BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Sur les nombres pseudo-symétriques

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 155-167

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__155_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les nombres pseudo-symétriques; par M. Émile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 7 novembre 1884.)

Dans ce qui suit, nous désignerons toujours par x la base du système de numération.

Nous dirons qu'un nombre de $2n$ chiffres est parisymétrique si les chiffres à égale distance des extrêmes sont égaux. Exemple :

$$2552.$$

Qu'un nombre de $2n+1$ chiffres est imparisymétrique, quel que soit le chiffre du milieu, si les chiffres à égale distance des extrêmes sont égaux. Exemple :

$$25652.$$

Nous appellerons *pseudo-parisymétrique* un nombre de $2n$ chiffres, tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit constante ou nulle; la valeur de la constante se nomme l'*échelle.*

Nous appellerons *pseudo-imparisymétrique* un nombre de $2n+1$ chiffres, tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit constante ou nulle, et que le chiffre du milieu soit nul ou égal à la moitié de la constante (si celle-ci est paire); la valeur de la constante se nomme l'*échelle.*

Exemples :

$$807004600302, \qquad 73$$

sont pseudo-parisymétriques à échelle 10;

$$603147502, \qquad 603107502$$

sont pseudo-imparisymétriques à échelle 8.

Nous désignerons par A, B, C, ... des nombres quelconques (le premier chiffre à gauche n'étant jamais zéro), et par a, b, c, ... ces mêmes nombres, lus de droite à gauche.

Exemples : si

$$A = 5382, \quad B = 1560,$$

on aura

$$a = 2835, \quad b = 651.$$

Nous désignerons respectivement par N_a, N_b, N_c, ... les sommes $A+a$, $B+b$, $C+c$, ...

Rappelons encore le théorème suivant, que nous avons démontré au congrès de Blois :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $N_a = N_b$, A *et* B *étant des nombres d'un même nombre de chiffres, est que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes dans* A *soit égale à la somme des chiffres correspondants dans* B.

Nous déduirons de ce théorème la proposition suivante, très facile à démontrer :

Théorème I. — *Si* A, B, C, ... *sont des nombres pseudo-symétriques de même échelle, d'un même nombre de chiffres, et* *où les zéros, s'il y en a, occupent le même rang, on aura*

$$N_a = N_b = N_c = \ldots;$$

et, réciproquement, si les zéros n'occupent pas le même rang dans tous ces nombres, N_a, N_b, N_c, ... ***seront différents.***

Exemples :

$$\begin{array}{r} 804905 \\ 509408 \\ \hline 1314313 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 608507 \\ 705806 \\ \hline 1314313 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500309208006 \\ 600802903005 \\ \hline 1101112111011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 400503806007 \\ 700608305004 \\ \hline 1101112111011 \end{array}$$

On conclut de là que, pour trouver le nombre P_n de valeurs différentes que peut prendre la somme N_a si A prend toutes les valeurs qui en feront un nombre pseudo-symétrique de n chiffres et d'échelle p, il suffit de compter, dans un nombre pseudo-symétrique de n chiffres, de combien de façons différentes peuvent être placés les zéros, les chiffres significatifs étant indifférents.

Comme il s'agit de nombres pseudo-symétriques où, par conséquent, les zéros sont toujours deux à deux à égale distance des extrêmes, il suffira, si $n = 2m$, de chercher de combien de façons différentes des zéros peuvent entrer dans un nombre de m chiffres, dont le dernier chiffre à droite n'est pas nul.

Si $n = 2m + 1$ et l'échelle impaire, le chiffre du milieu étant toujours nul, on trouvera le même nombre.

Si l'échelle est paire, le chiffre du milieu pouvant être soit zéro, soit la moitié de l'échelle, on trouve un nombre double.

Problème I. — **A *étant un nombre pseudo-symétrique de n chiffres et d'échelle p, trouver le nombre* P_n *de valeurs différentes que peut prendre la somme* N_a**

1° $$p = 2p' + 1, \quad n = 2m.$$

A est un nombre pseudo-parisymétrique de $2m$ chiffres. Il n'y a qu'une valeur pour N_a, si A ne contient pas de zéro.

