

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRES SELF NORMAUX

Anne Bertrand-Mathis

Tome 141

Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 25-33

NOMBRES SELF NORMAUX

PAR ANNE BERTRAND-MATHIS

RÉSUMÉ. — Nous inspirant de la construction de Champernowne d'un nombre normal en base 10 nous construisons un ensemble de nombres "self-normaux" au sens de Schmeling ; cet ensemble est non dénombrable et dense dans $[1, \infty[$.

ABSTRACT (*Self-normal numbers*). — Using a method of Champernowne we propose a construction of self-normal numbers in the sense of Schmeling ; these numbers are dense in $[1, \infty[$ and form a non enumerable set.

1. Introduction

Étant donné un nombre $\beta > 1$ on peut écrire tout réel x de $[0, 1[$ en base β sous la forme $x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$ avec les conditions de Rényi : $x_n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i > n} \frac{x_i}{\beta^i} < \frac{1}{\beta^n}$; cette écriture est unique ; la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est appelée β -développement de x et notée $d_\beta(x)$ [7].

Désignons par $[x]$ et $\{x\}$ les parties entières et fractionnaires d'un réel x ; on a $x_i \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}$. Soit T_β la transformation de $[0, 1[$ dans lui-même : $x \mapsto \{\beta x\}$; x_i est alors égal à $[\beta(T_\beta^i(x))]$ et $T_\beta^i = \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i+k}}{\beta^k}$ a pour β -développement $(x_{i+1}x_{i+2}x_{i+3} \dots)$; la transformation T_β conserve une unique mesure

Texte reçu le 16 décembre 2009, révisé le 26 novembre 2010, accepté le 20 mai 2011.

ANNE BERTRAND-MATHIS

Classification mathématique par sujets (2010). — 11K, 37D..

Mots clefs. — Nombres normaux, points génériques, numération, systèmes dynamiques symboliques, codes préfixes.

μ_β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue que nous appellerons mesure de Parry [8]; cette mesure est l'unique mesure T_β -invariante d'entropie maximale $\log \beta$ sur $[0, 1]$.

DÉFINITION 1.1. — On appelle (improprement) β -développement de 1 l'unique suite d'entiers $(a_n)_{n \geq 1}$ notée $d_\beta(1)$ qui vérifie $1 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$ ainsi que les conditions de Rényi sauf au rang $n = 1$: a_1 est égal à $[\beta]$ et $(a_2 a_3 \dots)$ est le β -développement de $\{\beta\}$; la suite $d_\beta(1)$ est aussi appelée β -développement de β car $\beta = a_1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{\beta^n}$.

C'est au β -développements des nombres β que nous nous intéresserons.

Un sous ensemble de $[1, \infty[$ est dit résiduel s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses; le complémentaire d'un ensemble résiduel est dit maigre.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'un espace métrique E est répartie selon une mesure borélienne μ sur E si pour toute fonction continue de E dans \mathbb{R} on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} (f(u_n)) = \mu(f)$.

DÉFINITION 1.2. — Nous dirons qu'un nombre β est autonormal si la suite $\{T_\beta^n(1)\}$ est répartie selon la mesure μ_β .

Schmeling [8] a montré que pour presque tout β au sens de Lebesgue la suite $(T_\beta^n(1))_{n \geq 1}$ est dense dans $[0, 1[$ (l'ensemble des nombres possédant cette propriété est résiduel) et que l'ensemble des nombres autonormaux (ou encore self-normaux), est un ensemble maigre dont la mesure de Lebesgue est aussi égale à 1.

Dans [1] les auteurs remarquent que si presque tout nombre supérieur à 1 est autonormal on n'en connaît aucun exemple.

