BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

Sur un théorème de la théorie générale des fonctions

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 112-125
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__112_1>

Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions; par M. H. Poincaré.

(Séance du 18 mai 1883.)

Voici le théorème que je me propose de démontrer :

Soit y une fonction analytique quelconque de x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z.

Pour démontrer ce résultat, je me servirai du beau théorème de M. Schwarz (*Monatsberichte,* octobre 1870), connu sous le nom de *Principe de Dirichlet.* Voici quel en est l'énoncé :

Appelons ξ et η les parties réelle et imaginaire de x.

Étant donné un contour quelconque C *sur un plan ou sur une surface de Riemann, on peut toujours trouver une fonction u de ξ et de η qui satisfasse à l'équation*

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0,$$

qui reste holomorphe à l'intérieur de C *et qui prenne des valeurs données le long de* C.

Je dirai qu'une fonction u devient logarithmiquement infinie au point $\xi = a$, $\eta = b$ quand la différence

$$u + \mathrm{L}\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2}$$

reste holomorphe dans le voisinage de ce point.

En vertu du théorème de M. Schwarz, on pourra aussi trouver une fonction u qui satisfera à l'équation $\Delta u = 0$, qui prendra des valeurs données le long de C et qui restera holomorphe à l'intérieur de C, à l'exception de un ou plusieurs points donnés où elle deviendra logarithmiquement infinie.

Formation de la surface de Riemann S.

Considérons m fonctions de x,

$$(1) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_m,$$

analytiques, non uniformes en général. Ces fonctions seront complètement définies lorsque l'on connaîtra, non seulement la valeur de x, mais encore le chemin par lequel la variable x a atteint cette valeur en partant du point initial O.

Nous considérerons la variable x comme se mouvant non sur un plan, mais sur une surface de Riemann S. Cette surface sera formée de feuillets plans superposés comme dans les surfaces de Riemann, à l'aide desquelles on étudie les fonctions algébriques : seulement ici le nombre des feuillets sera infini.

Traçons dans le plan un contour fermé quelconque C partant d'un point initial x quelconque et revenant finir à ce même point x. Là surface S sera complètement définie, si nous disons à quelles conditions le point initial et le point final de ce contour devront être regardés comme appartenant à un même feuillet ou à des feuillets différents.

Or il y a deux sortes de contours C :

1° Ceux qui sont tels que l'une au moins des m fonctions y ne revient pas à sa valeur initiale quand la variable x décrit le contour C;

2° Ceux qui sont tels que les m fonctions y reviennent à leurs valeurs initiales quand la variable x décrit le contour C.

Parmi les contours de la deuxième sorte, je distinguerai encore deux espèces :

1° C sera de la première espèce, si l'on peut, en déformant ce contour d'une façon continue, passer à un contour infinitésimal de telle façon que le contour ne cesse jamais d'être de la seconde sorte;

2° C sera de la seconde espèce dans le cas contraire.

Eh bien, le point initial et le point final de C appartiendront à des feuillets différents si ce contour est de la première sorte, ou de la seconde espèce de la seconde sorte. Ils appartiendront au même feuillet si C est de la première espèce de la seconde sorte (*voir* Note I, p. 125).

La surface de Riemann est alors complètement définie. Elle est simplement connexe et ne diffère pas, au point de vue de la Géométrie de situation, de la surface d'un cercle, d'une calotte sphérique ou d'une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes.

Définition des contours C.

Notre surface de Riemann S étant simplement connexe, nous pourrons y tracer une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point O. Par chacun des points de la surface S (excepté par le point O) passera un de ces contours C et un seul.