Soit $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{m-1}$ le nombre des valeurs de N_a, si A

contient 2, 4, 6, ... $2(m-1)$ zéros; on aura évidemment

$$N_1 = \frac{m-1}{1},$$
$$N_2 = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$
$$N_3 = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et

$$P_n = 1 + N_1 + N_2 + \dots$$

ou

$$P_n = 1 + \frac{m-1}{1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} + \dots + \frac{m-1}{1} + 1$$

ou

$$P_n = 2^{m-1} = 2^{\frac{n}{2}-1}$$

Si $n = 2m + 1$, le nombre A sera pseudo-imparisymétrique et P_n aura la même valeur $2^{m-1} = 2^{\frac{n-1}{2}-1}$ que précédemment, puisque le chiffre du milieu est toujours zéro

2° $$p = 2p', \quad n = 2m.$$

On a encore

$$P_n = 2^{m-1} = 2^{\frac{n}{2}-1};$$

mais, si $n = 2m + 1$, on a

$$P_n = 2^m = 2^{\frac{n-1}{2}},$$

car le chiffre du milieu de A peut être soit o, soit p'.

THÉORÈME II. — *Tout nombre parisymétrique de* $2n$ *chiffres est de la forme* $A + a$, A *ayant* $2n$ *chiffres.*

Démonstration très simple. — Exemple :

5670110765

provient de

$$\begin{array}{rl} A = & 5070010060 \\ a = & 0600100705 \\ \hline & 5670110765 \end{array} \quad \text{ou de} \quad \begin{array}{l} 5370010030 \\ 0300100735 \\ \hline 5670110765 \end{array}$$

De même :

THÉORÈME III. — *Tout nombre imparisymétrique de* $2n+1$ *chiffres, et dont le chiffre du milieu est pair ou nul, est de la forme* $A+a$, A *ayant* $2n+1$ *chiffres.*

THÉORÈME IV. — *Si* A *est un nombre pseudo-parisymétrique d'échelle* $p<x$, N_a *est un nombre parisymétrique du même nombre de chiffres et dont tous les chiffres sont* p *ou* 0.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 508104 \\ 401805 \\ \hline 909909 \end{array}$$

Soit maintenant A un nombre pseudo-parisymétrique de $2n$ chiffres, dont l'échelle p est x ou plus grande que x.

Soit α le premier chiffre à gauche de A.

Soit α' le premier chiffre à droite de A.

On a

$$\alpha+\alpha'=p,$$

mais

$$p \geq x \quad \text{et} \quad p<2x-1;$$

donc N_a aura $2n+1$ chiffres, et son premier chiffre à gauche sera l'unité.

Pour que N_a soit symétrique, il faut que le dernier chiffre à droite soit aussi l'unité, ce qui, puisque $p>x$, exige $p=x+1$; pour toute autre valeur de p, parmi celles plus grandes que x ou pour celle égale à x, N_a ne pourra donc pas être symétrique.

Je dis que si $p=x+1$, N_a est effectivement symétrique.

Soit

$$A=a_1\ a_2 \ldots a_j\ a_{j+1}\ a_{j+2} \ldots a_n\ a'_n \ldots a'_{j+2}\ a'_{j+1}\ a'_j \ldots a'_2\ a'_1$$

un nombre pseudo-parisymétrique, tel que, a_k et a_k représentant deux chiffres quelconques à égale distance des extrêmes, on ait

$$a_k+a'_k=x+1 \quad \text{ou} \quad a_k+a'_k=0$$

pour toute valeur de k

Comme $a_1+a'_1=x+1$, N_a a $2n+1$ chiffres, puisque le dernier chiffre à gauche de A n'est jamais zéro.

Pour que N_a soit imparisymétrique, il faut que, dans l'addition faite en commençant par la droite comme à l'ordinaire, le chiffre provenant de $a'_j + a_j$ (en tenant compte de la retenue s'il y en a) soit égal au chiffre provenant (sur la gauche) de l'addition de $a_{j-1} + a'_{j-1}$ (en tenant compte de la retenue s'il y a lieu)

$$\begin{array}{rl} a & = a'_1\ a'_2 \ldots a'_{j-1}\ a'_j\ a'_{j+1} \ldots a'_n\ a_n \ldots a_{j+1}\ a_j\ a_{j-1} \ldots a_2\ a_1 \\ A & = a_1\ a_2 \ldots a_{j-1}\ a_j\ a_{j+1} \ldots a_n\ a'_n \ldots a'_{j+1}\ a'_j\ a'_{j-1} \ldots a'_2\ a'_1 \\ \hline N_a & = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{array}$$

Première hypothèse........	2 ..... 2 .....
Deuxième hypothèse........	0 ..... 0 .....
Troisième hypothèse........	1 ..... 1 .....
Quatrième hypothèse........	1 ..... 1 .....

