

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN COMPLEXE DE KOSZUL DE MODULES INSTABLES ET COHOMOTOPIE D'UN SPECTRE DE THOM

Nguyen Dang Ho Hai

**Tome 140
Fascicule 2**

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 257-308

UN COMPLEXE DE KOSZUL DE MODULES INSTABLES ET COHOMOTOPIE D'UN SPECTRE DE THOM

PAR NGUYEN DANG HO HAI

RÉSUMÉ. — Dans [8], les auteurs ont construit une résolution injective minimale d'un module instable dans la catégorie des modules instables *modulo* 2. A partir de cette résolution, un résultat de type conjecture de Segal a été obtenu pour un certain spectre de Thom. Le but de cet article est de refaire ces résultats pour les *premiers impairs*. Etant donné un premier impair p , on construit dans ce travail un complexe de Koszul dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p . Une résolution injective d'un module instable intéressant est obtenue comme cas particulier de ce complexe de Koszul. Ce module instable est la cohomologie modulo p d'un spectre de Thom qui apparaît (à p -complétion près) comme l'un des fibres homotopiques non contractiles dans la tour de Goodwillie du foncteur identité évaluée en la sphère S^3 . Comme application de cette résolution injective, on calcule quelques groupes de cohomotopie de ce spectre à l'aide du travail de S. Zarati [24] sur les foncteurs dérivés du foncteur de déstabilisation.

ABSTRACT (*A Koszul complex of unstable modules and cohomotopy of a Thom spectrum*)

We constructed in [8] a minimal injective resolution of an unstable module over the *modulo* 2 Steenrod algebra. From this resolution, a Segal conjecture-type result was obtained for a certain Thom spectrum. In this paper we propose to study similar problems *modulo odd primes*. Given p an odd prime, we construct in this work a

Texte reçu le 24 mars 2011, accepté le 17 octobre 2011.

NGUYEN DANG HO HAI, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539 du CNRS, Université Paris 13, 99, Av. J-B Clément, 93430 Villetaneuse, France Current address: Institut de Recherche en Mathématique et Physique, 2 Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique • *E-mail* : nguyen@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 55S10, 55Q55, 16S37.

Mots clefs. — Complexe de Koszul, module instable, foncteur de déstabilisation.

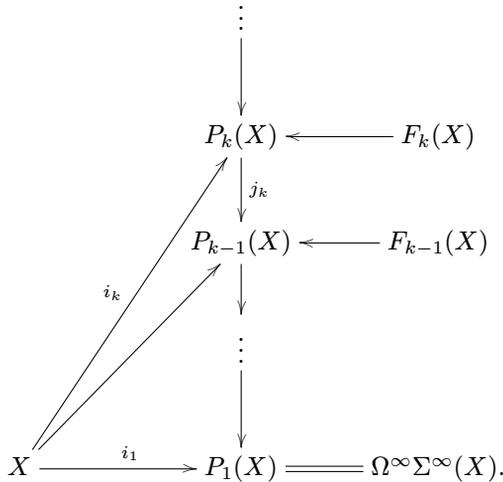
L'auteur est partiellement soutenu par le projet ANR blanc BLANN08-2_338236, HGRT.

Koszul complex in the category of unstable modules over the mod p Steenrod algebra. An injective resolution of an interesting unstable module is obtained as a special case of this Koszul complex. This unstable module is the mod p cohomology of a Thom spectrum used in the description of the layers of the Goodwillie tower of the identity functor evaluated on the sphere S^3 . As an application of the injective resolution, we compute some cohomotopy groups of the Thom spectrum using work of S. Zarati [24] on the derived functors of the destabilisation functor.

1. Introduction

Soient p un premier et $V_n = (\mathbb{Z}/p)^n$ un p -groupe abélien élémentaire. On note ρ_n la représentation réelle régulière réduite de V_n , et pour tout entier naturel m , on note $m\rho_n$ la somme directe de m copies de ρ_n . On considère l'espace de Thom $BV_n^{m\rho_n}$ du fibré vectoriel associé à $m\rho_n$ au-dessus de l'espace classifiant BV_n . L'action naturelle du groupe linéaire général $GL_n(\mathbb{F}_p)$ sur V_n induit une action sur l'espace de Thom $BV_n^{m\rho_n}$. On pose $L(n, m) = e_n BV_n^{m\rho_n}$, le facteur stable de $BV_n^{m\rho_n}$ déterminé par l'idempotent de Steinberg [23] e_n de l'anneau $\mathbb{F}_p[GL_n(\mathbb{F}_p)]$.

Les spectres $L(n, m)$ apparaissent dans la théorie de Goodwillie comme suit. On considère la tour de Goodwillie du foncteur identité de la catégorie des espaces topologiques pointés :



Dans ce diagramme, le foncteur F_k est la fibre homotopique de la transformation naturelle $j_k : P_k \rightarrow P_{k-1}$. Il suit de la théorie de Goodwillie [7] que $F_k(X)$

est un espace de lacets infini, *i.e.* il existe un spectre $\mathcal{F}_k(X)$ tel que $F_k(X)$ soit le 0-ième espace de $\mathcal{F}_k(X)$:

$$F_k(X) = \Omega^\infty \mathcal{F}_k(X).$$

En particulier, à p -complétion près, si X est la sphère S^m (m est supposé impair si p est impair), on a

$$\mathcal{F}_k(S^m) \simeq \begin{cases} \Sigma^{m-n} L(n, m) & \text{si } k = p^n, \\ * & \text{sinon.} \end{cases}$$

(voir [3], [2, Thm. 1.9, Cor. 9.6]).

On note $L_{n,m}$ la cohomologie modulo p du spectre $L(n, m)$. On se propose d’analyser $L_{n,m}$ en tant que objet de la catégorie \mathcal{U} [22] des modules instables sur l’algèbre de Steenrod modulo p , \mathcal{U}_p . On sait que $L_{n,0}$ et $L_{n,1}$ sont des modules instables injectifs. Dans [8], on a construit explicitement une résolution injective minimale de $L_{n,2}$ dans la catégorie des modules instables sur l’algèbre de Steenrod modulo 2 . A partir de cette résolution, un résultat de type conjecture de Segal a été obtenu pour les groupes de cohomotopie du spectre $L(n, 2)$ (2-complété).

Dans cet article, on étend ces résultats à tout nombre premier *impair*. On profite de cette occasion d’améliorer et de clarifier la construction du complexe fondamental du cas $p = 2$. Pour ce faire on introduit un complexe de Koszul approprié qui permet de généraliser les complexes exacts obtenus et ouvre de nouvelles perspectives. En particulier, en considérant la limite de ces complexes on est amené à introduire une algèbre de Koszul qui mérite une étude plus approfondie.

Dans ce qui suit, on fixe p un nombre premier *impair*. A l’aide de l’isomorphisme de Thom, on peut considérer $L_{n,m}$ comme un sous-module de H^*V_n :

$$L_{n,m} = e_n \cdot (\epsilon_n^m H^*V_n) \subset H^*V_n,$$

$\epsilon_n \in H^{p^n-1}V_n$ étant la classe d’Euler de ρ_n . En particulier, on vérifie que $L_n := L_{n,1}$ est un facteur direct indécomposable du module instable injectif H^*V_n [22], donc L_n est un module instable injectif indécomposable.

Pour énoncer les résultats, on considère le module quotient :

$$J_{n,m} := \frac{L_1^{\otimes n}}{\sum_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1} + L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,m}}.$$

On observera que $J_{n,m}$ est un module fini (voir la section 4.14). En particulier, $J_{n,1}$ est trivial.

Voici le premier résultat de cet article.

THÉORÈME 1.1. — *Soient n, m deux entiers positifs avec m impair. Il existe une suite exacte de \mathcal{A}_p -modules instables :*

$$0 \rightarrow L_{n,m} \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \otimes J_{1,m} \rightarrow \cdots \rightarrow L_{n-k} \otimes J_{k,m} \rightarrow \cdots \rightarrow J_{n,m} \rightarrow 0.$$

On verra plus bas que cette suite exacte est de type complexe de Koszul. Pour $m = 1$, la suite exacte se réduit à l'identification $L_{n,1} = L_n$ ci-dessus. Afin d'énoncer le résultat pour le cas $m = 3$, on rappelle que le module instable de Brown-Gitler $J(i)$, $i \in \mathbb{N}$, est un module fini caractérisé par l'isomorphisme naturel en $M \in \mathcal{U}$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(i)) \cong M^{i*}.$$

On rappelle aussi que le produit tensoriel $L_k \otimes J(i)$, $k, i \in \mathbb{N}$, est un module instable injectif indécomposable [13].

THÉORÈME 1.2. — *On a un isomorphisme de modules instables $J_{n,3} \cong J(2p^n - 2)$. En particulier, la suite exacte*

$$L_{n,3} \hookrightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \otimes J(2p - 2) \rightarrow \cdots \rightarrow L_{n-k} \otimes J(2p^k - 2) \rightarrow \cdots \rightarrow J(2p^n - 2) \rightarrow 0$$

est une résolution injective minimale de $L_{n,3}$ dans la catégorie \mathcal{U} .

On se sert de cette résolution injective pour étudier les groupes de cohomotopie du spectre $L(n, 3)$ (p -complété). Rappelons que si X est un spectre, le calcul du groupe de cohomotopie $[X, S^k]$ des classes d'homotopie d'applications de X vers le spectre des suspensions itérées de la sphère S^k est l'une des questions importantes en topologie algébrique. Des cas particuliers ont été étudié ces dernières années parmi lesquels on peut citer la conjecture de Segal [1] concernant le calcul de $[\Sigma^\infty BV_n, S^k]$, $k \geq 0$.

Pour avoir des informations sur les groupes $[L(n, 3), S^k]$, on utilise la suite spectrale d'Adams en cohomologie modulo p dont le terme $E_2^{*,*} \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{*,*}(\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ est étudié à l'aide des foncteurs dérivés du foncteur de déstabilisation [24] et des propriétés de la résolution injective de $L_{n,3}$ trouvée ci-dessus.

Voici un résultat partiel sur les groupes de cohomotopie du spectre $L(n, 3)$ (p -complété).

THÉORÈME 1.3. — *Supposons $k \geq 2p^{n-2} + n$. Alors*

$$[L(n, 3), S^k] = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & \text{si } k = 2p^n - 2 + n, \\ \mathbb{Z}/p & \text{si } k = 2p^{n-1} - 1 + n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plan de l'article. — Dans la section 2 on définit les modules instables $L_{n,m}$ et on donne une base additive pour chaque module $L_{n,m}$. Dans la section 3 on démontre le théorème 1.1 en construisant un complexe de Koszul associé à une suite de modules instables. Dans la section 4 on donne une présentation pour le module de Brown-Gitler $J(2p^n - 2)$ et ainsi démontre le théorème 1.2. Comme applications de la résolution injective de $L_{n,3}$, on calcule quelques groupes de cohomotopie du spectre $L(n, 3)$ dans la section 5. Pour le calcul des groupes d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{U}_p}^{*,*}(\mathbb{F}_p, L_{n,3})$, on aura besoin de comprendre l'espace vectoriel $(D(n) : L_1)_{\mathcal{U}}$, la division dans la catégorie \mathcal{U} par L_1 de $D(n) := \text{Im}(H^*\Sigma_{p^n} \xrightarrow{res} H^*V_n)$. La section 6 sera consacrée à la détermination de cet espace vectoriel.

Remerciements. — Ce travail fait partie de ma thèse de doctorat effectuée à l'Université Paris 13 sous la direction de Lionel Schwartz. Je tiens à remercier Lionel Schwartz pour sa générosité, ses conseils, sa patience et ses exigences qui m'ont toujours accompagné pendant la thèse. Je remercie Geoffrey Powell pour la suggestion de l'utilisation de complexe de Koszul qui a manifestement amélioré la construction du complexe dans [8]. Enfin je remercie Saïd Zarati d'avoir écrit la thèse [24] qui joue un rôle essentiel dans l'étude des groupes de cohomotopie du spectre $L(n, 3)$.

2. Les modules instables $L_{n,m}$

Si X est un espace ou un spectre, on note H^*X la cohomologie modulo p de X . La cohomologie modulo p de V_n est donnée par

$$H^*V_n \cong \Lambda(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n],$$

où $\{x_1, \dots, x_n\}$ est la base canonique de l'espace dual $V_n^* \cong H^1V_n$. L'action de l'algèbre de Steenrod \mathcal{U}_p sur H^*V_n est déterminée par les formules

$$\beta x_i = y_i, \quad P^1 y_i = y_i^p, \quad 1 \leq i \leq n$$

et la formule de Cartan. Cette action commute à l'action naturelle à gauche du semi-groupe de $n \times n$ -matrices à coefficients dans \mathbb{F}_p , $\text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$, sur H^*V_n déterminée comme suit [18]. Si $g = (g_{i,j}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ et $f \in H^*V_n$, alors

$$(g \cdot f)(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = f(g \cdot x_1, g \cdot y_1, \dots, g \cdot x_n, g \cdot y_n)$$

où $g \cdot x_j = \sum_{i=1}^n g_{i,j} x_i$ et $g \cdot y_j = \sum_{i=1}^n g_{i,j} y_i$ pour $1 \leq j \leq n$.

Soit $\text{GL}_n := \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ le groupe linéaire général. L'idempotent de Steinberg e_n [23] de l'anneau $\mathbb{F}_p[\text{GL}_n]$ est défini par

$$e_n = \frac{1}{[\text{GL}_n : \text{U}_n]} \bar{\text{B}}_n \bar{\Sigma}_n.$$

Ici B_n est le sous-groupe de Borel de GL_n des matrices triangulaires supérieures, U_n le sous-groupe de Sylow des matrices triangulaires supérieures avec 1 sur la diagonale, Σ_n le sous-groupe des permutations, $\bar{B}_n = \sum_{b \in B_n}$ et $\bar{\Sigma}_n = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma$.

Soit $m\rho_n$ la somme directe de m copies de la représentation réelle régulière réduite de V_n . On note $BV_n^{m\rho_n}$ l'espace de Thom du fibré vectoriel

$$EV_n \times_{V_n} \mathbb{R}^{(p^n-1)m} \rightarrow BV_n$$

où V_n agit sur $\mathbb{R}^{(p^n-1)m}$ à travers de $m\rho_n$ et EV_n est un espace contractile sur lequel V_n agit librement. Le groupe GL_n agit sur V_n , donc agit stablement sur $BV_n^{m\rho_n}$. L'idempotent de Steinberg e_n induit ainsi une application de spectres, notée aussi e_n , de $\Sigma^\infty BV_n^{m\rho_n}$ à lui-même. On a $e_n \circ e_n \simeq e_n$. A la suite de S. Mitchell et S. Priddy [17], on considère le facteur stable de $BV_n^{m\rho_n}$ déterminé par e_n :

$$e_n BV_n^{m\rho_n} := \text{hocolim}(\Sigma^\infty BV_n^{m\rho_n} \xrightarrow{e_n} \Sigma^\infty BV_n^{m\rho_n} \xrightarrow{e_n} \Sigma^\infty BV_n^{m\rho_n} \xrightarrow{e_n} \dots).$$

DÉFINITION 2.1. — Le spectre $L(n, m)$ et le module instable $L_{n,m}$ sont définis respectivement par $L(n, m) := e_n BV_n^{m\rho_n}$ et $L_{n,m} := H^*L(n, m)$.

Il résulte de l'isomorphisme de Thom que

$$L_{n,m} \cong e_n \cdot (\epsilon_n^m H^*V_n),$$

où ϵ_n désigne la classe d'Euler de ρ_n . La classe de Chern supérieure, \mathfrak{c}_n , de la complexification $\rho_n^{\mathbb{C}}$ de ρ_n est donnée par :

$$\mathfrak{c}_n = (-1)^n \prod_{0 \neq x \in H^1(BV_n; \mathbb{Z}/p)} \beta(x).$$

On vérifie que $\mathfrak{c}_n = \mathbf{L}_n^{p-1}$ où

$$\mathbf{L}_n := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1^p & \cdots & y_n^p \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{p^{n-1}} & \cdots & y_n^{p^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Comme $\epsilon_n^2 = \mathfrak{c}_n$, on en déduit que $\epsilon_n = \mathbf{L}_n^{\frac{p-1}{2}}$ (à signe près).

On pose $M_n := L_{n,0} = e_n \cdot H^*V_n$ et $L_n := L_{n,1} = e_n \cdot (\epsilon_n H^*V_n)$. On observe que M_n et L_n sont invariants sous l'action du sous-groupe de Borel B_n de GL_n .

PROPOSITION 2.2 (Mitchell-Priddy [17]). — On a une décomposition de modules instables : $M_n \cong L_n \oplus L_{n-1}$.

Posons $X = \frac{x}{y}$, $Y = y^{p-1}$, où x et y sont générateurs de $H^*\mathbb{Z}/p \cong \Lambda(x) \otimes \mathbb{F}_p[y]$. On a $M_1 = L_1 \oplus \mathbb{F}_p$ et on vérifie que L_1 a une base additive formée par les monômes $X^\epsilon Y^i$ pour lesquels $\epsilon = 0, 1$ et $i > 0$.

PROPOSITION 2.3. — On a $L_n \cong e_n \cdot L_1^{\otimes n}$.

Pour montrer cette proposition, on a besoin d'utiliser les relations qui existent entre les idempotents de Steinberg de différents rangs. Pour $1 \leq i \leq n - 1$, on désigne par $e_{2,i}$ l'image de l'idempotent $e_2 \in \mathbb{F}_p[\mathrm{GL}_2]$ dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{GL}_n]$ par l'inclusion canonique $\mathrm{GL}_2 \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ en utilisant les i -ième et $(i + 1)$ -ième coordonnées.

Dans le lemme suivant, par abus de notation, e_{n-1} désigne l'image de l'idempotent $e_{n-1} \in \mathbb{F}_p[\mathrm{GL}_{n-1}]$ dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{GL}_n]$ par l'inclusion canonique $\mathrm{GL}_{n-1} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ en utilisant les $(n - 1)$ premières coordonnées.

LEMME 2.4 ([9, 10]). — Soit n un entier ≥ 2 . On a

1. $e_n = e_n e_{2,i} = e_{2,i} e_n$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$;
2. e_n est un mot de longueur maximale des idempotents $e_{2,1}, \dots, e_{2,n-1}$;
3. $e_n = e_{n-1} e_{2,n-1} e_{n-1}$.

On en déduit facilement le

COROLLAIRE 2.5. — On a

1. $e_n = e_n e_{n-1} = e_{n-1} e_n$,
2. $e_n I_{n-1} e_n$ est un idempotent, et
3. $I_{n-1} e_n I_{n-1} = e_{n-1} I_{n-1} e_{n-1}$.

Démonstration de 2.3. — Comme M_n est un sous-module de H^*V_n invariant sous l'action du groupe de Borel B_n , il est aussi invariant sous l'action du tore maximal $\mathrm{GL}_1^{\times n}$. On en déduit que $M_n \subset M_1^{\otimes n}$, et donc $M_n = e_n \cdot M_1^{\otimes n}$ puisque

$$M_n = e_n \cdot M_n \subset e_n \cdot M_1^{\otimes n} \subset e_n \cdot H^*BV_n = M_n.$$

Pour montrer que $L_n \cong e_n \cdot L_1^{\otimes n}$, on observe d'abord que e_n induit un endomorphisme sur $L_1^{\otimes n}$. A cet effet, on se ramène au cas $n = 2$ en utilisant le fait que e_n est un produit des $e_{2,i}$. Pour le cas $n = 2$, on a $e_2 \cdot L_1^{\otimes 2}$ est un sous-module de $M_1^{\otimes 2}$ qui s'écrit comme suit :

$$M_1 \otimes M_1 = (L_1 \otimes \mathbb{F}_p) \oplus (L_1 \otimes L_1) \oplus (\mathbb{F}_p \otimes L_1) \oplus (\mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_p).$$

L'image de $e_2 \cdot L_1^{\otimes 2}$ par la projection sur $L_1 \otimes \mathbb{F}_p$ (resp. $\mathbb{F}_p \otimes L_1$) est alors $\mathrm{diag}(1, 0)e_2 \cdot L_1^{\otimes 2}$ (resp. $\mathrm{diag}(0, 1)e_2 \cdot L_1^{\otimes 2}$). Comme

$$\mathrm{diag}(1, 0)e_2 = \sum_{a \in \mathbb{F}_p^*, c \in \mathbb{F}_p} \left(\begin{pmatrix} c & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et $\text{diag}(0, 1)e_2 = 0$, il est clair que $\text{diag}(1, 0)e_2$ et $\text{diag}(0, 1)e_2$ agissent trivialement sur $L_1^{\otimes 2}$. On en déduit que $e_2 \cdot L_1^{\otimes 2} \subset L_1^{\otimes 2}$.

