Bulletin de la S. M. F.

de Presle

Développement en produit des fonctions Θ et *H* de Jacobi et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 216-222

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__216_1>

Développement en produit des fonctions Θ *et* H *de Jacobi et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier;* par M. DE PRESLE.

(Séance du 16 novembre 1887.)

I. — Développement en produit des fonctions Θ et H.

La méthode que nous allons employer est celle de M. Weierstrass pour le développement en produit des fonctions holomorphes, modifiée en ce sens, qu'au lieu de ranger les zéros par ordre de modules croissants, nous les classerons par ordre de valeurs croissantes de l'un des paramètres qui les déterminent, l'autre étant supposé constant; et que, ensuite, nous disposerons par ordre de valeurs croissantes du second paramètre les fonctions ainsi obtenues. Nous ne développerons de cette manière que la fonction $\Theta_1(x)$, et nous déduirons de ce développement celui des autres fonctions. Toutefois, la même méthode s'applique aux quatre fonctions de Jacobi, et de chacun des développements on peut déduire tous les autres.

Nous désignerons par K et K′ les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

k et k' étant le module ordinaire et le module complémentaire de l'intégrale elliptique de première espèce; nous désignerons par q la quantité $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$.

1. *Développement de* $\Theta_1(x)$. — Considérons la somme double :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{x-(2m+1)K-(2n+1)K'i};$$

si, dans la première somme, on groupe les termes par valeurs égales et de signe contraire du paramètre $2m+1$, n étant supposé constant, on obtient des fonctions de n; et si, pour obtenir la seconde somme, on groupe ces fonctions par valeurs égales et de signe contraire de $2n+1$, on obtient une série convergente, dont les termes sont des dérivées logarithmiques.

On a, en effet,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{[x-(2n+1)K'i]-(2m+)K}$$
$$= -\frac{\pi}{2K}\,2\,\frac{\pi[x-(2n+1)K'i]}{2K}\sum_0^{\infty}{}_m \frac{1}{\dfrac{(2m+1)\pi^2}{4}-\dfrac{\pi^2[x-(2n+1)K'i]^2}{4K^2}}$$
$$= -\frac{\pi}{2K}\,\text{tang}\,\frac{\pi[x-(2n+1)K'i]}{2K}.$$

On a, d'autre part,

$$-\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \text{tang}\,\frac{\pi[x(2n+1)K'i]}{2K}$$
$$= -\frac{\pi}{2K}\sum_0^{\infty}{}_n \frac{2\sin\dfrac{\pi x}{2K}\cos\dfrac{\pi x}{2K}}{\cos^2\dfrac{2(n+1)\pi K'i}{2K}-\sin^2\dfrac{\pi x}{2K}}$$
$$= -\frac{\pi}{2K}\sin\frac{\pi x}{K}\sum_0^{\infty}{}_n \frac{1}{\cos\dfrac{(2n+1)\pi K'i}{K}+\cos\dfrac{\pi x}{K}},$$

série convergente; le dernier membre peut s'écrire

$$\sum_0^{\varphi}{}_n \mathrm{D}\log\left[\cos\frac{(2n+1)\pi K'i}{K}+\frac{\cos\pi x}{K}\right].$$

Cela posé, on reconnaîtra, comme dans la démonstration du théorème de M. Weierstrass relatif à la décomposition des fonctions holomorphes en facteurs primaires ([1]), qu'en désignant par $G(x)$ une fonction holomorphe, on a

$$\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}+\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi x}{K}\sum_0^{\infty}{}_n \frac{1}{\cos\dfrac{(2n+1)\pi K'i}{K}+\cos\dfrac{\pi x}{K}} = G(x),$$

([1]) Voir le Cours de M. Hermite, professé à la Faculté des Sciences, 3e édition, page 78.

les zéros de $\Theta_1(x)$ étant de la forme

$$(2m+1)K+(2n+1)K'i;$$

d'où

$$D\log\Theta_1(x)=G(x)-\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi x}{K}\sum_0^\infty{}_n\frac{1}{\cos\frac{(2n+1)\pi K'i}{K}+\cos\frac{\pi x}{K}}.$$

