CARVALLO

Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 158-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__158_1>

Exposition d'une méthode de M. Caspary, pour l'étude des courbes gauches; par M. CARVALLO.

(Séance du 18 mai 1887.)

1. Dans le 100e Volume du *Journal de Crelle,* M. Caspary a publié, sur la génération des courbes gauches algébriques, un Mémoire qu'il a signalé à la Société mathématique dans la séance du 20 avril. La remarquable méthode employée par M. Caspary est purement intuitive; elle repose sur une généralisation, qui logiquement s'impose, des notations ordinaires de la Géométrie, et s'adapte merveilleusement à la Géométrie de position. Mais sa portée est plus grande encore, car les principes qui lui servent de base formeraient, d'après l'auteur, le lien entre la Géométrie pure et la Géométrie analytique et se prêteraient également bien aux études entreprises dans ces deux sens.

2. Systématisant une notation familière en Géométrie, M. Caspary désigne par

AB la droite qui joint les points A et B;
$\alpha\beta$ la droite d'intersection des plans α et β;
Aa le plan qui passe par le point A et la droite a;
αa le point d'intersection du plan α et de la droite a.

En résumé, par la juxtaposition des lettres qui désignent les éléments simples, l'auteur représente l'élément qui résulte ou de la jonction ou de l'intersection des éléments primitifs. Il est dès lors conduit à représenter un nombre arbitraire de constructions successives par la juxtaposition de symboles représentant des points, des droites et des plans. De cette façon, si l'on désigne ces éléments respectivement par des majuscules, des minuscules et des lettres grecques et qu'on adopte, comme en Algèbre, l'usage des parenthèses, l'expression

$$(\mathrm{X}ab)(\mathrm{X}c\alpha)$$

symbolise la construction suivante :

1° On mène le plan passant par le point X et la droite a, $\mathrm{X}a$;
2° On prend l'intersection du plan $\mathrm{X}a$ avec la droite b, $\mathrm{X}ab$;
3° et 4° On construit de même l'expression $\mathrm{X}c\alpha$ qui représente une droite;
5° On mène le plan passant par le point $\mathrm{X}ab$ et la droite $\mathrm{X}c\alpha$.

En définitive, $(\mathrm{X}ab)$ $(\mathrm{X}c\alpha)$ représente un plan qu'on sait trouver.

3. L'auteur appelle dérivé d'un élément variable point, droite ou plan, par exemple d'un point X, un autre élément représenté par une expression telle que la précédente où entre X. Je me permettrai de plus de dire qu'il est dérivé d'ordre n si X entre n fois dans l'expression de cet élément dérivé. Cette nouvelle définition se justifie comme il suit.

Soit d'abord une expression où l'élément variable entre une seule fois, par exemple

$$\mathrm{A}\,a\alpha\mathrm{X}\ldots.$$

Je dois effectuer la construction $\mathrm{A}a\alpha$ qui donne une certaine droite b; l'expression s'écrit alors

$$b\mathrm{X}\ldots \quad \text{ou} \quad \mathrm{X}b\ldots$$

Ainsi l'élément variable peut toujours être amené en tête de l'expression donnée. Je laisserai maintenant au lecteur le soin de vérifier les résultats suivants [1] :

XA représente une droite dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de X.

Xα représente un plan dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de X.

ξA représente une droite dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de ξ.

$\xi\alpha$ représente un point dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de ξ.

xA représente un plan dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de x.

$x\alpha$ représente un point dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de x.

Dans le premier groupe, on considère les coordonnées ponctuelles de la droite XA; dans le deuxième groupe, les coordonnées tangentielles de la droite $\xi\alpha$; dans le troisième groupe, les coordonnées de la droite x sont arbitrairement des coordonnées tangentielles ou ponctuelles.

Toutes les combinaisons sont examinées dans le Tableau précédent; dès lors :

1° Si l'on effectue une suite de constructions en faisant entrer une seule fois un élément variable, un point X par exemple, tous les éléments qu'on obtiendra successivement auront leurs coordonnées linéaires homogènes par rapport à celles de X.

2° Si l'on fait entrer n éléments $X_1, X_2, \ldots, X_n$ chacun une fois, l'élément dérivé aura des coordonnées linéaires homogènes par rapport aux coordonnées de chacun de ces éléments.

3° Si l'on fait entrer n fois un élément X, l'élément dérivé aura ses coordonnées homogènes de degré n par rapport à celles de X.