Il n'y a que quatre hypothèses possibles :

1° $\qquad a_j + a'_j = x + 1$ et $a'_{j-1} + a_{j-1} = x + 1$,

il y a retenue des deux côtés, et les deux chiffres sont des 2;

2° $\qquad a_j + a'_j = 0$ et $a'_{j-1} + a_{j-1} = 0$,

les deux chiffres sont des 0;

3° $\qquad a_j + a'_j = x + 1$ et $a'_{j-1} + a_{j-1} = 0$,

les deux chiffres sont des 1;

4° $\qquad a_j + a'_j = 0$ et $a'_{j-1} + a_{j-1} = x + 1$,

les deux chiffres sont des 1.

Le chiffre du milieu provient de l'addition

$$\begin{array}{c} \ldots a_n\ a'_n \ldots \\ \ldots a'_n\ a_n \ldots \\ \hline \end{array}$$

Première hypothèse....	$a_n + a'_n = x + 1$	... 2 ...
Seconde hypothèse.....	$a_n + a'_n = 0$	... 0 ...

On voit donc que les chiffres à égale distance des extrêmes sont égaux, que leur valeur est 0, 1 ou 2;

Que le chiffre du milieu ne peut être que 2 ou 0.

En continuant la discussion de la même manière, on verrait que, dans N_a, un 0 ne pourra avoir à sa droite (et par suite à sa gauche, puisque N_a est symétrique) un nombre impair de 1 consécutifs; que jamais un 0 et un 2 ne pourront se trouver à côté l'un de l'autre; que un 2 ne peut avoir à sa droite (et par suite à sa gauche) un nombre pair de 1 consécutifs.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si* A *est un nombre pseudo-parisymétrique de* $2n$ *chiffres et d'échelle* $x+1$, N_a *sera un nombre imparisymétrique de* $2n+1$ *chiffres, qui ne pourront être que* 0, 1 *ou* 2, *les chiffres extrêmes seront* 1, *le chiffre du milieu ne sera jamais* 1; *un* 0 *ne pourra jamais avoir à sa droite ou à sa gauche un nombre impair de* 1 *consécutifs; jamais un* 0 *et un* 2 *ne pourront se trouver l'un près de l'autre; un* 2 *ne peut avoir à sa droite ou à sa gauche un nombre pair de* 1 *consécutifs; si l'échelle est* x *ou* $> x+1$, N_a *ne peut être symétrique.*

On démontre d'une façon tout à fait semblable les deux théorèmes suivants, qui sont analogues aux théorèmes IV et V.

THÉORÈME VI. — *Si* A *est un nombre pseudo-imparisymétrique* ($2n-1$ chiffres) *dont l'échelle* p *est plus petite que la base* x, N_a *est un nombre imparisymétrique* ($2n-1$ *chiffres*), *dont les chiffres sont* p *ou* 0.

THÉORÈME VII. — *Si* A *est un nombre pseudo-imparisymétrique* ($2n-1$ *chiffres*) *dont l'échelle est* $x+1$, N_a *est un nombre parisymétrique de* $2n$ *chiffres, qui ne pourront être que* 0, 1 *ou* 2; *les chiffres extrêmes seront* 1; *les deux chiffres du milieu seront deux* 1 *ou deux* 0 *si* x *est pair, deux* 0, *deux* 1 *ou deux* 2 *si* x *est impair; un* 0 *ne pourra jamais avoir à sa droite* (*ou à sa gauche*) *un nombre impair de* 1 *consécutifs; jamais un* 0 *et un* 2 *ne pourront se trouver l'un près de l'autre; un* 2 *ne peut avoir à sa droite* (*ou à sa gauche*) *un nombre pair de* 1 *consécutifs; si l'échelle est* x *ou* $> x+1$, N_a *ne peut être symétrique*

Remarque I. — Soit A un nombre pseudo-parisymétrique de $2n$ chiffres; nous avons démontré que $N_a = A + a$ sera un nombre imparisymétrique de $2n+1$ chiffres, dont le chiffre du milieu est 2 ou 0, et par suite, d'après le théorème III, il sera aussi de la forme $B + b$, B étant un nombre de $2n+1$ chiffres.