Voici, d'ailleurs, comment on peut se rendre compte de la disposition de ces contours C. Considérons un cercle K ayant pour centre le point O et de rayon assez petit pour que les m fonctions y soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle et même sur sa circonférence. On tracera ensuite une infinité de cercles C intérieurs et concentriques à K. Des différents points de la circonférence de K comme centres nous décrirons des cercles K' assez petits pour que les fonctions y restent holomorphes à l'intérieur de chacun d'eux et sur sa circonférence. Soit K_1 la portion de l'enveloppe des cercles K' qui est extérieure à K. La portion des cercles K' qui est extérieure à K recouvrira une région annulaire limitée par K et K_1, et l'on pourra sillonner cette région d'une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant K. Des divers points de K_1 comme centres, nous décrirons des cercles K'' assez petits pour que les fonctions y restent holomorphes à l'intérieur de chacun d'eux et sur sa circonférence. Soit K_2 la portion de l'enveloppe des cercles K'' qui est extérieure à K_1. La portion des cercles K'' qui est extérieure à K_1 couvrira une région annulaire limitée par K_1 et K_2, et l'on pourra sillonner cette région d'une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant K_1, et ainsi de suite. On voit qu'on aura construit ainsi une infinité de contours fermés C, tels que par chaque point de la surface S passe un de ces contours et un seul.

Parmi ces contours C, j'en choisirai une infinité

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots.$$

tels que C_{n+1} enveloppe C_n et que tout point de la surface de Riemann soit intérieur à un des contours C_n.

Définition de la fonction y_m.

Soient k le module d'une fonction elliptique, K et K' ses périodes. Définissons l'algorithme φ par la relation suivante :

$$\frac{K'}{K} = \varphi(k^2).$$

On sait que la fonction φ est holomorphe, sauf pour

$$k^2 = 0, \quad k^2 = 1, \quad k^2 = \infty,$$

et qu'elle ne peut prendre que des valeurs dont la partie imaginaire est positive.

Soit ψ une fonction de x définie par l'équation

$$\psi = \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) - \sqrt{-1}}{\varphi\left(\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) + \sqrt{-1}}.$$

La fonction ψ a son module constamment plus petit que 1, et elle est holomorphe, sauf pour (*voir* Note II, p. 125)

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad x = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma}.$$

Je supposerai de plus que β et δ aient été choisis de telle sorte que

$$\varphi\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \sqrt{-1},$$

de telle façon que ψ s'annule pour $x = 0$.

Je supposerai que la fonction y_m, la dernière du Tableau (1), soit précisément ψ. Si cela n'était pas, et si ψ ne faisait pas partie du Tableau (1), on l'y adjoindrait.

Posons maintenant

$$t = \log \bmod \frac{1}{\psi}.$$

La fonction t satisfera à l'équation $\Delta t = 0$. Elle sera essentiellement positive, et elle deviendra logarithmiquement infinie au point O et en divers autres points de la surface S, points que nous appellerons $O_1, O_2, \ldots$.

Définition des fonctions u_n.

J'appellerai u_n une fonction qui est assujettie à satisfaire à l'équation $\Delta u_n = 0$, à s'annuler le long du contour C_n et à rester holomorphe à l'intérieur de ce contour, sauf au point O où elle devient logarithmiquement infinie.

Pour étudier les propriétés de cette fonction, je m'appuierai sur le théorème suivant, bien connu :

Si une fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$, *si elle est positive le long d'un contour* C; *si de plus, en tous les points intérieurs à ce contour, elle est ou holomorphe ou logarithmiquement infinie, elle sera positive en tous les points intérieurs au contour* C.

De là, on déduit que les fonctions u_n, $u_{n+1} - u_n$ et $t - u_n$ sont positives à l'intérieur du contour C_n.

Ainsi, en un point quelconque de la surface de Riemann S, la fonction u_n est constamment croissante avec n et constamment plus petite que t. Elle tend donc vers une limite finie u quand n croît indéfiniment.

En d'autres termes, la série

$$(2) \qquad u = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + \ldots$$

est convergente.

Emploi des fonctions t_i.

