BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur un problème de probabilités

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 221-224
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__221_1>

Sur un problème de probabilités; par M. Halphen.

(Séance du 30 avril 1873)

Une tige se brise en n morceaux; quelle est la probabilité que ces n mor ceaux soient propres à former un polygone fermé?

Le cas le plus simple de ce problème, celui où le nombre n est égal à 3, a été traité par M. Lemoine, qui a trouvé $\frac{1}{4}$ pour la probabilité demandée.

Chaque événement possible est caractérisé par les longueurs x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$, des n morceaux dans lesquels se sépare la tige A de longueur a. On fait l'hypothèse que ces morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de 0 à a, et que la probabilité de chaque événement est la même ; c'est-à-dire que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Prenons une autre tige B de même longueur a, supposons que $n-1$ points s'y placent *au hasard*, et qu'on la brise en ces $n-1$ points. La probabilité d'obtenir de cette façon n morceaux donnés, et *disposés dans un ordre donné sur la tige*, est évidemment indépendante des longeurs de ces morceaux et de leur ordre. Car ce n'est pas autre chose que la probabilité que les $n-1$ points se placent en $n-1$ positions données sur la tige. Or cette probabilité ne dépend pas de ces positions, puisque les points se placent au hasard. Par suite, la probabilité d'obtenir, avec la tige B, n morceaux donnés, *indépendamment de leur ordre sur cette tige*, est égale à $1.2.3\ldots n$ fois cette dernière probabilité ; c'est-à-dire qu'elle est constante. D'ailleurs, sur la tige B, les morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de 0 à a. Donc la probabilité de chaque événement $[x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est la même avec les tiges A et B.

Pour que les n morceaux d'une tige soient propres à former un polygone, il faut et il suffit que chacun d'eux soit inférieur à la moitié de la tige. Il sera plus simple de considérer l'événement opposé, et de chercher la probabilité pour qu'un morceau soit supérieur à la moitié de la tige, condition qui ne peut être réalisée que par un seul morceau à la fois.

Il est clair que cette probabilité est la même pour les tiges A et B,

Supposons maintenant $n-1$ autres tiges $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, sur chacune desquelles $n-1$ points se placent de la façon suivante. Quand, sur la tige B, les morceaux sont, en tenant compte de leur ordre, à partir d'une extrémité déterminée, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ils seront les mêmes sur les autres tiges, mais dans l'ordre suivant à partir d'une extrémité déterminée sur chaque tige ; sur B_2 : $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1$; sur B_3 : $x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1, x_2$; sur B_i : $x_i, x_{i+1}, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}$; etc. On voit immédiatement que, sur chacune de ces tiges, considérée isolément, les $n-1$ points se placent au hasard. Par suite, pour chacune de ces tiges, la probabilité de l'événement dont il s'agit est la même que pour B et A.

Chaque fois qu'un des morceaux est plus grand que $\frac{a}{2}$, il y une des tiges B, $B_1, \ldots, B_{n-1}$ et une seule, sur laquelle le morceau ayant l'origine pour extrémité est supérieur à $\frac{a}{2}$. Par suite, la probabilité cherchée est égale à n fois celle que, *sur une tige* B, *où* $n-1$ *points se placent au hasard, le segment qui contient une extrémité donnée soit supérieur à la moitié de la tige.* Pour que cet événement se produise, il faut et il suffit que les $n-1$ points se placent dans la moitié de la tige contenant l'autre extrémité. Pour qu'un point donné s'y place, la probabilité est $\frac{1}{2}$. Pour qu'ils s'y placent tous, la probabilité est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2^{n-1}}$, et celle de l'événement opposé, qui fait l'objet du problème proposé, est $1-\frac{n}{2^{n-1}}$

Le même problème peut être également résolu par un calcul assez simple.

L'hypothèse est que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Elle est donc de la somme

$$\frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{A},$$

A étant une constante que nous allons déterminer.

Posons

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} &= S_{n-1}, \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2} &= S_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ x_1+x_2 &= S_2. \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ étant donnés, x_{n-1} peut varier dans toute l'étendue des valeurs qui rendent $x_n = a - S_{n-1}$ positif, c'est-à-dire de 0 à $a - S_{n-2}$; de même, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}$ étant donnés, x_{n-2} peut varier de 0 à $a - S_{n-3}$; etc. En sorte que l'on aura tous les cas possibles en faisant varier : x_{n-1} de 0 à S_{n-2}, x_{n-2} de 0 à $a - S_{n-3}, \ldots, x_2$ de 0 à $a - x_1$, et x_1 de 0 à a. Tous les cas seront répétés $1.2.3 \ldots n$ fois. Par suite, si l'on intègre la différentielle ci-dessus entre ces limites, on aura la probabilité totale de tous les événements possibles, c'est-à-dire *l'unité*, répétée $1.2.3 \ldots n$ fois.

On a d'ailleurs :

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_3 \ldots \int_0^{a-S_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-S_{n-2}} dx_{n-1} = \frac{a^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Par suite, $A = \frac{a_{n-1}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(n-1)}$.

Pour chercher la probabilité d'un événement défini par des limites spéciales attribuées aux variables, on intégrera la différentielle $dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$ entre les limites convenables. Soit X cette intégrale. Si, par le procédé suivi, chaque cas est répété M fois, la probabilité cherchée sera $\frac{X}{MA}$.

Si l'on demande la probabilité qu'un morceau soit supérieur à $\frac{a}{2}$, on fera varier x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2 entre les mêmes limites que précédemment, et x_1 de $\frac{a}{2}$ à a. Chaque événement est alors répété $1.2.3\ldots(n-1)$ fois. Donc la probabilité cherchée est $\frac{X}{1.2.3\ldots(n-1)A} = \frac{1.2\ldots n}{a_{n-1}} X$. Mais on a ici :

$$X = \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_2 \ldots \int_0^{a-S_{n-2}} dx_{n-1}$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \frac{(a-x_1)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} = \frac{a^{n-1}}{2^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}.$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2_{n-1}}$, ainsi qu'on l'a trouvé précédemment.