Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

QUELQUES « FORMULES DE MASSE » RAFFINÉES EN DEGRÉ PREMIER

Chandan Singh Dalawat

Tome 140
Fascicule 4

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 599-606

Bull. Soc. math. France
140 (4), 2012, p. 599–606

QUELQUES « FORMULES DE MASSE » RAFFINÉES EN DEGRÉ PREMIER

PAR CHANDAN SINGH DALAWAT

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux.
Évariste Galois, 29 mai 1832.

RÉSUMÉ. — Pour un corps local à corps résiduel fini de caractéristique p, nous donnons quelques raffinements de la formule de masse de Serre en degré p qui nous permettent de calculer par exemple la contribution des extensions cycliques, ou celles dont la clôture galoisienne a pour groupe d'automorphismes un groupe donné à l'avance, ou possède des propriétés de ramification également données à l'avance.

ABSTRACT (*Some refined prime degree "mass formulas"*). — For a local field with finite residue field of characteristic p, we give some refinements of Serre's mass formula in degree p which allow us to compute for example the contribution of cyclic extensions, or of those whose Galoisian closure has a given group as group of automorphisms, or has ramification properties given in advance.

Texte reçu le 6 février 2012, accepté le 21 septembre 2012.

CHANDAN SINGH DALAWAT, Harish-Chandra Research Institute, Chhatnag Road, Jhunsi, Allahabad 211019, Inde • *E-mail :* dalawat@gmail.com

Classification mathématique par sujets (2010). — 11S15, 11S20.

Mots clefs. — Formule de masse de Serre.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2012/599/$ 5.00

1. Introduction

Soient p un nombre premier, k une extension finie de $\mathbf{F}_p$ de degré $f=[k:\mathbf{F}_p]$ et de cardinal $q=p^f$, et F un corps local de corps résiduel k. On sait que F est alors ou bien une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'indice de ramification $e=[F:\mathbf{Q}_p]/f$, ou bien le corps $k((T))$. On désigne par $v:F^\times\to\mathbf{Z}$ la valuation normalisée de F.

Soit $\mathcal{T}_p(F)$ l'ensemble de toutes les extensions séparables $E|F$ (totalement) ramifiées de degré $[E:F]=p$ contenues dans une clôture algébrique donnée de F. Pour toute $E\in\mathcal{T}_p(F)$ de discriminant $\delta_{E|F}$, Serre pose $c(E)=v(\delta_{E|F})-(p-1)$; c'est un entier strictement positif qui mesure la ramification sauvage de $E|F$. Le cas de degré p de la formule de masse de Serre dit que $\sum_E q^{-c(E)}=p$: la masse de $\mathcal{T}_p(F)$ vaut p [4].

La formule de masse en tout degré fut également démontrée par Krasner [3] peu après.

Notre but dans cette Note est de calculer la masse de diverses parties de $\mathcal{T}_p(F)$, par exemple celle des extensions E qui sont cycliques sur F, ou celle des extensions E dont la clôture galoisienne $\tilde{E}$ a pour groupe $\mathrm{Gal}(\tilde{E}|F)$ un groupe Γ donné à l'avance, ou encore celle des extensions telles que $\tilde{E}=EF'$, pour une extension $F'|F$ fixée.

On pose $K=F(\sqrt[p-1]{F^\times})$ et $G=\mathrm{Gal}(K|F)$; K est l'extension abélienne maximale de F d'exposant divisant $p-1$. Noter que K contient p racines p-ièmes de 1 si $\mathrm{car}(F)=0$; on désigne par $\omega:G\to\mathbf{F}_p^\times$ le caractère cyclotomique donnant l'action de G sur lesdites racines, et l'on pose $\omega=1$ si $\mathrm{car}(F)=p$.

Il résulte essentiellement du critère de résolubilité de Galois que, pour tout $E\in\mathcal{T}_p(F)$, l'extension composée EK est cyclique de degré p sur K et galoisienne sur F. Inversement, toute extension cyclique $L|K$ de degré p qui est galoisienne sur F provient d'une extension séparable de degré p de F. Par ailleurs, les extensions cycliques $L|K$ de degré p sont en bijection avec les $\mathbf{F}_p$-droites $D\subset K^\times/K^{\times p}$ en caractéristique 0, respectivement $D\subset K^+/\wp(K^+)$ en caractéristique p, où $\wp(x)=x^p-x$. Les L qui sont galoisiennes sur F correspondent aux D qui sont G-stables.

