Bulletin de la S. M. F.

Maurice d'Ocagne

Sur une notation utile en algèbre et en analyse

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 156-158
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__156_1>

Sur une notation utile en Algèbre et en Analyse;
par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 20 avril 1887.)

On rencontre très fréquemment, en Mathématiques, certaines expressions tout à fait analogues au développement du binôme (ou d'un polynôme), en ce sens que les coefficients y sont les mêmes, mais que les exposants y sont remplacés, soit par des indices d'ordre, soit par des indices de dérivation.

On est alors dans l'habitude de condenser ces expressions sous forme de binôme (ou de polynôme) élevé à une certaine puissance, en ajoutant qu'on les met sous *forme symbolique*. Dans beaucoup de cas, cette convention suffit, mais non pas toujours. Elle peut amener certaine confusion, par exemple si, dans le même travail, les mêmes lettres figurent affectées tantôt d'exposants, tantôt d'indices de dérivation, ou bien encore si, au cours d'un long Mémoire, le lecteur, dont l'esprit est attiré sur d'autres points, vient à oublier le *sens conventionnel* attribué à certaines expressions. Ces faits nous ont frappé au cours de récentes recherches, et nous avons reconnu, sinon la nécessité absolue, du moins la grande utilité qu'il y aurait à convenir d'un signe particulier destiné à mettre en relief le côté conventionnel des expressions que nous avons en vue. Nous nous sommes arrêté à certain signe qui nous a paru à la fois simple, parlant à l'esprit et facile à réaliser en typographie. Nous en soumettons ici l'idée aux mathématiciens, qui jugeront s'il y a lieu de l'admettre et d'en généraliser l'emploi. Voici quel est ce signe :

Si une lettre figure, dans l'expression développée, avec des indices d'ordre (placés en bas) remplaçant les exposants, nous l'écrirons, dans l'expression condensée, soulignée d'un petit trait.

Si elle figure, dans l'expression développée, avec des indices de dérivation (placés en haut) remplaçant les exposants, nous l'écrirons, dans l'expression condensée, surmontée d'un trait.

En d'autres termes :

$\underline{Z}^m$ sera supposé être la même chose que Z_m.

$\overline{Z}^m$ sera supposé être la même chose que $Z^{(m)}$.

Avec cette double convention, pas d'erreur possible.

Veut-on, par exemple, écrire que les nombres d'Euler peuvent se calculer, par voie récurrente, au moyen de la relation (¹)

$$\left[E_m + \frac{m}{1} E_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} E_{m-2} + \ldots + E_0\right] + \left[E_m - \frac{m}{1} E_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} E_{m-2} - \ldots + (-1)^m E_0\right] = 0,$$

on écrira

$$(\underline{E} + 1)^m + (\underline{E} - 1)^m = 0.$$

La formule de Leibnitz, donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit $u = zy$, s'écrira

$$u^{(n)} = (\bar{z} + \bar{y})^n.$$

Pour représenter symboliquement (²)

$$a_0 w^{(\mu)} - \mu p a_1 w^{(\mu-1)} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^2 a_2 w^{(\mu-2)} - \ldots + (-1)^\mu a_\mu w,$$

on aura

$$(\bar{w} - p\underline{a})^\mu.$$

L'expression (1) du théorème I de la Note où M. R. Perrin généralise d'une façon si remarquable (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 1097) le théorème que j'avais précédemment donné sur les péninvariants

(¹) *Nouv. Ann. de Math.*, 3ᵉ série, t. V, p. 309.
(²) *Comptes rendus*, t. CIV, p. 964.

des formes binaires s'écrira, avec la nouvelle notation,

$$[\varpi_p, \varpi_q]_r = (p\bar{\varpi}_q - q\bar{\varpi}_p)^r.$$

On pourrait indéfiniment multiplier de tels exemples, car les expressions de ce genre se rencontrent, pour ainsi dire, à chaque pas, soit en Algèbre, soit en Analyse. Mais les exemples qui viennent d'être donnés, particulièrement les derniers, suffisent à faire saisir l'utilité de la convention que nous proposons. Si elle était admise définitivement et introduite dans l'usage courant, le langage algébrique y gagnerait en netteté. C'est là le seul résultat que nous nous soyons proposé en publiant cette remarque.