BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE MATHIEU

# Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la mécanique analytique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 1 (1872-1873), p. 157-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__157_1>

*Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la mécanique analytique;* par M. ÉMILE MATHIEU.

(Séance du 30 avril 1873)

En cherchant à simplifier la démonstration de quelques formules de la Mécanique analytique, j'ai été conduit à la théorie suivante, qui a aussi de l'intérêt au point de vue de l'analyse pure.

### DES DIFFÉRENTS GROUPES DE DÉRIVÉES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES QUI NE SONT PAS INDÉPENDANTES.

1. Considérons une fonction $\alpha$ d'un nombre pair de variables que nous désignerons par $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, et supposons que, entre ces variables, il existe $k$ équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0,$$

$k$ étant $< 2m$. D'après cela, $\alpha$ est une fonction donnée des variables $q_i$, $p_i$; mais, à cause des équations (1), $\alpha$ peut aussi être considéré comme fonction des mêmes variables d'une infinité d'autres manières.

Nous désignerons sous le nom de dérivées, *immédiates* de la fonction $\alpha$ les dérivées par rapport aux quantités $q_i$, $p_i$ de la fonction donnée pour $\alpha$. Mais, à cause des équations qui lient entre elles ces variables, la fonction $\alpha$ peut être mise sous différentes formes renfermées dans la formule

$$\alpha' = \alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant des fonctions des mêmes variables qui ne deviennent pas infinies dans les limites où l'on fait varier ces variables. Les dérivées de $\alpha'$ sont renfermées dans les deux formules

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dq_i} &= \frac{d\alpha}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dq_i} \\
&\quad + \frac{d\lambda_1}{dq_i} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dq_i} f_2 + \ldots + \frac{d\lambda_k}{dq_i} f_k, \\
\frac{d\alpha'}{dp_i} &= \frac{d\alpha}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dp_i} \\
&\quad + \frac{d\lambda_1}{dp_i} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dp_i} f_2 + \ldots + \frac{d\lambda_k}{dp_i} f_k,
\end{aligned}$$

où l'on doit donner à $i$ les valeurs 1, 2,..., $m$. Mais, en nous appuyant sur les équations (1), nous pouvons réduire ces dérivées aux expressions

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dq_i}, \\
&\frac{d\alpha}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dp_i};
\end{aligned}$$

nous désignerons ces expressions sous le nom de dérivées *virtuelles* de la fonction $\alpha$, et chaque groupe de dérivées virtuelles variera avec les fonctions adoptées pour les *multiplicateurs* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

On peut encore définir les dérivées virtuelles de $\alpha$ d'une autre manière. Faisons varier, dans la fonction donnée pour $\alpha$, les variables $q_i$, $p_i$ de quantités infiniment petites indiquées par la caractéristique $\delta$, la variation de $\alpha$ sera

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\alpha}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_m}\delta q_m + \frac{d\alpha}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{d\alpha}{dp_m}\delta p_m,$$

et, en différentiant les équations qui lient entre elles les variables $q_i$, $p_i$, nous aurons

$$0 = \frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_m}\delta p_m,$$
$$0 = \frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_m}\delta p_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions ces équations respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et ajoutons-les à la variation de $\alpha$; nous obtiendrons ainsi $\delta\alpha$ sous différentes formes et les coefficients des variations des variables dans chacune des formes de $\delta\alpha$ forment un groupe de dérivées virtuelles.

### DÉRIVÉES PRINCIPALES D'UNE FONCTION.

2. Pour distinguer les dérivées virtuelles des dérivées immédiates, nous placerons les premières entre parenthèses, et nous écrirons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right) = \frac{d\alpha}{dq_1} + \lambda_1\frac{df_1}{dq_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dq_1},\\ &\left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right) = \frac{d\alpha}{dq_2} + \lambda_1\frac{df_1}{dq_2} + \lambda_2\frac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dq_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right) = \frac{d\alpha}{dp_1} + \lambda_1\frac{df_1}{dp_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dp_1},\\ &\left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right) = \frac{d\alpha}{dp_2} + \lambda_1\frac{df_1}{dp_2} + \lambda_2\frac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dp_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Suivant une notation généralement adoptée, posons, $u$ et $v$ étant deux fonctions quelconques des variables,

$$\begin{aligned}[u,v] = &\frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_m}\frac{dv}{dp_m}\\ &- \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_m}\frac{dv}{dq_m};\end{aligned}$$

si nous multiplions les équations (2) respectivement par $\frac{df_i}{dp_1}, \frac{df_i}{dp_2}, \ldots$, et les équations (3) par $\frac{df_i}{dq_1}, \frac{df_i}{dq_2}, \ldots$, et que nous retranchions la somme des secondes de celle des premières, nous aurons

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right)\frac{df_i}{dp_1} + \left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right)\frac{df_i}{dp_2} + \ldots + \left(\frac{d\alpha}{dq_m}\right)\frac{df_i}{dp_m}\\ &- \left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right)\frac{df_i}{dq_1} - \left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right)\frac{df_i}{dq_2} - \ldots - \left(\frac{d\alpha}{dp_m}\right)\frac{df_i}{dq_m}\\ &= [\alpha, f_i] + [f_1, f_i]\lambda_1 + [f_2, f_i]\lambda_2 + \ldots + [f_k, f_i]\lambda_k; \end{aligned}$$

et $i$ étant susceptible des valeurs 1, 2, 3,..., $k$, cette équation en renferme $k$ distinctes.