4. Par une convention de l'auteur,

$\lambda N = 0$ exprime que le point N est dans le plan λ;

---

(1) Je considère pour le point des coordonnées homogènes; les coordonnées du plan sont les quatre coefficients de son équation; enfin j'appelle *coordonnées ponctuelles* de la droite les six déterminants formés avec les coordonnées des deux points; *coordonnees tangentielles* de la droite les six déterminants formés avec les coordonnées des deux plans qui définissent la droite.

$ln = o$ exprime que les droites l et n sont dans un même plan;
$lN = o$ exprime que le point N est sur la droite l;
$l\nu = o$ exprime que le plan ν contient la droite l.

Je ferai à ce sujet les remarques suivantes :

1° $\lambda N = o$ se traduit en géométrie cartésienne par une équation linéaire homogène par rapport aux coordonnées de λ et aussi par rapport à celles de N. Si, en particulier, les éléments λ et N sont respectivement dérivés d'ordres p et q, d'un point X, $\lambda N = o$ représente l'équation ponctuelle d'une surface de degré $p + q$. Mais λ et N peuvent être dérivés d'un plan ou d'une droite, de façon que $\lambda N = o$ représente, dans ces cas, une équation tangentielle ou relative à l'espace réglé.

2° Considérons $ln = o$. Si une des droites est définie par deux points, soit par exemple $n = MN$, l'égalité signifie que les deux droites l et MN sont dans un même plan ou, ce qui revient au même, que le plan $\lambda = lM$ contient le point N. On est alors ramené à la forme $\lambda N = o$ déjà examinée.

Si, au contraire, les deux droites sont définies par des intersections de plans, soient

$$l = \lambda\mu, \qquad n = \nu\varpi,$$

l'égalité $ln = o$ signifie que les deux droites $\lambda\mu$ et $\nu\varpi$ sont dans un même plan ou, ce qui revient au même, que le plan λ passe par le point $\mu\nu\varpi = N$. On est encore ramené à la forme précédente $\lambda N = o$.

3° Pour $lN = o$, deux cas se présentent suivant que la droite l est définie par l'intersection de deux plans λ et μ ou par deux points L et M. Dans le premier cas, le point N étant sur la droite $\lambda\mu$ est à la fois dans chacun des deux plans λ et μ, c'est-à-dire que l'égalité $lN = o$ se décompose en deux autres, savoir

$$\lambda N = o, \qquad \mu N = o,$$

qui sont de la première forme examinée.

Dans le second cas, je considère deux points arbitraires, mais fixes, A et B; la droite $l = LM$ est l'intersection des plans $\lambda = LMA$, $\mu = LMB$ et l'on est ramené au premier cas.

4° L'égalité $l\nu = o$ se traite comme la précédente à laquelle

elle correspond par le principe de dualité. Elle donne encore lieu à deux équations dont on évaluera facilement les degrés.

5. Si, en particulier, les éléments l et N sont dérivés d'un point mobile X, l'égalité $l\mathrm{N} = 0$ équivaut aux équations de deux surfaces algébriques et, par conséquent, représente la courbe algébrique qui résulte de leur intersection. Il en est de même pour $l\nu = 0$.

J'ai cru devoir remplacer par les remarques précédentes l'exposition de M. Caspary, parce que ces remarques forment une discussion intéressante et que de plus la démonstration de l'auteur est basée sur un théorème de Grassmann qui peut être ignoré du lecteur. Voici maintenant les applications que l'auteur fait de cette théorie à la génération des cubiques.

6. Soit l'égalité

$$(\mathrm{X}a_1a_2)(\mathrm{X}b_1b_2)(\mathrm{X}g) = 0. \tag{1}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}a_1a_2, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{X}b_1b_2, \tag{2}$$

l'égalité (1) exprime que le plan $\mathrm{X}g$ contient la droite PQ et, par suite, chacun des points P et Q; elle se décompose donc en deux autres, savoir

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}g) = 0, \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{X}g) = 0. \tag{3}$$

L'auteur interprète ces formules des trois façons suivantes :

I. — 1° D'après la première égalité (2), le point P est dans le plan $\mathrm{X}a_1$; donc PX coupe a_1 ;

2° D'après la même égalité, le point P est sur la droite a_2 ; donc PX coupe a_2.

3° D'après la première égalité (3), le point P est dans le plan $\mathrm{X}g$; donc PX coupe g.

