BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERRIN

Note sur les résidus des invariants et covariants des formes binaires

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 88-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__88_1>

Note sur les résidus des invariants et covariants des formes binaires; par M. R. Perrin.

(Séance du 4 mai 1883.)

1. Soit la forme binaire d'ordre m

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)(x, y)^m. \tag{1}$$

J'appelle *résidu* d'un invariant ou d'un covariant de cette forme ce que devient l'invariant ou la source du covariant, lorsqu'on y fait $a_m = 0$.

Je vais démontrer tout d'abord que, étant donné son résidu; l'invariant ou le covariant est complètement déterminé et peut être calculé en entier.

Soit, en effet, v un invariant ou un péninvariant (source d'un covariant) relatif à la forme U; v est une fonction des coefficients

a_0, a_1, ..., a_m; en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes de a_m, nous pouvons l'écrire

$$(2)\quad v = v_p + p v_{p-1} a_m + \frac{p(p-1)}{1.2} v_{p-2} a_m^2 + \ldots + p v_1 a_m^{p-1} + v_0 a_m^p.$$

On sait que la seule condition que doive remplir v pour être la source d'un covariant est de satisfaire identiquement à l'équation différentielle

$$(3)\quad a_0 \frac{dv}{da_1} + 2a_1 \frac{dv}{da_2} + \ldots + (m-1) a_{m-2} \frac{dv}{da_{m-1}} + m a_{m-1} \frac{dv}{da_m} = 0.$$

Désignons, pour abréger, par $\frac{d}{d\zeta}$ l'opération

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots + (m-1) a_{m-2} \frac{d}{da_{m-1}};$$

l'équation (3) prendra la forme

$$(4)\quad \frac{dv}{d\zeta} + m a_{m-1} \frac{dv}{da_m} = 0.$$

Considérons isolément, dans cette équation, le groupe des termes qui ne contiennent pas a_m. Puisque l'opération $\frac{d}{d\zeta}$, appliquée à un terme quelconque de v, ne change pas l'exposant de a_m, tandis que l'opération $a_{m-1} \frac{d}{da_m}$ le diminue d'une unité, il est clair que le groupe considéré s'obtiendra en totalité, et à l'exclusion de tout autre, en appliquant l'opération $\frac{d}{d\zeta}$ à v_p, et l'opération $\frac{d}{da_m}$ à $(a_m v_{p-1})$. De même, le groupe des termes contenant a_m en facteur à la première puissance seulement s'obtiendra en entier et à l'exclusion de tout autre, en appliquant l'opération $\frac{d}{d\zeta}$ à $(a_m v_{p-1})$, et l'opération $\frac{d}{da_m}$ à $(a_m^2 v_{p-2})$; et ainsi de suite. Et, comme l'équation (4) doit avoir lieu identiquement, nous pouvons égaler à zéro séparément chacun des groupes de termes que nous avons ainsi isolés dans son premier membre, ce qui nous donnera, en supprimant le facteur commun a_m autant de fois qu'il se présente, le système suivant de $p+1$ équations

$$
(5) \qquad \begin{cases}
\dfrac{dv_p}{d\zeta} + mpa_{m-1}v_{p-1} = 0, \\
\dfrac{dv_{p-1}}{d\zeta} + m(p-1)a_{m-1}v_{p-2} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\dfrac{dv_1}{d\zeta} + ma_{m-1}v_0 = 0, \\
\dfrac{dv_0}{d\zeta} = 0.
\end{cases}
$$

Connaissant v_p, la première de ces équations fournira v_{p-1}; la seconde donnera de même v_{p-2} au moyen de v_{p-1}, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière, qui donnera v_0; la dernière, donnant zéro comme résultat, montrera que a_m n'entre dans v qu'à la puissance p, et le calcul s'arrêtera de lui-même. Comme on sait d'ailleurs, connaissant la source v d'un covariant, calculer le covariant tout entier, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tout covariant ou invariant d'une forme binaire est complètement déterminé et entièrement calculable, lorsqu'on connaît son résidu.

Le système des équations (5) permet aussi de démontrer très simplement cette propriété connue des invariants et péninvariants, savoir que toutes leurs dérivées par rapport à a_m sont aussi des péninvariants : il suffit d'ajouter ces équations membre à membre après les avoir multipliées par des facteurs convenables. Ainsi, en ajoutant la dernière équation, multipliée par a_m, à l'avant-dernière, on obtient

$$\frac{dv_1}{d\zeta} + \frac{d(a_m v_0)}{d\zeta} + ma_{m-1}v_0 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d}{d\zeta} + ma_{m-1}\frac{d}{da_m}\right)(v_1 + a_m v_0) = 0,$$

ce qui exprime que la $p-1^{\text{ième}}$ dérivée de v, savoir $v_1 + a_m v_0$, est un péninvariant. La dernière des équations (5) exprime que v_0, c'est-à-dire la $p^{\text{ième}}$ dérivée de v, est un péninvariant par rapport à la forme binaire d'ordre $m-1$, et, par suite, aussi à la forme binaire d'ordre m, puisqu'il ne renferme pas a_m.