Jusqu'à présent, nous avons laissé absolument arbitraires les valeurs des multiplicateurs $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_k$; adoptons maintenant pour ces fonctions celles qui rendent nul le second membre de l'équation précédente, et qui sont les solutions des $k$ équations

$$(4)\quad \begin{cases} \star \quad + [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \cdots + [f_k, f_1]\lambda_k = [f_1, \alpha], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 + \quad \star \quad + [f_3, f_2]\lambda_3 + \cdots + [f_k, f_2]\lambda_k = [f_2, \alpha], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ [f_1, f_k]\lambda_1 + [f_2, f_k]\lambda_2 + [f_3, f_k]\lambda_3 + \cdots + \quad \star \quad = [f_k, \alpha]. \end{cases}$$

Il en résulte que les dérivées virtuelles de la fonction $\alpha$ satisfont aux $k$ équations renfermées dans la suivante

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{df_i}{dp_1}\left(\dfrac{d\alpha}{dq_1}\right) + \dfrac{df_i}{dp_2}\left(\dfrac{d\alpha}{dq_2}\right) + \cdots + \dfrac{df_i}{dp_m}\left(\dfrac{d\alpha}{dq_m}\right) \\ -\dfrac{df_i}{dq_1}\left(\dfrac{d\alpha}{dp_1}\right) - \dfrac{df_i}{dq_2}\left(\dfrac{d\alpha}{dp_2}\right) - \cdots - \dfrac{df_i}{dq_m}\left(\dfrac{d\alpha}{dp_m}\right) = 0, \end{cases}$$

où $i$ est susceptible des valeurs 1, 2,..., $k$.

Quand les quantités $\lambda$ auront les valeurs déterminées par les équations (4), nous donnerons au groupe des dérivées de $\alpha$ le nom de groupe des *dérivées principales*. Comme on a

$$[f_2, f_1] = -[f_1, f_2], \quad [f_3, f_1] = -[f_1, f_3], \ldots,$$

le déterminant des équations (4) est gauche, et l'on sait qu'un tel déterminant est nul si le nombre des équations est impair; nous supposerons donc essentiellement $k$ pair.

Réciproquement, si les dérivées virtuelles de $\alpha$ satisfont aux équations (5) supposées en nombre pair, les quantités $\lambda$ satisferont aux équations (4). Nous avons donc ce théorème :

Théorème I. — *$\alpha$ étant une fonction des $2m$ variables $q_1$, $q_2$,..., $q_m$, $p_1$, $p_2$,..., $p_m$, liées entre elles par un nombre pair d'équations*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0,$$

*il existe un groupe de dérivées virtuelles de la fonction $\alpha$ et il en existe un seul qui satisfait aux équations linéaires (5). Ce groupe de dérivées, dites principales, s'obtient en prenant pour les multiplicateurs $\lambda$ les valeurs fournies par les équations (4).*

De ce théorème on peut déduire comme corollaire le suivant :

Théorème II. — *Le groupe des dérivées principales de $\alpha$ ne dépend pas de la forme sous laquelle $\alpha$ a été donné.*

En effet, supposons qu'on parte d'une autre forme $\alpha_1$ donnée à $\alpha$; les différents groupes de dérivées virtuelles resteront évidemment les mêmes. Le groupe des dérivées principales satisfera encore aux $k$ équations (5), et comme, parmi le nombre infini de groupes de dérivées virtuelles, il n'y en a qu'un qui satisfasse à ces équations d'après le théorème précédent, le groupe des dérivées principales qu'on obtient en partant de la forme $\alpha_1$ est le même que celui qu'on obtient en partant de la forme donnée d'abord.

La propriété renfermée dans ce dernier théorème est de nature à faire comprendre l'utilité qu'il peut y avoir à distinguer le groupe des dérivées principales d'entre tous les autres groupes de dérivées.

Théorème III. — *Chaque dérivée principale de la somme de deux fonctions par rapport à une des variables $q_i$, $p_i$, est égale à la somme des dérivées principales de ces deux fonctions par rapport à la même variable.*

Si l'on résout les équations (4), on aura pour les quantités $\lambda$ des expressions qu'on peut représenter par

$$\lambda_u = L_{u,1}[f_1,\alpha] + L_{u,2}[f_2,\alpha] + \ldots + L_{u,k}[f_k,\alpha] = \sum_s L_{u,s}[f_s,\alpha],$$

$s$ étant susceptible des valeurs 1, 2,..., $k$; et, de plus, il est aisé de reconnaître que l'on a

$$L_{u,s} = -L_{s,u}, \quad L_{u,u} = 0.$$

Nous aurons pour la dérivée principale de $\alpha$ par rapport à $q_i$

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \frac{d\alpha}{dq_i} + \sum_u \lambda_u \frac{df_u}{dq_i} = \frac{d\alpha}{dq_i} + \sum_u \sum_s L_{u,s} \frac{df_u}{dq_i}[f_s,\alpha],$$

$u$ étant comme $s$ susceptible des valeurs 1, 2,..., $k$. Nous aurons les dérivées principales

$$\left(\frac{d\alpha'}{dq_i}\right), \quad \left(\frac{d(\alpha+\alpha')}{dq_i}\right),$$

en remplaçant, dans l'expression de $\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right)$, $\alpha$ par $\alpha'$ et $\alpha+\alpha'$; et, comme on a $[f_s,\alpha]+[f_s,\alpha']=[f_s,\alpha+\alpha']$, on en conclut

$$\left(\frac{d(\alpha+\alpha')}{dq_i}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) + \left(\frac{d\alpha'}{dq_i}\right),$$

comme il fallait le démontrer.