Ce qui précède définit une application $\mathcal{T}_p(F)\to\mathrm{Hom}(G,\mathbf{F}_p^\times)$ qui envoie toute E sur le caractère $\chi:G\to\mathbf{F}_p^\times$ à travers lequel G agit sur la $\mathbf{F}_p$-droite D telle que $EK=K(\sqrt[p]{D})$ ou $EK=K(\wp^{-1}(D))$, suivant les cas. Si $E|F$ est cyclique, alors $\chi=\omega$.

Notre résultat principal (prop. 1) calcule la contribution $\sum_{E\mapsto\chi}q^{-c(E)}$ de chaque caractère $\chi:G\to\mathbf{F}_p^\times$ à la formule de masse de Serre en degré p.

L'accouplement parfait $G\times(F^\times/F^{\times p-1})\to\mathbf{F}_p^\times$ identifie le groupe $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{F}_p^\times)$ avec $F^\times/F^{\times p-1}$; le caractère ω s'identifie à $\overline{-p}$ si $\mathrm{car}(F)=0$, à $\bar{1}$

si $\operatorname{car}(F) = p$. On peut donc parler de la « valuation » $\bar{v}(\chi) \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ d'un caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$; on a $\bar{v}(\omega) \equiv e$ ou $\equiv 0 \pmod{p-1}$ respectivement.

Pour un caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ et un indice $i \in [0, e[$ (resp. $i \in \mathbf{N}$), definissons $j_{\chi,i} \in [1, p[$ par la condition $\bar{v}(\chi) \equiv \bar{v}(\omega) - (i + j_{\chi,i}) \pmod{p-1}$.

PROPOSITION 1.1. — *La contribution* $\sum_{E \mapsto \chi} q^{-c(E)}$ *de* χ *à la formule de masse de Serre en degré* p *vaut*

$$\frac{p(q-1)}{(p-1)} \sum_i q^{i-(ip+j_{\chi,i})} \qquad \begin{cases} i \in [0, e[& \textit{si } \operatorname{car}(F) = 0, \\ i \in \mathbf{N} & \textit{si } \operatorname{car}(F) = p, \end{cases} \tag{1}$$

sauf si $\chi = 1$ *et* $\operatorname{car}(F) = 0$, *auquel cas les extensions très ramifiées contribuent par un terme* $p/q^{(p-1)e}$ *supplémentaire.*

[Bien entendu, on retrouve la formule de masse de Serre en degré p en ajoutant les contributions de tous les χ.]

Voir §3 pour la démonstration. Rappelons que $E \in \mathscr{T}_p(F)$ est dite très ramifiée si $p \mid c(E)$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\operatorname{car}(F) = 0$ et $c(E) = ep$.

Il est facile d'évaluer la somme (1), en notant que si $i \equiv i' \pmod{p-1}$, alors $j_{\chi,i} = j_{\chi,i'}$. En caractéristique 2, on a $G = \{1\}$ qui n'a qu'un seul caractère. En caractéristique $p \neq 2$, on a le

COROLLAIRE 1.2. — *Si* $p \neq 2$, $F = k((T))$ *et si* $\bar{v}(\chi) \equiv -a \pmod{p-1}$ *pour un* $a \in [0, p-1[$, *alors la contribution* $\sum_{E \mapsto \chi} q^{-c(E)}$ *de* χ *vaut*

$$\frac{p(q-1)}{(p-1)} \left(\frac{q^{p-2}(q^{(p-2)a} - 1)}{q^{(p-1)a}(q^{p-2} - 1)} + \frac{q^{p-2}(q^{(p-2)(p-1)} - 1)}{q^{(p-1)a}(q^{p-2} - 1)(q^{(p-1)^2} - 1)} \right). \tag{2}$$

Le cas $\chi = 1$ *donne la contribution des extensions cycliques dans* $\mathscr{T}_p(F)$.

Les formules sont légèrement plus compliquées en caractéristique 0 mais résultent de la même méthode ; nous ne les explicitons que dans un cas particulier.