PX rencontrant les trois droites a_1, a_2, g décrit un hyperboloïde. De même QX décrit l'hyperboloïde qui a pour directrices b_1, b_2, g. Donc, X décrit l'intersection de ces deux hyperboloïdes et, comme ceux-ci ont la génératrice commune g, cette intersection est une cubique.

II. — 1° Le plan PQX passe par la droite g, d'après les égalités (3).

2° Le point P décrit la droite a_2 et Q la droite b_2, d'après les égalités (2).

3° La droite PX s'appuie sur a_1 et QX sur b_1, d'après les égalités (2).

Donc :

1° *Si le plan d'un triangle* PQX *tourne autour d'une droite fixe* g,

2° *Si les deux sommets* P *et* Q *décrivent respectivement des droites fixes* a_2 *et* b_2,

3° *Si les deux côtés* PX *et* QX *s'appuient sur deux droites fixes* a_1 *et* b_1,

Le troisième sommet X *décrit une cubique.*

III. — P est dans le plan Xg, d'après la première égalité (3); P est dans le plan Xa_1, d'après la première égalité (2).

Donc P est sur l'intersection $(Xa_1)(Xg)$ de ces deux plans; d'ailleurs P est sur a_2 d'après la première égalité (2).

P étant sur la droite $(Xa_1)(Xg)$ et sur la droite a_2, ces deux droites se coupent et l'on a

$$(Xa_1)(Xg)a_2 = 0, \qquad \text{et de même} \qquad (Xb_1)(Xg)b_2 = 0.$$

Donc :

1° *Si les trois faces* Xa_1, Xb_1, Xg *d'un trièdre pivotent autour de trois droites fixes* a_1, b_1, g,

2° *Si les deux arêtes* (Xa_1), (Xg) *et* (Xb_1), (Xg) *s'appuient sur deux droites fixes* a_2, b_2,

Le sommet X *de ce trièdre décrit une cubique.*

7. *Généralisation.* — Considérons l'égalité

$$(1) \qquad (Xa_1a_2\ldots a_{2l})(Xb_1b_2\ldots b_{2m})(Xc_1c_2\ldots c_{2n}g) = 0,$$

qui reproduit la précédente quand on y fait

$$l = 1, \qquad m = 1, \qquad n = 0.$$

On peut voir par un procédé analogue au précédent que X décrit la cubique d'intersection de deux hyperboloïdes ayant pour génératrice commune g. Mais l'auteur préfère employer la marche suivante, qui montre bien les relations qui existent entre une des interprétations de ses résultats et la méthode employée dans la Géométrie pure de Chasles, de Steiner et d'autres géomètres.

Posons donc

$$(2)\quad P = Xa_1a_2\ldots a_{2l},\qquad Q = Xb_1b_2\ldots b_{2m},\qquad R = Xc_1c_2\ldots c_{2n},$$

ces expressions représentant évidemment des points.

L'égalité (1) s'écrit

$$PQ(Rg) = 0.$$

Sous cette forme, elle exprime que la droite PQ est dans le plan Rg; si donc on pose

$$PQR = \lambda,$$

le plan λ contient d'abord la droite g, ce qui donne

$$(3)\qquad \lambda g = 0;$$

ce plan λ contient aussi les points P, Q, R et l'on a, en particulier,

$$P\lambda = 0,$$

ou, en remplaçant P par son expression (2),

$$Xa_1a_2\ldots a_{2l}\lambda = 0.$$

Or il est évident que cette égalité peut être écrite en ordre inverse

$$\lambda a_{2l}\ldots a_2a_1X = 0;$$

sous cette forme, elle exprime que le point X est dans le plan $\lambda a_{2l}\ldots a_2a_1$. Le même raisonnement s'applique aux points Q et R; si donc on pose

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda a_{2l}\ldots a_2a_1 = \mu, \\ \lambda b_{2m}\ldots b_2b_1 = \nu, \\ \lambda c_{2n}\ldots c_2c_1 = \varpi, \end{cases}$$

on voit que le point X est dans chacun des plans μ, ν, ϖ, c'est-à-dire qu'il est leur intersection.

Interprétons maintenant les égalités (3) et (4) :

1° L'égalité (3) représente un faisceau de plans λ tournant autour de l'axe g.

2° La première égalité (4) montre que le plan μ pivote autour de a_1; de plus, λ ne figurant qu'une fois dans l'expression de μ, ce plan μ décrit un faisceau de plans homographiques du précédent.