Exemple. — Considérons le cas où les équations de condition se réduisent à deux

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

on aura, pour la formule des dérivées principales,

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \frac{d\alpha}{dq_i} + \frac{[f_2, \alpha]}{[f_1, f_2]}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{[f_1, \alpha]}{[f_1, f_2]}\frac{df_2}{dq_i},$$

les dérivées par rapport à $p_i$ s'en déduisent en y changeant $q$ en $p$. Enfin on pourra vérifier le théorème II et reconnaître directement que le second membre de l'équation précédente ne change pas de valeur, quand on y remplace $\alpha$ par $\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

### PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DES DÉRIVÉES PRINCIPALES.

3. Considérons $2m - 2r$ fonctions des $2m$ variables $q_i$, $p_i$, que nous désignerons par la lettre $\beta$ :

$$\begin{gathered}
\beta_1 = \beta_1(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m),\\
\beta_2 = \beta_2(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{2(m-r)} = \beta_{2(m-r)}(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m),
\end{gathered}$$

où les variables $q_i$, $p_i$ sont supposées satisfaire aux $2r$ équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

Au moyen de ces $2m$ équations, on peut exprimer les $2m$ variables $q_i$, $p_i$ en fonction des quantités $\beta$ et d'une manière unique, et si l'on nous donne une fonction $\alpha$ des quantités $q_i$, $p_i$, cette fonction pourra elle-même s'exprimer au moyen des quantités $\beta$ et d'une seule manière.

Si, après avoir exprimé $\alpha$ au moyen des quantités $\beta$, nous en prenons la variation, nous aurons

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta_1}\delta\beta_1 + \frac{d\alpha}{d\beta_2}\delta\beta_2 + \ldots + \frac{d\alpha}{d\beta_{2(m-r)}}\delta\beta_{2(m-r)} = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\delta\beta,$$

ou encore

$$\delta\alpha = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\beta}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\beta}{dq_m}\delta q_m + \frac{d\beta}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{d\beta}{dp_m}\delta p_m\right).$$

On a ensuite, en différentiant les équations qui relient entre elles les variables,

$$\begin{gathered}
0 = \frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_m}\delta p_m,\\
0 = \frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_m}\delta p_m,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Désignons par $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta), \ldots, \mu_{2r}(\beta)$ un groupe de $2r$ quantités correspondant à une quelconque des fonctions $\beta$, et qui varie d'une fonction $\beta$ à l'autre ; multiplions les $2r$ équations précédentes respectivement par

$$\sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\mu_1(\beta),\quad \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\mu_2(\beta),\ \ldots,$$

et ajoutons-les à la variation de $\alpha$ ; nous aurons

$$\delta\alpha = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\beta}{dq_1} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_1} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_1} + \ldots\right)\delta q_1 + \ldots \\ + \left(\frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i} + \ldots\right)\delta q_i + \ldots \\ + \left(\frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i} + \ldots\right)\delta p_i + \ldots \end{array}\right.$$

Les coefficients des variations des quantités $q_i$, $p_i$ forment un groupe de dérivées virtuelles de la fonction $\alpha$ (nº 1), et ces dérivées sont données par les deux formules

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i}\right), \\ \left(\frac{d\alpha}{dp_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i}\right), \end{array}\right.$$

dans lesquelles $i$ est susceptible des valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$.

Les quantités renfermées entre parenthèses dans les seconds membres sont les dérivées virtuelles de $\beta$. Prenons pour les multiplicateurs $\mu(\beta)$ les quantités qui satisfont aux $2r$ équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \star \quad + [f_2,f_1]\,\mu_2(\beta) + [f_3,f_1]\,\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r},f_1]\,\mu_{2r}(\beta) = [f_1,\beta], \\ [f_1,f_2]\,\mu_1(\beta) + \quad \star \quad + [f_3,f_2]\,\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r},f_2]\,\mu_{2r}(\beta) = [f_2,\beta], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right.$$

alors le groupe des dérivées virtuelles de chaque fonction $\beta$ deviendra celui des dérivées principales. Désignons, pour abréger, ces dérivées principales par

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),\quad \left(\frac{d\beta}{dp_i}\right),$$

et les dérivées virtuelles de $\alpha$ deviendront

$$(8)\qquad \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),\quad \left(\frac{d\alpha}{dp_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right).$$

Or, je dis que ces dernières dérivées de $\alpha$ sont les dérivées principales.