Comme $L_1^{\otimes n}$ est facteur direct non trivial de $M_1^{\otimes n}$, le module $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ est facteur direct de $M_n = e_n \cdot M_1^{\otimes n}$. D'autre part, comme la décomposition $M_n = L_n \oplus L_{n-1}$ correspond à la décomposition $e_n = (e_n - e_n I_{n-1} e_n) + e_n I_{n-1} e_n$ [11], l'image de $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ par la projection canonique $M_n \rightarrow L_{n-1}$ est $e_n I_{n-1} e_n \cdot L_1^{\otimes n}$. Or celui-ci est trivial car $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ est un sous-module de $L_1^{\otimes n}$ et I_{n-1} agit trivialement sur ce dernier. Il suit que $e_n \cdot L_1^{\otimes n} \subset L_n$ et donc $e_n \cdot L_1^{\otimes n} = L_n$ car L_n est indécomposable et $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ est non trivial. La proposition est démontrée. \square

COROLLAIRE 2.6. — On a $L_n \cong \bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}$.

Démonstration. — La formule, due essentiellement à Kuhn ([9]), est conséquence des identifications $L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n}, L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1} = e_{2,i} \cdot L_1^{\otimes n}$ et le lemme 2.4. \square

On décrit ensuite la structure de L_n en tant qu'espace vectoriel gradué. Rappelons que si $I = (\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_r, i_r)$, P^I désigne le monôme $\beta^{\epsilon_1} P^{i_1} \dots \beta^{\epsilon_r} P^{i_r}$ dans l'algèbre de Steenrod \mathcal{U}_p . La suite I est dite admissible si $i_j \geq p i_{j+1} + \epsilon_{j+1}$ pour tout j . La longueur de I , notée $\ell(I)$, est le plus grand entier ℓ tel que $(\epsilon_\ell, i_\ell) \neq (0, 0)$, i.e. I est de la forme $(\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_\ell, i_\ell, 0, 0, \dots, 0, 0)$ avec $(\epsilon_\ell, i_\ell) \neq (0, 0)$.

Pour la définition des modules M_n et L_n , Mitchell et Priddy [17] ont considéré l'action à droite de l'idempotent e_n sur H^*V_n . Ceci est équivalent à l'utilisation de l'action à gauche de l'idempotent \tilde{e}_n défini par :

$$\tilde{e}_n = \frac{1}{[\text{GL}_n : U_n]} \bar{\Sigma}_n \bar{B}_n,$$

c'est le conjugué de e_n dans l'algèbre de Hopf $\mathbb{F}_p[\text{GL}_n]$. On a des isomorphismes de \mathcal{U}_p -modules instables ([17, Prop. 2.6]) :

$$e_n \cdot H^*V_n \xrightarrow{\bar{\Sigma}_n} \tilde{e}_n \cdot H^*V_n, \quad \tilde{e}_n \cdot H^*V_n \xrightarrow{\bar{B}_n} e_n \cdot H^*V_n.$$

PROPOSITION 2.7 (Mitchell et Priddy [17]). — *Le module L_n , identifié à $\tilde{e}_n \cdot L_1^{\otimes n}$, admet pour base la famille des éléments*

$$\{P^I \left(\frac{x_1 \cdots x_n}{y_1 \cdots y_n} \right) : I \text{ admissible, } \ell(I) = n \text{ et } P^I \notin \mathcal{U}_p \beta\}.$$

Une base alternative de L_n en termes d'invariants modulaires de GL_n est donnée comme suit. Rappelons d'abord les formules des invariants de Dickson

et Mui [18] (voir 6.1) :

$$\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ y_1^p & \cdots & y_k^p \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{p^{k-1}} & \cdots & y_k^{p^{k-1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{k,k-1} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{p^{k-2}} & \cdots & y_k^{p^{k-2}} \end{pmatrix}.$$

Posons $\omega_k = \mathbf{L}_k^{p^{-1}}$ (c'est l'invariant de Dickson supérieur de GL_k) et $\mu_k = \frac{\mathbf{M}_{k,k-1}}{\mathbf{L}_k}$. Le degré de ω_k est alors $2(p^k - 1)$ et celui de μ_k est $1 - 2p^{k-1}$.

PROPOSITION 2.8. — *Le module L_n , identifié à $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$, a une base formée par les éléments*

$$e_n \cdot \mu_1^{\epsilon_1} \omega_1^{i_1 - pi_2 + \epsilon_2} \cdots \mu_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \omega_{n-1}^{i_{n-1} - pi_n + \epsilon_n} \cdot \mu_n^{\epsilon_n} \omega_n^{i_n}$$

qui vérifient

$$(*) \quad \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0, 1\}, \quad i_1 > pi_2 - \epsilon_2, \quad \dots, \quad i_{n-1} > pi_n - \epsilon_n, \quad i_n > 0.$$

Démonstration. — La série de Poincaré de L_n , d'après Mitchell et Priddy [17], est donnée par

$$P(L_n) = \prod_{k=1}^n (1 + t^{1-2p^{k-1}}) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{t^{2(p^k-1)}}{1 - t^{2(p^k-1)}}.$$

Il suffit donc de vérifier que la famille des éléments dans la proposition est libre parce que $P(L_n)$ est également la série de Poincaré de l'espace vectoriel engendré par ces éléments. On se sert du lemme 2.11 ci-dessous pour montrer l'indépendance linéaire. □

REMARQUE 2.9. — Dans ce qui suit, L_n sera toujours identifié à $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$. Ainsi L_n est un sous-module de H^*V_n invariant sous l'action du sous-groupe de Borel B_n de GL_n .

On pose $X_i = \frac{x_i}{y_i}$ et $Y_i = y_i^{p-1}$. On associe à chaque monôme $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \cdots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ la suite (d_1, \dots, d_n) où $d_j = 2(p-1)i_j - \epsilon_j$ est le degré de $X_j^{\epsilon_j} Y_j^{i_j}$. On met un ordre sur les monômes $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \cdots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ en utilisant l'ordre anti-lexicographique sur les suites associées (d_1, \dots, d_n) . On note que la suite (d_1, \dots, d_n) détermine de manière unique la suite $(\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n)$.

NOTATION 2.10. — Soit $(\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n)$ une suite vérifiant la condition (*). On pose

$$\omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n} = e_n \cdot \mu_1^{\epsilon_1} \omega_1^{i_1 - pi_2 + \epsilon_2} \cdots \mu_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \omega_{n-1}^{i_{n-1} - pi_n + \epsilon_n} \cdot \mu_n^{\epsilon_n} \omega_n^{i_n},$$

c'est un élément de H^*V_n de degré $\sum_{k=1}^n 2(p-1)i_k - \epsilon_k$.

LEMME 2.11. — *On a*

$$\omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n} = \omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_{n-1}, i_{n-1}} \cdot X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n} + \sum_{\deg(X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}) > \deg(X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n})} f_{\epsilon, i} \cdot X_n^{\epsilon} Y_n^i,$$

pour certains $f_{\epsilon, i} \in \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_{n-1}]$. Par conséquent,

$$\omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n} = X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n} + \text{des monômes d'ordre supérieur.}$$

Démonstration. — Posons

$$Q := Q(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}) = \mu_1^{\epsilon_1} \omega_1^{i_1 - pi_2 + \epsilon_2} \dots \mu_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \omega_{n-1}^{i_{n-1} - pi_n + \epsilon_n}.$$

Notons d'abord que $\mu_n^{\epsilon_n} \omega_n^{i_n}$ est GL_n -invariant et l'on a un développement

$$\mu_n^{\epsilon_n} \omega_n^{i_n} = \omega_{n-1}^{pi_n - \epsilon_n} \cdot X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n} + \sum_{\deg(X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}) > \deg(X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n})} g_{\epsilon, i} \cdot X_n^{\epsilon} Y_n^i$$

pour certains $g_{\epsilon, i} \in \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_{n-1}]$. Il suffit donc de montrer que

$$e_n \cdot Q = e_{n-1} \cdot Q + \sum_{\deg(X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}) > 0} h_{\epsilon, i} \cdot X_n^{\epsilon} Y_n^i$$

pour certains $h_{\epsilon, i} \in \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_{n-1}]$. De manière équivalente, il suffit de montrer que

$$I_{n-1} e_n \cdot Q = e_{n-1} \cdot Q$$

avec $I_{n-1} = \text{diag}(1^{n-1}, 0)$. En effet, comme Q et $e_{n-1} \cdot Q$ ne font intervenir que les variables $x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}$, ils sont invariants sous l'action de I_{n-1} . Il suit que

$$\begin{aligned} I_{n-1} e_n \cdot Q &= I_{n-1} e_n I_{n-1} \cdot Q && (\text{car } Q = I_{n-1} \cdot Q) \\ &= e_{n-1} I_{n-1} e_{n-1} \cdot Q && (\text{car } I_{n-1} e_n I_{n-1} = e_{n-1} I_{n-1} e_{n-1}) \\ &= e_{n-1} e_{n-1} \cdot Q && (\text{car } I_{n-1} e_{n-1} \cdot Q = e_{n-1} \cdot Q) \\ &= e_{n-1} \cdot Q. \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

COROLLAIRE 2.12. — *Soient n et m deux entiers positifs avec m impair. Alors $L_{n,m}$ a une base formée par les éléments*

$$e_n \cdot \mu_1^{\epsilon_1} \omega_1^{i_1 - pi_2 + \epsilon_2} \dots \mu_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \omega_{n-1}^{i_{n-1} - pi_n + \epsilon_n} \cdot \mu_n^{\epsilon_n} \omega_n^{i_n}$$

qui vérifient $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$, $i_1 > pi_2 - \epsilon_2, \dots, i_{n-1} > pi_n - \epsilon_n$ et $i_n > \frac{m-1}{2}$. De plus, on a $L_{n,m} = L_n \cap (L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,m})$

Démonstration. — On a $L_{n,m} = \mathfrak{e}_n^{m-1} L_n$ car \mathfrak{e}_n^2 est GL_n -invariant. D'autre part, d'après le lemme 2.11, un élément de base $\omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n} \in L_n$ est un élément de $L_{n,m}$ si et seulement si $i_n > \frac{m-1}{2}$. Le corollaire suit. □

3. Un complexe de Koszul de modules instables

Dans cette section on démontre le théorème 1.1 en introduisant un complexe de Koszul approprié.

3.1. Complexe de Koszul associé à une suite d'espaces vectoriels. — Soit M un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué et $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de sous-espaces de M . Pour chaque s , considérons le module quotient

$$K(M)_s = \frac{\bigcap_{i \leq s-1} M_i}{\left(\bigcap_{i \leq s-1} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s+1} M_i \right)}.$$

Notons $d(M)_s: K(M)_s \rightarrow K(M)_{s-1}$ le morphisme naturel

$$\frac{\bigcap_{i \leq s-1} M_i}{\left(\bigcap_{i \leq s-1} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s+1} M_i \right)} \longrightarrow \frac{\bigcap_{i \leq s-2} M_i}{\left(\bigcap_{i \leq s-2} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s} M_i \right)}.$$

Il est clair que le morphisme composé $d(M)_s \circ d(M)_{s+1}$:

$$\frac{\bigcap_{i \leq s} M_i}{\left(\bigcap_{i \leq s} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s+2} M_i \right)} \longrightarrow \frac{\bigcap_{i \leq s-1} M_i}{\left(\bigcap_{i \leq s-1} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s+1} M_i \right)} \longrightarrow \frac{\bigcap_{i \leq s-2} M_i}{\left(\bigcap_{i \leq s-2} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s} M_i \right)}$$

est trivial pour tout s . On obtient ainsi un complexe dit *complexe de Koszul* associé à la suite $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces de M :

$$(\mathcal{K}(M)_*) \quad \cdots \rightarrow K(M)_{s+1} \xrightarrow{d(M)_{s+1}} K(M)_s \xrightarrow{d(M)_s} K(M)_{s-1} \rightarrow \cdots$$

PROPOSITION 3.1 (Cf. [20, Prop. 7.2, p. 16]). — *Le complexe $\mathcal{K}(M)_*$ est exact si et seulement si, pour tout s , on a*

$$\left(\bigcap_{i \leq s-1} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s} M_i \right) = \bigcap_{i \leq s} M_i + \left(\bigcap_{i \leq s-1} M_i \right) \cap \left(\sum_{i \geq s+1} M_i \right).$$

Démonstration. — On pose $A_s = \bigcap_{i \leq s} M_i$ et $B_s = \sum_{i \geq s} M_i$. On observe que $A_s \subset A_{s-1}$, $B_s \subset B_{s-1}$ et $A_s \subset B_s$ pour tout s . Par définition, on a $K(M)_s = A_{s-1}/A_{s-1} \cap B_{s+1}$. Le noyau de $d(M)_s: A_{s-1}/A_{s-1} \cap B_{s+1} \rightarrow A_{s-2}/A_{s-2} \cap B_s$ est alors donné par

$$\ker d(M)_s = (A_{s-1} \cap B_s)/(A_{s-1} \cap B_{s+1}).$$

Comme $\text{Im } d(M)_{s+1} \cong K_{s+1}/\ker d_{s+1}$, on a

$$\begin{aligned} \text{Im } d(M)_{s+1} &\cong A_s/(A_s \cap B_{s+1}) \\ &\cong A_s/(A_s \cap A_{s-1} \cap B_{s+1}) \quad (\text{car } A_s \subset A_{s-1}) \\ &\cong (A_s + A_{s-1} \cap B_{s+1})/(A_{s-1} \cap B_{s+1}). \end{aligned}$$

L'inclusion $\text{Im } d(M)_{s+1} \hookrightarrow \ker d(M)_s$ est alors induite par l'inclusion naturelle $(A_s + A_{s-1} \cap B_{s+1}) \subset (A_{s-1} \cap B_s)$. On en déduit que le complexe est exact si et seulement si $A_{s-1} \cap B_s = A_s + A_{s-1} \cap B_{s+1}$ pour tout s . La proposition est démontrée. \square

3.2. Démonstration de l'exactitude du complexe. — Pour démontrer le théorème 1.1, on considère la suite des sous-modules instables $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de $L_1^{\otimes n}$ définie par

$$\mathfrak{M}_i = \begin{cases} L_1^{\otimes n} & \text{si } i \leq 0, \\ L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1, \\ L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,m} & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Par définition, $J_{n,m}$ est donné par le quotient :

$$J_{n,m} = \frac{L_1^{\otimes n}}{\mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_n}.$$

Le complexe $\mathcal{K}(\mathfrak{M})_*$ est en fait le complexe

$$0 \rightarrow L_{n,m} \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \otimes J_{1,m} \rightarrow \dots \rightarrow L_{n-s} \otimes J_{s,m} \rightarrow \dots \rightarrow J_{n,m} \rightarrow 0$$

du théorème 1.1 grâce à l'identification suivante.

PROPOSITION 3.2. — On a

$$K(\mathfrak{M})_s \cong \begin{cases} L_s \otimes J_{n-s,m} & \text{si } 0 \leq s \leq n, \\ L_{n,m} & \text{si } s = n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Posons $A_s = \bigcap_{i \leq s} \mathfrak{M}_i$, $B_s = \sum_{i \geq s} \mathfrak{M}_i$ et $K_s := K(\mathfrak{M})_s$. On a $K_s = A_{s-1}/A_{s-1} \cap B_{s+1}$. On considère les cas suivants :

1. Si $s < 0$, on a $K_s = 0$ car $A_s = B_s = L_1^{\otimes n}$ si $s \leq 0$.
2. Si $s = 0$, on a $K_0 = A_{-1}/(A_{-1} \cap B_1) = L_1^{\otimes n} / \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i = J_{n,m}$.
3. Si $0 < s < n$, d'après le corollaire 2.6, on a

$$A_{s-1} = \bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{M}_i = L_s \otimes L_1^{\otimes n-s}$$

et

$$B_{s+1} = L_1^{\otimes s} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n-s-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-s-i-1} + L_1^{\otimes n-s-1} \otimes L_{1,m} \right).$$

On en déduit que $K_s = A_{s-1}/(A_{s-1} \cap B_{s+1}) \cong L_s \otimes J_{n-s,m}$.

4. Si $s = n$, on a $K_n = A_{n-1}/(A_{n-1} \cap B_{n+1}) = A_{n-1} = L_n$ à l'aide du corollaire 2.6.

- 5. Si $s = n + 1$, l'égalité $L_{n,m} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ est équivalent à l'égalité $L_{n,m} = L_n \cap (L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,m})$: c'est le corollaire 2.12.
- 6. Si $s > n + 1$, K_s est trivial car $A_s = B_s = 0$ si $s > n$.

La proposition est démontrée. □

La démonstration du théorème 1.1 est achevée en utilisant la proposition 3.1 et la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. — *Pour tout $0 < s < n$, on a*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{M}_i \right) \cap \left(\sum_{i=s}^n \mathfrak{M}_i \right) = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{M}_i + \left(\bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{M}_i \right) \cap \left(\sum_{i=s+1}^n \mathfrak{M}_i \right).$$

Afin de démontrer cette proposition, on a besoin d'introduire quelques notations.

NOTATION 3.4. — Soit $I = (\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n)$ et soit $S = (s_1, \dots, s_k)$ avec $s_1 + \dots + s_k = n$. On note $r_0 = 1$, $r_j = s_1 + \dots + s_j$, $1 \leq j \leq k$, et on suppose que la suite $(\epsilon_{r_{j-1}}, i_{r_{j-1}}, \dots, \epsilon_{r_j}, i_{r_j})$, $1 \leq j \leq k$, vérifie la condition :

$$\epsilon_{r_{j-1}}, \dots, \epsilon_{r_j} \in \{0, 1\}, \quad i_{r_{j-1}} > p i_{r_{j-1}+1} - \epsilon_{r_{j-1}}, \dots, i_{r_{j-1}} > p i_{r_j} - \epsilon_{r_j}, \quad i_{r_j} > 0.$$

Avec $\omega^{\epsilon_{r_{j-1}}, i_{r_{j-1}}, \dots, \epsilon_{r_j}, i_{r_j}} \in E(x_{r_{j-1}}, \dots, x_{r_j}) \otimes \mathbb{F}_p[y_{r_{j-1}}, \dots, y_{r_j}]$ (voir la notation 2.10), on pose

$$\omega_S^I := \prod_{j=1}^k \omega^{\epsilon_{r_{j-1}}, i_{r_{j-1}}, \dots, \epsilon_{r_j}, i_{r_j}}.$$

On appelle ω_S^I un S -monôme. On associe à chaque S -monôme ω_S^I la suite (d_1, \dots, d_n) où $d_j = 2(p-1)i_j - \epsilon_j$ est le degré de $X_j^{\epsilon_j} Y_j^{i_j}$. On met un ordre sur les S -monômes en utilisant l'ordre anti-lexicographique sur les suites associées (d_1, \dots, d_n) .

Comme titre d'exemple, explicitons quelques S -monômes :

$$\begin{aligned} \omega_{(n)}^I &= \omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_n, i_n}, & \omega_{(1^n)}^I &= X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}, \\ \omega_{(s, 1^{n-s})}^I &= \omega^{\epsilon_1, i_1, \dots, \epsilon_s, i_s} X_{s+1}^{\epsilon_{s+1}} Y_{s+1}^{i_{s+1}} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3.3. — La démonstration s'appuie essentiellement sur le lemme 2.11. Posons

$$\begin{aligned} \text{LHS} &:= \left(\bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{M}_i \right) \cap \left(\sum_{i=s}^n \mathfrak{M}_i \right), \\ \text{RHS} &:= \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{M}_i + \left(\bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{M}_i \right) \cap \left(\sum_{i=s+1}^n \mathfrak{M}_i \right). \end{aligned}$$

L'inclusion $LHS \supset RHS$ est évidente. Montrons l'inclusion $LHS \subset RHS$. Soit f un élément homogène de LHS. Comme $\bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{M}_i = L_s \otimes L_1^{\otimes n-s}$, f est une combinaison de $(s, 1^{n-s})$ -monômes $\omega_{(s,1^{n-s})}^I$. Un tel monôme est dit *s-acceptable* si $1 \leq i_j \leq pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ pour $s \leq j < n$ et $1 \leq i_n \leq \frac{m-1}{2}$.

Supposons que $\omega_{(s,1^{n-s})}^I$ n'est pas *s-acceptable*. Considérons les cas suivants :

- Si $i_n > \frac{m-1}{2}$, alors $\omega_{(s,1^{n-s})}^I \in \mathfrak{M}_n$, donc $\omega_{(s,1^{n-s})}^I \in RHS$.
- Si $i_j > pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ pour $s < j < n$, d'après le lemme 2.11, on a

$$\omega_{(s,1^{j-1-s},2,1^{n-j-1})}^I = \omega_{(s,1^{n-s})}^I + \text{des } (s, 1^{n-s})\text{-monômes d'ordre supérieur,}$$

et $\omega_{(s,1^{j-1-s},2,1^{n-j-1})}^I$ est un élément de \mathfrak{M}_j , donc appartient à RHS.