COROLLAIRE 1.3. — *Supposons que* $F|\mathbf{Q}_p$ *est une extension finie et écrivons* $e-1 = (p-1)m+s$ *(avec* $s \in [0, p-1[$, $m \in \mathbf{N}$*). Pour tout caractère* $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ *de « valuation »* $\bar{v}(\chi) \equiv e \pmod{p-1}$, *la contribution* $\sum_{E \mapsto \chi} q^{-c(E)}$ *de* χ *vaut*

$$\frac{p(q-1)}{(p-1)q^{p-1}} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{p-2} q^{-(p-1)^2 n - (p-2)r} + \sum_{r=0}^{s} q^{-(p-1)^2 m - (p-2)r} \right) \tag{3}$$

sauf si $\chi = 1$, *auquel cas les extensions très ramifiées contribuent par un terme* $p/q^{(p-1)e}$ *supplémentaire. En particulier, le cas* $\chi = \omega$ *donne les contributions des extensions cycliques dans* $\mathscr{T}_p(F)$ *suivant que* $\omega \neq 1$ *ou* $\omega = 1$.

Remarque 4. — Soit $E \in \mathcal{T}_p(F)$ et soit $D \subset K^\times/K^{\times p}$ ou $D \subset K^+/\wp(K^+)$ la droite telle que $EK = K(\sqrt[p]{D})$ ou $EK = K(\wp^{-1}(D))$ respectivement. Si le caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ donne l'action de G sur D, alors $\omega\chi^{-1}$ donne l'action de G sur $\mathrm{Gal}(EK|K)$.

Remarque 5. — Le caractère χ permet de récupérer $\tilde{E}_1 \subset \tilde{E}$, l'extension maximale modérément ramifiée de F dans la clôture galoisienne $\tilde{E}$ de $E|F$. En effet, $\tilde{E}_1 = K^{G_\chi}$, où $G_\chi = \mathrm{Ker}(\omega\chi^{-1})$. On a aussi $\tilde{E} = EK^{G_\chi}$.

Exemple 6. — Fixons une extension $F' \subset K$ de F. La contribution des $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $\tilde{E} = EF'$ est la somme des contributions de tous les χ tels que $K^{G_\chi} = F'$.

Exemple 7. — De même, la contribution des $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $\tilde{E}_1|F$ soit non ramifiée est la somme des contributions de tous les caractères $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ tels que $\bar{v}(\omega\chi^{-1}) \equiv 0 \pmod{p-1}$.

Remarque 8. — Le caractère χ détermine le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\tilde{E}|F)$ à isomorphisme près. En effet, Γ est l'extension de $\mathrm{Im}(\omega\chi^{-1}) \subset \mathbf{F}_p^\times$ par le groupe $P = \mathrm{Gal}(\tilde{E}|\tilde{E}_1)$ d'ordre p (avec l'identification $\mathrm{Aut}\,P = \mathbf{F}_p^\times$).

Exemple 9. — Cette remarque permet de calculer la contribution de toutes les $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $\mathrm{Gal}(\tilde{E}|F)$ soit isomorphe à un groupe Γ (extension canonique d'un sous-groupe de $\mathbf{F}_p^\times = \mathrm{Aut}\,P$ par un groupe P d'ordre p) donné à l'avance. C'est la somme des contributions de tous les $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ tels que $\mathrm{Card}\,\mathrm{Im}(\omega\chi^{-1}) = (\mathrm{Card}\,\Gamma)/p$.

Remarque 10. — Soit $b^{(i+1)}$ la suite des entiers positifs premiers à p, de sorte que $b^{(i+1)} = i + 1 + \lfloor i/(p-1) \rfloor$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Réconcilier le cas $\chi = \omega$ de la prop. 1 avec les formules (1)–(3) de [1, prop. 14–16] revient à vérifier l'identité

$$ip + j_{\omega,i} = (p-1)b^{(i+1)}$$

pour tout $i \in \mathbf{N}$. Écrivant $i = (p-1)n + r$ (avec $r \in [0, p-1[$, $n \in \mathbf{N}$), nous avons $j_{\omega,i} = p - 1 - r$ et $b^{(i+1)} = i + 1 + n$, d'où l'identité.

