BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

# Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 15 (1887), p. 42-44
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__42_0>

*Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations;* par M. C.-A. Laisant.

(Séance du 2 février 1887.)

Le théorème fondamental de la théorie des équations : *Toute équation algébrique à coefficients réels ou imaginaires a une racine* a été démontré par Cauchy. Toutefois, sa démonstration prête à certaines objections, un peu spécieuses peut-être, mais qui ont cependant provoqué l'attention des géomètres.

M. Walecki en a donné une démonstration irréprochable, laquelle est purement analytique, mais assez compliquée. Peut-être faut-il voir, dans cette complication, l'explication de ce fait que la démonstration, après avoir figuré pendant un certain temps dans les programmes des Cours de Mathématiques spéciales, en est actuellement exclue, comme elle l'était jadis.

Au point de vue de la doctrine, il est assurément regrettable que l'on soit contraint d'admettre comme postulatum, dans l'enseignement, une vérité qui est loin d'être évidente par elle-même.

Il semble cependant possible d'établir la démonstration dont il s'agit, d'une façon simple, pour ainsi dire intuitive, et qui repose essentiellement sur la notion de continuité. Tel est l'objet de la présente Note.

Soit

$$y = f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique, dans laquelle nous pouvons toujours supposer que le coefficient du premier terme est égal à l'unité. Représentons, à la manière habituelle, les valeurs de $x$ et de la fonction $y$ par des droites issues d'une origine fixe, droites ayant pour longueurs les modules et pour inclinaisons sur une direction fixe les arguments.

Lemme. — *Lorsque l'extrémité de $x$ décrit, autour de l'origine comme centre, une circonférence de rayon suffisamment grand, l'extrémité de $y$ décrit, autour de l'origine, une courbe fermée, aussi éloignée de l'origine qu'on le voudra, dans toutes ses parties.*

Nous pouvons écrire

$$y = x^m \left( 1 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m}{x^m} \right).$$

Si nous remplaçons $x$ par $r\varepsilon^\theta$,

$$(2) \qquad y = r^m \varepsilon^{m\theta} \left( 1 + \frac{A_1}{r} \varepsilon^{-\theta} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \varepsilon^{-(m-1)\theta} + \frac{A_m}{r^m} \varepsilon^{-m\theta} \right).$$

Lorsque $r$ augmente sans limite, le module de $y$ croît de même indéfiniment. De plus, pour une valeur donnée de $\theta$, il est clair que l'argument de $y$ tend vers $m\theta$ lorsque $r$ augmente sans limite, puisque le facteur entre parenthèses tend vers l'unité, dans le second membre de la relation (2).

Donc, à toute direction d'inclinaison $\theta$ pour $x$, correspondra pour $y$ une direction d'inclinaison aussi rapprochée qu'on le voudra de $m\theta$, pourvu que $r$ soit suffisamment grand. Il y aura ainsi une valeur de $y$ ayant pour direction celle d'une droite quelconque issue de l'origine.

Le lemme en démonstration est donc établi.

Il est d'ailleurs utile de faire remarquer que la courbe fermée décrite par l'extrémité de $y$ présentera, autour de l'origine, $m$ circonvolutions et non pas une seule.

Théorème. — *L'équation $y = 0$ a une racine.*

Posons $z = y - A_m$. Lorsque le module de $x$ tend vers zéro, le module de $z$ tend vers zéro. Donc, lorsque l'extrémité de $x$ décrit autour de l'origine une circonférence de rayon très petit, l'extrémité de $y$ décrira une très petite courbe fermée, voisine du point $A_m$, représentatif du terme $A_m$.

Lorsque l'extrémité de $x$ décrit autour de l'origine une circonférence de rayon suffisamment grand, l'extrémité de $y$, en vertu du lemme ci-dessus démontré, décrira une courbe fermée, aussi éloignée qu'on voudra, autour de l'origine et, partant, autour de $A_m$.

Donc, la circonférence décrite par l'extrémité de $x$ autour de l'origine augmentant d'une façon continue, la courbe fermée autour de $A_m$ augmentera aussi indéfiniment, et par suite arrivera à passer par l'origine O. On aura donc, pour cette position spéciale,

$$z = A_m O = -A_m,$$

et par conséquent $y = 0$, pour une certaine valeur de $x$.

Donc l'équation $y = 0$ a une racine.

Remarque. — *Cette démonstration repose sur la continuité de la fonction $y$; nous n'avons pas cru nécessaire de démontrer cette continuité, parce qu'elle s'établit par les moyens les plus élémentaires et s'applique tout aussi bien aux quantités imaginaires qu'aux quantités réelles. La formule de Taylor est en effet applicable à cette fonction, et se présente sous forme d'une suite limitée au lieu d'une série indéfinie, ce qui simplifie encore les choses.*