Cette démonstration ne s'appliquerait pas aux points O_1, O_2, ..., où la fonction t devient infinie pendant que u_n reste finie. En effet, t devenant infinie, nous n'aurions plus de limite supérieure pour u_n. Considérons, par exemple, le point O_i et de ce point comme centre décrivons un cercle K_i ne contenant aucun autre point singulier. On pourra construire une fonction t_i qui satisfera à l'équation $\Delta t_i = 0$, qui deviendra égale à t le long de K_i, et qui sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle. Cela posé, la fonction $t_i - u_n$ sera positive à l'intérieur de K_i; par conséquent, même au point O_i, nous aurons une limite supérieure de u_n, qui sera t_i.

Continuité de la fonction u.

Il faut démontrer maintenant que u est une fonction continue de ξ et de η. Pour cela, je m'appuierai sur le théorème suivant, facile à démontrer :

Si u est fonction de ξ et de η qui, à l'intérieur d'un cercle K *de rayon* R, *satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et reste constamment comprise entre* O *et* A (A *étant une constante positive*), *ses dérivées $\frac{du}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta}$ à l'intérieur d'un cercle k de rayon r et concentrique à* K *resteront plus petites en valeur absolue que*

$$\frac{4AR^2}{(R-r)^2}.$$

Considérons donc deux cercles concentriques quelconques K et k ne contenant aucun point singulier. Soit A la plus grande valeur que puisse prendre la fonction t à l'intérieur de K, nous aurons à l'intérieur de k (et cela quel que soit n)

$$\left|\frac{du_n}{d\xi}\right| < \frac{4AR^2}{(R-r)^2} > \left|\frac{du_n}{d\eta}\right|.$$

Considérons maintenant deux points x' et x'', situés à l'intérieur de k, et soient u'_n et u''_n, u' et u'' les valeurs correspondantes de u_n et de u. Je dis que l'on pourra prendre la distance ρ des points x'

et x'' assez petite pour que l'on ait

$$| u' - u'' | < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

En effet, nous aurons, quel que soit n,

$$| u'_n - u''_n | < \frac{4AR^2\sqrt{2}}{(R-r)^2}\rho.$$

Nous pourrons donc toujours prendre ρ assez petit pour que l'on ait, quel que soit n,

$$| u'_n - u''_n | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Les points x' et x'' sont alors déterminés. Nous pourrons prendre alors n assez grand pour que

$$| u' - u'_n | < \frac{\varepsilon}{3}, \quad | u'' - u''_n | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura alors

$$| u' - u'' | < \varepsilon,$$

C. Q. F. D.

Ainsi u est une fonction continue de ξ et de η.

Uniformité de la convergence.

Nous avons vu que la série (2) est convergente, mais cela ne suffirait pas pour ce que nous avons en vue; il faut encore faire voir qu'elle est uniformément convergente (*gleichmässig*). En d'autres termes, il faut montrer qu'autour de chacun des points de la surface de Riemann S on peut trouver une région P jouissant de la propriété suivante; on pourra prendre n assez grand pour que la différence $u - u_n$ reste plus petite que ε à l'intérieur de la région P, et cela quelque petit que soit ε. Pour cela, il suffit de montrer qu'on peut toujours prendre n assez grand pour que la différence $u_{n+p} - u_n$ reste plus petite qu'une quantité donnée ε pour tous les points de P et quel que soit le nombre positif p.

En effet, prenons pour région P un carré intérieur au cercle k, et dont les côtés soient parallèles aux axes des ξ et des η.

Soit l le côté du carré. Partageons le carré P en h^2 carrés égaux par $h - 1$ parallèles équidistantes menées à chacun de ces côtés;

les côtés de ces petits carrés seront $\frac{l}{h}$. Considérons un quelconque de ces petits carrés; soient x' le centre de ce petit carré et x'' un point quelconque intérieur à ce même petit carré; on aura

$$\operatorname{mod}(x' - x'') < \frac{l}{h\sqrt{2}}.$$

Soient u', u''; u'_n, u''_n; u'_{n+p}, u''_{n+p} les valeurs correspondantes de u, u_n et u_{n+p}; je dis qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$u''_{n+p} - u''_n < \varepsilon.$$

Cela suffira pour démontrer le théorème énoncé, puisque x'' est un point quelconque du carré P.