Remarque II. — Soit A un nombre pseudo-imparisymétrique de $2n - 1$ chiffres; nous avons démontré que $N_a = A + a$ sera un nombre parisymétrique de $2n$ chiffres, et par suite, d'après le théorème II, il sera de la forme $B + b$, B étant un nombre de $2n$ chiffres. Donc, en général :

Théorème VIII. — *Si* A *est pseudo-symétrique de n chiffres,* $N_a = A + a$ *sera aussi de la forme* $B + b$, B *ayant* $n + 1$ *chiffres; dans ce cas, nous dirons que le nombre* N_a *est doublement de la forme* N.

Nous pourrions, dans ces recherches, employer une méthode un peu différente que nous allons indiquer sommairement.

Supposons A pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$; puisque N_a, d'après le théorème I, ne dépend que de la place des o dans A, il n'y a pas à distinguer entre eux les chiffres significatifs, et nous désignerons par l et l' deux chiffres quelconques à égale distance des extrêmes et tels que $l + l' = x + 1$ $\left(\text{si } x \text{ est impair, le chiffre du milieu pourra être } \frac{x+1}{2}\right)$.

Cela posé, A se composera de droite à gauche (ou de gauche à droite, puisqu'il est pseudo-symétrique) :

D'un groupe de p chiffres l (p étant au moins 1),
» q » o (q peut être zéro),
» r » l (r »),
» s » o (s »),
....

$$\begin{array}{rl}
A = & \overset{p}{\overline{l\ldots l}}\;\overset{q}{\overline{0\ldots 0}}\;\overset{r}{\overline{l\ldots l}}\;\overset{s}{\overline{0\ldots 0}}\;l —.—.—.— l'\,\overset{s}{\overline{0\ldots 0}}\;\overset{r}{\overline{l'\ldots l'}}\;\overset{p}{\overline{0\ldots 0}}\;\overset{r}{\overline{l'\ldots l'}} \\
a = & l'\ldots l'\;0\ldots 0\;l'\ldots l'\;0\ldots 0\;l' —.—.—.— l\;0\ldots 0\;l\ldots l\;0\ldots 0\;l\ldots l \\
\hline
N_a = & \overset{p}{\overline{1\;2\ldots 2}}\;\overset{q}{\overline{1\;0\ldots 0}}\;\overset{r}{\overline{1\;2\ldots 2}}\;\overset{s}{\overline{1\;0\ldots 0}}\;1\;l' —.—.—.— \overset{s}{\overline{1\;0\ldots 0}}\;\overset{r}{\overline{1\;2\ldots 2}}\;\overset{q}{\overline{1\;0\ldots 0}}\;\overset{p}{\overline{1\;2\ldots 2}}\;1
\end{array}$$

On voit immédiatement que $A + a$ commence et finit par 1; qu'il a un chiffre de plus que A, etc., et l'on pourrait démontrer les théorèmes V et VII.

Théorème IX. — *Si un nombre* M *de* $n + 1$ *chiffres est doublement de la forme* N, *c'est-à-dire si ce nombre est la somme d'un nombre* A *de n chiffres et de ce nombre renversé,* *et en même temps la somme d'un nombre* B *de* $n+1$ *chiffres et de ce nombre renversé, et si de plus* B *est tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que* x, A *sera un nombre pseudo-symétrique à échelle* $x+1$.

Remarquons d'abord que $A < x^n$: donc $A + a < 2x^n$, donc le premier chiffre à gauche de M est 1.

Posons les additions de $A+A$ et de $B+b$, et remarquons encore que l'addition $B+b$ montre que M est un nombre symétrique, puisque, k étant quelconque, $b_n + b_{n-k}$ est plus petit que x; on a

$$\begin{array}{rcccccccccc}
A = & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots\ldots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
a = & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\
\hline
M = A + a = & 1\ 2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2 & 1 \\
 & 1 & & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc}
B = & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots\ldots & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
b = & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots\ldots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\
\hline
M = B + b = & 1 & 2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2 & 1 \\
 & & 1 & & & & & & 1 &
\end{array}$$

M étant symétrique, puisque le premier chiffre à gauche de $A+a$ est 1, le chiffre des unités de M est aussi 1, ce qui donne

$$b_n = 1, \quad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_0 + a_{n-1} = x + 1;$$

en effet, $a_0 + a_{n-1}$ est 1 ou $x+1$, puisque le dernier chiffre à droite de $A = a$ est 1; or il ne peut être 1, car $A + a$ n'aurait pas alors un chiffre de plus que A. Dans $A + a$, le deuxième chiffre à gauche est donc 2 ou 1, suivant qu'il y a une retenue venant de l'addition précédente ou qu'il n'y en a pas.