2. Modules galoisiens filtrés

Dans ce § nous rappelons la structure du $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré $K^\times/K^{\times p}$ en caractéristique 0 et $K^+/\wp(K^+)$ en caractéristique p. Le lecteur est prié de se rapporter au §6 de [2], ou plutôt de arXiv:1004.2016v6, pour les démonstrations.

Nous allons construire de toute pièces un $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré auquel $K^\times/K^{\times p}$ (resp. $K^+/\wp(K^+)$) est isomorphe.

On note $\mathfrak{o} \subset K$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ son unique idéal maximal, et $l = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ son corps résiduel ; on a $\mathrm{Gal}(l|k) = G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est le sous-groupe d'inertie de $G = \mathrm{Gal}(K|F)$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on désigne par $l[n]$ le $k[G]$-module $\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}$, de sorte que $l[0] = l$. Si $m \equiv n \pmod{p-1}$, les $k[G]$-modules $l[m]$,

$l[n]$ sont isomorphes. Pour tout caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$, le χ-espace propre de $l[n]$ est une k-droite si $\bar{v}(\chi) \equiv n \pmod{p-1}$; il est réduit à 0 sinon.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose $V_{i+1} = l[-(ip+1)] \oplus \cdots \oplus l[-(ip+p-1)]$ en caractéristique p et

$$V_{i+1} = l[e-(ip+1)] \oplus \cdots \oplus l[e-(ip+p-1)]$$

en caractéristique 0, et l'on munit ce $k[G]$-module libre de rang 1 de la filtration croissante pour laquelle le gradué associé est la somme directe définissant V_{i+1}. Finalement, on désigne par $\mathbf{F}_p\{\omega\}$ une $\mathbf{F}_p$-droite sur laquelle G agit à travers ω.

En caractéristique 0, le $\mathbf{F}_p[G]$-module $K^\times/K^{\times p}$ est muni de la filtration $(\bar{U}_n)_n$ image de la filtration $\cdots \subset U_2 \subset U_1 \subset K^\times$ du groupe multiplicatif, où $U_n = 1 + \mathfrak{p}^n$ pour tout $n > 0$. On a $\bar{U}_{ep+1} = \{1\}$, et les quotients successifs sont indiqués dans le diagramme suivant (où $j \in [1, e[$) :

$$\{1\} \underbrace{\subset}_{\mathbf{F}_p\{\omega\}} \bar{U}_{ep} \underbrace{\subset}_{l[ep-1]} \bar{U}_{ep-1} \cdots$$

$$\cdots \underbrace{\subset}_{l[jp+1]} \bar{U}_{jp+1} \underbrace{=}_{\{1\}} \bar{U}_{jp} \underbrace{\subset}_{l[jp-1]} \bar{U}_{jp-1} \cdots$$

$$\cdots \bar{U}_2 \underbrace{\subset}_{l[1]} \bar{U}_1 \underbrace{\subset}_{\mathbf{F}_p} K^\times/K^{\times p}.$$

Pour $n \in [0, ep]$, on pose $\mathscr{F}_n = \bar{U}_{ep-n}$ (avec la convention $\bar{U}_0 = K^\times/K^{\times p}$).

Proposition 2.1. — *Soit F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Le $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré $K^\times/K^{\times p}$ est isomorphe à*

$$\mathbf{F}_p\{\omega\} \oplus (V_1 \oplus 0) \oplus (V_2 \oplus 0) \oplus \cdots \oplus (V_{e-1} \oplus 0) \oplus V_e \oplus \mathbf{F}_p.$$

On a inséré des 0 pour rappeler que $\mathscr{F}_{tp-1} = \mathscr{F}_{tp}$ pour tout $t \in [1, e[$.