2. Le *résidu* d'un covariant jouit de l'une des propriétés essentielles de la *source* de ce covariant. Ainsi il est évident que toute relation identique (ou syzygie) entre des covariants et invariants subsiste entre leurs résidus aussi bien qu'entre leurs sources; et réciproquement, je dis que toute relation identique entre les résidus de divers covariants et invariants entraîne la même relation entre les covariants et invariants eux-mêmes. En effet, soient V, V', V'', ... les covariants et invariants, v_p, v'_q, v''_r, ... leurs résidus; et supposons qu'on ait identiquement

$$f(v_p, v'_q, v''_r, \ldots) = 0.$$

Le covariant composé $f(\mathrm{V}, \mathrm{V}', \mathrm{V}'', \ldots)$, ayant un résidu identiquement nul, a sa source identiquement nulle, en vertu des équations (5); il est donc lui-même identiquement nul, ce qui revient à dire que V, V', V'', ... sont liés par la syzygie

$$f(\mathrm{V}, \mathrm{V}', \mathrm{V}'', \ldots) = 0.$$

Par conséquent, de même que la recherche des invariants et covariants *distincts* d'une forme binaire a été ramenée par M. Cayley à la recherche des sources ou péninvariants distincts, ainsi cette dernière recherche se ramène elle-même à la recherche des *résidus* distincts, lesquels sont des fonctions plus simples et par suite plus faciles à calculer.

La méthode de M. Cayley est d'ailleurs applicable sans modification à cette recherche des résidus : si l'on connaît tous les péninvariants distincts relatifs à la forme binaire d'ordre $m-1$, il suffira, pour obtenir tous les résidus distincts relatifs à la forme binaire d'ordre m, d'ajouter à ce système de péninvariants *une seule* fonction nouvelle des mêmes coefficients a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, savoir le résidu de l'invariant quadratique de la forme d'ordre m, si m est pair; ou, si m est impair, le résidu du covariant de troisième degré et d'ordre m qu'on obtient en prenant le jacobien de la forme elle-même et du covariant de deuxième degré et de deuxième ordre qui a pour source l'invariant quadratique relatif à la forme d'ordre $m-1$. Ce résidu étant ainsi ajouté au système complet des péninvariants relatifs à l'ordre $m-1$, on le traitera comme s'il était un nouveau péninvariant, en le combinant avec les autres par l'hypothèse $a_0 = 0$ et l'élimination de a_1, suivant la méthode connue.

3. Comme application de ce qui précède, proposons-nous de former le système des résidus distincts relatifs à la forme binaire du cinquième ordre

$$(6)\qquad U = ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5.$$

Le système complet des péninvariants distincts relatifs à la forme du quatrième ordre étant

$$(7)\qquad \begin{cases} u = a, & h = ac - b^2, \quad n = a^2d - 3abc + 2b^3, \\ s = ae - 4bd + 3c^2, & t = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3, \end{cases}$$

et le covariant principal spécial à la forme du cinquième ordre ayant pour source ([1])

$$u' = a^2f - 5abe + 2acd + 8b^2d - 6bc^2.$$

Le résidu à ajouter au système (7) sera

$$(8)\qquad u'_0 = 2acd - 5abe + 8b^2d - 6bc^2.$$

Faisant $a = 0$ dans les six expressions (7) et (8), elles deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} h_0 = -b^2, \quad n_0 = 2b^3, \quad s_0 = 3c^2 - 4bd, \\ t_0 = 2bcd - b^2e - c^3, \quad u'_{00} = 8b^2d - 6bc^2 = -2bs_0. \end{cases}$$

L'élimination de b fournit les trois relations

$$(10)\qquad \begin{cases} (u'_{00})^2 + 4h_0s_0^2 = 0, \\ h_0u'_{00} - n_0s_0 = 0, \\ n_0u'_{00} + 4h_0^2s_0 = 0, \end{cases}$$

qui nous apprennent, d'après un des théorèmes précédemment énoncés, que les covariants composés

$$U'^2 + 4HS^2, \quad HU' - NS, \quad NU' + 4H^2S$$

([1]) J'emploie, pour désigner les invariants, covariants et péninvariants relatifs au cinquième ordre, la même notation que dans mes deux Notes sur le même sujet, insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVI (1883), pages 479 et 563. P, P′, ... sont les covariants linéaires ou du *premier* ordre, rangés d'après leur degré par rapport aux coefficients; S, S′, ... ceux du *second* ordre; T, T′, ... ceux du *troisième;* Q, Q′, ... du *quatrième;* U, U′, ... du *cinquième* (U étant la forme primitive); H, H′, ... du *sixième* (H étant le hessien); R celui du *septième* et N celui du *neuvième*. Les minuscules correspondantes désignent les sources des covariants, et avec l'indice o, leurs résidus. J, K, L sont les trois invariants de M. Sylvester, I est l'invariant gauche de M. Hermite.