- Si $i_s > pi_{s+1} - \epsilon_{s+1}$, d'après le lemme 2.11, on a

$$\omega_{(s+1,1^{n-s-1})}^I = \omega_{(s,1^{n-s})}^I + \text{des } (s, 1^{n-s})\text{-monômes d'ordre supérieur,}$$

et $\omega_{(s+1,1^{n-s-1})}^I$ appartient à $\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{M}_i$, donc $\omega_{(s+1,1^{n-s-1})}^I \in RHS$.

Une itération évidente permet alors d'écrire f sous la forme $f = f' \pmod{RHS}$, où f' est une somme de monômes *s-acceptables* $\omega_{(s,1^{n-s})}^I$. Montrons $f' = 0$.

Supposons au contraire que $f' \neq 0$. Soit $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ le monôme d'ordre minimal qui apparaît dans l'expression de f' comme combinaison linéaire de monômes distincts. On a $1 \leq i_j \leq pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ pour $s \leq j < n$ et $1 \leq i_n \leq \frac{m-1}{2}$.

D'autre part, comme $RHS \subset \sum_{i=s}^n \mathfrak{M}_i$ et $f \in \sum_{i=s}^n \mathfrak{M}_i$, il suit que $f' \in \sum_{i=s}^n \mathfrak{M}_i$. Il existe alors $s \leq j \leq n$ tel que le monôme $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ provient de certain élément de base de \mathfrak{M}_j . On exclut le cas $j = n$ car $i_n \leq \frac{m-1}{2}$. Supposons que $s \leq j \leq n - 1$. Alors $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ provient de l'élément de base $\omega_{(1^{j-1},2,1^{n-j-1})}^I$ de \mathfrak{M}_j . Il suit que $i_j > pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ ce qui contredit la condition $1 \leq i_j \leq pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ ci-dessus. Le résultat suit. \square

3.3. Limite projective du complexe. — Considérons la limite projective

$$J_{n,\infty} := \varprojlim (J_{n,1} \leftarrow J_{n,3} \leftarrow J_{n,5} \leftarrow \dots).$$

La définition des modules $J_{n,m}$ implique

$$J_{n,\infty} = \frac{L_1^{\otimes n}}{\sum_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}}.$$

En posant $\hat{e}_2 = 1 - e_2$, on obtient une involution sur la sous-algèbre de $\mathbb{F}_p[GL_n(\mathbb{F}_p)]$ engendrée par 1 et les idempotents $e_{2,1}, \dots, e_{2,n-1}$. De manière récurrente, on a $\hat{e}_{2,i} = 1 - e_{2,i}$ et $\hat{e}_n = \hat{e}_{n-1} \hat{e}_{2,n-1} \hat{e}_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

On pose $\hat{L}_0 = \mathbb{F}_p$, $\hat{L}_1 = L_1$ et $\hat{L}_n = \hat{e}_n \cdot L_1^{\otimes n}$ pour $n \geq 2$. On vérifie, comme dans le corollaire 2.6, que

$$\hat{L}_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes \hat{L}_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}.$$

Le résultat suivant provient de [9].

PROPOSITION 3.5. — *On a un isomorphisme de modules instables $J_{n,\infty} \cong \hat{L}_n$.*

Démonstration. — Soit $\gamma_n : L_1^{\otimes n} \rightarrow \hat{L}_n$ la projection canonique. Comme $\hat{e}_n e_{2,i} = 0$, le noyau de γ_n contient la somme $\sum_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}$. On vérifie l'inclusion inverse. Soit $u \in L_1^{\otimes n}$ un élément du noyau de γ_n . On a $\hat{e}_n \cdot u = 0$. Comme \hat{e}_n est un produit des $\hat{e}_{2,i}$, $1 \leq i \leq n-1$, on peut écrire $\hat{e}_n = \hat{e}_{2,i_1} \cdots \hat{e}_{2,i_k}$ avec $1 \leq i_j \leq n-1$. On a

$$\begin{aligned} 1 &= \hat{e}_{2,i_1} \cdots \hat{e}_{2,i_k} + (1 - \hat{e}_{2,i_1})\hat{e}_{2,i_2} \cdots \hat{e}_{2,i_k} + \cdots + (1 - \hat{e}_{2,i_{k-1}})\hat{e}_{2,i_k} + (1 - \hat{e}_{2,i_k}) \\ &= \hat{e}_{2,i_1} \cdots \hat{e}_{2,i_k} + e_{2,i_1}\hat{e}_{2,i_2} \cdots \hat{e}_{2,i_k} + \cdots + e_{2,i_{k-1}}\hat{e}_{2,i_k} + e_{2,i_k}. \end{aligned}$$

Comme $\hat{e}_{2,i_1} \cdots \hat{e}_{2,i_k} \cdot u = 0$, on a

$$u = e_{2,i_1}\hat{e}_{2,i_2} \cdots \hat{e}_{2,i_k} \cdot u + \cdots + e_{2,i_{k-1}}\hat{e}_{2,i_k} \cdot u + e_{2,i_k} \cdot u,$$

ce qui entraîne que u est un élément de $\sum_{j=1}^k e_{2,i_j} \cdot L_1^{\otimes n}$. La proposition suit. \square

COROLLAIRE 3.6. — *On a une suite exacte de modules instables injectifs réduits :*

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \otimes \hat{L}_1 \rightarrow L_{n-2} \otimes \hat{L}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow L_{n-k} \otimes \hat{L}_k \rightarrow \cdots \rightarrow \hat{L}_n \rightarrow 0.$$

Dans ce corollaire, le produit tensoriel $L_{n-k} \otimes \hat{L}_k$, $0 \leq k \leq n$, est un module instable injectif car il est le facteur direct de $L_1^{\otimes n}$ associé à l'idempotent $e_{n-k} \otimes \hat{e}_k$.

A la suite de [21], on appelle *algèbre de pré-Koszul homogène* une algèbre de la forme $\text{Tens}(V)/(I)$ où V est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué de type fini et (I) l'idéal de l'algèbre tensorielle $\text{Tens}(V)$ engendré par un sous-espace I de $V \otimes V$. Une algèbre de pré-Koszul homogène A est une *algèbre de Koszul homogène* si l'algèbre $\text{Ext}_A^*(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ est engendrée par les éléments de $\text{Ext}_A^1(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$.

Soit $A = \text{Tens}(V)/(I)$, $I \subset V \otimes V$, une algèbre de pré-Koszul. On pose $K_0 = \mathbb{F}_p$, $K_1 = V$ et $K_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} V^{\otimes i-1} \otimes I \otimes V^{\otimes n-i-1}$ pour $n \geq 2$. Pour tout n , l'inclusion naturelle $K_n \hookrightarrow K_{n-1} \otimes V$ définit de manière évidente un morphisme $d : K_n \otimes A \rightarrow K_{n-1} \otimes A$. On vérifie que $d^2 = 0$ et on obtient ainsi un complexe de A -modules libres à gauche $\{K_n \otimes A\}_{n \geq 0}$. D'après [15, Theorem 1.2], A est une algèbre de Koszul homogène si et seulement si ce complexe est une résolution libre pour le module trivial \mathbb{F}_p .

A l'aide du corollaire 3.6, on obtient le

COROLLAIRE 3.7. — *L'algèbre $\bigoplus_{n \geq 0} \hat{L}_n \cong \text{Tens}(L_1)/(L_2)$ est une algèbre de Koszul homogène.*

4. Résolution injective minimale de $L_{n,3}$

Dans cette section, on démontre le théorème 1.2. On rappelle que le module L_1 a une base formée par les éléments $X^\epsilon Y^i$ avec $\epsilon = 0, 1$ et $i \geq 1$. Ici $X = \frac{x}{y}$ et $Y = y^{p-1}$, x et y sont des générateurs de $H^*\mathbb{Z}/p = \Lambda(x) \otimes \mathbb{F}_p[y]$.

Rappelons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le module instable injectif de Brown-Gitler $J(k)$ est caractérisé par l'isomorphisme naturel :

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(k)) = (M^k)^*, \quad M \in \mathcal{U}.$$

On note $\pi_i: L_1 \rightarrow J(2p^{i+1} - 2p^i)$ le morphisme qui envoie Y^{p^i} sur la classe canonique $\iota_{2p^{i+1}-2p^i}$ de $J(2p^{i+1} - 2p^i)$. On considère le morphisme composé

$$g_n: L_1^{\otimes n} \xrightarrow{\pi_{n-1} \otimes \dots \otimes \pi_0} J(2p^n - 2p^{n-1}) \otimes \dots \otimes J(2p - 2) \xrightarrow{\mu} J(2p^n - 2),$$

avec μ la multiplication de modules de Brown-Gitler. Dans cette section, on notera $\mathfrak{M}_i = L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}$, $1 \leq i \leq n - 1$, et $\mathfrak{M}_n = L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,3}$.

Pour démontrer le théorème 1.2, il suffit de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. — *Le morphisme g_n est surjectif et induit un isomorphisme de modules instables :*

$$\frac{L_1^{\otimes n}}{\mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_n} \cong J(2p^n - 2).$$

Démonstration. — La section 4.1 montre que le noyau de g_n contient la somme $\mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_n$. Dans la section 4.3, on trouvera que, en chaque degré, la dimension du module quotient est inférieure ou égale à celle du module de Brown-Gitler $J(2p^n - 2)$. Enfin la surjectivité de g_n (le point le plus difficile de l'argument) donnée dans la section 4.2, permet de conclure le théorème. \square

REMARQUE 4.2. — En supposant ce théorème, le morphisme

$$f_{k,n}: L_{n-k} \otimes J(2p^k - 2) \rightarrow L_{n-k-1} \otimes J(2p^{k+1} - 2)$$

n'est rien d'autre que le morphisme pointillé dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L_{n-k} \otimes J(2p^k - 2) & \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} & L_{n-k-1} \otimes L_1 \otimes J(2p^k - 2) \\ \downarrow f_{k,n} & & \downarrow \text{id} \otimes \pi_k \otimes \text{id} \\ L_{n-k-1} \otimes J(2p^{k+1} - 2) & \xleftarrow{\text{id} \otimes \mu} & L_{n-k-1} \otimes J(2p^{k+1} - 2p^k) \otimes J(2p^k - 2). \end{array}$$

Le diagonal $\delta: L_n \rightarrow L_i \otimes L_{n-i}$ dans ce diagramme est l'inclusion canonique induite de l'identification $L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ et de l'identité $e_n = (e_i \otimes e_{n-i})e_n$, e_i (resp. e_{n-i}) agissant sur les i premiers facteurs (resp. les $n-i$ derniers facteurs) de $L_1^{\otimes n}$.

4.1. Noyau de $g_n : L_1^{\otimes n} \rightarrow J(2p^n - 2)$. — Comme la restriction du morphisme $\pi_0 : L_1 \rightarrow J(2p - 2)$ sur $L_{1,3} = y^{p-1}L_1$ est triviale, il est clair que $\mathfrak{M}_n = L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,3}$ est contenu dans le noyau de g_n .

D'autre part, on observe que si $X_1^e Y_1^a X_2^f Y_2^b$ est de degré $2(p-1)(p^m + p^{m-1})$, alors $e = f = 0$ et $a + b = p^m + p^{m-1}$. Comme $L_2 = e_2 \cdot (L_1 \otimes L_1)$, le module \mathfrak{M}_i , $1 \leq i \leq n - 1$, est également inclu dans le noyau de g_n grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3. — *Si $a + b = p^m + p^{m-1}$ et $a, b > 0$, alors l'expression de $e_2 \cdot Y_1^a Y_2^b$ comme somme de monômes distincts ne contient pas $Y_1^{p^m} Y_2^{p^{m-1}}$.*

On a besoin du lemme suivant :

LEMME 4.4. — *Supposons $a + b = p^m + p^{m-1}$, $a, b > 0$ et $a, b \notin \{p^m, p^{m-1}\}$. Considérons les développements p -adiques de $(p - 1)a$ et $(p - 1)b$:*

$$(p - 1)a = \sum_{i=0}^m a_i p^i, \quad (p - 1)b = \sum_{i=0}^m b_i p^i, \quad 0 \leq a_i, b_i \leq p - 1.$$

Alors $a_{m-1} = p - 1$ si et seulement si $b_{m-1} = p - 1$.

Démonstration. — Supposons que $a_{m-1} = p - 1$. On observe d'abord que

$$0 < \sum_{i=0}^{m-2} a_i p^i < p^{m-1}.$$

En effet, si $\sum_{i=0}^{m-2} a_i p^i = 0$, alors $(p - 1)a = (p - 1)p^{m-1} + a_m p^m$ ce qui implique soit $a_{m-1} = 0$ soit $a_{m-1} = p - 1$. Comme $a \neq p^{m-1}$, on a $a_{m-1} = p - 1$, donc $a = p^m + p^{m-1}$ et $b = 0$ ce qui n'est pas possible. L'inégalité $\sum_{i=0}^{m-2} a_i p^i < p^{m-1}$ est évidente.

On montre maintenant que $b_{m-1} = p - 1$. On a

$$(p - 1)b = (p - 1)(p^m + p^{m-1} - a) = (p - 1 - a_m)p^m - \sum_{i=0}^{m-2} a_i p^i.$$

On en déduit que $(p - 1 - a_m)p^m - p^{m-1} < (p - 1)b < (p - 1 - a_m)p^m$. On obtient donc

$$b_m = \left[\frac{(p - 1)b}{p^m} \right] = p - 2 - a_m,$$

$[x]$ désignant la partie entière de x . Il suit que

$$(p - 1)b - b_m p^m = (p - 1 - a_m - b_m)p^m - \sum_{i=0}^{m-2} a_i p^i = p^m - \sum_{i=0}^{m-2} a_i p^i.$$

Il s'ensuit $p^m - p^{m-1} < (p - 1)b - b_m p^m < p^m$ ce qui entraîne que

$$b_{m-1} = \left\lfloor \frac{(p - 1)b - b_m p^m}{p^{m-1}} \right\rfloor = p - 1.$$

De manière analogue, on montre que si $b_{m-1} = p - 1$ alors $a_{m-1} = p - 1$. Le lemme est démontré. □

Démonstration de la proposition 4.3. — On a

$$e_2 \cdot Y_1^a Y_2^b = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} y_1^{(p-1)a} (\lambda y_1 + y_2)^{(p-1)b} - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} y_1^{(p-1)b} (\lambda y_1 + y_2)^{(p-1)a}$$

On note $c(a, b, m)$ le coefficient de $Y_1^p Y_2^{p^{m-1}}$ dans cette somme. On va montrer que $c(a, b, m) = 0$ en considérant les cas suivants :

Cas $a > p^m$ et $b < p^{m-1}$. — On a

$$c(a, b, m) = - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{(p-1)(p^m-b)} \binom{(p-1)a}{(p-1)(p^m-b)} = \binom{(p-1)a}{(p-1)p^{m-1}}.$$

Ce coefficient est nul car dans le cas contraire, on a $a_{m-1} = p - 1$, alors d'après le lemme 4.4, $b_{m-1} = p - 1$ et encore $(p - 1)b \geq (p - 1)p^{m-1}$, soit $b \geq p^{m-1}$: absurde !

Cas $a = p^m$ et $b = p^{m-1}$. — On a

$$c(a, b, m) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} 1 - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{(p-1)(p^m-b)} \binom{(p-1)a}{(p-1)(p^m-b)} = \binom{(p-1)p^m}{(p-1)p^{m-1}} = 0.$$

Cas $p^{m-1} < a < p^m$ et $p^{m-1} < b < p^m$. — On a

$$\begin{aligned} c(a, b, m) &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{(p-1)(p^m-a)} \binom{(p-1)b}{(p-1)(p^m-a)} \\ &\quad - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{(p-1)(p^m-b)} \binom{(p-1)a}{(p-1)(p^m-b)} \\ &= - \binom{(p-1)b}{(p-1)p^{m-1}} + \binom{(p-1)a}{(p-1)p^{m-1}}. \end{aligned}$$

Le lemme 4.4 implique $c(a, b, m) = 0$.

Cas $a = p^{m-1}$ et $b = p^m$. — On a

$$c(a, b, m) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{(p-1)(p^m-a)} \binom{(p-1)b}{(p-1)(p^m-a)} - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} 1 = \binom{(p-1)p^m}{(p-1)p^{m-1}} = 0.$$

Cas $a < p^{m-1}$ et $b > p^m$. — On a

$$c(a, b, m) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{(p-1)(p^m-a)} \binom{(p-1)b}{(p-1)(p^m-a)} = - \binom{(p-1)b}{(p-1)p^{m-1}}.$$

Comme dans le premier cas, ce coefficient est nul car dans le cas contraire, on a une contradiction : $a \geq p^{m-1}$. La proposition est démontrée. \square

4.2. Surjectivité de g_n : $L_1^{\otimes n} \rightarrow J(2p^n - 2)$. — Considérons la somme directe $\bar{J}(*)^* := \bigoplus_{d \geq 0} J(2d)$. Il découle de la description de H. Miller ([22]) de la somme directe de tous les modules de Brown-Gitler que

$$\bar{J}(*)^* \cong \Lambda(\hat{x}_j \mid j \geq 0) \otimes \mathbb{F}_p[\hat{y}_j \mid j \geq 0]$$

avec $\hat{x}_j \in J(2p^j)^1$ et $\hat{y}_j \in J(2p^j)^2$. L'action de l'algèbre de Steenrod est donnée par

$$\beta \hat{x}_j = \hat{y}_j, \quad P^1 \hat{y}_j = \hat{y}_{j-1}^p, \quad \hat{y}_{-1} = 0$$

et la formule de Cartan. Le bidegré de \hat{x}_j est $(1, 2p^j)$ et le bidegré de \hat{y}_j est $(2, 2p^j)$. Le module $J(2d)$ est alors le sous-espace vectoriel ayant comme base les monômes de second degré $2d$. En particulier, on a

PROPOSITION 4.5. — *Le module de Brown-Gitler $J(2p^n - 2)$ a une base formée par les éléments $\hat{x}_0^{\epsilon_0} \hat{y}_0^{i_0} \cdots \hat{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \hat{y}_{n-1}^{i_{n-1}}$ avec $\sum_{j=0}^{n-1} (\epsilon_j + i_j) p^j = p^n - 1$, $\epsilon_j \in \{0, 1\}$, $i_j \geq 0$.*

On considère ensuite la \mathbb{F}_p -algèbre $\Lambda(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}]$ avec $|\tilde{x}_j| = 1$ et $|\tilde{y}_j| = 2$, munie de l'action *tordue* de l'algèbre de Steenrod définie par

$$\beta \tilde{x}_j = \tilde{y}_j, \quad P^1 \tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1}^p, \quad \tilde{y}_{-1} = \tilde{y}_{n-1}$$

et la formule de Cartan. Le résultat suivant est un remarquable théorème de rigidité concernant la structure de *module instable* de H^*V_n .

THÉORÈME 4.6 ([4]). — *Le module instable $\Lambda(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}]$ est isomorphe à H^*V_n .*

REMARQUE 4.7. — L'isomorphisme de Campbell-Selick

$$\Lambda(x_0, \dots, x_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[y_0, \dots, y_{n-1}] \cong \Lambda(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}]$$

préserve respectivement la partie polynomiale et la partie extérieure.

Pour tout monôme $\tilde{m} = \tilde{x}_0^{\epsilon_0} \tilde{y}_0^{i_0} \cdots \tilde{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \tilde{y}_{n-1}^{i_{n-1}}$, le poids de \tilde{m} est défini par

$$w(\tilde{m}) := \sum_{j=0}^{n-1} (\epsilon_j + i_j) p^j.$$

On note $\mathbf{CS}_n(k)$ le sous-espace de $\Lambda(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}]$ ayant pour base les monômes dont le poids est congru modulo $p^n - 1$ à k . L'action tordue de l'algèbre de Steenrod sur $E(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}]$ montre que $\mathbf{CS}_n(k)$ est un \mathcal{A}_p -module. On obtient ainsi la décomposition de Campbell-Selick de H^*V_n en somme directe de \mathcal{A}_p -modules instables :

$$H^*V_n \cong \Lambda(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}] = \bigoplus_{k=0}^{p^n-2} \mathbf{CS}_n(k).$$

PROPOSITION 4.8. — *Le facteur $\mathbf{CS}_n(0)$ dans cette décomposition a une base formée par les monômes $\tilde{x}_0^{\epsilon_0} \tilde{y}_0^{i_0} \cdots \tilde{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \tilde{y}_{n-1}^{i_{n-1}}$ qui vérifient $\sum_{j=0}^{n-1} (\epsilon_j + i_j) p^j \equiv 0 \pmod{p^n - 1}$.*

On obtient donc une surjection d'espaces vectoriels gradués :

$$\overline{c\bar{s}}_n : \mathbf{CS}_n(0) \rightarrow J(2p^n - 2)$$

qui envoie $\tilde{m} := \tilde{x}_0^{\epsilon_0} \tilde{y}_0^{i_0} \cdots \tilde{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \tilde{y}_{n-1}^{i_{n-1}}$ sur $\hat{m} := \hat{x}_0^{\epsilon_0} \hat{y}_0^{i_0} \cdots \hat{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \hat{y}_{n-1}^{i_{n-1}}$ si $w(\tilde{m}) = p^n - 1$ et sur 0 sinon.