On aura évidemment, quels que soient n et p,

$$| u''_{n+p} - u''_n - u'_{n+p} + u'_n | < \frac{8\,\mathrm{AR}^2}{(\mathrm{R} - r)^2}\,\frac{l}{h}.$$

On pourra donc prendre le nombre entier h assez grand pour que l'on ait, quels que soient n et p,

$$| u''_{n+p} - u''_n - u'_{n+p} + u'_n | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le nombre h est désormais déterminé. Formons la somme des h^2 quantités u'_n, $\Sigma u'_n$: elle aura évidemment pour limite $\Sigma u'$; on pourra donc prendre n assez grand pour que

$$\Sigma u' - \Sigma u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura alors

$$u'_{n+p} - u'_n < u' - u'_n < \Sigma(u' - u'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, enfin,

$$u''_{n+p} - u''_n < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La série (2) est donc uniformément convergente.

Propriétés de la fonction u.

Je dis que la fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et est holomorphe si ce n'est au point O. En effet, considérons un contour c quelconque intérieur à P. La fonction u étant continue, nous pourrons construire une fonction U holomorphe à l'intérieur de c et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\Delta U = 0 \text{ à l'intérieur de } c, \quad U = u \text{ le long de } c.$$

Nous pourrons toujours prendre n assez grand pour que $u - u_n$ reste plus petit que ε le long de c. On aura alors

$$U - u_n < \varepsilon$$

le long de c et, par conséquent, à l'intérieur de c. On aura donc

$$U = \lim u_n \quad \text{pour} \quad n = \infty$$

ou

$$U = u.$$

Il suit de là que la fonction u est holomorphe comme U et satisfait à l'équation $\Delta u = 0$.

La démonstration précédente ne s'appliquerait pas au cas où l'un des points O_i se trouverait à l'intérieur du cercle K, car alors la fonction t deviendrait infinie à l'intérieur de ce cercle; mais on tournerait la difficulté en remplaçant t par t_i. Il n'y aurait rien d'ailleurs à changer aux démonstrations précédentes, il n'y aurait qu'à changer partout t en t_i. Ainsi la fonction u est holomorphe, même aux points O_1, O_2, ...

On démontrerait de même que la fonction u devient logarithmiquement infinie au point O.

Considérons un cercle K' de rayon R' intérieur au carré P, et un cercle k' de rayon r' intérieur et concentrique à K'. On pourra toujours prendre n assez grand pour que

$$u - u_n < \varepsilon$$

pour tous les points intérieurs à K'. On aura alors, à l'intérieur de k',

$$\left| \frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi} \right| < \frac{4\varepsilon R'^2}{(R' - r')^2} > \left| \frac{du}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta} \right|.$$

Donc on peut prendre n assez grand pour que les valeurs absolues des différences $\frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}$ soient plus petites qu'une quantité donnée α pour tous les points intérieurs à k'.

Considérons maintenant une région quelconque G : je dis qu'on pourra prendre n assez grand pour que les inégalités

$$\left|\frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}\right| < \alpha > \left|\frac{du}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}\right| \tag{3}$$

subsistent pour tous les points de G. En effet, nous pourrons décomposer la région G en un nombre fini de régions partielles assez petites pour que chacune d'elles soit contenue dans un cercle tel que k'; alors nous pourrons prendre n assez grand pour que, dans chacune de ces régions partielles, les inégalités proposées soient satisfaites. En donnant à n la plus grande des valeurs ainsi obtenues, les inégalités auront lieu dans toute la région G.