De même ν et ϖ décrivent autour de b_1 et c_1 des faisceaux homographiques du premier. Donc ces trois faisceaux μ, ν, ϖ, homographiques d'un même troisième λ, sont homographiques entre eux; dès lors, d'après un théorème de Chasles, le point X commun aux trois plans μ ν, ϖ décrit une cubique.

En suivant une marche identique à la précédente, l'auteur démontre que, si l'on prend un nombre impair de droites dans chacun des groupes

$$a_1 a_2 \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots, \quad c_1 c_2 \ldots,$$

l'égalité

$$(1)' \qquad (X a_1 a_2 \ldots a_{2l+1})(X b_1 b_2 \ldots b_{2m+1})(X c_1 c_2 \ldots c_{2n+1} g) = 0$$

représente encore une cubique. Les égalités (1) et (1') donnent ainsi lieu à un énoncé très général dont voici l'application au c[illegible] particulier où l'on fait dans chacune de ces égalités

$$l = m = n = 1.$$

(1). Si le plan de base PQR d'un tétraèdre PQRX pivote autour d'une droite fixe g, si les trois sommets P, Q, R de cette base décrivent des droites fixes a_2, b_2, c_2, si les trois arêtes latérales PX, QX, RX rencontrent trois droites fixes a_1, b_1, c_1, le quatrième sommet X du tétraèdre décrit une cubique.

(1)'. Si un des sommets S d'une double pyramide triangulaire SPQRX décrit une droite fixe g_1, si les six arêtes latérales rencontrent des droites fixes a_1, b_1, c_1; a_3, b_3, c_3, si les trois sommets P, Q, R de la base commune décrivent trois droites fixes a_2, b_2, c_2, le sommet X décrit une cubique.

Après avoir ainsi employé seulement des droites comme éléments fixes, l'auteur emploie des plans et des points et considère l'égalité

$$(X A_1 \alpha_1 \ldots A_l \alpha_l)(X B_1 \beta_1 \ldots B_m \beta_m)(X C_1 \gamma_1 \ldots C_n \gamma_n) g = 0.$$

Comme précédemment, si l'on appelle λ le plan des trois points

$$P = X A_1 \alpha_1 \ldots A_l \alpha_l, \qquad Q = X B_1 \beta_1 \ldots B_m \beta_m, \qquad R = X C_1 \gamma_1 \ldots C_n \gamma_n,$$

on voit que le point X est l'intersection des trois plans

$$\begin{aligned}\mu &= \lambda \alpha_l \; A_l \ldots \alpha_1 A_1,\\ \nu &= \lambda \beta_m B_m \ldots \beta_1 B_1,\\ \varpi &= \lambda \gamma_n \; C_n \ldots \gamma_1 C_1,\end{aligned}$$

liés linéairement au plan λ qui pivote autour de la droite g. Donc ce point X décrit une cubique.

Ce résultat s'énonce ainsi :

Un plan λ pivote autour d'une droite fixe g.

On prend les intersections de ce plan avec les plans α_l, β_m, γ_n ;

Par ces intersections $\lambda\alpha_l$, $\lambda\beta_m$, $\lambda\gamma_n$ et les points A_l, B_m, C_n, on fait passer trois plans;

On prend les intersections de ces plans avec α_{l-1}, β_{m-1}, γ_{n-1}, etc.

On arrive finalement à trois derniers plans μ, ν, ϖ passant par les points A_1, B_1, C_1 ;

L'intersection X de ces trois plans décrit une cubique.

Pour $l = m = n = 1$, on obtient un théorème donné par Chasles sans démonstration (*Aperçu historique;* Note XXXIII, 7).

9. L'auteur traite ensuite, et d'une façon tout à fait analogue, l'égalité

$$(X A_1 \alpha_1 \ldots A_l \alpha_l)(X B_1 \beta_1 \ldots B_m \beta_m) C = 0;$$

il montre que le point X décrit une cubique et énonce ainsi ce résultat auquel correspond, en Géométrie plane, le théorème de Maclaurin et Braikenbridge :

Théorème. — *Si les côtés d'un polygone gauche* PQ . . . RSX *passent par des points fixes* A_1, A_2, ..., C, ..., B_2, B_1, *si les sommets sauf un,* P, Q, ..., R, S *décrivent des plans fixes* α_1, α_2, ..., β_2, β_1, *le dernier sommet* X *décrit une cubique.*