En effet, les dérivées principales de $\beta$ satisfont aux $2r$ équations renfermées dans la suivante

$$\frac{df_i}{dp_1}\left(\frac{d\beta}{dq_1}\right)+\frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{d\beta}{dq_2}\right)+\dots+\frac{df_i}{dp_m}\left(\frac{d\beta}{dq_m}\right)$$
$$-\frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{d\beta}{dp_1}\right)-\frac{df_i}{dq_2}\left(\frac{d\beta}{dp_2}\right)-\dots-\frac{df_i}{dq_m}\left(\frac{d\beta}{dp_m}\right)=0,$$

où $i$ est susceptible des valeurs $1, 2, \dots, 2r$ (nº 2). On en conclut immédiatement que les expressions (8) satisfont aux mêmes équations dans lesquelles la lettre $\beta$ est remplacée par la lettre $\alpha$, et par suite les expressions (8) sont bien les dérivées principales de $\alpha$.

Ainsi les dérivées principales de la fonction $\alpha$ peuvent se représenter, d'une part, par

$$\frac{d\alpha}{dq_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dq_i}+\lambda_2\frac{df_2}{dq_i}+\dots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dq_i},$$
$$\frac{d\alpha}{dp_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dp_i}+\lambda_2\frac{df_2}{dp_i}+\dots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dp_i},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ayant pour valeurs les solutions des équations (4) du nº 2, où $k=2r$; et, d'autre part, elles peuvent se mettre sous la forme (6), en prenant pour les fonctions $\mu(\beta)$ celles qui satisfont aux équations (7). En égalant ces deux genres d'expressions, on obtient le théorème suivant :

Théorème IV. — *On imagine $2m-2r$ fonctions, désignées généralement par $\beta$, des $2m$ variables $q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m$, et on suppose entre ces variables les $2r$ équations*

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad \dots,\quad f_{2r}=0;$$

*alors, en désignant par $\alpha$ une fonction quelconque de ces variables, on aura les deux formules*

$$\frac{d\alpha}{dq_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dq_i}+\dots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dq_i}=\sum_\beta\frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i}+\dots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i}\right),$$
$$\frac{d\alpha}{dp_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dp_i}+\dots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dp_i}=\sum_\beta\frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i}+\dots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i}\right),$$

*les quantités $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta), \dots$ étant les solutions des équations* (7), *et les quantités $\lambda_1$, $\lambda_2, \dots$ étant les solutions des mêmes équations dans lesquelles les seconds membres sont remplacés par*

$$[f_1,\alpha],\quad [f_2,\alpha],\quad \dots,\quad [f_{2r},\alpha].$$

Nous ne considérerons plus désormais de dérivées virtuelles que celles qui sont principales ; nous pouvons donc convenir maintenant que les dérivées immédiates placées entre parenthèses représenteront les dérivées principales, et le théorème précédent sera renfermé d'une manière concise et très-élégante dans les deux formules (8), qui montrent que le théorème élémentaire relatif à la dérivée d'une fonction composée est applicable aux dérivées principales d'une fonction composée, renfermant plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes.

Exemple. — Examinons le cas particulier où le nombre des équations qui lient les variables $q_i$, $p_i$ se réduit à deux

$$f_1=0, \quad f_2=0;$$

le nombre des fonctions $\beta$ sera $2m-2$, et nous aurons la formule

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right)=\sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

en posant

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right)=\frac{d\alpha}{dq_i}+\frac{[f_2,\alpha]}{[f_1,f_2]}\frac{df_1}{dq_i}-\frac{[f_1,\alpha]}{[f_1,f_2]}\frac{df_2}{dq_i},$$
$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)=\frac{d\beta}{dq_i}+\frac{[f_2,\beta]}{[f_1,f_2]}\frac{df_1}{dq_i}-\frac{[f_1,\beta]}{[f_1,f_2]}\frac{df_2}{dq_i};$$

si l'on donne à $\alpha$ la valeur particulière $p_s$ prise parmi les variables $p_1, p_2, \ldots, p_m$, cette formule deviendra

$$\sum_\beta \frac{dp_s}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)=\frac{1}{[f_1,f_2]}\left(\frac{df_2}{dq_s}\frac{df_1}{dq_i}-\frac{df_1}{dq_s}\frac{df_2}{dq_i}\right).$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE DANS LE CAS D'ÉQUATIONS DE CONDITION ENTRE LES VARIABLES.

4. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_m$ des variables propres à déterminer la position d'un système de $n$ points matériels en mouvement et sollicités par des forces ; on suppose de plus qu'il existe des équations de condition entre les variables $q_i$ :

$$(1) \qquad f_1=0, \quad f_2=0, \quad \ldots, \quad f_r=0.$$

Imaginons la demi-force vive T exprimée par $q_1, q_2, \ldots, q_m$ et leurs dérivées prises par rapport au temps $t$, que nous représenterons par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ ; puis différentions T par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$, de manière à former les quantités

$$\frac{dT}{dq'_1}=p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2}=p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_m}=p_m;$$

nous pouvons, d'après cela, exprimer T au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_m$ et de $p_1$,

$p_2, \ldots, p_m$ ; nous supposons aussi qu'il existe une fonction de forces U que nous exprimons au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_m$; enfin, formons les dérivées partielles de $T - U = H$ dans ces hypothèses ; alors nous aurons les équations

$$(2) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \ldots, \frac{dq_m}{dt} = \frac{dH}{dp_m},$$

avec celle-ci

$$(3) \quad 0 = \left(\frac{dH}{dq_1} + \frac{dp_1}{dt}\right)\delta q_1 + \left(\frac{dH}{dq_2} + \frac{dp_2}{dt}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(\frac{dH}{dq_m} + \frac{dp_m}{dt}\right)\delta q_m$$