Intégrons, déterminons les constantes d'intégration par la valeur o de x, et passons des logarithmes aux quantités

$$\Theta_1(x)=\Theta_1(0)e^{\int_0^x G(x)\,dx}\prod_0^\infty{}_n\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi K'i}{K}+\cos\frac{\pi x}{K}}{1+\cos\frac{(2n+1)\pi K'i}{K}};$$

mais on a

$$\cos\frac{(2n+1)\pi K'i}{K}=\frac{q^{(2n+1)}+q^{-(2n+1)}}{2};$$

donc

$$\Theta_1(x)=\frac{\Theta_1(0)e^{\int_0^x G(x)\,dx}}{\prod_0^\infty{}_n(1+q^{2n+1})^2}\prod_0^\infty{}_n\left[1+2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{2(2n+1)}\right],$$

et, en désignant par $I(x)$ une autre fonction holomorphe de x,

$$\Theta_1(x)=e^{I(x)}\prod_0^\infty{}_n\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{\pi xi}{K}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{\pi xi}{K}}\right).$$

Considérons $\Theta_1(x)$ et le second membre de l'équation précédente divisé par le facteur $e^{I(x)}$; si l'on augmente x de K, ces quantités sont égales et de signe contraire; si l'on augmente x de $K'i$, ces quantités sont multipliées par un même facteur exponentiel; donc $e^{I(x)}$ et, par suite, $I(x)$ admet les périodes K et $K'i$, et se réduit à une constante, puisqu'elle est holomorphe; on peut donc écrire, P étant une constante,

$$\Theta_1(x)=P\prod_0^\infty{}_n\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{\pi xi}{K}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{\pi xi}{K}}\right).$$

2. *Développement de* $H_1(x)$. — Dans l'équation précédente,

augmentons x de $K'i$, on a

$$H_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\,P\cos\frac{\pi x}{2K}\prod_{0}^{\infty}{}_n\left[1+q^{2(n+1)}e^{\frac{\pi xi}{K}}\right]\left[1+q^{2(n+1)}e^{-\frac{\pi xi}{K}}\right].$$

3-4. *Développements de* $\Theta(x)$, $H(x)$. — Dans les deux dernières équations, augmentons x de K, nous aurons

$$\Theta(x) = P\prod_{0}^{\infty}{}_n\left(1-q^{2n+1}e^{\frac{\pi xi}{K}}\right)\left(1-q^{2n+1}e^{-\frac{\pi xi}{K}}\right),$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q}\,P\sin\frac{\pi x}{2K}\prod_{0}^{\infty}{}_n\left[1-q^{2(n+1)}e^{\frac{\pi xi}{K}}\right]\left[1-q^{2(n+1)}e^{-\frac{\pi xi}{K}}\right].$$

On a

$$P = \prod_{0}^{\infty}{}_n\left[1-q^{2(n+1)}\right].$$

II. — Recherche des valeurs des fonctions Θ et H quand les périodes sont divisées par un nombre entier.

Nous nous servirons des relations que nous avons établies dans la première partie de ce travail avant d'arriver au développement en facteurs. Pour cette raison, nous allons étudier la division des périodes dans $\Theta_1(x)$, et nous déduirons des résultats obtenus la division des périodes dans les autres fonctions. Toutefois, si l'on cherche pour les autres fonctions de Jacobi les relations analogues à celles que nous avons exposées pour la fonction $\Theta_1(x)$, on peut leur appliquer la même méthode pour la division des périodes, et des résultats obtenus pour chacune de ces fonctions déduire les formules qui concernent toutes les autres.

Nous désignerons par $2p+1$ et $2p$ les nombres impair et pair servant de diviseurs aux périodes.

1. Division des périodes dans $\Theta_1(x)$.

1° *Première période.*

1° *Division par un nombre impair.* — Considérons la somme double

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{x-\dfrac{(2m+1)K}{2p+1}-(2n+1)K'i}.$$

Remarquons qu'un nombre impair quelconque peut se mettre sous la forme $(2s+1)(2p+1)+2r$, s variant de $-\infty$ à $+\infty$ et r de $-p$ à $+p$; la somme précédente peut s'écrire

$$\sum_{-p}^{+p}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \frac{1}{\left[\left(x - \frac{2rK}{2p+1}\right) - (2n+1)K'i\right] - (2s+1)K},$$

donc

$$\Theta_1\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right)$$
$$= \frac{\Theta_1\left(0, \frac{K}{2p+1}, K'i\right)}{\prod_{-p}^{+p}{}_r \Theta_1\left(\frac{2rK}{2p+1}, K, K'i\right)} \prod_{-p}^{+p}{}_r \Theta_1\left(x + \frac{2rK}{2p+1}, K, K'i\right).$$

