P. APPELL

Sur la chaînette sphérique

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 65-71
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__65_0>

Sur la chaînette sphérique; par M. Appell.

(Séance du 4 février 1885.)

M. Hermite a montré (*Journal de Crelle,* t. 85) que les coordonnées rectangulaires de l'extrémité d'un pendule sphérique peuvent être exprimées en fonction uniforme de temps à l'aide des fonctions Θ. J'ai remarqué qu'une méthode, analogue à celle de M. Hermite, peut être appliquée à la *chaînette sphérique,* c'est-à-dire à la courbe d'équilibre d'un fil homogème pesant posé sur la surface d'une sphère sur laquelle il peut glisser sans frottement.

Prenons pour origine le centre de la sphère, pour axe des z la verticale dirigée vers le bas; appelons a le rayon de la sphère, p le poids de l'unité de longueur du fil. Les équations d'équilibre seront les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+\mathrm{N}\frac{x}{a}=0,\\ &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)+\mathrm{N}\frac{y}{a}=0,\\ &\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)+\mathrm{N}\frac{z}{a}+p=0,\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$(1')\qquad x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Dans ces équations, T désigne la tension du fil au point (x, y, z) et $\mathrm{N}\,ds$ la réaction normale de la sphère sur l'élément de longueur ds.

On déduit immédiatement de ces équations

$$d\mathrm{T}+p\,dz=0,$$

d'où

$$(2)\qquad \mathrm{T}=p(h-z),$$

h désignant une constante arbitraire. En éliminant N entre les deux premières des équations (1), on obtient l'équation

$$d\left[\mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\right]=0,$$

qui donne

$$T(x\,dy - y\,dx) = C\,ds,$$

ou, en prenant des coordonnées polaires r et θ dans le plan xOy,

(3) $$T\,r^2\,d\theta = C\,ds,$$

C étant une constante arbitraire.

Remplaçons, dans cette équation, T par sa valeur (2) et faisons, pour abréger,

$$C = Ap\,;$$

nous avons

$$(h - z)\,r^2\,d\theta = A\,ds,$$

qui est l'équation différentielle de la figure d'équilibre. Pour intégrer cette équation, élevons les deux membres au carré et remarquons que

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2 = \frac{a^2\,dz^2}{r^2} + r^2\,d\theta^2,$$

à cause de la relation

$$r = \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Nous avons

$$r^4\,d\theta^2[(h - z)^2 r^2 - A^2] = A^2 a^2\,dz^2,$$

d'où

(4) $$d\theta = \frac{A\,a\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(h - z)^2(a^2 - z^2) - A^2}}\,;$$

on a ainsi θ en z par une quadrature.

Enfin, pour terminer l'exposition des formules déjà connues, calculons la réaction N. Il suffira, pour cela, de multiplier la première des équations (1) par x, la deuxième par y, la troisième par z et de les ajouter en remarquant que l'équation (1') donne, par la différentiation,

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$x\frac{d^2x}{ds^2} + y\frac{d^2y}{ds^2} + z\frac{d^2z}{ds^2} = -1\,;$$

nous avons ainsi

$$Na + pz - T = 0,$$

d'où, d'après la valeur (2) de T,

(5) $$N = \frac{p}{a}(h - 2z).$$

Ces formules résolvent complètement la question de Mécanique; voici maintenant comment on pourra exprimer les coordonnées x, y, z en fonction uniforme d'un paramètre u.

Posons

$$du = \frac{a\,dz}{\sqrt{(h-z)^2(a^2-z^2)-A^2}}, \tag{6}$$

d'où

$$d\theta = \frac{A\,du}{a^2-z^2}; \tag{6'}$$

la formule (3) nous donnera, si nous y remplaçons $d\theta$ par cette valeur (6′) et C par Ap,

$$\frac{du}{ds} = \frac{p}{T}. \tag{7}$$

Cette relation (7) nous montre que l'on a

$$T\frac{dx}{ds} = p\frac{dx}{du},$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = \frac{p^2}{T}\frac{d^2x}{du^2}.$$