S'il est 2, le deuxième chiffre à droite de M est aussi 2, puisque M est symétrique, alors le deuxième chiffre à droite de l'addition $A + a$ montre que $a_1 + a_{n-2}$ est $x+1$ ou 1; mais ce ne peut être 1, puisque, sur la gauche, la colonne où se trouve $a_1 + a_{n-2}$ a donné par hypothèse une retenue dans $a_1 + a_{n-2} = x + 1$ et, s'il est 1, le deuxième chiffre à droite de M est aussi 1; alors l'addition du deuxième chiffre à droite, dans $A + a$, montre que $a_1 + a_{n-1} = 0$ ou x; ce ne peut être x, puisqu'il n'y a pas de retenue (à gauche) dans la colonne de $A + a$ où se trouve $a_1 + a_{n-1}$: donc

$$a_1 + a_{n-1} = 0.$$

Examinons le cas où le deuxième chiffre est un 2, puis le cas où c'est un 1 :

1° Supposons qu'il y ait un 2 pour deuxième chiffre à droite et par suite, à gauche; nous venons de voir que, alors,

$$a_1 + a_{n-2} = x + 1\,;$$

donc le troisième chiffre à gauche et, par suite, à droite de $A + a$ est encore un 2 ou un 1 ; un 2, s'il a une retenue venant de l'addition partielle de la troisième colonne à gauche, $a_{n-3} + a_2$. Ce qui exige $a_{n-3} + a_2 = x + 1$, puisque le troisième chiffre à droite de $A + a$ est 2, qu'il y a une retenue et que $a_{n-3} + a_2$ ne peut être l'unité, puisqu'une retenue provient de l'addition partielle de la troisième colonne à gauche. 2° Supposons un 1 pour troisième chiffre, il n'y a pas alors de retenue, etc.

Rien n'est plus facile que de continuer ainsi la démonstration, mais elle est longue à développer complètement; nous nous bornerons, pour abréger, à cette indication de la méthode.

J'avais d'abord cru avoir démontré la proposition plus générale suivante :

Tout nombre qui est doublement de la forme N, *c'est-à-dire qui est de la forme* $A + a$, A *ayant* n *chiffres, et de la forme* $B + b$, B *ayant* $n + 1$ *chiffres, est tel que* A *est pseudo-symétrique d'échelle* $x + 1$.

Je remercie M. le sous-intendant militaire Delannoy, qui m'a montré que je faisais une hypothèse implicite ($b_k + b_{n-k} < x$), laquelle restreignait la généralité du théorème, et m'a donné l'exemple suivant :

Si $A = 77500534$, si $B = 104000710$, on a

$$A + a = B + b = 121001111,$$

et A n'est pas pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$. C'est d'après cela que j'ai rectifié la démonstration et l'énoncé précédents.

Remarque. — Ce qui précède est vrai, quelle que soit la base x du système de numération, excepté dans le cas du système binaire, puisque nous avons supposé l'existence du caractère 2. Pour le système binaire, une étude toute différente doit être faite.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Le nombre de nombres de $n+1$ chiffres, qui sont doublement de la forme* N, *c'est-à-dire le nombre de nombres de $n+1$ chiffres, qui sont à la fois de la forme* $A+a$, A *ayant n chiffres et de la forme* $B+b$, B *ayant $n+1$ chiffres est le même, quelle que soit la base x du système de numération, lorsque cette base est plus grande que 2 et que l'on suppose que, dans* B, *la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes est plus petite que x.*

Cela résulte immédiatement de ce qui précède.

Ce nombre est égal au nombre de nombres pseudo-symétriques de n chiffres d'échelle $x+1$ (ou plus généralement d'échelle de même parité que $x+1$).

Car il est évident qu'il y a autant de nombres pseudo-symétriques de n chiffres d'échelle p que de nombres pseudo-symétriques de n chiffres d'échelle p', quels que soient p et p', pourvu que p et p' soient de même parité; d'après le problème I, si p est impair et p' pair, il y a deux fois plus de nombres pseudo-symétriques d'échelle p' que de nombres pseudo-symétriques d'échelle p.