(*Œuvres de Jacobi*, t. III, p. 194), $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ représentant les variations de $q_1, q_2, \ldots$ d'après les équations (1); ces variations satisfont donc aux équations

$$\begin{gathered}
\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_m}\delta q_m = 0 \\
\frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_m}\delta q_m = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Multiplions les équations précédentes respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et ajoutons-les à l'équation (3) ; alors, pourvu qu'on dispose convenablement de ces multiplicateurs, les coefficients des variations $\delta q_i$ dans l'équation résultante seront nuls, et l'on aura

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{dH}{dq_1} - \lambda_1\frac{df_1}{dq_1} - \lambda_2\frac{df_2}{dq_1} - \ldots - \lambda_r\frac{df_r}{dq_1}, \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\frac{dH}{dq_2} - \lambda_1\frac{df_1}{dq_2} - \lambda_2\frac{df_2}{dq_2} - \ldots - \lambda_r\frac{df_r}{dq_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dp_m}{dt} &= -\frac{dH}{dq_m} - \lambda_1\frac{df_1}{dq_m} - \lambda_2\frac{df_2}{dq_m} - \ldots - \lambda_r\frac{df_r}{dq_m}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on différentie l'équation $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots = 0,$$

ou

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dH}{dp_2} + \ldots = 0,$$

qu'on peut représenter, d'après une notation précédente, par

$$[f_i, H] = 0;$$

désignons-la, pour abréger, par $F_i = 0$, et nous aurons les $r$ équations

$$(5) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_r = 0,$$

auxquelles satisfont les quantités $q_i$, $p_i$.

Différentions les équations (5) et remplaçons les $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{dp_i}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (2) et (4), et nous aurons les $r$ équations

$$(6) \qquad \begin{cases} [F_1,H] = [f_1,F_1]\lambda_1 + [f_2,F_1]\lambda_2 + \cdots + [f_r,F_1]\lambda_r, \\ [F_2,H] = [f_1,F_2]\lambda_1 + [f_2,F_2]\lambda_2 + \cdots + [f_r,F_2]\lambda_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

desquelles on pourra tirer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ pour les portêr dans les équations (4). On peut remarquer entre les coefficients les égalités faciles à démontrer :

$$[f_1, F_2] = [f_2, F_1], \ \ldots, \ [f_u, F_v] = [f_v, F_u], \ \ldots.$$

Si l'on prend pour les variables $q_i$ les $3n$ coordonnées $x_i$, $y_i$, $z_i$ des points matériels, on a

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

les équations (2) deviennent

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i',$$

et les équations (4) prennent la première forme donnée par Lagrange aux équations de la dynamique

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{dH}{dx_i} - \lambda_1 \frac{df_1}{dx_i} - \lambda_2 \frac{df_2}{dx_i} - \cdots.$$

Quoique, en général, on doive réduire les variables au moindre nombre possible, on comprend aisément qu'il puisse être utile dans certains cas de considérer les équations (2) et (4).

### GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DU NUMÉRO PRÉCÉDENT.

5. Nous allons considérer une question plus générale que la précédente. Imaginons que les $2m$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ satisfassent à l'équation

$$(7) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \frac{dq_2}{dt}\delta p_2 + \ldots + \frac{dq_m}{dt}\delta p_m - \left(\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \ldots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m\right) = \delta H,$$

H étant une fonction de ces variables, en sorte que l'on a

$$\delta H = \frac{dH}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dH}{dq_m}\delta q_m + \frac{dH}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dH}{dp_m}\delta p_m.$$

Si les variables $q_i$, $p_i$ étaient indépendantes, les coefficients de leurs variations seraient égaux dans les deux membres de l'équation (7); mais on suppose entre les variables $q_i$, $p_i$ un nombre pair d'équations

$$(8) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

En introduisant des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$ comme dans la question précédente, on déduit des équations (7) et (8) les $2m$ équations suivantes

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dH}{dp_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dp_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dH}{dp_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_1} - \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_1} - \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_1} - \ldots - \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dq_1}, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_2} - \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_2} - \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_2} - \ldots - \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

En différentiant une des équations (8), $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df_i}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{df_i}{dp_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots = 0,$$

et, en remplaçant les dérivées des $q_i$, $p_i$ d'après les équations (A) et (B), on a

$$[f_i, H] + \lambda_1 [f_i, f_1] + \lambda_2 [f_i, f_2] + \ldots = 0;$$

les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$ satisfont donc aux $2r$ équations suivantes

$$\begin{array}{l} \star \quad + [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_r, f_1]\lambda_r \\ \quad + [f_{r+1}, f_1]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_1]\lambda_{r+2} + \ldots + [f_{2r}, f_1]\lambda_{2r} = [f_1, H], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 + \star + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_r, f_2]\lambda_r \\ \quad + [f_{r+1}, f_2]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_2]\lambda_{r+2} + \ldots + [f_{2r}, f_2]\lambda_{2r} = [f_2, H], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [f_1, f_{2r}]\lambda_1 + [f_2, f_{2r}]\lambda_2 + \ldots + [f_r, f_{2r}]\lambda_r \\ \quad + [f_{r+1}, f_{2r}]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_{2r}]\lambda_{r+2} + \ldots + \star = [f_{2r}, H], \end{array}$$

et on pourra les tirer de ces équations pour les porter dans (A) et (B). Si l'on compare ces équations aux équations (4) du n° 2, on voit que les seconds membres des équations (A) et (B) représentent les dérivées principales de la fonction H ; les équations (A) et (B) peuvent donc s'écrire, d'après la notation des dérivées principales,