Nous allons contruire pas à pas des nombres self-normaux selon une méthode Champernownesque (le nombre de Champernowne en base 10 est $x = 0,123\dots 9101112\dots 9899100101\dots$; il est normal en base 10 [5] (et il est transcendant)) et montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Le procédé décrit dans la partie 4 permet de construire un ensemble non dénombrable et dense de nombres self-normaux.*

Pour ce faire il nous faut plus d'explications sur les β -développements.

2. Le β -shift

Parry [6] donne la description que voici des β -développements, du β -shift et de la mesure μ_β (voir aussi [2]).

Étant donné deux suites infinies $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$ on dira que $x < y$ s'il existe un entier k tel que $x_1 \dots x_k < y_1 \dots y_k$ pour l'ordre lexicographique habituel; ainsi $(32313131\dots) < (323131320000\dots)$.

PROPOSITION 2.1 ([6]). — Une suite $a = (a_n)_{n \geq 1}$ est le β -développement d'un nombre β si et seulement si la suite a vérifie, pour tout $n > 1$ $(a_n a_{n+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$ On a alors $a_1 = [\beta]$ et si deux suites a et b avec $a < b$ sont les β -développements de deux nombres β , disons β_a et β_b , alors $\beta_a < \beta_b$.

En particulier une suite a qui se termine par des zéros : $a = (a_1 \dots a_n 0000 \dots)$ où a_n est non nul est le β -développement d'un nombre β si et seulement si pour l'ordre lexicographique usuel $a_2 a_3 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-1}$; $a_3 a_4 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-2}$; \dots ; $a_{n-1} a_n \leq a_1 a_2$; $a_n \leq a_1$; on dit alors que le β -développement de β est $(a_1 \dots a_k)$; l'ensemble des nombres β ainsi obtenus, dits Nombres de Parry simples, est dense dans $[1, \infty[$.

COROLLAIRE 2.2. — Une suite $(a_1 a_2 \dots)$ qui ne se termine pas par des zéros est le β -développement d'un nombre β si et seulement si, pour tout k , la suite $(a_1 \dots a_k)$ est le β_k -développement d'un nombre β_k ; β est alors la limite croissante des β_k (c'est encore vrai s'il existe une sous suite infinie croissante m_k de \mathbb{N} telle que la suite $(a_1 \dots a_{m_k})$ soit le β_k -développement d'un nombre β_k).

Exemple : la suite 21111... est le β -développement d'un nombre β ; les suites qui sont des développements sont celles qui contiennent des 0,1 et 2 et où un 2 est suivi d'un nombre fini de 1 suivi d'un zéro. Pour tout k la suite $a_k = (2(1)^k(0)^\omega)$ définit un β -nombre simple β_k et β est la limite croissante des β_k .

DÉFINITION 2.3. — Étant donné un nombre β de β -développement $(a_n)_{n \geq 1}$, les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ qui sont le β -développement d'un nombre $x \in [0, 1[$ sont les suites qui vérifient pour tout $k \geq 1$ $(x_k x_{k+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$; soit Y leur ensemble.

Étant donné un nombre β de β -développement $(a_n)_{n \geq 1}$ nous dirons qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est admissible en base β si pour tout $k \geq 1$ $a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \leq a_1 a_2 a_3 \dots$; soit X_β leur ensemble.

Y est inclus dans $A = \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, a_1\}^{\mathbb{N}}$; la fermeture de Y pour la topologie produit de la topologie discrète sur A est égale à X_β ; on l'appelle le β -shift. X_β est muni de la transformation $T : (x_1 x_2 \dots) \mapsto (x_2 x_3 \dots)$; lorsque $(x_1 x_2 \dots)$ est le β -développement de $x \in [0, 1[$, $(x_2 x_3 \dots)$

est celui de $\{\beta x\}$. Notons que le β -développement de β n'est pas dans Y (il est égal à lui même et non strictement inférieur).