En d'autres termes, les séries

$$\frac{du_1}{d\xi} + \left(\frac{du_2}{d\xi} - \frac{du_1}{d\xi}\right) + \ldots + \left(\frac{du_{n+1}}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}\right) + \ldots,$$

$$\frac{du_1}{d\eta} + \left(\frac{du_2}{d\eta} - \frac{du_1}{d\eta}\right) + \ldots + \left(\frac{du_{n+1}}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}\right) + \ldots$$

sont *uniformément convergentes* et ont pour sommes $\frac{du}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta}$.

Définition des fonctions v et v_n.

Nous définirons les fonctions v et v_n par les équations

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{du}{d\eta}, \quad \frac{dv}{d\eta} = \frac{du}{d\xi},$$

$$\frac{dv_n}{d\xi} = -\frac{du_n}{d\eta}, \quad \frac{dv_n}{d\eta} = \frac{du_n}{d\xi}.$$

Ces équations sont compatibles à cause des relations

$$\Delta u = \Delta u_n = 0.$$

Nous achèverons de définir les fonctions v et v_n en leur imposant de s'annuler pour un certain point A de la surface S, différent du point O. Les fonctions v et v_n, si M est le point (ξ, η), seront alors définies par les intégrales

$$v = \int_A^M \left(\frac{du}{d\xi} d\eta - \frac{du}{d\eta} d\xi \right), \quad v_n = \int_A^M \left(\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi \right).$$

Reprenons la région G, et appelons L le plus grand chemin qu'il faut parcourir sur la surface S pour aller du point A à un point quelconque de G; supposons qu'on ait pris n assez grand pour que les inégalités (3) soient satisfaites; on aura alors

$$| v - v_n | < 2\alpha L,$$

ce qui prouve que la série

$$v_1 + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_{n+1} - v_n) + \ldots$$

est uniformément convergente et a pour somme v.

Définition des fonctions z et z_n.

Nous poserons

$$z = e^{-(u+iv)}, \quad z_n = e^{-(u_n+iv_n)}.$$

Les fonctions v et v_n n'étaient pas entièrement déterminées, car, selon le chemin que l'on prend pour aller de A en M, les valeurs de v, par exemple, peuvent différer d'un multiple de 2π. Si, par exemple, on revient au point A après avoir tourné k fois autour du point O, on a

$$v = v_n = 2k\pi.$$

Au contraire, les fonctions z et z_n sont parfaitement déterminées. On aura

$$\frac{dz}{dx} = \left(- \frac{du}{d\xi} + i \frac{du}{d\eta} \right) e^{-(u+iv)}, \quad \frac{dz_n}{dx} = \left(- \frac{du_n}{d\xi} + i \frac{du_n}{d\eta} \right) e^{-(u_n+iv_n)}$$

ou, en posant $u + iv = \omega$, $u_n + iv_n = \omega_n$,

$$z = e^{-\omega}, \quad z_n = e^{-\omega_n}, \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{d\omega}{dx} e^{-\omega}, \quad \frac{dz_n}{dx} = - \frac{d\omega_n}{dx} e^{-\omega_n}.$$

Nous pouvons prendre n assez grand pour qu'à l'intérieur de la région G on ait à la fois

$$|\omega - \omega_n| < \varepsilon, \qquad \left| \frac{d\omega}{dx} - \frac{d\omega_n}{dx} \right| < \alpha,$$

α et ε étant deux quantités données.