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_1}\right), \frac{dq_2}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_2}\right), \ldots, \frac{dq_m}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_m}\right), \\ \frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_1}\right), \frac{dp_2}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_2}\right), \ldots, \frac{dp_m}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_m}\right). \end{cases}$$

Montrons comment le problème actuel renferme celui du numéro précédent. Il faut alors supposer que les $r$ premières équations (8)

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0$$

ne renferment plus les variables $p_i$, et il en résulte

$$[f_u, f_v] = 0,$$

toutes les fois que $u$ et $v$ ne surpassent pas $r$ ; ensuite on supposera de plus que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ satisfont aux équations

$$[f_1, H] = 0, \quad [f_2, H] = 0, \quad \ldots, \quad [f_r, H] = 0 ;$$

enfin on prendra pour $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots$ les fonctions $F_1 = [f_1, H]$, $F_2 = [f_2, H], \ldots$.

Examinons d'abord les $r$ premières équations qui donnent les quantités $\lambda$ ; leurs seconds membres sont nuls et, dans leurs premiers membres, les coefficients de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont nuls aussi ; on en conclut que les valeurs de $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{2r}$ elles-mêmes s'annulent. Ensuite les $r$ équations suivantes en $\lambda$ fourniront $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ et coïncideront avec les équations (6) du numéro précédent.

Les $r$ derniers termes des équations (A) et (B) s'annuleront parce que $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{2r}$ sont nuls, et les autres termes multipliés par des $\lambda$ disparaîtront aussi des équations (A), parce que les $r$ premières fonctions $f$ ne renferment pas les variables $p_i$. Les équations (A) et (B) coïncideront donc avec les équations (2) et (4).

Ainsi les équations (2) et (4) sont aussi de la forme (C), et on doit remarquer que les dérivées principales de la fonction H par rapport aux $p_i$ coïncident avec les dérivées immédiates.

### SUR LE PROBLÈME DES PERTURBATIONS DANS LE CAS OU IL EXISTE DES ÉQUATIONS DE CONDITION ENTRE LES VARIABLES DU PROBLÈME.

6. Supposons que l'on ait intégré les équations (2) et (4) du n° 4 à l'occasion d'un problème de dynamique et qu'on ait trouvé pour intégrales

$$(1) \qquad \beta_1 = \psi_1, \quad \beta_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad \beta_{2(m-r)} = \psi_{2(m-r)},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ désignant les $2m - 2r$ constantes arbitraires qui y entrent. Supposons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème dans lequel la fonction H est remplacée par $\mathrm{H} + \Omega$, de sorte que $\Omega$ est la fonction perturbatrice. Alors les seconds membres des équations (1) ne sont plus constants, et on prend pour inconnues les fonctions $\beta$ définies par les équations (1) et dont les dérivées par rapport au temps sont en général de très-petites quantités.

Tel est le problème des perturbations. Quand les équations de condition entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_m$ disparaissent, ce problème se résout par des formules dues à Lagrange, ou par d'autres dues à Poisson ; les premières ne changent pas par les équations de condition ; ce sont donc les formules analogues à celles de Poisson que nous nous proposons de déterminer. Mais nous allons résoudre ce problème en adoptant la généralisation du n° 5. Quand une généralisation a pour effet de compliquer des calculs, elle présente souvent plus d'inconvénients que d'avantages ; mais on ne peut faire ce reproche à celle-ci, car elle simplifie les calculs en confondant deux genres de fonctions qui remplissent exactement le même rôle dans la question.

Supposons donc entre les $2m$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ les $2r$ équations finies

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0, \tag{2}$$

et ces variables sont aussi assujetties aux $2m$ équations différentielles

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}\right), \tag{3}$$

H étant une fonction des mêmes variables, et les seconds membres désignant les dérivées principales de la fonction H.

Concevons que l'on ait intégré ces équations et que l'on ait trouvé pour intégrales les $2m - 2r$ équations

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m), \\ \beta_2 = \psi_2(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{4}$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2(m-r)}$ désignent des constantes arbitraires, qui ne figurent pas dans les seconds membres. Supposons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème dans lequel la fonction H est remplacée par $\mathrm{H} + \Omega$, $\Omega$ étant très-petit, de sorte que les équations (2) subsistent encore, mais les équations (3) sont remplacées par

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d(\mathrm{H}+\Omega)}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d(\mathrm{H}+\Omega)}{dq_i}\right). \tag{5}$$

Alors les fonctions des $q_i$, $p_i$ qui forment les seconds membres des équations (4) n'ont plus des valeurs constantes; mais leurs dérivées par rapport à $t$ sont en général de très-petites quantités qu'il s'agit de déterminer. Ces fonctions, que nous désignerons par $\beta$, sont définies par les équations (4), et ces équations jointes aux $2r$ équations (2) permettront d'exprimer les $2m$ variables $q_i$, $p_i$ au moyen des quantités $\beta$ et d'une seule manière.