Toute suite finie (appelée mot) $t_1 \dots t_n$ apparaissant dans au moins un β -développement est dite *mot admissible en base β* et on note L_β l'ensemble de ces mots ; pour $(21111(0)^\omega)$ par exemple le mot 111 est admissible, 210211 aussi mais 0022 ne l'est pas. Une suite infinie est admissible si et seulement tous les mots finis qu'elle contient sont admissibles.

Soit f l'application de X_β dans $[0, 1]$ qui à une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ associe $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$; $f \circ T = T_\beta \circ f$ et l'image inverse de la mesure μ_β sur $[0, 1]$ est une mesure borélienne T -invariante sur X_β que nous noterons $\bar{\mu}_\beta$.

PROPOSITION 2.4. — *Étant donné un nombre β de β -développement $(a_n)_{n \geq 1}$, dire que la suite $(T_\beta^n(1))$ est répartie selon la mesure μ_β (et donc que β est autonormal) équivaut à dire que chaque mot $t_1 \dots t_k$ admissible en base β apparaît dans la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ avec la fréquence $\bar{\mu}_\beta(E(t_1 \dots t_k))$ où $E(t_1 \dots t_k) = \{(x_n)_{n \geq 1} \in X_\beta ; x_1 \dots x_k = t_1 \dots t_k\}$ ([4, 2]).*

3. Codes préfixes

Étant donné un alphabet A nous appellerons mot sur A une suite finie $x_1 \dots x_k$ sur A ; la *longueur d'un mot* est le nombre de lettres qu'il contient (le mot vide est celui qui ne contient aucune lettre) et le concaténé de deux mots $x_1 \dots x_h$ et $y_1 \dots y_k$ est le mot $x_1 \dots x_h y_1 \dots y_k$; un mot u est dit *préfixe* du mot w s'il existe un mot v tel que $w = uv$ et il est dit *suffixe* de w s'il existe v tel que $w = v$.

Un ensemble C de mots non vides sur A est dit *code préfixe* si aucun mot de C n'est préfixe d'un autre mot de C ; si $u_1 \dots u_l = v_1 \dots v_m$ ou les u_i et v_j sont tous dans le code alors $l = m$ et $u_1 = v_1, \dots, u_l = v_l$. L'ensemble des suites $(t_1 t_2 \dots)$ qui s'écrivent comme produit d'un suffixe éventuellement vide v d'un mot du code suivi d'une suite infinie de mots du code est un sous ensemble T -invariant de $A^\mathbb{N}$ dont la fermeture est un système dynamique. On appelle *message* du code C un produit fini de mots de C ; la longueur d'un message est le nombre de lettres qu'il contient, c'est la somme des longueur des mots du code qui le composent (et non pas le nombre de ces mots). Soit a_n le nombre de mots de longueur n du code ; s'il est borné il existe un nombre réel, disons β , tel que $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} = 1$ et le système dynamique associé au code est muni d'une mesure ν ergodique d'entropie $\log \beta$ [4] qui possède la propriété suivante :

PROPOSITION 3.1 ([3]). — *Soit un code C , a_n le nombre de mots de longueur n du code ; supposons a_n bornée ; soit β le nombre réel tel que $1 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$; si nous alignons les messages de longueur 1 du code, puis ceux de longueur*

2, puis ceux de longueur 3 et ainsi de suite pour former une suite de lettres $e = (e_n)_{n \geq 1}$, alors la suite $(T^n(e))_{n \geq 1}$ obtenue est répartie selon la mesure ν d'entropie $\log \beta$ dans le système dynamique associé au code C .

PROPOSITION 3.2 ([2]). — Soit β un nombre réel supérieur à 1, et soit $(a_1 a_2 \dots a_n \dots)$ le β -développement de β ; soit C_β l'ensemble des mots

$$\{0, 1, \dots, (a_1 - 1); a_1 0, a_1 1, \dots, a_1 (a_2 - 1); a_1 a_2 0, \dots, a_1 a_2 (a_3 - 1) \dots\}$$

$$= \{a_1 a_2 \dots a_{k-1} h; 0 \leq h < a_k; k = 1, 2, \dots\}$$

avec la convention que si $a_h = 0$ il n'y a pas de mot de longueur h dans C_β .