sont divisibles par u, et leurs résidus divisibles par a. Effectuant cette division des résidus, on trouve pour quotients

$$(11)\quad \begin{cases} u_0'^2 + 4hs^2 = a^2(4c^2d^2 + 21b^2e^2 - 52bcde + 24c^3e + 4ace^2) - 12as_0t_0, \\ hu_0' - ns \;= a(-ac^2d - 2abce - 6b^2cd + 3b^3e - a^2de + 3bc^3 + 4abd^2). \\ nu_0' + 4h^2s = a^2(2acd^2 - 5abde - 28bc^2d + 8b^2d^2 + 7b^2ce + 4ac^2e + 12c^4) + 6ab^2t_0, \end{cases}$$

ce qui montre que

$$U'^2 + 4HS^2 + 12UST \quad \text{et} \quad NU' + 4H^2S + 6UHT$$

sont divisibles par U^2. Effectuant la division sur les résidus, et désignant par J l'invariant et par H' et Q les covariants qui s'introduisent ainsi, il vient les trois relations

$$(12)\quad \begin{cases} U'^2 + 4HS^2 + 12UST = U^2J, \\ HU' - NS = UH', \\ NU' + 4H^2S + 6UHT = U^2(S^2 - Q), \end{cases}$$

avec les valeurs suivantes des résidus de ces trois nouvelles formes

$$(13)\quad \begin{cases} J_0 = 9b^2e^2 - 76bcde + 48c^3e + 16ace^2 - 12ad^2e - 32c^2d^2 + 48bd^3, \\ h_0' = a(c^2d - 2bce - ade + 4bd^2) - 3bt_0, \\ q_0 = a(ae^2 - 3bde + 4cd^2 - 4c^2e) + 3c^4 - 8bc^2d + 2b^2d^2 + 5b^2ce. \end{cases}$$

Il est d'ailleurs facile de former les valeurs complètes des péninvariants J, h', q sans recourir à l'opération $\frac{d}{d\zeta}$. Il suffit de remplacer dans (12) les covariants par leurs sources, et de différentier par rapport à f : les dérivées de u, h, n, s, t sont nulles, celle de u' se réduit à u^2 d'après sa valeur donnée plus haut ; il vient donc simplement

$$(14)\qquad \frac{dJ}{df} = 2u', \quad \frac{dh'}{df} = uh, \quad \frac{dq}{df} = -n, \quad \frac{d^2J}{df^2} = 2u^2,$$

ce qui donne, pour les péninvariants complets,

$$(15)\quad \begin{cases} J = u^2f^2 + 2u_0'f + J_0, \\ h' = uhf + h_0', \\ q = -nf + q_0. \end{cases}$$

Pour aller plus loin, il faut faire $a = 0$ dans J_0, h_0', q_0, ce qui donne les restes suivants :

$$(16)\quad \begin{cases} J_{00} = 9b^2e^2 - 76bcde + 48c^3e + 48bd^3, \\ h'_{00} = -3bt_0, \\ q_{00} = 3c^4 - 8bc^2d + 2b^2d^2 + 5b^2ce. \end{cases}$$

Le premier et le dernier de ces restes, combinés avec les restes (9), ne fournissent rien de nouveau; mais le second donne les cinq relations que voici :

$$\begin{aligned} h'^2_{00} + 9h_0t_0^2 &= 0, \\ 2h_0h'_{00} - 3n_0t_0 &= 0, \\ n_0h'_{00} + 6h_0^2t_0 &= 0, \\ h'_{00}u'_{00} + 6h_0s_0t_0 &= 0, \\ 2h'_{00}s_0 - 3u'_{00}t_0 &= 0. \end{aligned}$$

Les cinq expressions $h'^2_0 + 9ht^2$, $2hh'_0 - 3nt$, $nh'_0 + 6h^2t$, $h'_0u'_0 + 6hst$, $2h'_0s - 3u'_0t$ sont donc divisibles par a. Si l'on forme ces expressions et que l'on effectue les divisions, on trouve que, pour la troisième et la quatrième, le quotient peut s'exprimer en fonction des résidus déjà trouvés, savoir :

$$(17)\quad \begin{cases} nh'_0 + 6h^2t = u(ust - hq_0), \\ h'_0u'_0 + 6hst = u(J_0h + q_0s - s^3), \end{cases}$$

que la deuxième et la cinquième fournissent deux résidus nouveaux, que j'appellerai r_0 et t'_0, savoir

$$(18)\quad \begin{cases} r_0 = a(c^3d + 5bc^2e - 5acde + 5b^2de - 7bcd^2 + 3ad^3) - bq_{00}, \\ t'_0 = a(-11bce^2 + 14c^2de - bd^2e - 6cd^3 + 2ade^2) \\ \qquad + b(-16bcde - 2c^2d^2 + 9b^2e^2 + 3c^3e + 8bd^3), \end{cases}$$

avec les relations suivantes pour les covariants correspondants :

$$(19)\quad \begin{cases} UR = 2HH' - 3NT, \\ UT' = 3U'T - 2H'S. \end{cases}$$

Quant à l'expression $h'^2_0 + 9ht^2$, en la divisant par a et ajoutant au quotient s^2t, le résultat devient divisible par h et donne un nouveau résidu

$$(20)\quad \begin{cases} p_0 = a(ae^3 - 2bde^2 + 14c^2e^2 - 22cd^2e + 9d^4) \\ \qquad + 5(-3b^2ce^2 + 2b^2d^2e + 6bc^2de - 4bcd^3 - 3c^4e + 2c^3d^2), \end{cases}$$

dont le covariant est défini par la relation

$$H'^2 + 9HT^2 = U(HP - S^2T). \tag{21}$$

Les expressions complètes des trois nouveaux péninvariants r, t', p s'obtiendront comme ci-dessus en prenant les dérivées par rapport à f des relations (19) et (21), et tenant compte de (14); d'où

$$\frac{dr}{df} = 2h^2, \quad \frac{dt'}{df} = 3ut - 2hs, \quad \frac{dp}{df} = 2h', \quad \frac{d^2p}{df^2} = 2uh \tag{22}$$