Soit $\alpha = \psi$ une intégrale du problème *sans perturbations*, c'est-à-dire une des équations (4), et $\alpha$ est la constante arbitraire. En différentiant cette équation, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right] + \frac{d\psi}{dt},$$

dont le dernier terme est nul, si $t$ ne se présente pas explicitement dans $\psi$, et, d'après les équations (3), on obtient

$$(6) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{dH}{dp_i}\right) - \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{dH}{dq_i}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Si l'on passe ensuite au problème *avec perturbations*, on regarde, dans l'équation $\alpha = \psi$, $\alpha$ comme une fonction de $t$, et, en la différentiant, on aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right] + \frac{d\psi}{dt},$$

les dérivées de $q_i$, $p_i$ étant fournies par les équations (5), et il en résulte

$$(7) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i}\right) - \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Retranchons l'équation (6) de l'équation (7), et nous aurons, en mettant dans le résultat la lettre $\alpha$ au lieu de $\psi$, ce qui ne peut plus maintenant amener de confusion,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right) - \frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)\right].$$

Les fonctions $\Omega$ peuvent s'exprimer au moyen des quantités $\beta$ et d'une seule manière, et, d'après le n° 3, les dérivées principales de $\Omega$ sont données par les formules

$$\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right), \quad \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right);$$

on a donc

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_{\beta}\frac{d\Omega}{d\beta}\sum_{i=1}^{i=m}\left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right)-\frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)\right]$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)=\frac{d\beta}{dq_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i}+\ldots,$$
$$\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right)=\frac{d\beta}{dp_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i}+\mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i}+\ldots,$$

$\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$, ... étant les solutions des équations (7) du nº 3 ; en remplaçant, on obtient

$$(8)\qquad \frac{d\alpha}{dt}=\sum_{\beta}\frac{d\Omega}{d\beta}\Big([\alpha,\beta]+\mu_1(\beta)[\alpha,f_1]+\mu_2(\beta)[\alpha,f_2]+\ldots+\mu_{2r}(\beta)[\alpha,f_{2r}]\Big),$$

qui est la formule cherchée. On voit que, grâce à la considération des dérivées principales, les calculs se sont présentés de la même manière que s'il n'y avait pas eu d'équations conditionnelles.

### SUR DES FORMULES REMARQUABLES RELATIVES A L'EXPRESSION $[\alpha,\beta]$.

7. Nous allons déduire de la formule des perturbations un autre formule très-importante.

Si l'on considère d'abord le cas particulier où l'on part des équations du nº 4, on a entre les variables $q_1$, $q_2$,..., $q_m$ les $r$ équations

$$(a)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\quad \ldots,\quad f_r=0,$$

d'où l'on déduit, entre les variables $q_1$, $q_2$,..., $q_m$ et $p_1$, $p_2$,..., $p_m$, $r$ autres équations

$$(b)\qquad f_{r+1}=\mathrm{F}_1=0,\quad f_{r+2}=\mathrm{F}_2=0,\quad \ldots,\quad f_{2r}=\mathrm{F}_r=0,$$

et, d'après ces équations de condition, on peut remplacer, comme on sait, les $2m$ variables $q_i$, $p_i$ par $2m-2r$ variables $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$,..., $\mathrm{Q}_{m-r}$, $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$,..., $\mathrm{P}_{m-r}$ indépendantes entre elles et qui satisfont aux $2m-2r$ équations différentielles

$$(c)\qquad \frac{d\mathrm{Q}_i}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{P}_i},\quad \frac{d\mathrm{P}_i}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Q}_i}.$$

Nous montrerons dans une autre occasion comment, dans le cas le plus général du nº 5, on peut remplacer aussi les $2m$ variables $q_i$, $p_i$ par $2m-2r$ autres variables qui satisfont aux équations $(c)$.

Désignons par $[\alpha,\beta]'$ par rapport aux variables $Q_i$, $P_i$ l'analogue de $[\alpha,\beta]$ pour les variables $q_i$, $p_i$; c'est-à-dire posons

$$[\alpha,\beta]' = \frac{d\alpha}{dQ_1}\frac{d\beta}{dP_1} + \frac{d\alpha}{dQ_2}\frac{d\beta}{dP_2} + \dots + \frac{d\alpha}{dQ_{m-r}}\frac{d\beta}{dP_{m-r}}$$
$$-\frac{d\alpha}{dP_1}\frac{d\beta}{dQ_1} - \frac{d\alpha}{dP_2}\frac{d\beta}{dQ_2} - \dots - \frac{d\alpha}{dP_{m-r}}\frac{d\beta}{dQ_{m-r}};$$

comme il n'existe pas d'équations conditionnelles entre les variables $Q_i$, $P_i$, la formule des perturbations, si l'on emploie ces variables, se réduit à

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}[\alpha,\beta]'. \tag{9}$$

Or, il est aisé de comprendre que les coefficients de $\frac{d\Omega}{d\beta}$ doivent être les mêmes dans les deux équations (8) et (9); on a donc cette formule très-importante, qui permet de passer des variables $Q_i$, $P_i$ aux variables $q_i$, ,

$$[\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] + \mu_1(\beta)[\alpha,f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha,f_2] + \dots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha,f_{2r}]. \tag{D}$$

Cette équation renferme la formule trouvée par Jacobi (*Nova methodus*, § 46, t. III de ses ŒUVRES), et qu'il se propose de découvrir dès le § 38 : *Quum propter rei utilitatem, tum propter egregiam ejus difficultatem, tum quia accurate examinare juvat quæcunque spectant ad expressionem* $[\alpha,\beta]$ *tantis proprietatibus gaudentem.*

La formule à laquelle Jacobi est parvenu par des calculs très-compliqués se rapporte au cas où les équations de condition se réduisent aux équations (*a*) et (*b*).