Je dis que si l'on considère un point de G où

$$z \lessgtr a,$$

on pourra prendre n assez grand pour que

$$\left| \frac{\frac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a} \right| < \delta,$$

δ étant une quantité donnée. En effet, on aura identiquement

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a} = \frac{\frac{d\omega_n}{dx} - \frac{d\omega}{dx}}{1 - \frac{a}{z}} + a \frac{d\omega_n}{dx} \frac{z - z_n}{(z-a)(z_n - a)};$$

d'où, si n est assez grand,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \frac{\frac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a} \right| < \frac{\alpha}{\operatorname{mod}\left(1 - \frac{a}{z}\right)} \\ &\qquad + \operatorname{mod} a \left(\operatorname{mod} \frac{d\omega}{dz} + \alpha\right) \frac{\varepsilon}{\operatorname{mod}(z-a)[\operatorname{mod}(z-a) - \varepsilon]}. \end{aligned} \right.$$

Et il est évident qu'on peut prendre ε et α assez petits pour que le second membre soit aussi petit que l'on veut.

Propriétés des fonctions z et z_n.

Il est évident, d'après la définition de la fonction z_n, que cette fonction ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur à l'intérieur du contour C_n. Si donc on prend l'intégrale

$$\int \frac{\frac{dz_n}{dx} dx}{z_n - a},$$

le long d'un contour fermé intérieur à C_n, on aura pour résultat zéro ou $2i\pi$.

Je dis maintenant que la fonction z ne peut prendre deux fois la même valeur. Supposons, en effet, qu'elle prenne la valeur a en deux points B et C; on pourrait toujours construire une région G contenant les points B et C, et ne contenant ni le point O, ni aucun point (autre que B et C) où la fonction z devienne égale à a. On pourrait alors trouver une limite supérieure du module de $\frac{d\omega}{dz}$ et une limite inférieure du module de $z - a$ quand le point x est assujetti à rester sur le périmètre de G; soient λ et μ ces deux limites. On aura aussi

$$\bmod\left(1 - \frac{a}{z}\right) > \mu,$$

puisque le module de z est essentiellement plus petit que 1.

On aura donc, en désignant par L la longueur du périmètre de G et en nous reportant à l'inégalité (4),

$$\left| \int \left(\frac{\frac{dz}{dx}}{z - a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a} \right) dx \right| < \left[\frac{\alpha}{\mu} + \bmod a(\lambda + \alpha) \frac{\varepsilon}{\mu(\mu - \varepsilon)} \right] L,$$

l'intégrale étant prise le long du périmètre de G.

Il s'ensuit qu'on peut prendre n assez grand pour que la valeur absolue de la différence des deux intégrales

$$\int \frac{\frac{dz}{dx}}{z - a}\, dx, \quad \int \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a}\, dx$$

soit aussi petite que l'on veut; or cela est absurde, puisque, si n est assez grand pour que le contour C_n enveloppe G, la première intégrale devrait être égale à $4i\pi$ et la seconde à $2i\pi$ ou à zéro.

L'hypothèse faite au début doit donc être rejetée, et, par conséquent, la fonction z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur. A une valeur de z ne pourra donc correspondre qu'un seul point de la surface S, et par conséquent un seul système de valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m, x$, puisque la surface S a été construite de telle façon que ces fonctions ne puissent avoir qu'une seule valeur en chacun des points de cette surface.

Il résulte de là que $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et x sont des fonctions uniformes de z. C. Q. F. D.

NOTE I.

Il résulte de la manière dont cette surface S a été construite qu'autour de chaque point singulier viennent s'échanger une infinité de feuillets. Nous ne regarderons pas un point singulier comme faisant partie de la surface de Riemann, mais seulement de sa frontière; ainsi, quand nous dirons plus loin que tout point de la surface de Riemann est intérieur à l'un des contours C_n, il va sans dire que tous les points singuliers restent en dehors de tous les contours C_n.

Il résulte, en outre, de la façon dont la surface a été construite, que x et que les fonctions y, leurs intégrales, les intégrales de leurs intégrales, etc., ne peuvent prendre qu'une seule valeur en chacun des points de la surface S.

NOTE II.

Les points $-\frac{\beta}{\alpha}$, $-\frac{\delta}{\gamma}$ et $\frac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}$, étant des points singuliers, sont en dehors de la surface de Riemann.