J. DERUYTS

Sur la valeur du reste des formules d'approximation pour le calcul des intégrales définies

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 151-156
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__151_1>

Sur la valeur du reste des formules d'approximation pour le calcul des intégrales définies; par M. J. Deruyts.

(Séance du 3 novembre 1886.)

M. Mansion a fait connaître récemment l'expression du reste dans la formule de quadrature de Gauss (1). Je me propose d'indiquer, dans cette Note, un résultat plus général pour les formules d'approximation des intégrales définies.

L'emploi des fonctions interpolaires rapproche l'analyse suivante de celle qui a été exposée par le savant Professeur de l'Université de Gand.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1886, p. 412; *Bulletin de l'Académie de Belgique* (avril 1886).

I. Je désignerai par $\varphi(x)$ une fonction régulière entre les limites réelles a et b, $(a < b)$, et par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ deux groupes de quantités distinctes comprises entre a et b; soient

$$P(x) = \Pi(x-\alpha_i), \qquad p(x) = \Pi(x-\beta_i).$$

La fonction interpolaire de $\varphi(x)$ par rapport aux quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ est représentée par

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\dfrac{\varphi(\alpha_i)-\varphi(x)}{\alpha_i - x}}{P'(\alpha_i)\,p(\alpha_i)} + \frac{\dfrac{\varphi(\beta_i)-\varphi(x)}{\beta_i - x}}{P(\beta_i)\,p'(\beta_i)} \right].$$

D'après un théorème de Cauchy [1], on a

$$\psi = \frac{1}{1.2.3\ldots 2n}\,\varphi^{2n}(\zeta),$$

ζ étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$x, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n; \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n.$$

La démonstration de ce théorème suppose les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, α_n; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ distinctes entre elles. Pour ce qui suit, il est nécessaire de connaître la valeur de ψ quand on fait $\alpha_i = \beta_i$.

Je prendrai d'abord $\beta_i = \alpha_i + \theta$: la quantité ψ devient alors

$$(1) \qquad \chi(\theta, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(\alpha_i)} \left[\frac{\dfrac{\varphi(\alpha_i)-\varphi(x)}{\alpha_i - x}}{P(\alpha_i - \theta)} + \frac{\dfrac{\varphi(\alpha_i+\theta)-\varphi(x)}{\alpha_i+\theta - x}}{P(\alpha_i+\theta)} \right].$$

En posant

$$F(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)-\varphi(x)}{\alpha - x},$$

on a encore

$$\begin{aligned}
\chi(\theta, x) &= \sum \frac{1}{P'(\alpha)}\, \frac{F(\alpha)P(\alpha+\theta) + F(\alpha+\theta)P(\alpha-\theta)}{P(\alpha-\theta)P(\alpha+\theta)} \\
&= \sum \frac{1}{P'(\alpha)}\, \frac{\theta^2[2F(\alpha)P''(\alpha) - 2F'(\alpha)P'(\alpha)] + \theta^3[F'P'' - F''P'] + \ldots}{-\theta^2.2P'^2(\alpha) + \dfrac{\theta^4}{6}[-4P'(\alpha)P'''(\alpha) + 3P''^2(\alpha)] + \ldots}.
\end{aligned}$$

Au moyen de la dernière formule, on voit que $\chi(0, x)$ est une

---

[1] *Œuvres de Cauchy*, t. V, p. 409.

quantité finie; de plus, pour les valeurs de θ voisines de zéro, $\chi(\theta, x)$ varie d'une manière continue. On peut donc trouver une quantité ε infiniment petite, telle que l'on ait

$$\chi(0, x) = \chi(\varepsilon, x) + \frac{\eta}{1.2.3\ldots 2n},$$

η étant une quantité infiniment petite ou nulle ([1]).

D'après la formule de Cauchy, on a

$$\chi(\varepsilon, x) = \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3\ldots 2n}$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \chi(0, x) = \frac{\varphi^{2n}(\zeta) + \eta}{1.2.3\ldots 2n} = \frac{\varphi^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n}$$

si l'on désigne par ξ une quantité comprise entre les mêmes limites que ζ.

On voit par là que le théorème de Cauchy est applicable à la fonction interpolaire relative aux quantités α_i et β_i quand on fait $\alpha_i = \beta_i$.