L'ensemble C_β forme un code préfixe sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, [\beta]\}$; pour tout n il possède a_n mots de longueur n et $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} = 1$

Le langage associé au code C_β est égal à l'ensemble des mots admissibles en base β et le β -shift X_β est égal au système dynamique associé au code C_β .

De plus toute suite de X_β s'écrit comme un produit de concaténation $c_1 c_2 c_3 \dots$ de mots du code [2] (c'est une particularité du β shift). Comme les a_n sont bornés par β la mesure ν définie à la proposition 2 est bien définie; nous savons par ailleurs que le β -shift n'admet qu'une seule mesure d'entropie $\log \beta$, à savoir $\bar{\mu}_\beta$, les mesures ν et $\bar{\mu}_\beta$ sont donc les memes et la Proposition 4 devient :

PROPOSITION 3.3 ([3]). — Soit β un nombre réel supérieur à 1, soit C_β le code associé; si nous alignons les messages de longueur 1, puis 2, puis 3 ... du code C_β , nous obtenons une suite $e = (e_n)_{n \geq 1}$ telle que $(T^n(e))_{n \geq 1}$ soit répartie selon la mesure $\bar{\mu}_\beta$; donc le nombre $\sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{\beta^n}$ appartient à $D(\beta)$.

Notons W_n le nombre de messages de longueur n du code C_β et soit l une constante positive; la conclusion de la proposition 3.3 reste vraie si l'on aligne non pas tous les messages de longueur n mais pour chaque n un nombre $V_n \geq lW_n$ de messages distincts choisis comme on le voudra.

4. Résultats et preuves

THÉORÈME 4.1. — Choisissons un nombre $h = h_0$; l'étape 0 consiste à choisir une suite $(a_1 \dots a_{h_0})$ qui est le β_0 -développement d'un nombre de Parry simple β_0 ; l'étape 1 consiste à écrire après $a_1 a_2 \dots a_{h_0}$ les messages de longueur $h = h_0$ du code C_{β_0} , dans l'ordre qu'on voudra mais en commençant par le message $0 \dots 0 = (0^h)$ pour obtenir une suite $a_1 \dots a_{h_1}$; alors la suite $a_1 \dots a_{h_1}$ est le β_1 -développement d'un nombre de Parry simple β_1 ; écrivons à sa suite les messages de longueur $(h + 1)$ du code C_{β_1} en commençant par 0^{h+1} puis dans l'ordre qu'on voudra; on obtient une suite $a_1 \dots a_{h_2}$; cette suite est le β_2 -développement d'une nombre de Parry β_2 et nous en sommes à l'étape 2. Itérant

ce procédé nous obtenons une suite infinie $a = (a_n)_{n \geq 1}$ qui est le β -développement d'un nombre β limite des β_k obtenus à la k -ème étape ; de plus la suite $(T^n a)_{n \geq 1}$ est répartie ans le β -shift selon la mesure de Parry $\bar{\mu}_\beta$.

Ainsi β est self-normal

COROLLAIRE 4.2. — L'ensemble des nombres autonormaux obtenus par ce procédé est non dénombrable et dense dans $[1, \infty[$.

Exemple : partons de 21 ; le code est $\{0, 1, 20\}$ et les messages de longueur 2 sont $\{00, 01, 10, 11, 20\}$; $a_1 \dots a_{k_2} = 210001101120$ (mais on peut aussi prendre 210020100111) ; les messages de longueur 3 pour β_2 dont le β_2 -développement est 210001101120 sont 000, 001, 010, 011, 020, 100, 101, 110, 111, 120, 200, 201, 210 car les mots du code de longueur inférieure ou égale à 3 qui interviennent dans les messages de longueur 3 sont 0, 1, 20 et la suite $a_1 \dots a_{k_3}$ est, en mettant les messages dans l'ordre croissant en séparant les messages par des points :

21.00.01.10.11.20.000.001.010.011.020.100.101.110.111.120.200.201

Si nous avons commencé avec 21021 pour qui les messages de longueur 1 sont 0 et 1 en mettant 1 avant 0 nous obtiendrions 2102110 qui n'est pas le β -développement d'un nombre β (211 ne va pas) ; c'est pour éviter ce problème de recollement que le premier message de longueur k est toujours 0^k .