La première des équations (1) peut donc s'écrire

$$p^2\frac{d^2x}{du^2} + TN\frac{x}{a} = 0$$

et, en remplaçant T et N par leurs valeurs (2) et (5),

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{(h-z)(h-2z)}{a^2}x = 0.$$

Le même calcul fournira pour y la même équation; donc x et y vérifient l'équation linéaire en V,

$$\frac{d^2V}{du^2} + \frac{(h-z)(h-2z)}{a^2}V = 0. \tag{8}$$

L'équation (6) donne z en fonction uniforme doublement périodique de u,

$$z = \varphi(u);$$

d'après cela, l'équation linéaire (8) est à coefficients doublement périodiques en u. On peut voir directement, d'après les principes posés par M. Fuchs, que l'intégrale générale de cette équation est uniforme en u; donc, d'après un théorème de M. Picard, l'intégrale générale V, c'est-à-dire x et y, pourra s'exprimer par des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. Mais il est facile d'exprimer x et y en fonction de u par des quadratures. On a, en effet, d'après (6'),

$$\theta = A\int\frac{du}{a^2 - z^2}; \tag{9}$$

d'ailleurs,

$$\begin{cases} x + yi = re^{\theta i} = \sqrt{a^2 - z^2}\, e^{Ai\int\frac{du}{a^2-z^2}}, \\ x - yi = re^{-\theta i} = \sqrt{a^2 - z^2}\, e^{-Ai\int\frac{du}{a^2-z^2}}. \end{cases} \tag{10}$$

En effectuant les quadratures indiquées, on trouvera

$$x + yi, \quad x - yi,$$

exprimés en u par des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. C'est ce que nous allons montrer rapidement.

L'équation (6) donne, en faisant l'inversion,

$$z = \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction doublement périodique du second ordre dont je désignerai les périodes par $2K$, $2iK'$. Dans un parallélogramme des périodes, cette fonction admet deux infinis que j'appellerai α et β; soit u_1 une racine de l'équation $z = a$ ou

$$\varphi(u) - a = 0;$$

cette équation admettra une deuxième racine

$$u'_1 = \alpha + \beta - u_1;$$

et comme, d'après l'équation (6), on a

$$a\varphi'(u) = \sqrt{(h - z)^2(a^2 - z^2) - A^2},$$

on voit que

$$\varphi'(u_1) = \frac{iA}{a}, \quad \varphi'(u'_1) = -\frac{iA}{a}, \tag{11}$$

car $a^2 - z^2$ s'annule pour $u = u_1$, $u = u'_1$.

Soit de même u_2 une racine de l'équation

$$z = -a, \quad \varphi(u) + a = 0;$$

cette équation admettra une deuxième racine

$$u'_2 = \alpha + \beta - u_2,$$

et l'on aura encore

$$(11') \qquad \varphi'(u_2) = \frac{iA}{a}, \quad \varphi'(u'_2) = -\frac{iA}{a}.$$

On a donc, en désignant par P et Q deux *constantes*,

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} a - z &= P\frac{H(u-u_1)H(u-u'_1)}{H(u-\alpha)H(u-\beta)}, \\ a + z &= Q\frac{H(u-u_2)H(u-u'_2)}{H(u-\alpha)H(u-\beta)}; \end{aligned} \right.$$

ces constantes pourraient être déterminées à l'aide de l'une ou de l'autre des équations (11) ou (11').

Pour calculer θ en fonction de u, nous nous servirons de l'équation (9). On a

$$\frac{A}{a^2 - z^2} = \frac{A}{2a}\left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z}\right).$$

Or, d'après la formule de décomposition en éléments simples,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-z} &= -\frac{Z(u-u_1)}{\varphi'(u_1)} + \frac{Z(u-u'_1)}{\varphi'(u'_1)} + B, \\ \frac{1}{a+z} &= \frac{Z(u-u_2)}{\varphi'(u_2)} + \frac{Z(u-u'_2)}{\varphi'(u'_2)} + D; \end{aligned}$$

donc, d'après les équations (11) et (11'),

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{A}{a^2 - z^2} = \frac{i}{2}[&-Z(u-u_1) + Z(u-u'_1) \\ &+ Z(u-u_2) - Z(u-u'_2) + G], \end{aligned} \right.$$

G désignant une constante que l'on peut déterminer en remarquant que les deux membres de l'équation (13) doivent s'annuler pour $z = \alpha$.