En résumé :

Le nombre de ces nombres de $n+1$ chiffres qui sont doublement de la forme N, *c'est-à-dire le nombre de nombres de $n+1$ chiffres, qui sont à la fois de la forme* $A+a$, A *ayant n chiffres, et de la forme* $B+b$, B *ayant $n+1$ chiffres, en supposant que, dans* B, *la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes est plus petite que x, est :*

Si x est pair et $n=2m$, $2^{m-1}=2^{\frac{n}{2}-1}$;

Si x est pair et $n=2m+1$, $2^{m-1}=2^{\frac{n-1}{2}-1}$;

Si x est impair et $n=2m$, $2^{m-1}=2^{\frac{n}{2}-1}$;

Si x est impair et $n=2m+1$, $2^{m}=2^{\frac{n-1}{2}}$.

Ces résultats ne s'appliquent pas au système binaire qu'il faut étudier à part pour la recherche des nombres qui sont doublement de la forme N, car nous nous sommes servis du caractère 2, qui manque dans le système binaire. Je n'ai pas encore traité ce problème, j'ai seulement vérifié qu'il n'y a pas de nombres doublement de la forme N avant

$$\overset{9}{1001} = \overset{6}{110} + \overset{3}{011} = \overset{8}{1000} + \overset{1}{0001}\,;$$

qu'il n'y a pas de nombre de cinq chiffres qui soit doublement de la forme N; que

$$\overset{45}{101101} = \overset{30}{11110} + \overset{15}{01111} = \overset{36}{100100} \times \overset{9}{001001}$$

est le seul nombre de six chiffres qui soit doublement de la forme N; qu'il n'y a pas de nombre de sept chiffres qui soit doublement de la forme N; enfin que

$$10011001,\quad 1011101,\quad 1001001001,\quad 100101101001,\quad \ldots$$

sont doublement de la forme N, et que tous ces nombres sont symétriques.

Signalons encore l'intéressante question suivante :

A quel caractère reconnaît-on, dans la base x, qu'un nombre donné est de la forme N, *et, s'il est de la forme* N, *trouver la valeur* A?

J'ai déterminé, dans une Communication faite cette année au Congrès de l'Association française, à Blois, combien la somme $A + a$ prenait de valeurs différentes lorsque A a n chiffres. Si l'on se propose la question suivante : *Combien la somme* $A + a$ *prend-elle de valeurs différentes quand* A *varie de* 1 *à* x^n? La question se complique, parce qu'il faut ne compter qu'une fois les nombres qui sont doublement de la forme N, puisqu'on les rencontre comme somme $A + a$, A ayant n chiffres, et comme somme $A + a$, A ayant $n + 1$ chiffres. Nous rencontrerons d'abord, ainsi que nous venons de le voir, tous les nombres qui proviennent des nombres pseudo-symétriques d'échelle $x + 1$ dont cette Note donne le nombre, mais nous avons vu qu'il y en a encore d'autres; je n'ai pu trouver encore la loi de leur formation ni par suite essayer de les compter : c'est peut-être assez difficile.

La première fois que je me suis occupé de théorèmes où il s'agit de nombres et de ces nombres renversés, c'est au Congrès de Rouen, en 1883. Le général Parmentier a eu la bonté de me signaler, il y a quelques jours, dans le Mémoire relatif à cette Communication, une faute de calcul qui a donné lieu à une restriction inutile dans un des théorèmes énoncés; je saisis cette occasion de rectifier ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $K + K' = k + k'$, *si* K et K' *ont un nombre pair de chiffres, est que la somme de deux chiffres de même rang dans* K *et dans* K' *soit égale à la somme de leurs associés, c'est-à-dire des chiffres à égale distance des extrêmes dans* K *et dans* K' *que les chiffres considérés; s'ils ont un nombre impair de chiffres, il faut de plus que le chiffre du milieu soit commun.*

Cette restriction n'est nullement nécessaire; les chiffres du milieu de K et de K' peuvent, au contraire, être absolument quelconques.

L'erreur, qu'il eût été facile de reconnaître *a priori* sur des nombres, a été causée par cela que, dans l'équation (4) (*loc. cit.*), j'ai oublié d'écrire le terme $10^n a'_n$, et dans l'équation (5) le terme $10^n a_n$. La solution du problème qui suit ce théorème subit une légère modification trop facile à apercevoir pour qu'il y ait à insister ici sur ce point.