PROPOSITION 4.9. — *La surjection $\overline{c\bar{s}}_n$ est \mathcal{A}_p -linéaire. Elle envoie $\tilde{y}_0^{p^n-1}$ sur la classe canonique ι_{2p^n-2} de $J(2p^n - 2)$ et envoie les autres monômes de degré $2p^n - 2$ sur 0.*

Démonstration. — Comme $\beta(\tilde{x}_j) = \tilde{y}_j$ pour tout j , on a $w(\beta(\tilde{m})) = w(\tilde{m})$. La β -linéarité de $\overline{c\bar{s}}_n$ est alors évidente puisque $\beta(\hat{x}_j) = \hat{y}_j$. Il reste à vérifier que $\overline{c\bar{s}}_n$ est P^1 -linéaire. On a

$$P^1(\tilde{m}) = \tilde{x}_0^{\epsilon_0} \tilde{y}_0^{i_0} P^1(\tilde{x}_1^{\epsilon_1} \tilde{y}_1^{i_1} \cdots \hat{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \hat{y}_{n-1}^{i_{n-1}}) + \frac{i_0 \hat{y}_{n-1}^p}{\hat{y}_0} \tilde{m}$$

$$P^1(\hat{m}) = \hat{x}_0^{\epsilon_0} \hat{y}_0^{i_0} P^1(\hat{x}_1^{\epsilon_1} \hat{y}_1^{i_1} \cdots \hat{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \hat{y}_{n-1}^{i_{n-1}}).$$

Comme $w(\frac{\hat{y}_{n-1}^p}{\hat{y}_0} \tilde{m}) = w(\tilde{m}) + p^n - 1$, on a $\overline{c\bar{s}}_n(\frac{\hat{y}_{n-1}^p}{\hat{y}_0} \tilde{m}) = 0$ si $w(\tilde{m}) = p^n - 1$. La P_1 -linéarité de $\overline{c\bar{s}}_n$ suit.

Le deuxième énoncé de la proposition provient de ce que le système d'équations

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_0 + i_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\epsilon_j + i_j) p^j &= p^n - 1 \\
 (\epsilon_0 + 2i_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\epsilon_j + 2i_j) &= 2(p^n - 1)
 \end{aligned}$$

admet pour solution unique : $i_0 = p^n - 1, i_2 = \dots = i_{n-1} = \epsilon_0 = \dots = \epsilon_{n-1} = 0$. En effet, la première équation implique d'une part que $i_0 \leq p^n - 1$. D'autre part, en soustrayant la première équation de la deuxième, on a

$$i_0 - \sum_{j=1}^{n-1} [(\epsilon_j + i_j) p^j - (\epsilon_j + 2i_j)] = p^n - 1,$$

d'où $i_0 \geq p^n - 1$. Ainsi $i_0 = p^n - 1$ et $i_2 = \dots = i_{n-1} = \epsilon_0 = \dots = \epsilon_{n-1} = 0$. \square

On obtient de ce qui précède une surjection de modules instables :

$$cs_n : H^*V_n \twoheadrightarrow CS_n(0) \xrightarrow{\overline{cs_n}} J(2p^n - 2).$$

On considère ensuite le morphisme

$$\tilde{g}_n : H^*V_n \rightarrow J(2p^n - 2)$$

qui envoie $y_1^{(p-1)p^{n-1}} \dots y_n^{p-1}$ sur ι_{2p^n-2} et envoie les autres monômes de $H^{2p^n-2}V_n$ sur 0. Autrement dit, si $\{a_1, \dots, a_n\}$ (resp. $\{b_1, \dots, b_n\}$) est la base de $V_n = H_1V_n$ (resp. $W_n \subset H_2V_n$) qui est duale à la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ (resp. $\{y_1, \dots, y_n\}$) de $V_n^* = H^1V_n$ (resp. $W_n^* = \beta H^1V_n$), le morphisme \tilde{g}_n est alors représenté par le monôme $b_1^{(p-1)p^{n-1}} \dots b_n^{(p-1)}$ dans la puissance divisée $\Gamma^{p^n-1}(W_n)$.

Comme l'isomorphisme de Campbell-Selick

$$H^*V_n \cong \Lambda(\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}]$$

préserve respectivement la partie polynomiale et la partie extérieure, le morphisme cs_n ci-dessus est aussi représenté par un élément, noté cs_n , de la puissance divisée $\Gamma^{p^n-1}(W_n)$.

On a le diagramme suivant dont le triangle en bas est commutatif et la flèche verticale à droite est la projection naturelle :

$$\begin{array}{ccc}
 H^*V_n & \overset{\tau_n}{\dashrightarrow} & H^*V_n \\
 cs_n \downarrow & \nearrow \tilde{g}_n & \downarrow \\
 J(2p^n - 2) & \xleftarrow{g_n} & L_1^{\otimes n}
 \end{array}$$

PROPOSITION 4.10. — *Il existe un endomorphisme τ_n de H^*V_n qui rend commutatif le diagramme ci-dessus.*

COROLLAIRE 4.11. — *Le morphisme g_n est surjectif.*

Pour montrer l'existence du morphisme τ_n , il suffit de montrer qu'il existe un élément de $\mathbb{F}_p[\text{Mat}(\mathbb{F}_p)]$ qui envoie $b_1^{((p-1)p^{n-1})} \dots b_n^{(p-1)}$ sur \mathbf{cs}_n . Ceci résulte du résultat général suivant dont la démonstration est renvoyée à la section 4.4.

THÉORÈME 4.12. — *En tant que $\mathbb{F}_p[\text{Mat}(\mathbb{F}_p)]$ -module, $\Gamma^{p^n-1}(W_n)$ est engendré par $b_1^{((p-1)p^{n-1})} \dots b_n^{(p-1)}$.*

4.3. Base acceptable de $J(2p^n - 2)$. — Dans cette section on construit une base de $J(2p^n - 2)$.

PROPOSITION 4.13. — *Le quotient $L_1^{\otimes n} / \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ est engendré par les monômes $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ qui vérifient $\epsilon_j \in \{0, 1\}$, $1 \leq i_j \leq pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ et $i_n = 1$.*

Démonstration. — On appelle acceptable tout monôme $\omega_{(1^n)}^I := X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ (voir les notations 2.10 et 3.4) qui vérifie $\epsilon_j \in \{0, 1\}$, $1 \leq i_j \leq pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ et $i_n = 1$. Supposons $\omega_{(1^n)}^I$ n'est pas acceptable.

- Si $i_n > 1$ alors $\omega_{(1^n)}^I = 0$ dans le quotient puisque $\omega_{(1^n)}^I \in \mathfrak{M}_n$.
- Si $i_j > pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ pour $1 \leq j < n$, d'après le lemme 2.11, on a

$$\omega_{(1^{j-1}, 2, 1^{n-j-1})}^I = \omega_{(1^n)}^I + \text{des } (1^n)\text{-monômes d'ordre supérieur}$$

$$\text{et } \omega_{(1^{j-1}, 2, 1^{n-j-1})}^I = 0 \text{ dans le quotient car } \omega_{(1^{j-1}, 2, 1^{n-j-1})}^I \in \mathfrak{M}_j.$$

Une itération évidente donne le résultat. □

REMARQUE 4.14. — L'argument ci-dessus permet aussi de conclure que le module quotient

$$J_{n,m} := \frac{L_1^{\otimes n}}{\sum_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1} + L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,m}}$$

est engendré par les classes des monômes $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$ qui vérifient $\epsilon_j \in \{0, 1\}$, $1 \leq i_j \leq pi_{j+1} - \epsilon_{j+1}$ et $1 \leq i_n \leq \frac{m-1}{2}$. En particulier, $J_{n,m}$ est un module fini.

Considérons ensuite les deux ensembles suivants :

$$\mathcal{L}(n) := \{(\epsilon_1, i_1; \dots; \epsilon_n, i_n) \mid \epsilon_k \in \{0, 1\}, 1 \leq i_k \leq pi_{k+1} - \epsilon_{k+1}, i_n = 1\},$$

$$\mathcal{J}(n) := \{(\epsilon_0, i_0; \dots; \epsilon_{n-1}, i_{n-1}) \mid \sum_{j=0}^{n-1} (\epsilon_j + i_j)p^j = p^n - 1\}.$$

On définit respectivement le degré de $(\epsilon_1, i_1; \dots; \epsilon_n, i_n) \in \mathcal{L}(n)$ comme étant le degré de $X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}$, soit $\sum_{k=1}^n 2(p-1)i_k - \epsilon_k$, et le degré de $(\epsilon_0, i_0; \dots; \epsilon_{n-1}, i_{n-1}) \in \mathcal{J}(n)$ comme étant le premier degré de $\hat{x}_0^{\epsilon_0} \hat{y}_0^{i_0} \dots \hat{x}_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \hat{y}_{n-1}^{i_{n-1}}$, soit $\sum_{k=0}^{n-1} 2i_k + \epsilon_k$.

On vérifie sans peine que les deux correspondances suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n) &\longrightarrow \mathcal{J}(n) \\ (\epsilon_j, i_j)_{1 \leq j \leq n} &\longmapsto (\epsilon_{j+1}, pi_{j+1} - \epsilon_{j+1} - i_j)_{0 \leq j \leq n-1}, \quad (i_0 = 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(n) &\longrightarrow \mathcal{L}(n) \\ (\epsilon_j, i_j)_{0 \leq j \leq n-1} &\longmapsto (\epsilon_{j+1}, \frac{1 + \sum_{k=0}^j (\epsilon_{k+1} + i_k)p^k}{p^j})_{0 \leq j \leq n-1} \end{aligned}$$

sont bien définies et inverses l'une de l'autre. De plus, elles préservent le degré. On en déduit que, en chaque degré, la dimension du module quotient $L_1^{\otimes n} / \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$ est inférieure ou égale à celle du module de Brown-Gitler $J(2p^n - 2)$. La surjectivité de g_n est utilisée pour obtenir la

PROPOSITION 4.15. — *Les éléments*

$$g_n(X_1^{\epsilon_1} Y_1^{i_1} \dots X_n^{\epsilon_n} Y_n^{i_n}), \quad (\epsilon_1, i_1; \dots; \epsilon_n, i_n) \in \mathcal{L}(n),$$

forment une base de $J(2p^n - 2)$.

4.4. $\Gamma^{p^n-1}(W_n)$ en tant que $\mathbb{F}_p[\text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)]$ -module. — Dans cette section, on montre que le $\mathbb{F}_p[\text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)]$ -module $\Gamma^{p^n-1}(W_n)$ est engendré par $b_1^{((p-1)p^{n-1})} \dots b_n^{(p-1)}$. Cela est équivalent à démontrer la surjectivité du morphisme suivant :

$$\mathbb{F}_p[\text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)] \rightarrow \Gamma^{p^n-1}(W_n), \quad \sigma \mapsto (b_1^{((p-1)p^{n-1})} \dots b_n^{(p-1)}) \cdot \sigma.$$

On se ramène alors à démontrer l'injectivité du morphisme dual :

$$S^{p^n-1}(W_n^*) \rightarrow \mathbb{F}_p^{\text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)}, \quad P \mapsto (\sigma \rightarrow \langle b_1^{((p-1)p^{n-1})} \dots b_n^{(p-1)}, \sigma \cdot P \rangle).$$

Ici \langle , \rangle désigne l'accouplement canonique entre $\Gamma^{p^n-1}(W_n)$ et $S^{p^n-1}(W_n^*)$. On rappelle que $\langle B \cdot \sigma, P \rangle = \langle B, \sigma \cdot P \rangle$ pour tout $\sigma \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$, tout $B \in \Gamma^{p^n-1}(W_n)$ et tout $P \in S^{p^n-1}(W_n^*)$.

On a ainsi vérifié que le théorème 4.12 est équivalent à la proposition suivante.

PROPOSITION 4.16. — *Pour tout $P \in S^{p^n-1}(W_n^*)$, il existe $\sigma \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ telle que l'expression de $\sigma \cdot P$ comme somme de monômes distincts contient le monôme $y_1^{(p-1)p^{n-1}} \dots y_n^{p-1}$.*

Pour toute suite d'entiers $I = (i_1, \dots, i_n)$, notons $y^I = y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}$. Appelons *admissible* tout monôme y^I qui vérifie $i_{s-1} \geq pi_s$ pour $1 < s \leq n$. Mettons l'ordre lexicographique sur les monômes de $S^*(W_n^*)$. Pour tout élément homogène non-nul P de $S^*(W_n^*)$, soit $\mu(P)$ le plus grand monôme (par rapport à l'ordre lexicographique) qui apparaît dans P .

LEMME 4.17. — *Si $\mu(P)$ n'est pas admissible, il existe $\sigma \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ tel que $\mu(\sigma \cdot P) > \mu(P)$.*

Démonstration. — Soit $\mu(P) = y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}$. Comme $\mu(P)$ n'est pas admissible, il existe $1 < s \leq n$ tel que $i_{s-1} < pi_s$. En regroupant les monômes de P , on le réécrit sous la forme $P = y_1^{i_1} \dots y_{s-2}^{i_{s-2}} Q y_{s+1}^{i_{s+1}} \dots y_n^{i_n} + R$, de manière que $\mu(R) < \mu(P)$ et que $Q = Q(y_{s-1}, y_s) \in \mathbb{F}_p[y_{s-1}, y_s]$ est un polynôme de degré $i_{s-1} + i_s$. Observons que pour tout $\sigma \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ correspondant aux substitutions qui ne font intervenir que y_{s-1}, y_s , les monômes de $\sigma \cdot R$ sont différents des monômes de $y_1^{i_1} \dots y_{s-2}^{i_{s-2}} (\sigma \cdot Q) y_{s+1}^{i_{s+1}} \dots y_n^{i_n}$. Par conséquent, si un tel σ vérifie $\mu(\sigma \cdot Q) > y_{s-1}^{i_{s-1}} y_s^{i_s}$, on aura forcément $\mu(\sigma \cdot P) > \mu(P)$ (car $\mu(\sigma \cdot P)$ est supérieur ou égal à $\mu(y_1^{i_1} \dots y_{s-2}^{i_{s-2}} (\sigma \cdot Q) y_{s+1}^{i_{s+1}} \dots y_n^{i_n})$ qui est strictement supérieur à $\mu(P)$).

On a ainsi montré qu'il suffit de vérifier le lemme pour $n = 2$. Soit $\mu(P) = y_1^{i_1} y_2^{i_2}$ avec $i_1 < pi_2$. On pose $P = (y_1 y_2^p - y_1^p y_2)^q Q$ avec $Q \in S^i(V_2^*)$ et l'entier q le plus grand possible.

Cas 1. — Q contient un monôme y_1^i . Celui-ci est forcément $\mu(Q)$, d'où $\mu(P) = y_1^{pq+i} y_2^q$, ce qui est absurde puisque $\mu(P) = y_1^{i_1} y_2^{i_2}$ et $i_1 < pi_2$.

Cas 2. — Q contient un monôme y_2^i . Soit $\sigma \in \text{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$ qui échange y_1 et y_2 . Alors

$$\mu(\sigma \cdot P) = y_1^{pq+i} y_2^q.$$

Cas 3. — Q est divisible par $y_1 y_2$. Notons que $y_1 y_2^p - y_1^p y_2 = y_1 y_2 \prod_{a \in \mathbb{F}_p^*} (y_2 - ay_1)$. La maximalité de q implique alors qu'il existe $a \in \mathbb{F}_p^*$ tel que Q n'est pas divisible par $y_2 - ay_1$. Soit $\sigma \in \text{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$ qui fixe y_1 et transforme y_2 en $ay_1 + y_2$. Alors

$$\sigma \cdot P = (y_1 y_2^p - y_1^p y_2)^q Q(y_1, ay_1 + y_2).$$

Le terme qui ne comporte pas y_2 dans $Q(y_1, ay_1 + y_2)$ est égal à $Q(y_1, ay_1)$, qui est non nul puisque Q n'est pas divisible par $y_2 - ay_1$. Supposons que $Q(y_1, ay_1) = by_1^i$, alors

$$\mu(\sigma \cdot P) = y_1^{pq+i} y_2^q.$$

Observons maintenant que si $pq + i + q = i_1 + i_2$, alors $(pq + i, q) > (i_1, i_2)$, car dans le cas contraire, on a $i_1 \geq pq + i$, ce qui implique $q \geq i_2$, et alors $i_1 \geq pi_2 + i \geq pi_2$. Le lemme suit. \square

Démonstration de la proposition 4.16. — Posons $Y_i = y_i^{p-1}$. Montrons la proposition par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que $n > 1$ et que la proposition soit vraie pour $n-1$. En posant $W_{n-1}^* = \mathbb{F}_p\{y_2, \dots, y_n\}$, cette hypothèse implique que pour tout $Q \in S^{p^{n-1}-1}(W_{n-1}^*)$, il existe $\tau \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ tel que $\tau \cdot Q$ contient $Y_2^{p^{n-2}} \dots Y_{n-1}^p Y_n$. Ici τ ne fait intervenir que les générateurs y_2, \dots, y_n .

Soit P un élément quelconque non-nul de $S^{p^n-1}(W_n^*)$. Il faut montrer que $\sigma \cdot P$ contient $Y_1^{p^{n-1}} \dots Y_{n-1}^p Y_n$ pour un certain $\sigma \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$. D'après le lemme 4.17, on peut supposer que $m(P) = y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}$ est un monôme admissible. Mais alors $i_1 \geq (p-1)p^{n-1}$. Réécrivons P sous la forme $P = Y_1^{p^{n-1}} f + R$, où $f = f(y_1, \dots, y_n)$ et R ne contient que des monômes dont la puissance de y_1 est inférieure à $(p-1)p^{n-1}$.

Soit u une combinaison linéaire non nulle des générateurs y_2, \dots, y_n . Soit σ_u la matrice définie par la substitution $y_1 := y_1 + u$. On considère $\sigma_u \cdot P$ comme un élément de $\mathbb{F}_p[y_2, \dots, y_n][y_1]$. Il est clair que le coefficient de $Y_1^{p^{n-1}}$ dans $\sigma_u \cdot R$ est nul. Puisque f est de degré $p^{n-1} - 1$, on vérifie que le coefficient de $Y_1^{p^{n-1}}$ dans

$$\sigma_u \cdot Y_1^{p^{n-1}} f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i y_1^{p^{n-1}(p-1-i)} u^{p^{n-1}i} f(y_1 + u, y_2, \dots, y_n)$$

est $f(u, y_2, \dots, y_n)$.

Cas 1. — Il existe u telle que $f(u, y_2, \dots, y_n) \neq 0$. D'après l'observation plus haut, il existe $\tau \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ tel que $\tau \cdot f(u, y_2, \dots, y_n)$ contient $Y_2^{p^{n-2}} \dots Y_{n-1}^p Y_n$. Comme τ ne fait pas intervenir y_1 , il suit que $\tau \sigma_u \cdot P$ contient $Y_1^{p^{n-1}} \dots Y_{n-1}^p Y_n$.

Cas 2. — $f(u, y_2, \dots, y_n) = 0$ pour toute combinaison non nulle u . Ceci implique que le polynôme $f(y_1, \dots, y_n)$ est divisible par $y_1 + u$ pour toute u . Comme $f \in S^{p^{n-1}-1}(W_n^*)$, il suit que $f = a \prod_{0 \neq u \in V_{n-1}^*} (y_1 + u)$ pour certain $a \in \mathbb{F}_p^*$. Clairement $\prod_{0 \neq u \in W_{n-1}^*} (y_1 + u)$ contient $Y_2^{p^{n-2}} \dots Y_{n-1}^p Y_n$. D'où P lui-même contient $Y_1^{p^{n-1}} \dots Y_{n-1}^p Y_n$.

La proposition est démontrée. □

5. Application : cohomotopie du spectre $L(n, 3)$

Dans cette section, on étudie la cohomotopie du spectre $L(n, 3)$ dans la catégorie des spectres p -complétés. On note $[L(n, 3), S^k]$ le groupe abélien des applications du spectre $L(n, 3)$ dans le spectre des suspensions itérées de la sphère S^k . On désigne par \mathcal{M} la catégorie dont les objets sont les \mathcal{A}_p -modules gradués et dont les morphismes sont les applications \mathcal{A}_p -linéaires de degré zéro. La catégorie \mathcal{U} des \mathcal{A}_p -modules instables est alors une sous catégorie pleine de \mathcal{M} .