Preuve du Théorème. — Il nous faut montrer que la suite $a = (a_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions de Parry : pour tout $h \geq 1$ et tout $r \geq 0$, $a_h a_{h+1} \dots < a_1 a_2 \dots$, et que la suite $(T^n(a))_{n \geq 1}$ est répartie selon la mesure $\bar{\mu}_\beta$ où β est le nombre réel dont le β -développement est a .

Pour montrer la première assertion nous utiliserons les remarques suivantes dont les preuves sont immédiates :

REMARQUE 4.3. — Si une suite $(x_1 x \dots)$ est admissible en base β alors pour tout k $(x_1 \dots x_k(0)^\omega)$ l'est aussi ; si une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définit le β -développement d'un nombre β alors pour tout k il en va de meme de la suite $(a_1 \dots a_k(0)^\omega)$ (cf. Déf.3 et Prop.1).

REMARQUE 4.4. — Si un mot $x_1 \dots x_k$ ou une suite infinie $(x_1 x_2 \dots)$ est admissible en base β de β -développement $(a_1 \dots a_n)$ elle est admissible dans toute base $\beta' > \beta$, c'est à dire dans toute base β' qui admet un β' -développement de la forme $(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_r(0)^\omega)$ ou bien $(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_r b_{r+1} \dots)$. (cf. Déf.1)

REMARQUE 4.5. — Tous les nombres β dont le β -développement commence par le meme mot $(a_1 \dots a_n)$ admettent les memes messages de longueur n ; ce sont les message du code du nombre β de β -développement $(a_1 \dots a_n(0)^\infty)$. (cf. Prop 4).

REMARQUE 4.6. — Lorsque β admet un β -développement fini $(a_1 \dots a_k)$ une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est admissible si et seulement si pour tout $i \geq 0$ tous les mots de longueur k $(x_{i+1} \dots x_{i+k})$ sont dans L_β (ce qui équivaut à dire que pour tout $i \geq 0$ $x_i \dots x_{i+k} < a_1 \dots a_k$ pour l'ordre lexicographique habituel (cf. fin de la Prop.1)).

REMARQUE 4.7. — Lorsque β admet un β -développement infini $(a_1 \dots a_n \dots)$, si pour tout $n \geq 1$ le mot $x_1 \dots x_n$ est admissible en base $(a_1 \dots a_n)$ alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est admissible en base β (cf. Déf.3) ; ou encore s'il existe une sous suite m_n de \mathbb{N} telle que pour tout et tout $n \geq 1$ $x_1 \dots x_{m_n}$ est admissible en base $(a_1 \dots a_{m_n})$, alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est admissible en base β (mais pour cela il suffit que les $x_1 \dots x_{m_n}$ soient admissibles en base $(a_1 \dots a_n)$ d'après la remarque 2).

REMARQUE 4.8. — Si un mot $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_h$ est admissible en base β de β -développement $(a_1 \dots a_n)$ alors ce mot définit le β_1 développement d'un Nombre de Parry simple $\beta_1 > \beta$ (voir Prop.1).

Preuve de la première assertion. — Supposons qu'à l'étape k nous ayons construit une suite finie $a_1 \dots a_{h_k}$ qui est le β_k -développement d'un nombre β_k : c'est l'hypothèse H_k ; la suite $a_1 \dots a_{h_k} a_{h_k+1} \dots a_{h_k+1}$ est obtenue en concaténant les messages de longueur $h+k$ du langage L_{β_k} en commençant par $(0)^{h+k}$.