En caractéristique p, le $\mathbf{F}_p[G]$-module $K^+/\wp(K^+)$ est muni de la filtration $(\overline{\mathfrak{p}^n})_n$ image de la filtration $\cdots \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{o} \subset \mathfrak{p}^{-1} \subset \cdots \subset K^+$ du groupe additif. On a $\bar{\mathfrak{p}} = \{0\}$ et les quotients successifs sont indiqués dans le diagramme suivant (où $j < 0$) :

$$\{0\} \underbrace{\subset}_{\mathbf{F}_p} \bar{\mathfrak{o}} \underbrace{\subset}_{l[-1]} \overline{\mathfrak{p}^{-1}} \cdots \underbrace{\subset}_{l[jp+1]} \overline{\mathfrak{p}^{jp+1}} \underbrace{=}_{\{0\}} \overline{\mathfrak{p}^{jp}} \underbrace{\subset}_{l[jp-1]} \overline{\mathfrak{p}^{jp-1}} \cdots \subset K^+/\wp(K^+).$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathscr{F}_n = \overline{\mathfrak{p}^{-n}}$. On a alors le résultat structural analogue :

Proposition 2.2. — *Soit F le corps $k((T))$. Le $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré $K^+/\wp(K^+)$ est isomorphe à*

$$\mathbf{F}_p \oplus (V_1 \oplus 0) \oplus (V_2 \oplus 0) \oplus \cdots,$$

où les 0 sont insérés pour rappeler que $\mathscr{F}_{tp-1} = \mathscr{F}_{tp}$ pour tout $t > 0$.

DÉFINITION 2.3. — Soit $D \subset K^\times/K^{\times p}$ ou $D \subset K^+/\wp(K^+)$ une $\mathbf{F}_p$-droite. Le niveau $d(D)$ de D est le plus petit indice $n \in \mathbf{N}$ tel que $D \subset \mathscr{F}_n$.

La seule droite de niveau 0 est la droite $\mathscr{F}_0 = \bar{U}_{ep}$ en caractéristique 0 ou la droite $\mathscr{F}_0 = \bar{\mathfrak{o}}$ en caractéristique p ; c'est la droite qui donne l'extension non ramifiée de degré p de K. Le niveau de toute autre droite est premier à p, à l'exception des droites de niveau ep en caractéristique 0.

COROLLAIRE 2.4. — *Soit $D \subset K^\times/K^{\times p}$ ou $D \subset K^+/\wp(K^+)$ une $\mathbf{F}_p$-droite G-stable de niveau $n > 0$ et soit $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ le caractère à travers lequel G agit sur D. Si $p \mid n$, alors $\mathrm{car}(F) = 0$, $n = ep$ et $\chi = 1$. Si $\mathrm{pgcd}(p,n) = 1$, alors $\bar{v}(\chi) \equiv \bar{v}(\omega) - n \pmod{p-1}$.*

Remarque 15. — Soit $M|K$ l'extension abélienne maximale d'exposant divisant p, à savoir $M = K(\sqrt[p]{K^\times})$ en caractéristique 0 et $M = K(\wp^{-1}(K))$ en caractéristique p. Le groupe profini $H = \mathrm{Gal}(M|K)$ est muni de sa filtration en numérotation supérieure, et la suite exacte courte

$$\{1\} \to H \to \mathrm{Gal}(M|F) \to G \to \{1\}$$

fournit une action de G sur H. La relation d'orthogonalité [1], §5, pour l'accouplement

$$H \times (K^\times/K^{\times p}) \to \mu_p \qquad (\text{resp. } H \times (K^+/\wp(K^+)) \to \mathbf{F}_p)$$

permet de déduire la structure du $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré H de la structure du $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré $K^\times/K^{\times p}$ (prop. 11) (resp. $K^+/\wp(K^+)$ (prop. 12)).

3. Le calcul

Avant d'en venir à la démonstration de la prop. 1, rappelons un dernier petit lemme. Soit $E \in \mathscr{T}_p(F)$ une extension séparable de F de degré p, $b(L|K)$ l'unique saut de ramification de $\mathrm{Gal}(L|K)$, où $L = EK$, et $d(D)$ le niveau (déf. 13) de la droite $D \subset K^\times/K^{\times p}$ ou $D \subset K^+/\wp(K^+)$ telle que $L = K(\sqrt[p]{D})$ ou $L = K(\wp^{-1}(D))$ respectivement.

LEMME 3.1. — *On a $b(L|K) = c(E) = d(D)$.*

Cela résulte de la formule de transitivité du discriminant, combinée avec les relations d'orthogonalité [1], §7.