Utilisant la suite spectrale d'Adams

$$\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \implies [L(n, 3), S^{s-t}],$$

on se ramène à l'étude des groupes d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$. A cette fin, on se servira de la suite spectrale de Grothendieck

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v \Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \implies \text{Ext}_{\mathcal{M}}^{u+v}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$$

pour passer de la catégorie \mathcal{U} des \mathcal{A}_p -modules instables à celle des \mathcal{A}_p -modules à travers les dérivés D_v du foncteur de déstabilisation (voir la section 5.1). La suite exacte du théorème 1.1 sera utilisée pour calculer les groupes d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v \Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$. En particulier, on cherche à comprendre les groupes

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_v \Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n-u} \otimes J(2p^u - 2)),$$

ou encore le module instable

$$(D_v \Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p : L_{n-u})_{\mathcal{U}},$$

la division dans \mathcal{U} de $D_v \Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p$ par le module de Steinberg L_{n-u} . On se restreint à la division par L_1 , le cas général est difficile et sera étudié ailleurs. En particulier, on explicitera une décomposition de $(D(n) : L_1)_{\mathcal{U}}$ en termes des invariants modulaires de GL_n . Ici $D(n)$ est l'image de la restriction $H^* \Sigma_{p^n} \rightarrow H^*(\mathbb{Z}/p)^n$ induite par l'inclusion canonique $(\mathbb{Z}/p)^n \hookrightarrow \Sigma_{p^n}$. Pour p impair, $D(n)$ est en général strictement inclus dans $(H^*(\mathbb{Z}/p)^n)^{GL_n}$: c'est là une différence fondamentale avec le cas $p = 2$.

On exposera le calcul du groupe $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ pour $s - t \geq 2p^{n-2} + n$. Par conséquent, on obtiendra un résultat de type "conjecture de Segal" pour la cohomotopie du spectre $L(n, 3)$.

THÉORÈME 5.1. — *Supposons $k \geq 2p^{n-2} + n$. Alors*

$$[L(n, 3), S^k] = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & \text{si } k = 2p^n - 2 + n, \\ \mathbb{Z}/p & \text{si } k = 2p^{n-1} - 1 + n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.1. Dérivés du foncteur de déstabilisation. — On note $D: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{U}$ et on appelle *foncteur de déstabilisation* l'adjoint à gauche du foncteur oublié $\mathcal{O}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$. Le foncteur D est exact à droite et on note $D_s: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{U}$, $s \geq 0$, ses foncteurs dérivés.

On considère Σ_{p^n} le groupe des permutations (de l'ensemble des points) du groupe $V_n = (\mathbb{Z}/p)^n$ et $i_n: V_n \hookrightarrow \Sigma_{p^n}$ le plongement *via* l'action par translation. On note \mathbb{Z}/p le Σ_{p^n} -module trivial \mathbb{Z}/p et \mathcal{Z}/p le Σ_{p^n} -module \mathbb{Z}/p *via* la signature. On pose

$$D(n) = \text{Im} \left(H^*(\Sigma_{p^n}; \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{i_n^*} H^*(V_n; \mathbb{Z}/p) \right),$$

$$\mathfrak{D}(n) = \text{Im} \left(H^*(\Sigma_{p^n}; \mathcal{Z}/p) \xrightarrow{i_n^*} H^*(V_n; i_n^* \mathcal{Z}/p) \right).$$

Comme le plongement naturel i_n envoie V_n dans le sous-groupe alterné \mathcal{A}_{p^n} de Σ_{p^n} , $\mathcal{H}^*V_n := H^*(V_n; i_n^* \mathcal{Z}/p)$ s'identifie à $H^*V_n := H^*(V_n; \mathbb{Z}/p)$. Néanmoins la structure de \mathcal{H}^*V_n en tant que GL_n -module est donnée par l'action tordue [24] :

$$g * f := \det(g)^{\frac{p-1}{2}} (g \cdot f)$$

où $g \cdot f$ désigne l'action naturelle de $g \in \text{GL}_n$ sur $f \in H^*V_n$. On observera que $D(n) \subset (H^*V_n)^{\text{GL}_n}$ et $\mathfrak{D}(n) \subset (\mathcal{H}^*V_n)^{\text{GL}_n}$.

On considère ensuite l'application \mathbb{Z}/p -linéaire

$$\text{St}_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n; -): M \rightarrow H^*V_n \otimes M$$

définie de manière récurrente comme suit ([24, 2.4.1]) :

$$\text{St}_1(x_1, y_1; m) = \sum_{\substack{\epsilon=0,1 \\ 0 \leq \epsilon+2i \leq |m|}} (-1)^{\epsilon+i} \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^\epsilon y_1^{\frac{(|m|-2i)(p-1)}{2}} \otimes \beta^\epsilon P^i(m),$$

$$\text{St}_s(x_1, y_1, \dots, x_s, y_s; m) = \text{St}_1(x_1, y_1; \text{St}_{s-1}(x_2, y_2, \dots, x_s, y_s; m)).$$

On abrègera la notation $\text{St}_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n; m)$ en $\text{St}_n(m)$.

Soit M un module instable. Le module instable $R_n M$ est défini par

$$R_n M = D(n) \cdot \text{St}_n M^+ \oplus \mathfrak{D}(n) \cdot \text{St}_n M^-,$$

où M^+ (resp. M^-) désigne le sous-espace de M formé des éléments de degré pair (resp. impair).

THÉORÈME 5.2 ([24]). — *Soit M un module instable. Alors, pour tout $s \geq 0$, on a un isomorphisme de modules instables $D_s \Sigma^{1-s} M \cong \Sigma R_s M$.*

Rappelons que, à signe près, la classe d'Euler de la représentation régulière réelle réduite de V_n est donnée par

$$\epsilon_n = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1^p & \cdots & y_n^p \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{p^{s-1}} & \cdots & y_n^{p^{s-1}} \end{vmatrix}^{\frac{p-1}{2}}.$$

La formule suivante sera utile pour le calcul des groupes $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,m})$.

COROLLAIRE 5.3. — *Supposons $s \geq 0$ et $s + t \geq 1$. Alors*

$$D_s \Sigma^t \mathbb{Z}/p \cong \begin{cases} \Sigma^{s+t} D(s) \epsilon_s^{s+t-1} & \text{si } s+t \text{ est impair,} \\ \Sigma^{s+t} \mathfrak{D}(s) \epsilon_s^{s+t-1} & \text{si } s+t \text{ est pair.} \end{cases}$$

On convient d'alléger cette formule en écrivant $D_s \Sigma^t \mathbb{Z}/p = \Sigma^{s+t} D_{\pm}(s) \epsilon_s^{s+t-1}$.

Démonstration. — D'après [24, 4.2.1], on a $\text{St}_s(\Sigma^k \iota) = (-1)^{\frac{k(k-1)s}{2}} \Sigma^k \epsilon_s^k$, ι désignant le générateur de \mathbb{Z}/p . Le théorème 5.2 donne :

$$\begin{aligned} D_s \Sigma^t \mathbb{Z}/p &= D_s \Sigma^{1-s}(\Sigma^{s+t-1} \mathbb{Z}/p) \cong \Sigma R_s(\Sigma^{s+t-1} \mathbb{Z}/p) \\ &\cong \begin{cases} \Sigma D(s) \cdot \text{St}_s(\Sigma^{s+t-1} \mathbb{Z}/p) & \text{si } s+t-1 \text{ est pair,} \\ \Sigma \mathfrak{D}(s) \cdot \text{St}_s(\Sigma^{s+t-1} \mathbb{Z}/p) & \text{si } s+t-1 \text{ est impair,} \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} \Sigma^{s+t} D(s) \epsilon_s^{s+t-1} & \text{si } s+t \text{ est impair,} \\ \Sigma^{s+t} \mathfrak{D}(s) \epsilon_s^{s+t-1} & \text{si } s+t \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le corollaire est démontré. □

5.2. Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$. — Soit N un module instable. La suite spectrale de Grothendieck associée à la composée des foncteurs

$$\mathcal{M} \xrightarrow{D} \mathcal{U} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{U}}(-, N)} \mathcal{V}$$

est de la forme :

$$E_2^{u,v} = \text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v(-), N) \implies \text{Ext}_{\mathcal{M}}^{u+v}(-, N).$$

On se sert du corollaire 5.3 et cette suite spectrale pour calculer les groupes d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$. On commence par le

LEMME 5.4. — *Soit M un module instable. On a*

1. $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^s(M, L_{n,3}) = 0$ si $s > n$;
2. $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^s(\Sigma^d M, L_{n,3}) = 0$ si $d > 2p^s - 2$.

Démonstration. — La première assertion est conséquence directe de la résolution injective de $L_{n,3}$. Pour la deuxième, on note $\tilde{\Sigma}$ le foncteur adjoint à droite du foncteur de suspension Σ . On a $\tilde{\Sigma}J(k) = J(k - 1)$ pour $k \geq 1$ et $\tilde{\Sigma}J(0) = 0$. De plus, si L est un module instable *réduit* et J est un module instable, on a $L \otimes \tilde{\Sigma}J \cong \tilde{\Sigma}(L \otimes J)$ [14]. Comme le module instable L_{n-s} est réduit, on obtient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^d M, L_{n-s} \otimes J(2p^s - 2)) = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, L_{n-s} \otimes \tilde{\Sigma}^d J(2p^s - 2)) = 0$$

si $d > 2p^s - 2$. Le lemme est démontré. □

5.2.1. *Les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^n(\Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ et $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^{n+1}(\Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$.* — On calcule ensuite les groupes

$$\text{Ext}_{\mathcal{M}}^n(\Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \text{ et } \text{Ext}_{\mathcal{M}}^{n+1}(\Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}).$$

PROPOSITION 5.5. — *On a $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^n(\Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \cong \mathbb{Z}/p$.*

Démonstration. — On a la suite spectrale de Grothendieck :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v \Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \implies \text{Ext}_{\mathcal{M}}^{u+v}(\Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}).$$

D’après le corollaire 5.3, on a

$$D_v \Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p = \Sigma^{v+2p^n-2} D_{\pm}(v) \epsilon_v^{v+2p^n-3}.$$

On déduit du lemme 5.4 que

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v \Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq n, \\ \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_v \Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2)) & \text{si } u = n. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } (u, v) \neq (n, 0), \\ \mathbb{Z}/p & \text{si } (u, v) = (n, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Il suit que $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^n(\Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^n(\Sigma^{2p^n-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \cong \mathbb{Z}/p$. □

PROPOSITION 5.6. — *On a $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^{n+1}(\Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \cong \mathbb{Z}/p$.*

Démonstration. — On a la suite spectrale de Grothendieck :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v \Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \implies \text{Ext}_{\mathcal{M}}^{u+v}(\Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}).$$

D’après le corollaire 5.3, on a

$$D_v \Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p = \Sigma^{v+2p^{n-1}-2} D_{\pm}(v) \epsilon_v^{v+2p^{n-1}-3}.$$

– Si $v = 0$ alors, pour tout $0 \leq i \leq n$, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{2p^{n-1}-2}\mathbb{Z}/p, L_{n-i} \otimes J(2p^i - 2)) = 0.$$

– Si $v = 1$ alors $D_1 \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p = \Sigma^{2p^{n-1}-1} D(1) \epsilon_1^{2p^{n-1}-2}$, d'où

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_1 \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p, L_{n,3}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq n, \\ \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1 \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2)) & \text{si } u = n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq n, \\ \mathbb{Z}/p & \text{si } u = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Ici $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1 \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2)) = \mathbb{Z}/p$ car le sous-espace des éléments de degré $2p^n - 2$ de $\Sigma^{2p^{n-1}-1} D(1) \epsilon_1^{2p^{n-1}-2}$ est engendré par $\Sigma^{2p^{n-1}-1} XY^{p^{n-1}}$.

– Si $v \geq 2$ alors la connectivité de

$$D_v \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p = \Sigma^{2p^{n-1}-2+v} D_{\pm}(v) \epsilon_v^{2p^{n-1}-3+v}$$

est supérieure ou égale au degré de $\Sigma^{2p^{n-1}-2+v} \epsilon_v^{2p^{n-1}-3+v}$, soit

$$(2p^{n-1} - 2 + v) + (2p^{n-1} - 3 + v)(p^v - 1) = (2p^{n-1} - 3 + v)p^v + 1 > 2p^n - 2.$$

On en déduit que

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_v \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p, L_{n,3}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u, v) \neq (n, 1), \\ \mathbb{Z}/p & \text{si } (u, v) = (n, 1). \end{cases}$$

D'où $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^{n+1}(\Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^n(D_1 \Sigma^{2p^{n-1}-2} \mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \cong \mathbb{Z}/p$. □

5.2.2. *Les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ pour $s - t \geq 2p^{n-2} + n$.* — On va montrer la nullité des groupes d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ pour $s - t \geq 2p^{n-2} + n$ et $(s, t) \notin \{(n, 2 - 2p^n), (n + 1, 2 - 2p^{n-1})\}$.

Pour $t \geq 0$, considérons le morphisme

$$f: \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1 \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1 \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2)),$$

induit par le morphisme $f_{n-1,n}: L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2) \rightarrow J(2p^n - 2)$. D'après le corollaire 5.3, on a

$$D_1 \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p = \begin{cases} \Sigma^{1-t} D(1) \epsilon_1^{-t} & \text{si } t \text{ est pair,} \\ \Sigma^{1-t} \mathfrak{D}(1) \epsilon_1^{-t} & \text{si } t \text{ est impair.} \end{cases}$$

On obtient donc une inclusion $D_1 \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p \hookrightarrow \Sigma^{1-t} D(1)$ dont le quotient est fini. Il s'ensuit que cette inclusion induit un isomorphisme

$$(D_1 \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p: L_1)_{\mathcal{U}} \cong (\Sigma^{1-t} D(1): L_1)_{\mathcal{U}}.$$

Comme $(D(1): L_1)_{\mathcal{U}} \cong D(1)$, on obtient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1 \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{1-t} D(1), J(2p^{n-1} - 2)).$$

On vérifie que le domaine et la source de f sont soit $\{0\}$ soit \mathbb{Z}/p .

LEMME 5.7. — *Supposons que $\text{Hom}_u(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \cong \mathbb{Z}/p$. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. — On peut choisir $i \geq 0$ et $\epsilon = 0, 1$ tels que le degré de $\Sigma^{1-t}X^\epsilon Y^i$ soit $2p^{n-1} - 2$, i.e.

$$(t - 1) + (2p^{n-1} - 2) = 2i(p - 1) - \epsilon \geq 0.$$

Il s'ensuit que $\Sigma^{1-t}X^\epsilon Y^{i+p^{n-1}}$ est un élément de degré $2p^n - 2$ de $D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p$, donc la source de f est aussi non nulle. En effet,

- Si $t = 2k \leq 0$ alors $\epsilon = 1$ et $k + (p^{n-1} - 1) = i(p - 1) > 0$. Ceci implique l'élément $\Sigma^{1-2k}XY^{i+p^{n-1}} \in \Sigma^{1-2k}M_1 \cdot Y^{-k}$ est de degré $2p^n - 2$.

- Si $t = 2k - 1 \leq 0$ alors $\epsilon = 0$ et $(k - 1) + (p^{n-1} - 1) = i(p - 1) \geq 0$. Ceci implique l'élément $\Sigma^{2-2k}Y^{i+p^{n-1}} \in \Sigma^{2-2k}L_1 \cdot Y^{-k}$ est de degré $2p^n - 2$.

En particulier, on a $0 \leq i(p - 1) - \epsilon \leq p^{n-1} - 2$.

Soit $\alpha: \Sigma^{1-t}D(1) \rightarrow J(2p^{n-1} - 2)$ le générateur représenté par $\Sigma^{1-t}X^\epsilon Y^i$. On considère le composé suivant, noté β , qui est un élément de $\text{Hom}_u(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2))$:

$$D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p \hookrightarrow D(1) \otimes \Sigma^{1-t}\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} D(1) \otimes D(1) \otimes \Sigma^{1-t}\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\pi \otimes \alpha} L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)$$

où $\delta: D(1) \rightarrow D(1) \otimes D(1)$ est donné par $\delta(x_1^\epsilon y_1^{(p-1)i}) = (x_1 + x_2)^\epsilon (y_1 + y_2)^{(p-1)i}$ et $\pi: D(1) \rightarrow L_1$ est la projection canonique. Or, le coefficient de $Y_1^{p^{n-1}} X_2^\epsilon Y_2^i$ dans le développement de

$$\delta(X_1^\epsilon Y_1^{p^{n-1}+i}) = (x_1 + x_2)^\epsilon (y_1 + y_2)^{(p-1)(p^{n-1}+i)-\epsilon}$$

est $\binom{(p-1)(p^{n-1}+i)-\epsilon}{(p-1)p^{n-1}}$ qui est non nul puisque

$$(p - 1)p^{n-1} \leq (p - 1)p^{n-1} + ((p - 1)i - \epsilon) \leq (p - 1)p^{n-1} + (p^{n-1} - 2).$$

Il s'ensuit que le composé

$$D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\beta} L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2) \rightarrow J(2p^n - 2)$$

est non nul. Le morphisme f est ainsi un isomorphisme du groupe \mathbb{Z}/p . □

LEMME 5.8. — *Supposons $t \neq 2 - 2p^{n-1}$ et $\text{Hom}_u(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2)) \cong \mathbb{Z}/p$. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le groupe $\text{Hom}_u(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2))$ est non nul en considérant les deux cas suivants :

- Si $t = 2k$ alors ils existent $i \geq 0$ et $\epsilon = 0, 1$ tels que le degré de $\Sigma^{1-2k}X^\epsilon Y^{i-k} \in \Sigma^{1-2k}D(1) \cdot Y^{-k}$ soit $2p^n - 2$, i.e.

$$(2k - 1) + 2k(p - 1) + (2p^n - 2) = 2i(p - 1) - \epsilon \geq 0.$$

Il suit $\epsilon = 1$ et $kp + (p^n - 1) = i(p - 1) > 0$. Il suit encore $k = (p - 1)\kappa \leq 0$ et $\kappa p + \frac{p^n - 1}{p - 1} = i > 0$. Il s'ensuit $i = \iota p + 1$ et $k + (p^{n-1} - 1) = \iota(p - 1) \geq 0$. Comme $k \neq 1 - p^{n-1}$, on a $\iota > 0$. On en déduit que $\Sigma^{1-2k}XY^\iota$ est un élément de degré $2p^{n-1} - 2$ de $\Sigma^{1-2k}D(1)$. Ceci implique le groupe $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-2k}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2))$ est non nul.

- Si $t = 2k - 1, k \leq 0$, alors ils existent $i \geq 0$ et $\epsilon = 0, 1$ tels que le degré de $\Sigma^{2-2k}X^\epsilon Y^{i-k} \in \Sigma^{2-2k}L_1 \cdot Y^{-k}$ soit $2p^n - 2, i.e$

$$(2k - 2) + 2k(p - 1) + (2p^n - 2) = 2i(p - 1) - \epsilon > 0.$$

Il suit $\epsilon = 0$ et $kp - 1 + (p^n - 1) = i(p - 1) > 0$. Il suit encore $k = (p - 1)\kappa + 1 \leq 0$ et $\kappa p + 1 + \frac{p^n - 1}{p - 1} = i > 0$. Il s'ensuit $i = \iota p + 2$ et $k - 1 + (p^{n-1} - 1) = \iota(p - 1) \geq 0$. On en déduit que $\Sigma^{2-2k}Y^\iota$ est un élément de degré $2p^{n-1} - 2$ de $\Sigma^{2-2k}D(1)$. Ceci implique le groupe $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-2k+1}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2))$ est non nul. \square

PROPOSITION 5.9. — *Supposons $n \geq 2, (s, t) \neq (n, 2 - 2p^n)$ et $(s, t) \neq (n + 1, 2 - 2p^{n-1})$. Alors le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ est nul dès que $s - t \geq 2p^{n-2} + n$.*

Démonstration. — On a la suite spectrale de Grothendieck :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \implies \text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}).$$

On va montrer que $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) = 0$ pour $0 \leq u \leq n$. D'après le corollaire 5.3, on a

$$D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p = \Sigma^{s-t-u}D_{\pm}(s - u)\epsilon_{s-u}^{s-t-u-1}.$$

Considérons les trois cas suivants :

1. Pour $0 \leq u \leq n - 2$, on a $s - t - u > 2p^{n-2} - 2$. On en déduit que le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ est nul pour tout $0 \leq u \leq n - 2$.
2. Pour $u = n - 1$, le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{n-1}(D_{s-n+1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ est le noyau du morphisme

$$f: \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-n+1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-n+1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2))$$

qui est induit par le morphisme $f_{n-1,n}: L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2) \rightarrow J(2p^n - 2)$.