et, par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} r &= 2h^2f + r_0, \\ t' &= (3ut - 2hs)f + t'_0, \\ p &= uhf^2 + 2h'_0f + p_0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Faisons maintenant $a = 0$ dans les expressions (18) et (20); il viendra

$$\left\{\begin{aligned} r_{00} &= -bq_{00}, \\ t'_{00} &= b(9b^2e^2 + 3c^3e + 8bd^3 - 2c^2d^2 - 16bcde), \\ p_{00} &= -5t_0(2d^2 - 3ce). \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Comme on a d'ailleurs, en vertu de (16) et de (9),

$$3q_{00} - s_0^2 = 5h_0(2d^2 - 3ce), \tag{25}$$

l'élimination de b et de $(2d^2 - 3ce)$ entre (24), (25), (9) et (16) fournit les huit relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} r_{00}^2 + h_0q_{00}^2 &= 0, \\ 2h_0r_{00} - n_0q_{00} &= 0, \\ n_0r_{00} + 2h_0^2q_{00} &= 0, \\ u'_{00}r_{00} + 2h_0s_0q_{00} &= 0, \\ u'_{00}q_{00} - 2r_{00}s_0 &= 0, \\ h'_{00}r_{00} + 3h_0q_{00}t_0 &= 0, \\ h'_{00}q_{00} - 3r_{00}t_0 &= 0, \\ h_0p_{00} + (3q_{00} - s_0^2)t_0 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

On a ainsi huit nouvelles combinaisons de résidus qui sont divisibles par a. En effectuant les calculs, on trouve seulement trois résidus nouveaux, savoir :

$$
(27)\left\{
\begin{aligned}
q'_0 &= a(-5abe^3+12acde^2-6ad^3e+13b^2de^2\\
&\qquad +4bc^2e^2-52bcd^2e+24bd^4+20c^3de-10c^2d^3)+bp_{00},\\
s'_0 &= a(-3ace^3+2ad^2e^2+3b^2e^3-bcde^2-bd^3e+6c^3e^2-8c^2d^2e+3cd^4)\\
&\quad +2c^4d^2-3c^5e-3b^3de^2-4b^2c^2e^2\\
&\quad +7b^2cd^2e-b^2d^4+5bc^3de-4bc^2d^3,\\
u''_0 &= a(-a^2de^3+13abce^3+2abd^2e^2-38ac^2de^2\\
&\qquad +34acd^3e-9ad^5-12b^3e^3+7b^2cde^2-22b^2d^3e\\
&\qquad +34bc^3e^2+8bc^2d^2e-bcd^4-25c^4de+10c^3d^3)+2bs'_{00}-st'_{00}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les covariants correspondants satisfont aux huit relations suivantes, qui correspondent aux huit relations (26) :

$$
(28)\left\{
\begin{gathered}
R^2+HQ^2=U(HPS-JHT-9T^3),\\
2HR-NQ=U(H'S-U'T),\\
NR+2H^2Q=UT(3UT-HS),\\
U'R+2HQS=U(3QT-3S^2T+2HP),\\
U'Q-2RS=UQ',\\
H'R+3HQT=-U(2HS'+3ST^2),\\
H'Q-3RT=-U(U''+ST'),\\
HP+(3Q-S^2)T=-US'.
\end{gathered}
\right.
$$

En différentiant ces équations par rapport à f, on obtiendra

$$
\begin{aligned}
u\frac{dq'}{df} &= u^2q-nu'-4h^2s,\\
u\frac{du''}{df} &= -us\frac{dt'}{df}-uhq+nh'+6h^2t,\\
-u\frac{ds'}{df} &= 2hh'-3nt,
\end{aligned}
$$

d'où, en tenant compte des relations (19), (22), (17), (12),

$$
(29)\left\{
\begin{aligned}
\frac{dq'}{df} &= u(2q-s^2)+6ht, & \frac{d^2q'}{df^2} &= -2un,\\
\frac{du''}{df} &= 2(-hq+hs^2-ust), & \frac{d^2u''}{df^2} &= -2hn,\\
\frac{ds'}{df} &= -r, & \frac{d^2s'}{df^2} &= -2h^2,
\end{aligned}
\right.
$$

et, par conséquent, les valeurs complètes des péninvariants q',

u'', s' seront

$$(30)\quad \begin{cases} q' = -unf^2 + [u(2q_0 - s^2) + 6ht]f + q'_0, \\ u'' = + hnf^2 + 2(-hq_0 + hs^2 - ust)f + u''_0, \\ s' = -h^2f^2 - r_0 f + s'_0. \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu, en tout, quinze formes distinctes, y compris U, H, N, S, T et U′, avec seize syzygies qui les relient entre elles. On pourrait continuer de la même manière et obtenir, de proche en proche, les huit formes distinctes qui restent à définir pour avoir le système complet : on aperçoit, en effet, à l'inspection des relations (27), que q' et p, $u'' + st'$ et s' forment deux couples nouveaux, lesquels, combinés entre eux et avec les quatre couples déjà trouvés (h, n), (s, u'), (t, h'), (q, r), permettent d'écrire immédiatement vingt nouvelles identités analogues à (26), et d'obtenir, par conséquent, vingt nouvelles syzygies entre des invariants et covariants, dont quelques-uns pourront être nouveaux; avec ceux-ci, on continuerait de la même manière jusqu'à ce que toutes les combinaisons possibles ne donnent plus que des quotients pouvant s'exprimer au moyen des résidus déjà connus : le système des résidus sera alors complet, et tous les péninvariants distincts pourront s'exprimer en fonction de ces résidus et des cinq péninvariants u, h, n, s, t. Mais je ne poursuivrai pas plus loin ces calculs, qui se compliquent de plus en plus et ne pourraient que conduire à des résultats déjà connus et plus faciles à obtenir par d'autres méthodes. Je me bornerai à faire remarquer que les résidus distincts successivement trouvés se groupent par couples, tels que, des deux covariants correspondants, l'un est toujours le jacobien de l'autre et de la forme primitive U. C'est ce qu'il était aisé de prévoir; car, si un certain covariant distinct est