2° *Division par un nombre pair.* — Considérons la somme double

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{1}{x - \frac{(2m+1)K}{2p} - (2n+1)K'i}.$$

Remarquons qu'un nombre impair quelconque peut se mettre sous la forme $(2s+1)2p+2r-1$, s variant de $-\infty$ à $+\infty$ et r de $-(p-1)$ à $+p$; la somme précédente peut s'écrire

$$\sum_{-(p-1)}^{+p}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \frac{1}{\left[\left(x - \frac{2r-1}{2p}K\right) - (2n+1)K'i\right] - (2s+1)K}:$$

donc

$$\Theta_1\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right)$$
$$= \frac{\Theta_1\left(0, \frac{K}{2p}, K'i\right)}{\prod_{-(p-1)}^{+p}{}_r \Theta_1\left(\frac{2r-1}{2p}K, K, K'i\right)} \prod_{-(p-1)}^{+p}{}_r \Theta_1\left(x + \frac{2r-1}{2p}K, K, K'i\right).$$

2° *Seconde période.*

1° *Division par un nombre impair.* — Considérons la somme

$$-\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{tang}\pi\left[\frac{x-\dfrac{(2n+1)K'i}{2p+1}}{2K}\right].$$

Nous aurons, en remplaçant $2n+1$ par $(2s+1)(2p+1)+2r$,

$$-\frac{\pi}{2K}\sum_{-p}^{+p}{}_r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \operatorname{tang}\frac{\pi\left[\left(x-\dfrac{2rK'i}{2p+1}\right)-(2s+1)K'i\right]}{2K}:$$

donc

$$\Theta_1\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right)$$
$$=\frac{\Theta_1\left(0, K, \dfrac{K'i}{2p+1}\right)}{\prod_{-p}^{+p}{}_r\Theta_1\left(\dfrac{2rK'i}{2p+1}, K, K'i\right)}\prod_{-p}^{+p}{}_r\Theta_1\left(x+\frac{2rK'i}{2p+1}, K, K'i\right).$$

2° *Division par un nombre pair.* — Considérons la somme

$$-\frac{\pi}{2K}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{tang}\frac{\pi\left[x-\dfrac{(2n+1)K'i}{2p}\right]}{2K}.$$

Nous aurons, en remplaçant $2n+1$ par $(2s+1)2p+2r-1$,

$$-\frac{\pi}{2K}\sum_{-(p-1)}^{+p}{}_r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s \operatorname{tang}\frac{\pi\left[\left(x-\dfrac{2r-1}{2p}K'i\right)-(2s+1)K'i\right]}{2K}:$$

donc

$$\Theta_1\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right)$$
$$=\frac{\Theta_1\left(0, K, \dfrac{K'i}{2p}\right)}{\prod_{-(p-1)}^{+p}{}_r\Theta_1\left(\dfrac{2r-1}{2p}K'i, K, K'i\right)}\prod_{-(p-1)}^{+p}{}_r\Theta_1\left(x+\frac{2r-1}{2p}K'i, K, K'i\right).$$

2. Division des périodes dans $H_1(x)$.

Dans les valeurs obtenues par $\Theta_1(x)$ augmentons x respectivement de $K'i$, $K'i$, $K'i$, $\frac{(2p+1)K'i}{2p}$, nous obtiendrons

$$H_1\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right), \quad H_1\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right), \quad H_1\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right), \quad H_1\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right).$$

3-4. Division des périodes dans $\Theta(x)$, $H(x)$.

Dans les valeurs de $\Theta_1(x)$ et $H_1(x)$, augmentons x respectivement de K, $\frac{(2p+1)K}{2p}$, K, K; nous obtiendrons

$$\Theta\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right), \quad \Theta\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right), \quad \Theta\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right), \quad \Theta\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right),$$

$$H\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right), \quad H\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right), \quad H\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right), \quad H\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right).$$

Nous avons cru ne devoir qu'indiquer le moyen d'obtenir les valeurs de H_1, Θ, H, afin d'éviter un trop long développement, les calculs n'offrant d'ailleurs aucune difficulté. On trouvera les expressions des fonctions Θ et H, quand les périodes sont divisées par des nombres entiers, dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet (p. 540 et suiv.).