(a) Si $s = n - 1$, le morphisme f devient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2))$$

avec $t \leq -2p^{n-2} - 1$. Le domaine de ce morphisme est trivial.

(b) Si $s = n$, le morphisme f devient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2))$$

avec $t \leq -2p^{n-2}$. Si le domaine de f est non nul, f est un isomorphisme d'après le lemme 5.7.

- (c) Si $s \geq n + 1$, d'après le corollaire 6.23, la connectivité de la déviation $(D_{s-n+1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p : L_1)$ est $\geq p^{s-n}(s-t-n) + 1$. Comme $s-t \geq 2p^{n-2} + n$, celle-ci est supérieure à $2p^{n-1} - 2$. Le domaine de f est nul.
- 3. Pour $u = n$, comme le cas précédent, le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^n(D_{s-n}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ est le conoyau du morphisme

$$f' : \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-n}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1}-2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-n}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n-2)).$$

- (a) Si $s = n$, le morphisme f' devient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2)).$$

Le domaine de ce morphisme est trivial car $t \neq 2 - 2p^n$.

- (b) Si $s = n + 1$, alors $t \neq 2 - 2p^{n-1}$ et le morphisme f' devient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2))$$

avec $t \leq 1 - 2p^{n-2}$. Si la source de f' est non nulle, alors f' est un isomorphisme du groupe \mathbb{Z}/p d'après le lemme 5.8.

- (c) Si $s = n + 2$, le morphisme f' devient

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_2\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_1 \otimes J(2p^{n-1} - 2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_2\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2))$$

avec $t \leq 2 - 2p^{n-2}$. On a $D_2\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p \subset \Sigma^{2-t}(D(2) \oplus \mathfrak{D}(2))\epsilon_2^{1-t}$. Supposons qu'il existe $a \in D(2) \oplus \mathfrak{D}(2)$ tel que le degré de $\Sigma^{2-t}a \cdot \epsilon_2^{1-t}$ soit $2p^n - 2$, i.e. $\text{deg } a + (2-t) + (1-t)(p^2 - 1) = 2p^n - 2$, soit $\text{deg } a + (1-t)p^2 = 2p^n - 3$. Comme $t \leq 2 - 2p^{n-2}$, il suit $\text{deg } a \leq p^2 - 3$. D'autre part, d'après le corollaire 6.12,

$$D(2) \oplus \mathfrak{D}(2) \cong \Lambda(\widetilde{\mathbf{M}}_{2,0}, \widetilde{\mathbf{M}}_{2,1}) \otimes \mathbb{F}_p[\epsilon_2, \mathbf{Q}_{2,1}]$$

où $\text{deg } \epsilon_2 = p^2 - 1$, $\text{deg } \mathbf{Q}_{2,1} = 2(p^2 - p)$, $\text{deg } \widetilde{\mathbf{M}}_{2,0} = p^2 - 2$ et $\text{deg } \widetilde{\mathbf{M}}_{2,1} = p^2 - 2p$. On en déduit que soit $\text{deg } a = 0$, soit $\text{deg } a = p^2 - 2p$.

- Si $\text{deg } a = 0$, on a $(1-t)p^2 = 2p^n - 3$ ce qui est absurde puisque 3 n'est pas divisible par p^2 .
- Si $\text{deg } a = p^2 - 2p$, on a $(p^2 - 2p) + (1-t)p^2 = 2p^n - 3$. Ceci implique $p = 3$, d'où $3(1-t) = 2 \cdot 3^{n-1} - 2$ ce qui est encore impossible.

On a ainsi vérifié que le groupe $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_2\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p^n - 2))$ est trivial.

- (d) Si $s \geq n+3$, la connectivité de $D_{s-n}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p$ est supérieure ou égale au degré de $\Sigma^{s-t-n}\mathbf{e}_{s-n}^{s-t-n-1}$. Pour $n \geq 2$ et $s-t \geq 2p^{n-2}+n$, on a

$$\begin{aligned} \deg \Sigma^{s-t-n}\mathbf{e}_{s-n}^{s-t-n-1} &= p^{s-n}(s-t-n-1) + 1 \\ &\geq p^3(2p^{n-2}-1) + 1 \\ &= (2p^n(p-1) - p^3 + 3) + (2p^n - 2) \\ &> 2p^n - 2. \end{aligned}$$

Le domaine de f' est donc trivial.

En résumé, on a montré que $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) = 0$ pour tout $0 \leq u \leq n$. La proposition suit. \square

La proposition 5.9 est en fait aussi valable pour $n = 1$.

PROPOSITION 5.10. — *Supposons $(s, t) \neq (1, 2-2p)$ et $(s, t) \neq (2, 0)$. Alors le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3})$ est nul dès que $s-t \geq 2$.*

Démonstration. — On a la suite spectrale de Grothendieck :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3}) \implies \text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3}).$$

On va montrer que $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3}) = 0$ pour $0 \leq u \leq 1$ en utilisant la résolution injective $L_{1,3} \hookrightarrow L_1 \twoheadrightarrow J(2p-2)$.

Pour $u = 0$, on a $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^u(D_{s-u}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_s\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3})$ qui est nul puisque $D_s\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p$ est une suspension d'après le corollaire 5.3. Pour $u = 1$, comme $D_{s-1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p$ est encore une suspension, le groupe $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3})$ est nul. D'où

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(D_{s-1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{1,3}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p-2)).$$

On vérifie sans peine que, pour $s-t \geq 2$, le groupe $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_{s-1}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, J(2p-2))$ est nul si $(s, t) \neq (1, 2-2p)$ ou $(s, t) \neq (2, 0)$. La proposition suit. \square

REMARQUE 5.11. — Afin de pousser plus loin le calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^*(\Sigma^*\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ dans cette direction, on a besoin d'étudier l'espace vectoriel gradué $(D(s) : L_k)_{\mathcal{U}}$ pour $k \geq 2$, ceci sera fait ailleurs.

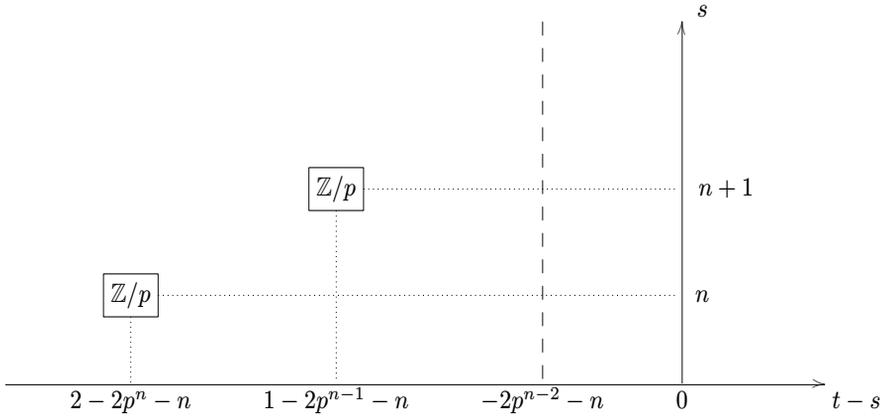


FIGURE 1. $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}), s - t \geq 2p^{n-2} + n$

5.3. Cohomotopie de $L(n, 3)$. — Voici un résultat partiel sur les groupes d’homotopie du spectre $L(n, 3)$.

THÉORÈME 5.12. — *Supposons $k \geq 2p^{n-2} + n$. Alors*

$$[L(n, 3), S^k] = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & \text{si } k = 2p^n - 2 + n \text{ où } k = 2p^{n-1} - 1 + n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — La suite spectrale d’Adams pour la cohomotopie $[L(n, 3), S^k]$, $k \in \mathbb{Z}$ est de la forme :

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/p, L_{n,3}) \implies [L(n, 3), S^{s-t}], \quad d_r : E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r,t+r-1}.$$

Pour $s - t \geq 2p^{n-2} + n$, on déduit des propositions 5.5, 5.6, 5.9 et 5.10 que

$$E_{\infty}^{s,t} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & \text{si } (s, t) = (n, 2 - 2p^n) \text{ ou } (s, t) = (n + 1, 2 - 2p^{n-1}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suit. □

6. $(D(n) : L_1)_{\mathcal{U}}$ en tant qu’espace vectoriel gradué

L’objectif de cette section est de déterminer $(D(n) : L_1)_{\mathcal{U}}$ en tant qu’espace vectoriel gradué. En particulier, pour $s + t \geq 1$, la connectivité de $(D_s \Sigma^t \mathbb{Z}/p : L_1)_{\mathcal{U}}$ sera déterminée. Cette connectivité a été utilisée dans la démonstration de la proposition 5.9(cas 2c).

6.1. Invariants modulaires. — Afin de décrire la structure de $D(n)$, nous allons rappeler certains invariants modulaires de GL_n définis par Dickson [6] et Mui [18].

Rappelons que GL_n agit à gauche sur $H^*V_n \cong \Lambda(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ comme suit. Etant donnés $g = (g_{i,j}) \in GL_n$ et $f \in H^*V_n$, on a

$$g \cdot f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = f(g \cdot x_1, g \cdot x_n, \dots, g \cdot x_n, g \cdot g \cdot y_n)$$

avec $g \cdot x_j = \sum_{i=1}^n g_{i,j}x_i$ et $g \cdot y_j = \sum_{i=1}^n g_{i,j}y_i$ pour $1 \leq j \leq n$.

Appelons f *invariant de GL_n par rapport à c* : $GL_n \rightarrow \mathbb{F}_p^*$ si $g \cdot f = c(g)f$ pour tout $g \in GL_n$. A la suite de Dickson [6], on pose

$$[e_1, \dots, e_n] = \begin{vmatrix} y_1^{p^{e_1}} & \dots & y_n^{p^{e_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{p^{e_n}} & \dots & y_n^{p^{e_n}} \end{vmatrix}$$

pour toute suite d'entiers naturels (e_1, \dots, e_n) . Les $[e_1, \dots, e_n]$ sont invariants par rapport à la représentation déterminant de GL_n , i.e.

$$g \cdot [e_1, \dots, e_n] = \det(g)[e_1, \dots, e_n]$$

pour tout $g \in GL_n$. En particulier, pour $0 \leq s \leq n$, on pose

$$\mathbf{L}_{n,s} = [0, \dots, \hat{s}, \dots, n], \quad \mathbf{L}_n = \mathbf{L}_{n,n} = [0, \dots, n - 1].$$

- LEMME 6.1 ([6, 18]). — 1. Soit $f \in \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ un GL_n -invariant par rapport à \det^d , $1 \leq d \leq p - 2$. Alors \mathbf{L}_n^d divise f .
2. Soit $f \in \Lambda^k(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$, $1 \leq k \leq n$, un GL_n -invariant par rapport à \det^d , $1 \leq d \leq p - 1$. Alors \mathbf{L}_n^{d-1} divise f .

D'après ce lemme, $\mathbf{L}_{n,s}$ est divisible par \mathbf{L}_n . On a l'invariant de Dickson $\mathbf{Q}_{n,s} = \frac{\mathbf{L}_{n,s}}{\mathbf{L}_n}$. Le degré de $\mathbf{Q}_{n,s}$ est $2(p^n - p^s)$. Notons que $\mathbf{Q}_{n,0} = \mathbf{L}_n^{p-1}$ et $\mathbf{Q}_{n,n} = 1$.

A la suite de [18], on pose

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k(y_1, \dots, y_k) = \prod_{\lambda_i \in \mathbb{F}_p} (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{k-1} y_{k-1} + y_k).$$

On a les relations suivantes entre les \mathbf{L}_n , $\mathbf{Q}_{n,s}$ et \mathbf{V}_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n &= \mathbf{V}_1 \cdots \mathbf{V}_n, \\ \mathbf{Q}_{n,s} &= \mathbf{Q}_{n-1,s} \mathbf{V}_n^{p-1} + \mathbf{Q}_{n-1,s-1}, \\ \mathbf{V}_{k+1} &= \sum_{s=0}^k (-1)^{s+k} \mathbf{Q}_{k,s} y_{k+1}^{p^s}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq s \leq n - 1$, posons

$$\mathbf{M}_{n,s} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{p^{s-1}} & \cdots & y_n^{p^{s-1}} \\ y_1^{p^{s+1}} & \cdots & y_n^{p^{s+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{p^{n-1}} & \cdots & y_n^{p^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

On a évidemment que $\mathbf{M}_{n,s}$ est invariant par rapport à la représentation déterminant de GL_n . De plus, d'après [18, I.4.12], si $s \leq n - 2$, on a

$$\mathbf{M}_{n,s} = \mathbf{M}_{n-1,s} \mathbf{V}_n + \mathbf{M}_{n,n-1} \mathbf{Q}_{n-1,s}.$$

Soient $0 \leq s_1 < \cdots < s_j \leq n - 1$. D'après le lemme 6.1, \mathbf{L}_n^{j-1} divise le produit $\mathbf{M}_{n,s_1} \cdots \mathbf{M}_{n,s_j}$. On a alors l'invariant de Mui :

$$\mathbf{M}_{n;s_1,\dots,s_j} = (-1)^{\binom{j}{2}} \frac{\mathbf{M}_{n,s_1} \cdots \mathbf{M}_{n,s_j}}{\mathbf{L}_n^{j-1}}.$$

Le degré de $\mathbf{M}_{n;s_1,\dots,s_j}$ est $\frac{2(p^n-1)}{p-1} + (1 - 2p^{s_1}) + \cdots + (1 - 2p^{s_j})$. Si l'ensemble $\{s_1, \dots, s_j\}$ est vide, on convient de poser $\mathbf{M}_{n,\emptyset} = \mathbf{L}_n$.

On note SL_n le sous-groupe de GL_n des matrices de déterminant 1.

THÉORÈME 6.2 ([6]). — On a

1. $\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{\mathrm{SL}_n} = \mathbb{F}_p[\mathbf{L}_n, \mathbf{Q}_{n,1}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}]$;
2. $\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}]$.

THÉORÈME 6.3 ([18]). — On a

1. $(\Lambda(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n])^{\mathrm{SL}_n}$ est un $\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{\mathrm{SL}_n}$ -module libre de base

$$\{1, \mathbf{M}_{n;s_1,\dots,s_j}\}$$

avec $0 \leq s_1 < \cdots < s_j \leq n - 1$;

2. $(\Lambda(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n])^{\mathrm{GL}_n}$ est un $\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{\mathrm{GL}_n}$ -module libre de base

$$\{1, \mathbf{M}_{n;s_1,\dots,s_j} \mathbf{L}_n^{p-2}\}$$

avec $0 \leq s_1 < \cdots < s_j \leq n - 1$.

On rappelle que $\mathcal{H}^* V_n$ désigne la cohomologie $H^* V_n$ munie de l'action tordue de GL_n donnée par $g * f = \det(g)^{\frac{p-1}{2}} (g \cdot f)$. On déduit du théorème 6.3 et du lemme 6.1 le

COROLLAIRE 6.4. — $(\mathcal{H}^* V_n)^{\text{GL}_n}$ est un $\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{\text{GL}_s}$ -module libre de base

$$\left\{ \mathbf{L}_n^{\frac{p-1}{2}}, \mathbf{M}_{n; s_1, \dots, s_j} \mathbf{L}_n^{\frac{p-3}{2}} \right\}$$

avec $0 \leq s_1 < \dots < s_j \leq n - 1$.

6.2. Structure de $D(n)$ et $\mathfrak{D}(n)$. — Soit G un groupe fini et soit S un sous-groupe du groupe symétrique Σ_k . Le produit en couronne $S \int G$ est défini comme étant le produit semi-direct

$$G^k \hookrightarrow S \ltimes G^k \twoheadrightarrow S.$$

La multiplication de $S \ltimes G^k$ est donné par

$$(s; g_1, \dots, g_k)(s'; g'_1, \dots, g'_k) = (ss'; g_1 g'_{s^{-1}(1)}, \dots, g_k g'_{s^{-1}(k)})$$

pour $(g_1, \dots, g_k), (g'_1, \dots, g'_k) \in G^k$ et $s, s' \in S$. Si G est un sous-groupe du groupe symétrique Σ_m , alors $S \int G$ agit sur les couples (i, j) , $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$:

$$(s; g_1, \dots, g_k) \cdot (i, j) = (s(i), g_i(j))$$

pour $(s; g_1, \dots, g_k) \in S \int G$. Le groupe $S \int G$ est ainsi un sous-groupe de Σ_{km} .

Soient maintenant (a_1, \dots, a_n) la base canonique de V_n et A_i le sous-espace engendré par a_i , $1 \leq i \leq n$. On a $A_i \subset \Sigma_p$. On désigne par $\Sigma_{p^n, p}$ le produit en couronne itéré

$$(\dots (A_1 \int A_2) \int A_3 \dots) \int A_n.$$

Il est bien connu que $\Sigma_{p^n, p}$ est un sous-groupe de Sylow de Σ_{p^n} contenant V_n .

Si K est un sous-groupe de G et M un G -module, on note $i(K, G; M)$ le morphisme $H^*(G; M) \rightarrow H^*(K; M)$ induit par l'inclusion $K \hookrightarrow G$. Si M est le G -module trivial, $i(K, G; M)$ se note simplement $i(K, G)$.

Par définition, $D(n) = \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n})$ et $\mathfrak{D}(n) = \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n}; \mathbb{Z}/p)$.

La structure de $D(n)$ en tant que \mathbb{F}_p -algèbre a été déterminée pour la première fois par H. Mui [18]. La méthode de calcul de $\text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n})$ de [18] s'appuie sur la théorie d'invariants modulaires de GL_n et le résultat suivant.

THÉORÈME 6.5 ([18]). — Soit G un sous-groupe de Σ_{p^n} contenant $\Sigma_{p^n, p}$. Alors

$$\text{Im } i(V_n, G; M) = \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n, p}; M) \cap H^*(V_n; M)^{W_G(V_n)}$$

où $W_G(V_n)$ est le groupe de Weyl de V_n dans G .

Démonstration. — Voir la démonstration de [18, I.1.4]. La démonstration repose sur la formule des doubles classes [5, 2.4.5] et le fait que $V_n \subset \Sigma_{p^n, p} \subset G$ est un système fermé, i.e. si un sous-groupe de $\Sigma_{p^n, p}$ est conjugué à V_n dans G , alors il est conjugué à V_n dans $\Sigma_{p^n, p}$ [18, I.2.1]. □

Posons $\mathcal{M}_n(p) := \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n, p})$. Cette algèbre a été aussi explicitée par Mui.

THÉORÈME 6.6 ([18]). — On a

$$\mathcal{M}_n(p) = \Lambda(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n) \otimes \mathbb{F}_p[\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n]$$

avec $\mathbf{U}_k = \mathbf{M}_{k; k-1} \mathbf{L}_{k-1}^{\frac{p-3}{2}}$, $1 \leq k \leq n$.

Notons que, d'après [18],

$$\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{\mathbf{U}_n} = \mathbb{F}_p[\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n],$$

où \mathbf{U}_n désigne le sous-groupe de Sylow de GL_n des matrices triangulaires supérieures avec 1 sur la diagonale. Le groupe \mathbf{U}_n est aussi le groupe de Weyl de V_n dans $\Sigma_{p^n, p}$, d'où $\mathcal{M}_n(p)$ est une sous-algèbre de $(H^*V_n)^{\mathbf{U}_n}$.

On note $\epsilon_n = \mathbf{L}_n^{\frac{p-1}{2}}$ et $\widetilde{\mathbf{M}}_{n;s} = \mathbf{M}_{n;s} \mathbf{L}_n^{\frac{p-3}{2}}$. Le degré de ϵ_n est $p^n - 1$ et le degré de $\widetilde{\mathbf{M}}_{n;s}$ est $p^n - 2p^s$.

Les trois lemmes suivants seront utiles pour le calcul de l'intersection de $\mathcal{M}_n(p)$ et l'algèbre $(H^*V_n)^G$ avec G un sous-groupe de GL_n .

LEMME 6.7. — Pour $0 \leq s < k \leq n$, on a $\mathbf{Q}_{k,s}, \epsilon_s, \widetilde{\mathbf{M}}_{k,s} \in \mathcal{M}_n(p)$. De plus si f est un élément de $\Lambda(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ tel que $f \cdot \mathbf{V}_n \in \mathcal{M}_n(p)$, alors $f \in \mathcal{M}_n(p)$.

Démonstration. — On répète la démonstration de II.6.3 et II.6.4 dans [18] pour le premier énoncé. Comme $\mathbf{Q}_{k,s}$ et ϵ_s sont des \mathbf{U}_n -invariants de $\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$, il est clair que $\mathbf{Q}_{k,s}$ et ϵ_s appartiennent à $\mathcal{M}_n(p)$.

