifs $\mathbb{P}^{N-1}$ au-dessus de la courbe Z, qui est projective, lisse et géométriquement intègre. Ainsi W_Z est projectif, lisse et géométriquement intègre.

Le même argument montre que l'image inverse $W_C \subset C \times \check{\mathbb{P}}^N$ de la correspondance d'incidence est une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre.

Les morphismes naturels $W_Z \to W_C \to \check{\mathbb{P}}^N$ sont des morphismes propres dominants et finis – ils sont quasi-finis car la courbe C engendre $\mathbb{P}^N$ projectivement. Le morphisme $W_Z \to W_C$ est de degré 4, le morphisme $W_C \to \check{\mathbb{P}}^N$ est de degré n.

Etant donné un k-point $h \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ correspondant à un hyperplan H de $\check{\mathbb{P}}^N$, la fibre de $W_C \to \check{\mathbb{P}}^N$ en le point h est le k-schéma $C \cap H \subset C$.

Pour toute place v de k, la fibre (lisse) X_P du morphisme $X \to C$ au-dessus du k-point P possède un k_v-point lisse. Ceci implique que pour toute extension finie L/k_v, l'image de l'application induite $X(L) \to C(L)$ contient un voisinage ouvert U_L de P pour la topologie v-adique sur $C(L)$.

Il existe un hyperplan $H_0 \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ qui découpe exactement le diviseur nP sur C. Soit v une place de k. Tout hyperplan $H \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ qui est suffisamment proche de H_0 pour la topologie v-adique découpe sur la courbe C une somme de points fermés qui, lorsque l'on passe de k à un complété k_v, donnent des points sur diverses extensions finies L de k_v de degré au plus n, points qui sont dans U_L. Rappelons qu'un tel corps local k_v (de caractéristique nulle) n'admet qu'un nombre fini d'extensions L/k_v de degré au plus n.

Appliquons le théorème d'irréductibilité de Hilbert avec approximation faible (cf. [8], Prop. 3.2.1) au revêtement fini de variétés géométriquement intègres

$W_Z \to \check{\mathbb{P}}^N$, composé de $W_Z \to W_C \to \check{\mathbb{P}}^N$ et à un ensemble fini S de places de k donné par le corollaire 1.2.

On trouve ainsi un point $h \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ définissant un hyperplan H de $\mathbb{P}^N$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites.

(a) La fibre de $W_Z \to \check{\mathbb{P}}^N$ en h est intègre, et donc :

(b) La fibre de $W_C \to \check{\mathbb{P}}^N$ en h, qui est le schéma $H \cap C \subset C$, définit un point fermé $M \in C$ de degré n sur k, et la fibre du revêtement $Z \to C$ en M est intègre, de degré 4 sur le corps résiduel $k(M)$.

Ceci implique :

(c) La fibre X_M de $X \to C$ au-dessus du point M est une surface projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps $k(M)$, surface qui admet un modèle affine d'équation $y^2 - az^2 = P_M(x)$ avec $P_M(t) \in k(M)[t]$ un polynôme irréductible de degré 4.

L'application du théorème d'irréductibilité avec approximation permet de choisir l'hyperplan H très proche de H_0, pour la topologie v-adique, aux places $v \in S$, de façon que :

(d) Pour tout corps L complété de $k(M)$ en une place w au-dessus d'une place $v \in S$, le point M appartient à U_L.

D'après ce que l'on a vu plus haut, ceci assure que la $k(M)$-surface X_M possède des points dans tous les complétés de $k(M)$ aux places au-dessus d'une place de S. Par ailleurs, le choix de S (voir le corollaire 1.2) assure que la $k(M)$-surface X_M a des points dans tous les complétés de $k(M)$ aux places non situées au-dessus d'une place de S.

En conclusion, la $k(M)$-surface lisse X_M est une surface de Châtelet qui possède des points dans tous les complétés de $k(M)$ et qui admet une équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $P(x) \in k(M)[x]$ irréductible de degré 4. L'un des principaux résultats de [4], le théorème 8.11, assure que le principe de Hasse vaut pour une telle surface. Ainsi $X_M(k(M)) \neq \varnothing$, *a fortiori* $X(k(M)) \neq \varnothing$: la k-variété X possède un point dans l'extension $k(M)/k$, qui est de degré n. $\square$

Remarque 3.2. Supposons $C = \mathbb{P}^1$. Dans ce cas on peut prendre $n = 1$, et on obtient $X(k) \neq \varnothing$. On a mieux. Comme les surfaces de Châtelet d'équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $P(x)$ irréductible satisfont l'approximation faible ([4, Thm. 8.11]), une variante immédiate de l'argument établit l'approximation faible pour X : l'ensemble $X(k)$ est dense dans le produit des $X(k_v)$. L'argument est un cas particulier d'un théorème général sur des familles $X \to \mathbb{P}^1$ de variétés dont toutes les fibres sont géométriquement intègres (Harari, [8], Thm. 4.2.1).

On peut d'ailleurs voir la démonstration ci-dessus comme une version de ce théorème dans le cadre des zéro-cycles, et ce au-dessus d'une courbe C quelconque.

Remarque 3.3. Dans [3], outre la conjecture sur l'existence de zéro-cycles de degré 1, j'ai proposé une conjecture sur l'application diagonale de groupes de Chow de zéro-cycles $CH_0(X) \to \prod_v CH_0(X_v)$. Dans une série d'articles (voir la bibliographie de [3]), des versions de cette conjecture ont été établies pour des variétés X fibrées en variétés de Severi-Brauer au-dessus d'une courbe C, sans supposer que toutes les fibres de $X \to C$ sont géométriquement intègres. Les arguments sont beaucoup plus sophistiqués que ceux du présent article.

Il serait intéressant de voir si l'on peut pousser les arguments ci-dessus et établir la conjecture pour les familles $X \to C$ de surfaces de Châtelet considérées ici, qui ont la propriété que toutes les fibres de $X \to C$ sont géométriquement intègres.

Il serait sans doute très difficile de relâcher cette dernière condition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-L. Colliot-Thélène – « L'arithmétique des variétés rationnelles », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **1** (1992), p. 295–336.

[2] ———, « Birational invariants, purity and the Gersten conjecture », in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 1–64.

[3] ———, « Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale », in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, p. 1–12.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc & P. Swinnerton-Dyer – « Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces », *J. reine angew. Math.* **373** (1987), p. 37–107 ; II, *ibid.* **374** (1987), p. 72–168.

[5] C. Demarche – « Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin », *Algebra and Number Theory* **3** (2008), p. 237–254.

[6] P. Gille & T. Szamuely – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 101, Cambridge Univ. Press, 2006.

[7] A. Grothendieck – « Le groupe de Brauer, I, II, III », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson, 1968.

[8] D. Harari – « Méthode des fibrations et obstruction de Manin », *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 221–260.

[9] D. Harari & A. N. Skorobogatov – « Non-abelian cohomology and rational points », *Compositio Math.* **130** (2002), p. 241–273.

[10] B. Poonen – « Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers », prépublication arXiv:0806.1312 à paraître dans *Annals of Math.*

[11] A. N. Skorobogatov – « On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation », in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989*, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser, 1990, p. 205–219.

[12] ———, « Beyond the Manin obstruction », *Invent. Math.* **135** (1999), p. 399–424.

[13] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge Univ. Press, 2001.