II. Soit $f(x)$ une fonction finie continue et différente de zéro entre les limites a, b; la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

peut être représentée approximativement par

$$\mathrm{I}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\,\varphi(\alpha_i).$$

Dans cette formule, les coefficients A_i sont indépendants de la forme de $\varphi(x)$: ils sont déterminés par cette condition, que la différence $\mathrm{I} - \mathrm{I}_1$ est nulle pour

$$\varphi(x) = x^p \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

La formule d'approximation est la plus précise quand on prend,

---

([1]) Quand $\varphi(x)$ est un polynôme de degré inférieur à $2n+1$, la quantité η est nulle : cela résulte de la formule (1).

pour le polynôme $\Pi(x-\alpha_i)$, le dénominateur P_n de la $n^{\text{ième}}$ réduite dans le développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz = \int_a^b f(z) \sum \frac{z^k}{x^{k+1}}\,dz \quad (^1).$$

Dans ce cas, la formule $I = I_1$ est exacte quand $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $(2n-1)$.

On trouve, de différentes manières,

$$I_1 = c_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(\alpha_i)}{P'_n(\alpha_i)\,P_{n-1}(\alpha_i)},$$

c_n étant un facteur numérique.

Je remarque que l'on peut écrire

$$\varphi(x) = \Pi_{2n-1}(x) + P_n^2(x)\,\chi(0, x),$$

si l'on désigne par Π_{2n-1} un polynôme du degré $2n-1$; $\chi(0, x)$ représente, comme précédemment, la fonction interpolaire de $\varphi(x)$ par rapport aux $2n$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2, \ldots, \beta_n = \alpha_n$.

En observant que l'on a

$$\int_a^b f(x)\,\Pi_{2n-1}(x)\,dx = \sum A_i\,\Pi_{2n-1}(\alpha_i) = \sum A_i\,\varphi(\alpha_i),$$

j'obtiens

$$I - I_1 = \int_a^b f(x)\,P_n^2(x)\,\chi(0, x)\,dx$$

ou bien

$$I - I_1 = \chi(0, x_1)\int_a^b f(x)\,P_n^2(x)\,dx \quad (a < x_1 < b).$$

Au moyen de la formule (2), on a, par suite,

$$I - I_1 = \frac{\varphi^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n}\int_a^b f(x)\,P_n^2(x)\,dx;$$

la quantité ξ est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs $x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: elle est donc intermédiaire entre a et b.

(1) Heine, *Traité des fonctions sphériques*, t. II, p. 22 (2e édition, 1881).

Le reste R de la formule d'approximation

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = c_n \sum \frac{\varphi(\alpha)}{P'(\alpha)\,P_{n-1}(\alpha)} + R$$

est donc représenté par

$$(4) \qquad R = \frac{\varphi^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n} \int_a^b f(x)\,P_n^2(x)\,dx \quad (a < \xi < b).$$

Cas particuliers. — Soient $f(x) = 1$, $a = -1$, $b = +1$; le polynôme P_n ne diffère de la fonction X_n de Legendre que par un facteur numérique. La formule (3) se ramène immédiatement à la formule de Gauss.

La formule (4) donne

$$I - I_1 = \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3..\ 2n} \times \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(2n-1)}\right]^2 \quad (-1 < \zeta < +1):$$

c'est le résultat auquel M. Mansion est parvenu.

Une autre application intéressante se rapporte à la formule d'approximation

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1}\varphi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + R,$$

démontrée dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite.

On a, dans ce cas,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n(\operatorname{arc}\cos x)$$

et

$$R = \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3\ldots 2n}\,\frac{1}{4^{n-1}}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos^2 n(\operatorname{arc}\cos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\,\frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3\ldots 2n},$$

$$(-1 < \zeta < +1).$$

III. La méthode indiquée ci-dessus s'applique très simplement à la généralisation de la formule de *Cotes*.

Soit $F(x)$ une fonction régulière dans l'intervalle ab; soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n quantités distinctes comprises dans ce même intervalle.

L'intégrale

$$\int_a^b F(x)\varphi(x)\,dx$$

peut être représentée, avec le degré de précision n, par

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\,\varphi(a_i);$$

quand les quantités a_i sont données, on détermine les coefficients A_i par les conditions

$$\int_a^b F(x)x^p\,dx = \sum A\,a^p \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Soit

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = \Pi(x);$$

on trouve, comme précédemment, pour le reste de la formule d'approximation,

$$R = \int_a^b F(x)\,\Pi(x)\times\lambda(x)\,dx \quad (^1),$$

si l'on désigne par $\lambda(x)$ la fonction interpolaire de $\varphi(x)$ par rapport aux quantités a_1, a_2, ..., a_n.

Par l'application du théorème de Cauchy, on trouve

$$R = \frac{b-a}{1.2.3\ldots n}F(\xi)\,\Pi(\xi)\times\varphi^n(\zeta) \quad \begin{pmatrix} a<\xi<b \\ a<\zeta<b \end{pmatrix}.$$

Cette formule est, du reste, susceptible d'expressions plus simples ou plus précises, suivant la forme de $F(x)$ et suivant les valeurs de a_1, a_2, ..., a_n.

---

(1) Cette formule a été employée dans un cas particulier par M. Mansion.