$$V = vx^p + pvx^{p-1}y + \ldots,$$

le jacobien W de U et de V aura pour source

$$w = mp.a - pv.b,$$

expression qui se réduit à $-pbv$ dans l'hypothèse $a = 0$; les résidus v_0, w_0 de ces deux covariants donneront donc pour $a = 0$

deux restes v_{00}, w_{00} liés par la relation

$$w_{00} = -pbv_{00},$$

en sorte que les covariants composés

$$W^2 + p^2 HV^2, \quad 2HW + pNV, \quad NW - 2pH^2V$$

seront nécessairement divisibles par U. Et si Z est le jacobien de W et de U, on aura de même

$$z_{00} = -(p+m-2)bw_{00} = p(p+m-2)b^2 v_{00} = -p(p+m-2)h_0 v_{00},$$

ce qui entraîne

$$Z = -p(p+m-2)HV + UZ',$$

Z′ étant une fonction de covariants plus simples ; en sorte que, si V et W sont des formes distinctes, il ne peut en être de même de Z, et que la considération de ces deux formes donne bien lieu à un couple et non à une série indéfinie de formes distinctes.

4. Reprenons l'expression (2), en remplaçant a_m par le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ de deux variables, et multipliant par η^p pour établir l'homogénéité :

$$(31) \qquad v = v_0\xi^p + pv_1\xi^{p-1}\eta + \frac{p(p-1)}{1.2}v_2\xi^{p-2}\eta^2 + \ldots + v_p\eta^p.$$

Telle sera l'expression générale d'un péninvariant dans lequel a_m entre à la puissance p; je dirai que le résidu v_p d'un tel péninvariant est de rang p. Pour revenir à la forme (2), il suffit de remplacer ξ par a_m et η par l'unité.

Tous les péninvariants relatifs à la forme binaire U_m d'ordre m deviennent, à ce point de vue, des formes binaires de divers ordres par rapport aux variables ξ, η (à l'exception de ceux qui étaient en même temps relatifs à la forme U_{m-1} d'ordre $m-1$, et qui ne renferment pas ces variables). La considération de ces formes donne lieu au théorème suivant :

Tout invariant ou covariant d'un ou plusieurs péninvariants relatifs à U_m, considérés comme formes binaires aux variables ξ, η, est encore un péninvariant relatif à U_m.

En effet, soient

$$v = v_0 \xi^p + p v_1 \xi^{p-1} \eta + \ldots + v_p \eta^p,$$
$$v' = v'_0 \xi^q + q v'_1 \xi^{q-1} \eta + \ldots + v'_q \eta^q,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

divers péninvariants relatifs à U_m et w un invariant ou covariant du système composé de ces formes en ξ, η. Comme l'a montré M. Cayley, w peut être défini comme satisfaisant à la condition

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta \frac{dw}{d\xi} &= v_0 \frac{dw}{dv_1} + 2 v_1 \frac{dw}{dv_2} + \ldots \\ &\quad + p v_{p-1} \frac{dw}{dv_p} + v'_0 \frac{dw}{dv'_1} + \ldots + q v'_{q-1} \frac{dw}{dv'_q} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Mais on a, en vertu de (5),

$$\frac{dv_1}{d\zeta} = - \quad m a_{m-1} v_0,$$
$$\frac{dv_2}{d\zeta} = - 2 m a_{m-1} v_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dv'_1}{d\zeta} = - \quad m a_{m-1} v'_0,$$
$$\frac{dv'_2}{d\zeta} = - 2 m a_{m-1} v'_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La condition (32) peut donc s'écrire

$$-m a_{m-1} \eta \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dv_1} \frac{dv_1}{d\zeta} + \frac{dw}{dv_2} \frac{dv_2}{d\zeta} + \ldots + \frac{dw}{dv'_1} \frac{dv'_1}{d\zeta} + \frac{dw}{dv'_2} \frac{dv'_2}{d\zeta} + \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que

$$(33) \qquad - m a_{m-1} \eta \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{d\zeta},$$

puisque, pour effectuer l'opération $\frac{d}{d\zeta}$, il est indifférent de l'effectuer directement sur les coefficients a_1, a_2, ..., a_{m-1}, ou de l'effectuer avec l'intermédiaire de fonctions déterminées v_0, v_1, ..., v'_0, v'_1, ... de ces coefficients; et que pour v_0, v'_0, ... on a d'ailleurs

$$\frac{dv_0}{d\zeta} = 0, \quad \frac{dv'_0}{d\zeta} = 0, \quad \ldots.$$

Soit maintenant

$$w = w_0 \xi^r + r w_1 \xi^{r-1} \eta + \frac{r(r-1)}{1.2} w_2 \xi^{r-2} \eta^2 + \ldots + w_r \eta^r$$

le covariant w : en lui appliquant la condition (33) et égalant séparément à zéro les coefficients de ξ^r, $\xi^{r-1}\eta$, $\xi^{r-2}\eta^2$, ..., il vient le système de relations