Ensuite, on a $\widetilde{\mathbf{M}}_{k,k-1} = \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^{\frac{p-3}{2}}$, d'où $\widetilde{\mathbf{M}}_{k,k-1} \in \mathcal{M}_n(p)$. Pour $s \leq k - 2$, utilisant la relation $\mathbf{M}_{k,s} = \mathbf{M}_{k-1,s} \mathbf{V}_k + \mathbf{M}_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1,s}$, on a

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{k,s} = \widetilde{\mathbf{M}}_{k-1,s} \mathbf{V}_k^{\frac{p-1}{2}} + \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^{\frac{p-3}{2}} \mathbf{Q}_{k-1,s}.$$

Comme $\mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^{\frac{p-3}{2}} \mathbf{Q}_{k-1,s} \in \mathcal{M}_n(p)$, il est clair que $\widetilde{\mathbf{M}}_{k,s} \in \mathcal{M}_n(p)$ par récurrence.

Pour le dernier énoncé, on pose $\mathcal{M}'_n(p) = \Lambda(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n) \otimes \mathbb{F}_p[\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n-1}]$. Comme $f \cdot \mathbf{V}_n \in \mathcal{M}_n(p)$, on peut écrire $f \cdot \mathbf{V}_n = f_0 + f_1$ avec $f_0 \in \mathcal{M}'_n(p)$ et $f_1 \in \mathcal{M}_n(p) \cdot \mathbf{V}_n$. Si f_0 est non-nul, alors f_0 est divisible par y_n . Or, aucun élément non-nul de $\mathcal{M}'_n(p)$ n'est divisible par y_n car, d'une part, les $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{n-1}$ et $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n-1}$ ne contiennent pas x_n et y_n , et d'autre part,

$$\mathbf{U}_n \mid_{y_n=0} = (-1)^n x_n \epsilon_{n-1} \neq 0.$$

Il s'ensuit $f_0 = 0$, donc $f \in \mathcal{M}_n(p)$. Le lemme est démontré. □

LEMME 6.8. — Soit $f \in \Lambda^k(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ de la forme

$$f = \sum_I x_I f_I(y_1, \dots, y_n).$$

Si f est un élément de $\mathcal{M}_n(p)$, alors $y_1^{\frac{(p-1)(k-1)}{2}}$ divise f_{I_0} avec $I_0 = \{1, \dots, k\}$.

Démonstration. — Cette remarque apparaît dans la démonstration de II.6.6 de [18]. Comme $f \in \mathcal{M}_n(p)$, f est aussi de la forme

$$f = \sum_I \mathbf{U}_I g_I(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n).$$

Un calcul direct donne $\mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_k = (-1)^{\binom{k}{2}} x_1 \cdots x_k \mathbf{L}_1^{\frac{p-1}{2}} \cdots \mathbf{L}_{k-1}^{\frac{p-1}{2}}$ qui est divisible par $y_1^{\frac{(p-1)(k-1)}{2}}$. Le lemme suit. □

LEMME 6.9 ([18, I.4.15]). — Soient $1 \leq d \leq p - 1$ et $f \in \Lambda^k(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ un invariant par rapport à \det^d de la forme

$$f = \sum_I x_I f_I(y_1, \dots, y_n)$$

avec I une partie ordonnée de cardinal k de $\{1, \dots, n\}$. Supposons que y_i^m divise f_I pour certain i et certain I , alors $\mathbf{L}_n^{m+d-1-m}$ divise f_I pour tout I . Ici $a \equiv \bar{a} \pmod{p-1}$ avec $0 \leq \bar{a} \leq p-2$.

On est maintenant en mesure de décrire la structure de $D(n)$ et $\mathfrak{D}(n)$. Pour les calculs dans les sections qui suivent, il nous suffit de comprendre la structure de $D(n)$ et $\mathfrak{D}(n)$ en tant que \mathbb{F}_p -espaces vectoriels.

THÉORÈME 6.10 ([18]). — $D(n)$ est un $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}]$ -module libre de base

$$\{1, \mathbf{M}_{n;s_1, \dots, s_j} \mathbf{L}_n^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor}\}$$

avec $0 \leq s_1 < \dots < s_j \leq n - 1$.

Démonstration. — On a $D(n) = \mathcal{M}_n(p) \cap (H^*V_n)^{\text{GL}_n}$. Posons $j = 2j' + e$, $e = 0, 1$. Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n;s_1, \dots, s_j} \mathbf{L}_n^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} &= (-1)^{\binom{j}{2}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_1} \cdots \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_j} \mathbf{L}_n^{p-1+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor - \frac{(p-1)j}{2}} \\ &= (-1)^{\binom{j}{2}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_1} \cdots \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_j} \mathbf{e}_n^e, \end{aligned}$$

on déduit du lemme 6.7 et du théorème 6.3 que le module donné dans le théorème est contenu dans $\mathcal{M}_n(p) \cap H^*V_n^{\text{GL}_n}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $f \in \Lambda^j(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ un élément de $\mathcal{M}_n(p) \cap H^*V_n^{\text{GL}_n}$ de la forme

$$f = \sum_I x_I f_I(y_1, \dots, y_n).$$

Si $j = 0$, alors f est un élément de $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}]$. Supposons que $j > 0$. D'après le lemme 6.8, $y_1^{\binom{p-1}{2}(j-1)}$ divise f_{I_0} avec $I_0 = \{1, \dots, j\}$. Comme f est GL_n -invariant, i.e. invariant par rapport à \det^{p-1} , on déduit du lemme 6.9 que $\mathbf{L}_n^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor}$ divise f car

$$\frac{(p-1)(j-1)}{2} + p - 2 - \frac{(p-1)(j-1)}{2} = p - 2 + (p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor.$$

Utilisant le théorème 6.3, f est un élément du module donné dans le théorème. □

THÉORÈME 6.11 ([24]). — $\mathfrak{D}(n)$ est un $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}]$ -module libre de base

$$\left\{ \mathbf{L}_n^{\frac{p-1}{2}}, \mathbf{M}_{n;s_1, \dots, s_j} \mathbf{L}_n^{\frac{p-3}{2}+(p-1)\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \right\}$$

avec $0 \leq s_1 < \dots < s_j \leq n - 1$.

Démonstration. — On a $\mathfrak{D}(n) = \mathcal{M}_n(p) \cap (\mathcal{H}^*V_n)^{\text{GL}_n}$. Posons $j = 2j' + e$, $e = 0, 1$. Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n;s_1, \dots, s_j} \mathbf{L}_n^{\frac{p-3}{2}+(p-1)\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} &= (-1)^{\binom{j}{2}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_1} \dots \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_j} \mathbf{L}_n^{\frac{p-1}{2}+(p-1)\lfloor \frac{j}{2} \rfloor - \frac{(p-1)j}{2}} \\ &= (-1)^{\binom{j}{2}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_1} \dots \widetilde{\mathbf{M}}_{n,s_j} \mathbf{e}_n^{1-e}, \end{aligned}$$

on déduit du lemme 6.7 et du corollaire 6.4 que le module donné dans le théorème est contenu dans $\mathcal{M}_n(p) \cap (\mathcal{H}^*V_n)^{\text{GL}_n}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $f \in \Lambda^j(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ un élément de $\mathcal{M}_n(p) \cap (\mathcal{H}^*V_n)^{\text{GL}_n}$ de la forme

$$f = \sum_I x_I f_I(y_1, \dots, y_n).$$

Si $j = 0$, alors f est un élément de $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}] \mathbf{L}_n^{\frac{p-1}{2}}$. Supposons $j > 0$. D'après le lemme 6.8, $y_1^{\binom{p-1}{2}(j-1)}$ divise f_{I_0} avec $I_0 = \{1, \dots, j\}$. Comme f est invariant par rapport à $\det^{\frac{p-1}{2}}$, on déduit du lemme 6.9 que $\mathbf{L}_n^{\frac{p-3}{2}+(p-1)\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ divise f car

$$\frac{(p-1)(j-1)}{2} + \frac{p-3}{2} - \frac{(p-1)(j-1)}{2} = \frac{p-3}{2} + (p-1)\lfloor \frac{j}{2} \rfloor.$$

Utilisant le théorème 6.3, f est un élément du module donné dans le théorème. □

COROLLAIRE 6.12 ([24]). — On a

$$D(n) \oplus \mathcal{D}(n) \cong \Lambda(\widetilde{\mathbf{M}}_{n,0}, \dots, \widetilde{\mathbf{M}}_{n,n-1}) \otimes \mathbb{F}_p[\mathbf{e}_n, \mathbf{Q}_{n,1}, \dots, \mathbf{Q}_{n,n-1}].$$

REMARQUE 6.13. — On note \mathcal{A}_{p^n} le sous-groupe alterné du groupe symétrique Σ_{p^n} . D’après le lemme d’Eckmann-Shapiro, on a $H^* \mathcal{A}_{p^n} \cong H^*(\Sigma_{p^n}; \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{p^n}})$. On vérifie que le module induit $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{p^n}}$ est isomorphe à la somme directe de la représentation triviale \mathbb{Z}/p et la représentation signature \mathbb{Z}/p . Il s’ensuit que

$$D(n) \oplus \mathcal{D}(n) \cong \text{Im} \left(H^* \mathcal{A}_{p^n} \xrightarrow{i(V_n, \mathcal{A}_{p^n})} H^* V_n \right).$$

Le corollaire 6.12 alors peut être trouvé dans [19].

6.3. Calcul de $(D(n): L_1)_{\mathcal{U}}$. — Soit G_{n-1} (resp. GL_{n-1}) le sous-groupe de GL_n des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Soit $T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ le foncteur de Lannes [12]. On a

$$T((H^* V_n)^{\text{GL}_n}) = \text{Map}_{\text{GL}_n}(V_n, H^* V_n).$$

Rappelons que si (a_1, \dots, a_n) est la base canonique de V_n , alors l’action à droite de GL_n sur V_n est donnée par $(a_1 \cdot g, \dots, a_n \cdot g) = (a_1, \dots, a_n) g^t$, le produit matriciel de (a_1, \dots, a_n) par le transposé de $g \in \text{GL}_n$. L’espace vectoriel V_n muni de cette action de GL_n se décompose en deux orbites : celle de 0 et celle de a_n . On a évidemment que le fixateur dans GL_n de 0 (resp. de a_n) est GL_n (resp. G_{n-1}). On en déduit que

$$\overline{T}((H^* V_n)^{\text{GL}_n}) = (H^* V_n)^{G_{n-1}},$$

où \overline{T} désigne le foncteur de Lannes réduit.

THÉORÈME 6.14. — $(H^* V_n)^{G_{n-1}}$ est un $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n]$ -module libre de base

$$\{1, \mathbf{M}_{n-1; s_1, \dots, s_i} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2}, \mathbf{M}_{n; n-1} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2}, \mathbf{M}_{n; r_1, \dots, r_{j-1}, n-1} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2}\}$$

où $0 \leq s_1 < \dots < s_i \leq n-2$ et $0 \leq r_1 < \dots < r_{j-1} \leq n-2$.

Démonstration. — Observons d’abord que

$$\mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]^{G_{n-1}} = \mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n].$$

Donc il est clair que le module libre donné dans le théorème est contenu dans $(H^*V_n)^{G_{n-1}}$.

Montrons l’inclusion inverse. On note S_{n-1} le sous-groupe SL_n des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D’après [16], $(H^*V_n)^{S_{n-1}}$ est un $\mathbb{F}_p[\mathbf{L}_{n-1}, \mathbf{Q}_{n-1,1}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n]$ -module libre de base

$$\{1, \mathbf{M}_{n-1;s_1, \dots, s_i}, \mathbf{M}_{n;n-1}, \mathbf{M}_{n;r_1, \dots, r_{j-1}, n-1}\}$$

où $0 \leq s_1 < \dots < s_i \leq n-2$ et $0 \leq r_1 < \dots < r_{j-1} \leq n-2$.

Soit f un élément de $(H^*V_n)^{G_{n-1}}$, $f \in \Lambda^j(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$. Si $j = 0$, alors $f \in \mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n]$. Supposons que $j > 0$. Comme $S_{n-1} \subset G_{n-1}$, f s’écrit

$$f = \sum_S \mathbf{M}_{n-1;s_1, \dots, s_j} f_S + \sum_R \mathbf{M}_{n;r_1, \dots, r_{j-1}, n-1} f_R,$$

avec $f_S, f_R \in \mathbb{F}_p[\mathbf{L}_{n-1}, \mathbf{Q}_{n-1,1}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n]$. Comme f est GL_{n-1} -invariant, on déduit du lemme 6.1 que f_S et f_R sont divisibles par \mathbf{L}_{n-1}^{p-2} . Il s’ensuit que f est un élément du module libre donné dans le théorème. \square

Considérons ensuite le calcul de $T(D(n))$. Rappelons que, contrairement au cas $p = 2$, $D(n)$ est un sous-module propre de $(H^*V_n)^{GL_n}$. A cause de cela, on va calculer $T(D(n))$ en utilisant la définition $D(n) = \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n})$.

Soit \mathcal{C}_n le centralisateur dans le groupe Σ_{p^n} du vecteur de base $a_n \in V_n$:

$$\mathcal{C}_n = \{f: V_n \rightarrow V_n \mid f(v + a_n) = f(v) + a_n, \forall v \in V_n\} \subset \Sigma_{p^n}.$$

PROPOSITION 6.15. — On a $\overline{T}(\text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n})) \cong \text{Im } i(V_n, \mathcal{C}_n)$.

Démonstration. — Rappelons d’abord la formule de l’image de T sur la cohomologie d’un groupe fini. Soit G un groupe fini, $T(H^*G)$ est donné par ([12]) :

$$T(H^*G) \cong \prod_{\varphi \in \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, G)} H^*G_\varphi.$$

Ici $\text{Rep}(\mathbb{Z}/p, G)$ désigne le quotient de l’action par conjugaison de G sur $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, G)$ et G_φ le centralisateur dans G de l’image de φ . Le morphisme

$T(H^*G) \rightarrow H^*G_\varphi$ est induit par le morphisme évident $\mathbb{Z}/p \times G_\varphi \rightarrow G$, $(x, g) \mapsto \varphi(x)g$.

Maintenant, soit $f: G' \rightarrow G$ un homomorphisme de groupe. Par fonctorialité, le morphisme $T(f^*): T(H^*G) \rightarrow T(H^*G')$ est le produit des morphismes

$$T(f^*): H^*G_\varphi \rightarrow \prod_{\substack{\varphi' \in \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, G'), \\ \varphi = f \circ \varphi'}} H^*G'_{\varphi'},$$

φ décrivant $\text{Rep}(\mathbb{Z}/p, G)$. On en déduit que $T(\text{Im } f^*)$ est l'image du morphisme

$$\prod_{\varphi \in \text{Im } \text{Rep}(f)} H^*G_\varphi \xrightarrow{\prod_{\varphi \in \text{Im } \text{Rep}(f)} T(f^*_\varphi)} \prod_{\varphi \in \text{Im } \text{Rep}(f)} \left(\prod_{\varphi' \in \text{Rep}(f)^{-1}(\varphi)} H^*G'_{\varphi'} \right),$$

où $\text{Rep}(f): \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, G') \rightarrow \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, G)$ est l'application induite par $f: G' \rightarrow G$.

Revenons au cas où f est le plongement naturel $i_n: V_n \rightarrow \Sigma_{p^n}$. On a

$$\text{Rep}(\mathbb{Z}/p, V_n) = V_n.$$

Considérons l'image de $\text{Rep}(i_n): \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, V_n) \rightarrow \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, \Sigma_{p^n})$. On a évidemment que $\text{Rep}(i_n)(0) = 0$. Si v_1 et v_2 sont deux éléments non-nuls de $V_n = \text{Rep}(\mathbb{Z}/p, V_n)$, alors v_1 est conjugué à v_2 dans Σ_{p^n} par un automorphisme $f \in \text{Aut}(V_n) \subset \Sigma_{p^n}$ qui envoie v_1 à v_2 . En effet, pour tout $v \in V_n$, on a

$$(f \circ v_1 \circ f^{-1})(v) = f(v_1 + f^{-1}(v)) = f(v_1) + v = v_2 + v = v_2(v),$$

i.e. $f \circ v_1 \circ f^{-1} = v_2$.

On en déduit que $\text{Im } \text{Rep}(i_n) = V_n/\text{GL}_n$ et celui-ci est représentée par 0 et $a_n \in V_n \subset \Sigma_{p^n}$, $\{a_1, \dots, a_n\}$ étant la base canonique de V_n . Le centralisateur dans Σ_{p^n} de 0 (resp. a_n) est alors Σ_{p^n} (resp. \mathcal{C}_n).

Soit $j_n: V_n \hookrightarrow \mathcal{C}_n$ l'inclusion naturelle. Par ce qui précède, $T(\text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n}))$ est l'image du morphisme :

$$H^*\Sigma_{p^n} \times H^*\mathcal{C}_n \xrightarrow{i(V_n, \Sigma_{p^n}) \times \prod_{v \in V_n \setminus \{0\}} i(V_n, \mathcal{C}_n)} H^*V_n \times \prod_{v \in V_n \setminus \{0\}} H^*V_n.$$

Il suit que $\overline{T(\text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n}))} \cong \text{Im } i(V_n, \mathcal{C}_n)$. La proposition est démontrée. \square

Rappelons que G_{n-1} est le sous-groupe de GL_n des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

COROLLAIRE 6.16. — On a $\overline{\mathbb{T}}(\text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n})) \cong \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n, p}) \cap (H^*V_n)^{G_{n-1}}$.

Démonstration. — Montrons d’abord que $V_n \subset \Sigma_{p^n, p} \subset \mathcal{C}_n$. On considère $\Sigma_{p^{n-1}}$ le groupe des permutations (de l’ensemble des points) de V_{n-1} , le sous-espace de V_n engendré par a_1, \dots, a_{n-1} . Soit $i_{n-1}: V_{n-1} \hookrightarrow \Sigma_{p^{n-1}}$ l’inclusion naturelle. Soit A_n le sous-espace de V_n engendré par a_n . Vérifions que $\Sigma_{p^{n-1}} \int A_n$ est un sous-groupe de \mathcal{C}_n . Soit f un élément de $\Sigma_{p^{n-1}} \int A_n$ de la forme

$$f = (s; \lambda_1 a_n, \dots, \lambda_{p^{n-1}} a_n)$$

avec $s \in \Sigma_{p^{n-1}}$ et $\lambda_1 a_n, \dots, \lambda_{p^{n-1}} a_n \in A_n$. Par définition du produit en couronne, on a

$$f(v + \lambda a_n) = s(v) + \lambda_{i_{n-1}(v)} a_n + \lambda a_n$$

pour $v \in V_{n-1}$ et $\lambda a_n \in A_n$. D’autre part, on peut réécrire le groupe \mathcal{C}_n comme suit :

$$\mathcal{C}_n = \{f: V_n \rightarrow V_n \mid f(v + \lambda a_n) = f(v) + \lambda a_n, \forall v \in V_{n-1}, \lambda \in \mathbb{F}_p\}.$$

On en déduit que f est un élément de \mathcal{C}_n , d’où $\Sigma_{p^{n-1}} \int A_n \subset \mathcal{C}_n$. Comme $\Sigma_{p^n, p}$ est un sous-groupe de $\Sigma_{p^{n-1}} \int A_n$ contenant V_n , on a $V_n \subset \Sigma_{p^n, p} \subset \mathcal{C}_n$.

Montrons maintenant le corollaire. D’après le théorème 6.5, on a

$$\text{Im } i(V_n, \mathcal{C}_n) \cong \text{Im } i(V_n, \Sigma_{p^n, p}) \cap (H^*V_n)^{W_{\mathcal{C}_n}(V_n)}.$$

D’autre part, d’après [10, Proposition 3.5], le groupe de Weyl $W_{\mathcal{C}_n}(V_n)$ s’identifie à $\text{GL}_n \cap \mathcal{C}_n$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \text{GL}_n \cap \mathcal{C}_n &= \{f \in \text{Aut}(V_n) \mid f(v + a_n) = f(v) + a_n, \forall v \in V_n\} \\ &= \{f \in \text{Aut}(V_n) \mid f(a_n) = a_n\} \\ &= G_{n-1}. \end{aligned}$$

Le corollaire suit. □

THÉORÈME 6.17. — $\overline{\mathbb{T}}(D(n))$ est un $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n]$ -module libre de base

$$\left\{ 1, \mathbf{M}_{n-1; s_1, \dots, s_i} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor}, \mathbf{M}_{n; n-1} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2}, \mathbf{M}_{n; r_1, \dots, r_{j-1}, n-1} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \right\}$$

avec $0 \leq s_1 < \dots < s_i \leq n-2$ et $0 \leq r_1 < \dots < r_{j-1} \leq n-2$.