Vérifions que les mots de longueur $h+k$ sont admissibles dans la base $(a_1 \dots a_{h_k})$; d'après la remarque 2, il suffit de vérifier qu'ils le sont dans la base $(a_1 \dots a_{h_k+h})$; or le morceau de suite $a_{h_k} \dots a_{h_k+1}$ formé en concaténant les messages de longueur $h+k$ de $(a_1 \dots a_{h_k})$ est formé en concaténant les messages de $(a_1 \dots a_{h_k+h})$ d'après la remarque 3 ; les mots de longueur $(h+k)$ tout entiers contenus dans ce morceau sont donc admissible en base $(a_1 \dots a_{h_k+h})$; les mots tout entiers contenus dans le morceau $a_1 \dots a_{h_k}$ sont aussi admissibles dans la base $(a_1 \dots a_{h_k+h})$ (remarque 2) ; il faut vérifier que les mots de longueur $(h+k)$ à cheval sur les deux morceaux précédents sont admissibles en base $(a_1 \dots a_{h_k+h})$; ce sont des suffixes de $a_1 \dots a_{h_k}$ suivis de zéros, ils sont donc bien admissibles ; c'est pour cela que l'on a placé le message 0^{h+k} en tete des messages de longueur $h+k$ concaténée à $a_1 \dots a_{h_k}$; tous les mots de longueur $h+k$ de $a_1 \dots a_{h_k+1}$ sont donc admissibles en base $a_1 \dots a_{h_k+h}$; donc d'après la remarque 4 la suite finie $(a_1 \dots a_{h_k+1})$ est admissible en base $(a_1 \dots a_{h_k+h})$ car tous ses sous mote de longueur $h+k$ sont admissible dans la base qui comprends $h+k$ lettres ; enfin d'après la remarque 2 elle est admissible dans la base $(a_1 \dots a_{h_k+1}) = \beta_{k+1}$.

Comme l'hypothèse H_0 est vraie, l'hypothèse est vraie pour tous les rangs et la suite infinie $(a_n)_{n \geq 1}$ est le β -développement d'un nombre β qui est la limite croissante des β_k d'après la remarque 5.

Montrons que la suite $(T^n(a))_{n \geq 1}$ est répartie selon la mesure $\bar{\mu}_\beta$: en raison de la remarque 3 nous avons aligné les messages de longueur h , puis $h + 1$, puis $h + 2 \dots$ du code C_β ; la proposition 3.3 énoncée à la fin du paragraphe 3 montre que a est normal en base β (le fait que l'on aligne les messages à partir de la longueur h n'a pas d'effet sur la répartition).

Remarque : on aurait pu aligner, non pas chacun des W_n messages du code, mais un nombre $V_n \geq lW_n$ de messages distincts où $l \in]0, 1[$ désigne une constante positive et on aurait encore obtenu un élément de $D(\beta)$. \square

Preuve du corollaire. — L'ensemble des Nombres de Parry simples est dense dans $[1, \infty[$ et le nombre self-normal construit à partir de $\beta = a_1 \dots a_k$ est supérieur à β et inférieur à $\beta + \frac{1}{\beta^k}$ d'où la densité ; l'ensemble est non dénombrable car à chaque étape on peut choisir l'ordre des messages.

Précisons que si nous construisons des nombres β dont le β -développement est normal en base β , il s'agit là de normalité au sens des chiffres : on dit que x est normal (au sens des chiffres) en base β si la suite des chiffres du β -développement de x est répartie selon la mesure $\bar{\mu}_\beta$, ce qui équivaut à dire que la suite $\{T_\beta^n(x)_{n \geq 1}\}$ est répartie selon la mesure μ_β ; on appelle $D(\beta)$ l'ensemble de ces nombres. Comme T_β est ergodique presque tout x est dans $D(\beta)$ au sens des mesures équivalentes μ_β et Lebesgue.