On peut remplacer la formule (D) par une autre dont le second membre renferme de la même manière $\alpha$ et $\beta$. On a d'abord

$$[\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] + \sum_u \mu_u(\beta)[\alpha,f_u],$$

$u$ étant susceptible des valeurs 1, 2, 3,.., $2r$. En résolvant les équations (7) du n° 3, on a

$$\mu_u(\beta) = \sum_s L_{u,s}[f_s,\beta],$$

$L_{u,s}$ ne dépendant pas de $\beta$, mais seulement des fonctions $f$, et l'on a

$$L_{u,s} = -L_{s,u};$$

on obtient ainsi la formule

$$[\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] - \sum_u \sum_s L_{u,s}[\alpha,f_u][\beta,f_s]. \tag{E}$$

Il est aisé de vérifier que l'expression du second membre ne fait que changer de signe, quand on y permute $\alpha$ et $\beta$. Elle devient en effet

$$[\beta,\alpha]-\sum_u\sum_s L_{u,s}[\beta,f_u][\alpha,f_s];$$

comme $u$ et $s$ sont susceptibles des mêmes valeurs $1, 2, 3,\ldots, 2r$, il est permis de les permuter, ce qui donne

$$[\beta,\alpha]-\sum_u\sum_s L_{s,u}[\beta,f_s][\alpha,f_u];$$

enfin, comme on a $L_{u,s}=-L_{s,u}$, on a

$$-[\alpha,\beta]+\sum_u\sum_s L_{u,s}[\beta,f_s][\alpha,f_u],$$

ce qui est bien l'expression (E) changée de signe.

Jacobi met aussi l'expression de $[\alpha,\beta]'$ sous une forme tout à fait différente, dans le § 48 de son mémoire. Mais, pour obtenir la forme analogue, nous ne pouvons plus conserver la généralité dans laquelle nous avons établi les formules (D) et (E), et il faut faire sur les fonctions $f$ des restrictions indiquées par le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que les $r$ premières fonctions $f$, savoir $f_1, f_2,\ldots, f_r$, soient toutes indépendantes des variables $p_i$, ou supposons seulement, ce qui est beaucoup plus général, qu'elles satisfassent aux $\frac{r(r-1)}{2}$ équations*

$$(g)\qquad [f_1,f_2]=0,\quad [f_1,f_3]=0,\quad \ldots,\quad [f_{r-1},f_r]=0,$$

*on a la formule*

$$(\mathrm{F})\qquad [\alpha,\beta]'=[\alpha+\mathrm{A},\,\beta+\mathrm{B}],$$

*en posant*

$$\mathrm{A}=f_{r+1}\sum_{u=1}^{u=r}L_{u,r+1}[\alpha,f_u]+f_{r+2}\sum_{u=1}^{u=r}L_{u,r+2}[\alpha,f_u]+\ldots+f_{2r}\sum_{u=1}^{u=r}L_{u,2r}[\alpha,f_u],$$

$$\mathrm{B}=f_{r+1}\sum_{u=1}^{u=r}L_{u,r+1}[\beta,f_u]+f_{r+2}\sum_{u=1}^{u=r}L_{u,r+2}[\beta,f_u]+\ldots+f_{2r}\sum_{u=1}^{u=r}L_{u,2r}[\beta,f_u].$$

Les fonctions L qui entrent dans les expressions de A et B sont les mêmes que celles qui entrent dans la formule (E). Le déterminant gauche des équations qui déterminent les fonctions $\mu(\beta)$ est un carré que nous représenterons par $D^2$, et l'on a

$$L_{u,v} = \frac{1}{D} \frac{dD}{d[f_u,f_v]}.$$

Nous ne développerons pas les calculs qui conduisent au théorème précédent, qui n'est pas d'ailleurs difficile à vérifier; mais nous ferons remarquer que la formule (F) a aussi plus d'étendue que celle de Jacobi (§ 48 de son mémoire); en effet, dans la formule de Jacobi, $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont assujettis à satisfaire aux équations

$$[f_1,H] = 0, \quad [f_2,H] = 0, \quad \ldots, \quad [f_r,H] = 0,$$

et les fonctions $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots$ sont précisément les premiers membres de ces équations. Or la formule (F) n'exige pas ces restrictions.

On peut remarquer que si les équations de condition entre les variables se réduisent à deux, $r$ est égal à l'unité, et le nombre des équations ($g$) se réduit à zéro. Donc, dans ce cas, la formule (F) est toujours applicable, sans que les fonctions $f_1$ et $f_2$ soient assujetties à aucune restriction.