BULLETIN DE LA S. M. F.

H. RÉSAL

Sur un théorème de Poncelet et sa généralisation par M. Horvarth

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 155-157
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__155_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1872-1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur un théorème de Poncelet et sa généralisation par M. Horvarth;
par M. H. Resal.

(Séance du 16 avril 1873)

Poncelet, dans son cours lithographié de l'École d'application du génie et de l'artillerie, s'est proposé, en vue de simplifier le calcul de l'effet utile de certaines machines, de remplacer approximativement l'expression $\sqrt{x^2+y^2}$ par $\lambda x+\mu y$, λ et μ étant des constantes qu'il détermine par la condition que l'erreur relative commise soit le moindre possible lorsque le rapport $\frac{y}{x}$ peut varier entre des limites données. Il étudie d'abord par l'analyse le cas où la limite supérieure est infinie, puis il résout géométriquement la question, quelles que soient les limites, en faisant intervenir la considération d'un cône.

Plus tard, M. Horvarth, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, a généralisé le théorème de Poncelet en cherchant à substituer à $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ le trinôme $\lambda x+\mu y+\nu z$, dans des conditions telles qu'en considérant x, y, z comme les composantes suivant trois axes rectangulaires d'une force F, l'erreur relative commise soit aussi petite que possible lorsque la direction de cette force doit être comprise dans l'angle trièdre formé par trois droites données OF_1, OF_2, OF_3. M. Horvarth ne considère qu'une sphère et un plan; sa méthode, appliquée au cas de deux variables, est donc plus simple que celle de Poncelet, mais je crois qu'elle l'est moins que la suivante qui, tout en permettant de mettre les valeurs λ, μ, ν sous une forme élégante, fait reconnaître que la somme géométrique F peut sortir de l'angle trièdre ci-dessus, pourvu qu'elle reste comprise dans le cône droit à base circulaire circonscrit au même angle.

L'erreur relative

$$e=\frac{\lambda x+\mu y+\nu z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

peut se mettre sous la forme

$$e=\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{\sqrt{x^2+y^2+r^2}}-1, \tag{1}$$

d'après laquelle e n'est autre chose que la différence entre les rayons vecteurs de deux sphères: l'une (A) dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2-(\lambda x+\mu y+\nu z)=0, \tag{2}$$

et qui passe par l'origine; l'autre (B) ayant pour centre cette origine et dont le rayon est l'unité.

Le moyen qui paraît le plus avantageux pour atteindre le but proposé consiste à exprimer que e est négatif et a la même valeur absolue pour les droites OF_1, OF_2, OF_3, et que cette valeur est égale au maximum de l'erreur relative.

La question étant ainsi posée, soient C le centre du petit cercle $F_1F_2F_3$ de la sphère (B), déterminé par les droites ci-dessus désignées; α, β, γ les angles formés par OC avec Ox, Oy, Oz, et qui sont des données de la question, de même que l'angle 2ε du cône (C) ayant O pour sommet et le cercle précité pour base.

Il est visible que le centre O' de la sphère (A) doit se trouver sur OC et que la position de F, au lieu d'être limitée par les faces de l'angle trièdre, peut occuper une position quelconque dans l'intérieur de (C).

Soient encore Ox' la trace sur xOy du plan mené par Oz et Oc; h, k les intersections de la direction de OO' avec (A) et (B); a_1, a_2 les points de (A), b_1, b_2 les points de (B) respectivement situés sur les génératrices du cône (C) comprises dans le plan zOc et qui font le plus petit et le plus grand angle avec Ox'; $r = OO' = O'k$ le rayon de (A).

On doit d'abord avoir $a_1b_1 = a_2b_2 = hk$, ce qui se traduit par l'égalité

$$2r - 1 = 1 - 2r\cos\varepsilon,$$

d'où

$$(3)\qquad r = \frac{1}{2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

L'erreur relative maximum est, par suite,

$$(3)\qquad e_m = 2r - 1 = \operatorname{tang}^2\frac{\varepsilon}{2},$$

et l'on a pour l'équation de (A)

$$(x - r\cos\alpha)^2 + (y - r\cos\beta)^2 + (z - r\cos\gamma)^2 = r^2,$$

ou

$$(4)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

De la comparaison des équations (2) et (4) on déduit, pour les valeurs des coefficients cherchés,

$$(5)\qquad \lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}},\quad \mu = \frac{\cos\beta}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}},\quad \nu = \frac{\cos\gamma}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Supposons, par exemple, que F puisse occuper une position quelconque dans l'angle trièdre formé par les axes coordonnés; les angles α, β, γ, ε sont égaux; leur cosinus a pour valeur $\sqrt{\frac{1}{3}}$, et l'on a

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 0{,}732,$$
$$e_m = 0{,}268.$$

Dans le cas de deux variables, les sphères sont remplacées par deux cercles; mais il se déduit du précédent en y supposant $\gamma = 90^\circ$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}},\quad \mu = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

Soient $\tang\theta_1$, $\tang\theta_2$ les valeurs minimum et maximum de $\frac{y}{x}$, ou les angles a_1Ox, b_2Ox; on a $\alpha = \frac{\theta_2+\theta_1}{2}$, $\varepsilon = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}$, d'où

$$\lambda = \frac{\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}{\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{4}},\qquad \mu = \frac{\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}{\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{4}}.$$

Ce qui n'est autre chose que les formules établies en premier lieu par Poncelet.