Démonstration. — On a $\overline{\mathbb{T}}(D(n)) = \mathcal{M}_n(p) \cap (H^*V_n)^{G_{n-1}}$. Posons $j = 2j' + e$ avec $e \in \{0, 1\}$. Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n-1; s_1, \dots, s_j} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} &= (-1)^{\binom{j}{2}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n-1, s_1} \cdots \widetilde{\mathbf{M}}_{n-1, s_j} \mathbf{e}_{n-1}^e, \\ \mathbf{M}_{n; r_1, \dots, r_{j-1}, n-1} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} &= (-1)^{\binom{j}{2}} \frac{\widetilde{\mathbf{M}}_{n, r_1} \cdots \widetilde{\mathbf{M}}_{n, r_{j-1}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n, n-1} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor}}{\mathbf{L}_n^{j-1+\frac{(p-3)j}{2}}} \\ &= (-1)^{\binom{j}{2}} \frac{\widetilde{\mathbf{M}}_{n, r_1} \cdots \widetilde{\mathbf{M}}_{n, r_{j-1}} \widetilde{\mathbf{M}}_{n, n-1} \mathbf{e}_{n-1}^e}{\mathbf{V}_n^{\frac{(p-1)j}{2}-1}}, \end{aligned}$$

on déduit du lemme 6.7 et du théorème 6.14 que le module donné dans le théorème est contenu dans $\mathcal{M}_n(p) \cap (H^*V_n)^{G_{n-1}}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $f \in \Lambda^j(x_1, \dots, x_n) \otimes \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_n]$ un élément de $\mathcal{M}_n(p) \cap (H^*V_n)^{G_{n-1}}$ de la forme

$$f = \sum_I x_I f_I(y_1, \dots, y_n).$$

Si $j = 0$, alors f est un élément de $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n]$. Supposons que $j > 0$. D'après le lemme 6.8, $y_1^{\frac{(p-1)(j-1)}{2}}$ divise f_{I_0} avec $I_0 = \{1, \dots, j\}$. Comme f est G_{n-1} -invariant, f est aussi GL_{n-1} -invariant. On déduit du lemme 6.9 que $\mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor}$ divise f car

$$\frac{(p-1)(j-1)}{2} + p - 2 - \frac{(p-1)(j-1)}{2} = p - 2 + (p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor.$$

Utilisant le théorème 6.14, f est un élément du module donné dans le théorème. □

COROLLAIRE 6.18. — $(D(n): L_1)_{\mathcal{U}}$ est un $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{n-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{n-1,n-2}, \mathbf{V}_n^{p-1}]$ -module libre de base

$$\left\{ 1, \mathbf{M}_{n-1; s_1, \dots, s_i} \mathbf{L}_{n-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor}, \mathbf{M}_{n, n-1} \mathbf{L}_n^{p-2}, \mathbf{M}_{n; r_1, \dots, r_{j-1}, n-1} \mathbf{L}_n^{p-2} \mathbf{L}_{n-1}^{(p-1)\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \right\}$$

avec $0 \leq s_1 < \dots < s_i \leq n-2$ et $0 \leq r_1 < \dots < r_{j-1} \leq n-2$.

Démonstration. — L'action de GL_1 sur $H^*\mathbb{Z}/p$ induit une action sur $\overline{\mathbb{T}}(D(n))$ à travers l'inclusion $\text{GL}_1 \hookrightarrow \text{GL}_n$ donnée par $\lambda \mapsto \text{diag}(1^{n-1}, \lambda)$. Le résultat se déduit facilement du théorème précédent. □

6.4. Série de Poincaré de $(R_s \Sigma^i \mathbb{Z}/p: L_1)_{\mathcal{U}}$. — On note $P_M(t)$ la série de Poincaré du module instable M . Par définition des foncteurs Φ et Σ [22], on a

$$\begin{aligned} P_{\Phi M}(t) &= P_{M^+}(t^p) + t^{2-p} P_{M^-}(t^p), \\ P_{\Phi \Sigma M}(t) &= t^2 P_{M^+}(t^p) + t^p P_{M^-}(t^p). \end{aligned}$$

Si $M = (R_s \Sigma^i \mathbb{Z}/p: L_1)_{\mathcal{U}}$, on écrit $P_{s,i}(t)$ (resp. $P_{s,i}^+(t)$, $P_{s,i}^-(t)$) pour $P_M(t)$ (resp. $P_{M^+}(t)$, $P_{M^-}(t)$).

LEMME 6.19. — Pour $s \geq 2$, on a

1. $(1 - t^{2(p^{s-1}-1)})P_{s,0}^+(t) = P_{s-1,0}^+(t^p) + t^{p-2}P_{s-1,0}^-(t^p)$;
2. $(1 - t^{2(p^{s-1}-1)})P_{s,0}^-(t) = t^{p-1}P_{s-1,0}^-(t^p) + t^{2p^{s-1}-3}P_{s-1,0}^+(t^p)$.

Démonstration. — D’après le corollaire 6.18, le sous-espace des éléments de degré pair de $(D(s): L_1)_{\mathcal{U}}$ est le $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{s-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{s-1,s-2}, \mathbf{V}_s^{p-1}]$ -module libre de base

$$\{1, \mathbf{M}_{s-1;i_1,\dots,i_r} \mathbf{L}_{s-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}, \mathbf{M}_{s;j_1,\dots,j_k,s-1} \mathbf{L}_s^{p-2} \mathbf{L}_{s-1}^{(p-1)\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\}$$

où $\{i_1, \dots, i_r\}$ avec r pair (resp. $\{j_1, \dots, j_k\}$ avec k impair) est une partie ordonnée non-vide de $\{0, \dots, s-2\}$. On notera $P_s^+(t)$ la série de Poincaré de l’espace vectoriel engendré par cette base. De même, le sous-espace des éléments de degré impair de $(D(s): L_1)_{\mathcal{U}}$ est le $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{s-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{s-1,s-2}, \mathbf{V}_s^{p-1}]$ -module libre de base

$$\{\mathbf{M}_{s-1;i_1,\dots,i_r} \mathbf{L}_{s-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}, \mathbf{M}_{s,s-1} \mathbf{L}_s^{p-2}, \mathbf{M}_{s;j_1,\dots,j_k,s-1} \mathbf{L}_s^{p-2} \mathbf{L}_{s-1}^{(p-1)\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\}$$

où $\{i_1, \dots, i_r\}$ avec r impair (resp. $\{j_1, \dots, j_k\}$ avec k pair) est une partie ordonnée non-vide de $\{0, \dots, s-2\}$. On notera $P_s^-(t)$ la série de Poincaré de l’espace vectoriel engendré par cette base.

Le degré de $\mathbf{M}_{s-1;i_1,\dots,i_r} \mathbf{L}_{s-1}^{p-2+(p-1)\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}$ est

$$2(p^{s-1} - 1)\left(\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + 1\right) + (1 - 2p^{i_1}) + \dots + (1 - 2p^{i_r})$$

et le degré de $\mathbf{M}_{s;j_1,\dots,j_r,s-1} \mathbf{L}_s^{p-2} \mathbf{L}_{s-1}^{(p-1)\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$ est

$$2(p^{s-1} - 1)\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + (2p^s - 2p^{s-1} - 1) + (1 - 2p^{j_1}) + \dots + (1 - 2p^{j_r}).$$

On en déduit, en posant $2p^I = 2p^{i_1} + \dots + 2p^{i_r}$ pour $I = (i_1, \dots, i_r)$ et $2p^\emptyset = 0$, que

$$\begin{aligned} P_s^+(t) &= \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, s-2\}, \\ |I| \text{ pair}}} t^{p^{s-1}|I|-2p^I} + \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, s-2\}, \\ |J| \text{ impair}}} t^{p^{s-1}(|J|-3)-2p^J+2p^s} \\ &=: A_s^+(t) + B_s^+(t); \\ P_s^-(t) &= \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, s-2\}, \\ |I| \text{ impair}}} t^{p^{s-1}(|I|+1)-2p^I-1} + \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, s-2\}, \\ |J| \text{ pair}}} t^{p^{s-1}(|J|-2)-2p^J+2p^{s-1}} \\ &=: A_s^-(t) + B_s^-(t). \end{aligned}$$

On a, en considérant si I contient 0 ou non,

$$\begin{aligned} A_s^+(t) &= \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |I| \text{ pair}}} t^{p(p^{s-2}|I|-2p^I)} + \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |I| \text{ impair}}} t^{p(p^{s-2}(|I|+1)-2p^I)-2} \\ &= A_{s-1}^+(t^p) + t^{p-2}A_{s-1}^-(t^p); \\ B_s^+(t) &= \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |J| \text{ impair}}} t^{p(p^{s-2}(|J|-3)-2p^J+2p^{s-1})} \\ &\quad + \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |J| \text{ pair}}} t^{p(p^{s-2}(|J|-2)-2p^J+2p^{s-1})-2} \\ &= B_{s-1}^+(t^p) + t^{p-2}B_{s-1}^-(t^p). \end{aligned}$$

Il suit que

$$P_s^+(t) = P_{s-1}^+(t^p) + t^{p-2}P_{s-1}^-(t^p).$$

De même,

$$\begin{aligned} A_s^-(t) &= \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |I| \text{ impair}}} t^{p(p^{s-2}(|I|+1)-2p^I)-1} + \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, s-2\}, \\ |I| \text{ pair}}} t^{p(p^{s-1}(|I|+2)-2p^I)-3} \\ &= t^{p-1}A_{s-1}^-(t^p) + t^{2p^{s-1}-3}A_{s-1}^+(t^p); \\ B_s^-(t) &= \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |J| \text{ pair}}} t^{p(p^{s-2}(|J|-2)-2p^J+2p^{s-1})-1} \\ &\quad + \sum_{\substack{J \subset \{0, \dots, s-3\}, \\ |J| \text{ impair}}} t^{p(p^{s-2}(|J|-1)-2p^J+2p^{s-1})-3} \\ &= t^{p-1}B_{s-1}^-(t^p) + t^{2p^{s-1}-3}B_{s-1}^+(t^p). \end{aligned}$$

D'où

$$P_s^+(t) = t^{p-1}P_{s-1}^-(t^p) + t^{2p^{s-1}-3}P_{s-1}^+(t^p).$$

On observe enfin que si l'on note $Q_s(t)$ la série de Poincaré de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_p[\mathbf{Q}_{s-1,0}, \dots, \mathbf{Q}_{s-1,s-2}, \mathbf{V}_s^{p-1}]$, alors

$$Q_s(t) = \frac{1}{(1 - t^{2(p^{s-1}-p^0)}) \dots (1 - t^{2(p^{s-1}-p^{s-2})})(1 - t^{2p^{s-1}(p-1)}}).$$

Il s'ensuit $(1 - t^{2(p^{s-1}-1)})Q_s(t) = Q_{s-1}(t)$. Le lemme est démontré. □

LEMME 6.20 ([24, Définition-Proposition 4.5.1]). — *Soient $s, i \geq 1$. Il existe une suite exacte courte des modules instables :*

$$0 \rightarrow \Sigma R_s \Sigma^i \mathbb{Z}/p \rightarrow \Sigma^2 R_s \Sigma^{i-1} \mathbb{Z}/p \rightarrow \Phi \Sigma R_{s-1} \Sigma^{i-1} \mathbb{Z}/p \rightarrow 0.$$

Comme le foncteur $(- : L_1)_\mathcal{U}$ est exact et commute avec Φ et Σ [22], il résulte du lemme que

$$(1) \quad P_{s,i}(t) = tP_{s,i-1}(t) - t^{p-1}P_{s-1,i-1}^-(t^p) - tP_{s-1,i-1}^+(t^p).$$

PROPOSITION 6.21. — Pour $s \geq 1$ et $i \geq 0$, on a

$$P_{s,i}(t) = \begin{cases} t^{p^{s-1}i}P_{s,0}(t) & \text{si } i \text{ est pair,} \\ t^{p^{s-1}(i-1)+1}P_{s,0}^-(t) + t^{p^{s-1}(i-1)+2p^{s-1}-1}P_{s,0}^+(t) & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. — On fait une récurrence double sur (i, s) . On a rien à faire pour $i = 0$. Pour $s = 1$, on a $(R_1\Sigma^i\mathbb{Z}/p : L_1)_\mathcal{U} = (\Sigma^i M_1 : L_1)_\mathcal{U} = \Sigma^i(R_1\mathbb{Z}/p : L_1)_\mathcal{U}$ car le quotient de $\Sigma^i M_1$ par $R_1\Sigma^i\mathbb{Z}/p$ est un module fini. D'où $P_{1,i}(t) = t^i P_{1,0}(t)$.

Supposons que la formule de la proposition soit vérifiée pour tout $(s', i') < (s, i)$ dans l'ordre lexicographique.

Supposons que i est impair. On a

$$\begin{aligned} P_{s,i}(t) &= tP_{s,i-1}(t) - t^{p-1}P_{s-1,i-1}^-(t^p) - tP_{s-1,i-1}^+(t^p) \quad (\text{d'après (1)}) \\ &= t^{p^{s-1}(i-1)+1}P_{s,0}(t) - t^{p^{s-1}(i-1)+p-1}P_{s-1,0}^-(t^p) - t^{p^{s-1}(i-1)+1}P_{s-1,0}^+(t^p) \\ &\quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= t^{p^{s-1}(i-1)+1}P_{s,0}(t) - t^{p^{s-1}(i-1)+1}(1 - t^{2(p^{s-1}-1)})P_{s,0}^+(t) \\ &\quad (\text{d'après le lemme 6.19(1)}) \\ &= t^{p^{s-1}(i-1)+1}P_{s,0}^-(t) + t^{p^{s-1}(i-1)+2p^{s-1}-1}P_{s,0}^+(t). \end{aligned}$$

Supposons que i est pair. On a

$$\begin{aligned} P_{s,i}(t) &= tP_{s,i-1}(t) - t^{p-1}P_{s-1,i-1}^-(t^p) - tP_{s-1,i-1}^+(t^p) \quad (\text{d'après (1)}) \\ &= t^{p^{s-1}(i-2)+2}P_{s,0}^-(t) + t^{p^{s-1}i}P_{s,0}^+(t) - t^{p^{s-1}i-1}P_{s-1,0}^+(t^p) \\ &\quad - t^{p^{s-1}(i-2)+1+p}P_{s-1,0}^-(t^p) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= t^{p^{s-1}(i-2)+2}P_{s,0}^-(t) + t^{p^{s-1}i}P_{s,0}^+(t) \\ &\quad - t^{p^{s-1}(i-2)+2}(1 - t^{2(p^{s-1}-1)})P_{s,0}^-(t) \quad (\text{d'après le lemme 6.19(2)}) \\ &= t^{p^{s-1}i}P_{s,0}(t). \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

Pour $s \geq 1$ et $i \geq 0$, on note $c_{s,i}$ la connectivité de $(R_s\Sigma^i\mathbb{Z}/p : L_1)_\mathcal{U}$.

COROLLAIRE 6.22. — On a

$$c_{s,i} = \begin{cases} i & \text{si } s = 1, \\ p^{s-1}i & \text{si } s \geq 2 \text{ et } i \text{ est pair,} \\ p^{s-1}i + (p-2)p^{s-2} & \text{si } s \geq 2 \text{ et } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier, $c_{s,i} \geq p^{s-1}i$.

Démonstration. — Pour $s = 1$, il est facile à voir que $c_{1,i} = i$.

Supposons que $s \geq 2$ et i est pair. Il résulte de la proposition 6.21 que $c_{s,i} = p^{s-1}i$.

Supposons que $s \geq 2$ et i est impair. On note $c_{s,i}^+$, $c_{s,i}^-$ respectivement la connectivité de $(R_s \Sigma^i \mathbb{Z}/p : L_1)_{\mathcal{U}}^+$, $(R_s \Sigma^i \mathbb{Z}/p : L_1)_{\mathcal{U}}^-$. D'après la proposition 6.21, on a

$$\begin{aligned} c_{s,i}^+ &= p^{s-1}(i-1) + 1 + c_{s,0}^- \\ c_{s,i}^- &= p^{s-1}(i+1) - 1. \end{aligned}$$

D'après le lemme 6.19, on a

$$c_{s,0}^- = \min(p-1 + pc_{s-1,0}^-; 2p^{s-1} - 3)$$

pour tout $s \geq 2$. De plus, il est facile à vérifier que $c_{1,0}^- = 2p-3$. Par récurrence, on peut montrer que $c_{s,0}^- = 2p^{s-1} - 2p^{s-2} - 1$ pour $s \geq 2$. Il suit que

$$c_{s,i}^+ = p^{s-1}(i+1) - 2p^{s-2}.$$

Comme $c_{s,i} = \min(c_{s,i}^+, c_{s,i}^-)$, on obtient $c_{s,i} = p^{s-1}i + (p-2)p^{s-2}$. Le corollaire est démontré. □

COROLLAIRE 6.23. — Si $s + t \geq 1$, la connectivité de $(D_s \Sigma^t \mathbb{Z}/p : L_1)_{\mathcal{U}}$ est supérieure ou égale à $p^{s-1}(s+t-1) + 1$.

Démonstration. — On a $(D_s \Sigma^t \mathbb{Z}/p : L_1)_{\mathcal{U}} \cong \Sigma(R_s \Sigma^{s+t-1} \mathbb{Z}/p : L_1)_{\mathcal{U}}$. Le corollaire se déduit du corollaire précédent. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. ADAMS, J. H. GUNAWARDENA & H. MILLER – « The Segal conjecture for elementary abelian p -groups », *Topology* **24** (1985), p. 435–460.
- [2] G. Z. ARONE & W. G. DWYER – « Partition complexes, Tits buildings and symmetric products », *Proc. London Math. Soc.* **82** (2001), p. 229–256.
- [3] G. Z. ARONE & M. MAHOWALD – « The Goodwillie tower of the identity functor and the unstable periodic homotopy of spheres », *Invent. Math.* **135** (1999), p. 743–788.

- [4] H. E. A. CAMPBELL & P. S. SELICK – « Polynomial algebras over the Steenrod algebra », *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), p. 171–180.
- [5] H. CARTAN & S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.
- [6] L. E. DICKSON – « A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem », *Trans. Amer. Math. Soc.* **12** (1911), p. 75–98.
- [7] T. G. GOODWILLIE – « Calculus. III. Taylor series », *Geom. Topol.* **7** (2003), p. 645–711.
- [8] N. D. H. HAI, L. SCHWARTZ & T. N. NAM – « La fonction génératrice de Minc et une “conjecture de Segal” pour certains spectres de Thom », *Adv. Math.* **225** (2010), p. 1431–1460.
- [9] N. J. KUHN – « The modular Hecke algebra and Steinberg representation of finite Chevalley groups », *J. Algebra* **91** (1984), p. 125–141.
- [10] ———, « Chevalley group theory and the transfer in the homology of symmetric groups », *Topology* **24** (1985), p. 247–264.
- [11] ———, « The rigidity of $L(n)$ », in *Algebraic topology (Seattle, Wash., 1985)*, Lecture Notes in Math., vol. 1286, Springer, 1987, p. 286–292.
- [12] J. LANNES – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d’un p -groupe abélien élémentaire », *Publ. Math. I.H.É.S.* **75** (1992), p. 135–244.
- [13] J. LANNES & L. SCHWARTZ – « Sur la structure des A -modules instables injectifs », *Topology* **28** (1989), p. 153–169.
- [14] J. LANNES & S. ZARATI – « Sur les \mathcal{U} -injectifs », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 303–333.
- [15] C. LÖFWALL – « On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra », *Lecture Notes in Math.* **1183** (1986), p. 291–338.
- [16] P. A. MINH & V. T. TÙNG – « Modular invariants of parabolic subgroups of general linear groups », *J. Algebra* **232** (2000), p. 197–208.
- [17] S. A. MITCHELL & S. B. PRIDDY – « Stable splittings derived from the Steinberg module », *Topology* **22** (1983), p. 285–298.
- [18] H. MÛI – « Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **22** (1975), p. 319–369.
- [19] ———, « Cohomology operations derived from modular invariants », *Math. Z.* **193** (1986), p. 151–163.
- [20] A. POLISHCHUK & L. POSITSIELSKI – *Quadratic algebras*, University Lecture Series, vol. 37, Amer. Math. Soc., 2005.

- [21] S. B. PRIDDY – « Koszul resolutions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **152** (1970), p. 39–60.
- [22] L. SCHWARTZ – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1994.
- [23] R. STEINBERG – « Prime power representations of finite linear groups », *Canad. J. Math.* **8** (1956), p. 580–591.
- [24] S. ZARATI – « Dérivés du foncteur de déstabilisation en caractéristique impaire et applications », thèse de doctorat, Université Paris-Sud (Orsay), 1984.