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{d\zeta} &= 0, \\ -\ m a_{m-1} w_0 &= \frac{dw_1}{d\zeta}, \\ -2 m a_{m-1} w_1 &= \frac{dw_2}{d\zeta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -r m a_{m-1} w_{r-1} &= \frac{dw_r}{d\zeta}, \end{aligned}$$

lequel n'est autre que le système (5), et exprime, par conséquent, que w est un péninvariant relatif à U_m.

Ce théorème permet d'obtenir un grand nombre de syzygies entre les invariants et covariants de U_m, lorsqu'on connaît les expressions de ces invariants et des sources de ces covariants en fonction de ξ, η et des résidus distincts. Si l'on construit, par exemple, un invariant de ce système de formes en ξ, η, on aura, d'après le théorème, un péninvariant relatif à U_m, mais qui, ne contenant plus a_m, sera en même temps relatif à U_{m-1}; l'expression ainsi formée, dans laquelle entreront les résidus d'un certain nombre de covariants de U_m, sera donc égale à une autre expression ne contenant que ceux de U_{m-1}; et qui sera, par conséquent, connue, aux coefficients numériques près, à cause de la double condition d'homogénéité pour le degré et pour l'ordre : il ne restera plus qu'à déterminer les valeurs des coefficients numériques en choisissant convenablement des cas particuliers. Je donnerai plus loin quelques exemples d'application de cette méthode à la recherche de nouvelles syzygies.

Puisque tout invariant et covariant d'un système de péninvariants de U_m, considérés comme formes indépendantes en ξ, η, est un péninvariant de U_m, on peut se proposer de construire le système *le plus simple* de péninvariants de U_m qui fournisse, par ses invariants et covariants par rapport à ξ, η, le système *complet* des péninvariants distincts de U_m. Je montrerai plus loin que, pour $m=2$, 3 ou 4, ce système le plus simple est celui des invariants de U_m, en y ajoutant la forme linéaire η, qui doit être nécessairement introduite, puisque l'on sait que la dérivée par rapport à ξ de tout péninvariant est encore un péninvariant. Il serait intéressant de savoir s'il existe un système simple analogue pour les formes binaires d'ordre supérieur à 4.

5. J'ai défini, plus haut, un résidu de *rang p*, comme étant le résidu d'un péninvariant d'ordre p en ξ, η : c'est le coefficient de η^p dans le développement de ce péninvariant. Il est évident que le coefficient de $\xi\eta^{p-1}$ dans ce développement sera un résidu de rang $p-1$, car ce sera le résidu du péninvariant d'ordre $p-1$ en ξ et η qui se déduit du précédent en prenant la dérivée par rapport à ξ; et, en général, la fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$, qui multiplie $\xi^q\eta^{p-q}$ dans le développement d'un péninvariant d'ordre p, sera un résidu de rang q; les résidus de rang zéro seront les péninvariants relatifs à la fois à U_m et à U_{m-1}. Le système des relations (5) montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ soit un résidu de rang q est que, en lui appliquant l'opération $\dfrac{d}{d\zeta}$, on obtienne le produit de a_{m-1} par un résidu de rang $q-1$.

Ceci posé, je vais démontrer le théorème suivant :

Tout résidu de rang q, relatif à l'ordre $p+1$ et construit avec les coefficients d'un péninvariant v d'ordre p en ξ, η, est aussi un résidu de rang $(p+1)q$ par rapport à la forme U_m.

Supposons, en effet, le péninvariant mis sous la forme (31). Le résidu w_q de rang q, construit avec $v_0, v_1, \ldots, v_p$ comme se rapportant à une forme d'ordre $p+1$, satisfera, d'après (5), à la condition

$$v_0\frac{dw_q}{dv_1}+2v_1\frac{dw_q}{dv_2}+\ldots+pv_{p-1}\frac{dw_q}{dv_p}=-(p+1)qv_pw_{q-1},$$

w_{q-1} étant un résidu de rang $q-1$ construit aussi avec $v_0, v_1, \ldots, v_p$. Multipliant les deux membres de cette relation par $-ma_{m-1}$, et remplaçant, comme dans la démonstration du théorème de l'article précédent, $-ma_{m-1}v_0$ par $\dfrac{dv_1}{d\zeta}$, $-2ma_{m-1}v_1$ par $\dfrac{dv_2}{d\zeta}$, $\ldots$, il vient

$$\frac{dw_q}{dv_1}\frac{dv_1}{d\zeta}+\frac{dw_q}{dv_2}\frac{dv_2}{d\zeta}+\ldots+\frac{dw_q}{dv_p}\frac{dv_p}{d\zeta}=m(p+1)qa_{m-1}v_p w_{q-1};$$

c'est-à-dire

$$\frac{dw_q}{d\zeta}=m(p+1)qa_{m-1}v_p w_{q-1}.$$

Comme v_p est un résidu de rang p par rapport à U_m, cette relation montre que le théorème, étant supposé vrai pour w_{q-1}, le sera encore pour w_q : car w_{q-1} étant, par hypothèse, un résidu du rang $(p+1)(q-1)$ par rapport à U_m, $v_p w_{q-1}$ sera un résidu de rang $p+(p+1)(q-1)$, et w_q qui par l'opération $\frac{d}{d\zeta}$ donne a_{m-1}, multiplié par ce résidu, sera lui-même un résidu de rang

$$p+(p+1)(q-1)+1,$$

c'est-à-dire $(p+1)q$. Or le théorème est évidemment vrai pour $q=1$: il est donc démontré pour toute valeur de q.