Il existe une autre notion de normalité : on dit qu'un nombre x est normal en base β (au sens de l'équirépartition modulo un) si la suite $(x\beta^n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo un ; on appelle $B(\beta)$ l'ensemble de ces nombres ; il est aussi de mesure de Lebesgue 1.

Lorsque $x = \frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} + \dots$ les nombres $x\beta^n = x_1\beta^{n-1} + \dots + x_n + \frac{x_{n+1}}{\beta} + \frac{x_{n+2}}{\beta^2} + \dots$ et $T_\beta^n(x) = \frac{x_{n+1}}{\beta} + \frac{x_{n+2}}{\beta^2} + \dots$ diffèrent de $x_1\beta^{n-1} + \dots + x_n$; si β est entier ceci est aussi entier et $B(\beta)$ et $D(\beta)$ sont égaux ; on sait que si β est un nombre de Pisot alors $D(\beta) \subset B(\beta)$ et que l'inclusion inverse est fautive ; on sait aussi que lorsque la suite $(\beta^n)_{n \geq 1}$ est elle même équirépartie modulo un, ce qui est presque toujours vrai, alors $B(\beta)$ n'est pas inclus dans $D(\beta)$ (dans ce cas si par exemple les chiffres du β -développement de x sont indépendants alors x est dans $B(\beta)$ mais pas dans $D(\beta)$) ; il est probable qu'alors $D(\beta) \setminus B(\beta)$ est non vide aussi mais cela n'est pas démontré. Bien que l'ensemble $B(\beta)$ soit de mesure pleine et résiduel, la recherche de nombres appartenant à $B(\beta)$ n'a guère abouti sauf dans le cas des nombres de Pisot. Nous ignorons si l'assertion $\beta \in D(\beta)$ implique $\beta \in B(\beta)$. Les nombres normaux au sens des chiffres que l'on sait construire le sont généralement par des méthodes analogues à la construction de Champernowne mais il existe une intéressante construction due à Ville, selon

un procédé qui n'est pas automatique comme celui de Champernowne mais qui est très efficace.

Kurt Mahler a montré que le nombre de Champernowne en base 2 est transcendant, en calculant certaine sommes partielles de la série qui le définit et en appliquant un théorème de Schneider ; lorsqu'on généralise la construction de Champernowne, le calcul de sommes partielles, qui permettrait peut être d'appliquer Roth ou plutôt les théorèmes de W. Schmidt, apparaît très difficile ; on ignore toujours si le Champernombre en base $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est transcendant. Nous ne savons pas reconnaître si certains des nombres autonormaux trouvés sont transcendants et les résultats concernant les suites automatiques ne sont d'aucun secours. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ADAMCZEWSKI & Y. BUGEAUD – « Dynamics for β -shifts and Diophantine approximation », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), p. 1695–1711.
- [2] A. BERTRAND-MATHIS – « Développement en base θ ; répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n \geq 0}$; langages codés et θ -shift », *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), p. 271–323.
- [3] ———, « Points génériques de Champernowne sur certains systèmes codes ; application aux θ -shifts », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), p. 35–51.
- [4] F. BLANCHARD & G. HANSEL – « Systèmes codés », *Theoret. Comput. Sci.* **44** (1986), p. 17–49.
- [5] D. G. CHAMPERNOWNE – « The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten », *J. London Math. Soc.* **8** (1933), p. 254–260.
- [6] W. PARRY – « On the β -expansions of real numbers », *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), p. 401–416.
- [7] A. RÉNYI – « Representations for real numbers and their ergodic properties », *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **8** (1957), p. 477–493.
- [8] J. SCHMELING – « Symbolic dynamics for β -shifts and self-normal numbers », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 675–694.