L'équation (9) donne alors

$$\theta = \theta_0 + \frac{i}{2}\left[\log\frac{H(u-u'_1)H(u-u_2)}{H(u-u_1)H(u-u'_2)} + Gu\right],$$

et

$$(14) \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta_0 - \frac{G}{2}u}\sqrt{\frac{H(u-u_1)H(u-u'_2)}{H(u-u'_1)H(u-u_2)}}.$$

En remplaçant, dans les formules (10),

$$\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{(a-z)(a+z)} \quad \text{et} \quad e^{\theta i}$$

par leurs valeurs (12) et (14), on a enfin

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} x+yi &= \mathrm{R}e^{-\frac{\mathrm{G}u}{2}}\frac{\mathrm{H}(u-u_1)\mathrm{H}(u-u_2')}{\mathrm{H}(u-\alpha)\mathrm{H}(u-\beta)},\\ x-yi &= \mathrm{R}_1e^{-\frac{\mathrm{G}u}{2}}\frac{\mathrm{H}(u-u_2)\mathrm{H}(u-u_1')}{\mathrm{H}(u-\alpha)\mathrm{H}(u-\beta)}, \end{aligned}\right.$$

R et R_1 désignant les constantes

$$\sqrt{\mathrm{PQ}}\,e^{i\theta_0},\quad \sqrt{\mathrm{PQ}}\,e^{-i\theta_0}.$$

Nous avons ainsi

$$x+yi \quad \text{et} \quad x-yi$$

en fonction uniforme de u. Calculons, pour terminer, l'arc s en fonction de u. On a, d'après (7),

$$ds = \frac{\mathrm{T}}{p}du = (h-z)du.$$

Or la décomposition en éléments simples donne encore

$$h-z = \mathrm{M}[\mathrm{Z}(u-\alpha)-\mathrm{Z}(u-\beta)]+\mathrm{S},$$

M étant le résidu de $-z$ relatif à l'infini $u=\alpha$ et S une constante,

$$\mathrm{M} = -\lim(u-\alpha)z = -\lim\frac{u-\alpha}{\frac{1}{z}}$$

pour $u=\alpha$, c'est-à-dire

$$\mathrm{M} = \lim\frac{z^2}{z'}$$

pour $z=\infty$.

Comme

$$z' = \frac{\sqrt{(h-z)^2(a^2-z^2)-\mathrm{A}^2}}{a},$$

on voit que

$$\mathrm{M} = -ai.$$

Donc

$$h-z = ai[\mathrm{Z}(u-\beta)-\mathrm{Z}(u-\alpha)]+\mathrm{S}$$

et

$$(16)\qquad s = ai\log\frac{\mathrm{H}(u-\beta)}{\mathrm{H}(u-\alpha)}+\mathrm{S}u+\text{const.}$$

Je me propose, dans une autre Communication, de déterminer la fonction $\varphi(u)$ et d'achever les calculs de façon à exprimer les éléments de la courbe en quantités réelles et à discuter la question de Mécanique.

M. Rouché demande la parole à propos d'une Note qu'il vient de lire dans le dernier fascicule du *Bulletin* de la Société (séance du 12 novembre 1885), et où il est question de l'application à un problème d'ombres d'une propriété de deux quadriques inscrites dans une troisième. M. Rouché fait observer que cette application n'est pas nouvelle, qu'il la donne régulièrement sous la même forme dans ses Leçons depuis 1862, et qu'enfin elle se trouve depuis quelques années imprimée dans plusieurs Ouvrages très répandus et enseignée dans tous les Cours de Mathématiques spéciales de Paris.

M. Lebon, à qui nous avons communiqué la Note précédente, nous écrit ce qui suit : « Comme la Note que vous voulez bien me communiquer a été commentée en séance publique sans que j'eusse été averti, il est naturel qu'elle paraisse au *Bulletin* sans que j'y réponde à présent. Mais, dans le prochain numéro du *Bulletin,* je répondrai aux attaques dont mon article est l'objet. »