Ce théorème peut servir, comme le précédent, mais moins simplement, à obtenir de nouvelles syzygies, à condition qu'on ne l'applique qu'à former des résidus de péninvariants dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de ξ ne soit pas simplement une puissance de v_0. Car dans l'expression (31) tout coefficient v_q est par rapport à U_m un résidu de rang égal à son indice; toute fonction isobarique de ces coefficients sera donc par rapport à U_m un résidu de rang égal à son poids π. La circonstance que cette fonction est un résidu de rang q relatif à l'ordre $p+1$ n'entraînera donc une réduction dans son rang comme résidu par rapport à U_m que si $(p+1)q<\pi$, et c'est cette réduction seule qui entraîne l'existence d'une syzygie. Or on voit facilement qu'un résidu de rang q par rapport à une forme d'ordre $(p+1)$ est de poids $(p+1)q+\lambda$, λ étant le poids du coefficient de ξ^q dans le péninvariant complet correspondant. La condition

$$\pi>(p+1)q$$

revient donc à celle-ci, $\lambda>0$, ce qui exclut les résidus de péninvariants dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de ξ serait simplement une puissance de v_0.

6. Je vais appliquer les notions précédentes au cas de $m=2$, $m=3$ et 4.

Pour $m=2$, la forme $U_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ n'a qu'un invariant $D = a\xi - b^2\eta$; en le combinant avec la forme linéaire η, on n'obtient que le jacobien a, péninvariant commun à U_2 et à U_1.

Pour $m=3$, la forme $U_3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ n'a qu'un invariant, savoir son discriminant

$$\Delta = a^2\xi^2 + 2(2b^3 - 3abc)\xi\eta + (4ac^3 - 3b^2c^2)\eta^2;$$

en y ajoutant la forme linéaire η, on obtient tous les péninvariants distincts, savoir :

Jacobien de Δ et de η... $n = a^2\xi + (2b^3 - 3abc)\eta$,
Résultant de Δ et de η. $u^2 = a^2$,
Discriminant de Δ..... $(2b^3 - 3abc)^2 - a^2(4ac^3 - 3b^2c^2)$
$= -4(ac - b^2)^3 = -4h^3$.

n est la source du covariant cubique; a et $h = ac - b^2$, trouvés comme invariants du système en ξ, η, sont les sources de la forme elle-même et de son hessien, c'est-à-dire des péninvariants communs à U_2 et à U_3.

Pour $m=4$, la forme primitive

$$U_4 = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

possède les deux invariants S et T, dont les expressions en fonction de ξ et η sont

$$S = a\xi + (3c^2 - 4bd)\eta,$$
$$T = h\xi + (2bcd - ad^2 - c^3)\eta,$$

h désignant comme ci-dessus le péninvariant $ac - b^2$.

En ajoutant à ces deux formes linéaires la forme linéaire η, on n'obtient aucun covariant, mais seulement les trois résultants de ces trois formes prises deux à deux, savoir :

$$(S, \eta) = a,$$
$$(T, \eta) = h,$$
$$(T, S) = \Delta,$$

Δ étant le discriminant de U_3 et, par suite, un péninvariant commun à U_3 et à U_4.

Il est à remarquer toutefois que nous n'obtenons pas la source n du covariant N du quatrième ordre. Au point de vue où nous nous sommes placés, n serait un invariant gauche du système des trois formes linéaires S, T, η ; un tel invariant n'existe pas, en général, lorsque les trois formes linéaires considérées ont leurs coefficients absolument indépendants.

L'élimination de ξ entre S et T donne

$$hS - uT = \Delta\eta,$$

c'est-à-dire l'expression de Δ en fonction de covariants plus simples.

Et, en général, lorsqu'on aura deux péninvariants distincts linéaires par rapport à ξ et η, l'élimination de ξ fournira immédiatement une syzygie entre ces péninvariants et ceux qui appartiennent à la forme d'ordre $m-1$; c'est d'ailleurs un cas particulier du procédé déjà indiqué, par la formation d'invariants du système en ξ, η.

7. J'arrive à quelques applications du théorème du n° 4 à l'étude des invariants et covariants de la forme binaire U_5 du cinquième ordre.

Nous avons trouvé plus haut les expressions suivantes pour quinze des vingt-trois péninvariants distincts relatifs à cette forme :

1° Péninvariants communs à U_5 et à U_4 :

u, h, s, t, n (formules 7);

n est le seul qui soit gauche, c'est-à-dire de poids impair.