Démonstration de la prop. 1. — Fixons un caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$. Si une droite $D \subset K^\times/K^{\times p}$ ou $D \subset K^+/\wp(K^+)$ de niveau $d(D) > 0$ (déf. 13) est G-stable, et si G agit sur D à travers χ, alors le nombre de $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $E \mapsto D$ est 1 si $\chi = \omega$ et p si $\chi \neq \omega$. La contribution de D à la somme $\sum_{E\mapsto\chi} q^{-c(E)}$ est donc

$$\sum_{E\mapsto D} q^{-c(E)} = \begin{cases} q^{-d(D)} & \text{si } \chi = \omega, \\ pq^{-d(D)} & \text{si } \chi \neq \omega, \end{cases} \tag{2}$$

d'après le lemme 16. Par ailleurs, pour tout $i \in [0, e[$ (resp. $i \in \mathbf{N}$), la dimension du χ-espace propre $\mathcal{T}_{ip}(\chi)$ de $\mathcal{T}_{ip}$ vaut

$$\dim_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_p\{\omega\} \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_i)(\chi) = \begin{cases} 1 + if & \text{si } \chi = \omega, \\ \phantom{1+{}}if & \text{si } \chi \neq \omega, \end{cases}$$

(prop. 11 si $\mathrm{car}(F) = 0$, prop. 12 si $\mathrm{car}(F) = p$), donc le nombre de droites dans $\mathcal{T}_{(i+1)p}(\chi)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{T}_{ip}(\chi)$ vaut

$$\frac{pq^{i+1} - 1}{p - 1} - \frac{pq^i - 1}{p - 1} \qquad \left(\text{resp. } \frac{q^{i+1} - 1}{p - 1} - \frac{q^i - 1}{p - 1}\right) \tag{5}$$

suivant que $\chi = \omega$ ou $\chi \neq \omega$. Or le niveau de toute telle droite D vaut

$$d(D) = ip + j_{\chi,i}, \tag{6}$$

où $j_{\chi,i} \in [1, p[$ est déterminé par $\bar{v}(\chi) \equiv \bar{v}(\omega) - (ip + j_{\chi,i}) \pmod{p-1}$ (cor. 14). Donc la contribution de toutes ces droites D (pour i donné) vaut

$$p\left(\frac{q^{i+1} - q^i}{p - 1}\right) q^{-d(D)} = \frac{p(q-1)}{(p-1)} q^{i-(ip+j_{\chi,i})}$$

indifféremment dans les deux cas $\chi = \omega$ et $\chi \neq \omega$, d'après (4), (5) et (6). Faisant la somme sur $i \in [0, e[$ (resp. $i \in \mathbf{N}$) donne la prop. 1, sauf si $\mathrm{car}(F) = 0$ et $\chi = 1$. Dans ce cas, une analyse similaire fournit $p/q^{(p-1)e}$ de plus comme contribution des droites de niveau ep dans $\mathcal{T}_{ep}(1)$. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 17. — C'est le calcul de la contribution individuelle de chaque χ qui rend les applications mentionnées dans les *Exemples* 6, 7, et 9 possibles. Il est également clair que la même méthode permet de calculer le cardinal de telles parties de $\mathcal{T}_p(F)$ quand on les rend finies en bornant c en caractéristique p.

4. Remerciements. — Cette Note a été conçue lors d'un court séjour à l'Université de Rennes au printemps 2011. Que toute l'équipe soit remerciée pour son accueil.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Dalawat – « Final remarks on local discriminants », *J. Ramanujan Math. Soc.* **25** (2010), p. 419–432.

[2] ______, « Serre's "formule de masse" in prime degree », *Monatshefte Math.* **166** (2012), p. 73–92.

[3] M. Krasner – « Remarques au sujet d'une note de J-P. Serre : "Une 'formule de masse' pour les extensions totalement ramifiées de degré donné d'un corps local" : une démonstration de la formule de M. Serre à partir de mon théorème sur le nombre des extensions séparables d'un corps valué localement compact, qui sont d'un degré et d'une différente donnés », *Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences* **288** (1979), p. 863–865.

[4] J-P. Serre – « Une "formule de masse" pour les extensions totalement ramifiées de degré donné d'un corps local », *Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences* **286** (1978), p. 1031–1036.