2° Péninvariants spéciaux à U_5 :

$$(34)\quad \begin{cases} u' = u^2\xi + u'_0\eta, \\ J = u^2\xi^2 + 2u'_0\xi\eta + J_0\eta^2, \\ h' = uh\xi + h'_0\eta, \\ q = -n\xi + q_0\eta, \\ r = 2h^2\xi + r_0\eta, \\ t' = (3ut - 2hs)\xi + t'_0\eta, \\ p = uh\xi^2 + 2h'_0\xi\eta + p_0\eta^2, \\ q' = -un\xi^2 + (2uq_0 - us^2 + 6ht)\xi\eta + q'_0\eta^2, \\ u'' = +hn\xi^2 + 2(-hq_0 + hs^2 - ust)\xi\eta + u''_0\eta^2, \\ s' = -h^2\xi^2 - r_0\xi\eta + s'_0\eta^2. \end{cases}$$

On peut y ajouter celles-ci :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K} &= hn\xi^3 + (3ust - hs^2 - 3hq_0)\xi^2\eta + (4st'_0 + 3u''_0)\xi\eta^2 + \mathrm{K}_0\eta^3,\\ \mathrm{L} &= h^2(hs - ut)\xi^4 + 2[(hs - ut)r_0 - nt^2]\xi^3\eta\\ &\quad + [6(ut - hs)s'_0 + 6q_0t^2 - 5s^2t^2]\xi^2\eta^2\\ &\quad + 2(st''_0 + 2ts''_0)\xi\eta^3 + \mathrm{L}_0\eta^4, \end{aligned}\right.$$

qui se déduisent facilement des précédentes et des formules que j'ai données ailleurs pour l'expression des invariants K et L du huitième et du douzième degré, ainsi que de s'' et t'', savoir :

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} u\mathrm{K} &= \mathrm{J}st - 12s't - p(q + s^2),\\ 3u\mathrm{L} &= (p^2 + 4\mathrm{J}s' - \mathrm{K}s)t - 3pss',\\ us'' &= u's' + h'p - hp' + s^2t',\\ ut'' &= -2h's' - 3tu'' - 3stt'. \end{aligned}\right.$$

Formons, comme première application, le discriminant de s' considéré comme forme binaire quadratique en ξ, η. Ce sera

$$r_0^2 + 4h^2s'_0.$$

Puisque cette quantité est un invariant du système en ξ, η, elle doit pouvoir s'exprimer en fonction de u, h, n, s, t; et, par suite, il en sera de même du péninvariant

$$r^2 + 4h^2s'.$$

Mais le covariant correspondant étant droit, de degré 10 et d'ordre 14, il faut que l'on ait

$$r^2 + 4h^2s' = \alpha ut^3 + \beta us^3t + \gamma hst^2 + \delta hs^4,$$

α, β, γ, δ étant des coefficients *numériques*, car ce sont les seules combinaisons possibles de u, h, n, s, t.

Pour déterminer α, β, γ, δ, supposons $h = 0$; la première relation (19) donne $u^2r^2 = 9n^2t^2 = -9u^3t^3$, à cause de la syzygie bien connue

$$n^2 + 4h^3 = u^2hs - u^3t;$$

r^2 doit donc se réduire à $-9ut^3$, ce qui exige $\alpha = -9$, $\beta = 0$. Faisant ensuite $t = 0$, on trouve, à cause de $ur = 2hh'$, $h'^2 = uhp$, $us' = -hp$ [relations (19), (21) et (28) pour $t = 0$], que $\delta = 0$. Faisant enfin $u = 0$, et tenant compte de la première relation (28), on voit que

$$-q^2 + 4hs' - \gamma st^2$$

doit se réduire à zéro pour $a = 0$; considérant le terme en c^8, on trouve $\gamma = -3$. La syzygie cherchée est donc

$$R^2 + 4H^2S' = -3T^2(HS + 3UT), \tag{37}$$

et, en la comparant avec la première des syzygies (28), on trouve celle-ci

$$Q^2 - 3ST^2 - 4HS' = U(PS - JT), \tag{38}$$

que j'ai donnée aussi ailleurs.

Comme second exemple, formons le résultant de r et de t', qui devra être égal à une fonction de u, h, n, s, t. On aura donc

$$2h^2t' - 3urt + 2hrs = n(\alpha s^3 + \beta t^2),$$

puisque le covariant ayant pour source le premier membre est gauche, de degré 9 et d'ordre 15 ; ce qui entraîne la forme donnée au second membre.

Pour déterminer α, faisons $t = 0$; t' devient $-\frac{2h's}{u}$ en vertu de (19), ur devient de même $2hh'$, et l'on a $\alpha = 0$.

Pour déterminer β, faisons $s = 0$; t' devient $\frac{3u't}{u}$, ur devient $2hh' - 3nt$, et, à cause de $uh' - hu' = 0$, il vient $\beta = 9$. La syzygie cherchée est donc

$$2H^2T' + 2HRS - 3URT - 9NT^2 = 0,$$

et, si l'on y remplace UR par sa valeur $2HH' - 3NT$ et qu'on divise par $2H$, elle se réduit à celle-ci, que j'ai également donnée ailleurs,

$$RS + HT' - 3H'T = 0. \tag{39}$$

Je bornerai ici ces applications, en faisant remarquer, pour terminer, que les propriétés énoncées pour les résidus des péninvariants relatifs à une forme binaire unique s'étendent sans difficulté au cas d'un système de plusieurs formes binaires indépendantes, en considérant alors comme résidu ce que devient la source d'un covariant ou invariant de ce système, quand on y suppose nul le dernier coefficient de l'une des formes primitives.