BULLETIN DE LA S. M. F.

T. -J. STIELTJES

Sur une généralisation de la formule des accroissements finis

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 100-113

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__100_1>

Sur une généralisation de la formule des accroissements finis;
par T.-J. Stieltjes.

(Séance du 21 décembre 1887.)

1. Soient $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ quatre fonctions réelles de la variable réelle u. On suppose que ces fonctions sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, et enfin que

$$f''(u), \quad g''(u), \quad h''(u), \quad k''(u),$$

admettent encore des dérivées

$$f'''(u), \quad g'''(u), \quad h'''(u), \quad k'''(u)$$

mais qui ne sont plus nécessairement des fonctions continues.

Si maintenant x, y, z, t sont quatre nombres inégaux, nous allons considérer le rapport des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons ce rapport par A

$$A = \frac{D}{\Delta}.$$

Il est clair que A est une fonction symétrique de x, y, z, t, et nous pouvons supposer

$$x < y < z < t.$$

On a ainsi

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} - \mathrm{A} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons, dans le premier membre, t par une variable u, on obtiendra une fonction de u qui s'annule pour $u = z$ et pour $u = t$, et dont la dérivée s'annule par conséquent pour une valeur $u = \zeta_1 = (z, t)$, en désignant par (z, t) un nombre compris entre z et t (en excluant les limites).

On a donc

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - \mathrm{A} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2\zeta_1 & 3\zeta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons, dans le premier membre, z par une variable u : on obtiendra une fonction de u qui s'annule pour $u = y$ et pour $u = z$ et dont la dérivée s'annule pour $u = \eta_1 = (y, z)$:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - \mathrm{A} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 0 & 1 & 2\eta_1 & 3\eta_1^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta_1 & 3\zeta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En continuant ainsi, il vient

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - \mathrm{A} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 1 & 2\eta_1 & 3\eta_1^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta_1 & 3\zeta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\xi = (x, y), \qquad \eta_1 = (y, z), \qquad \zeta_1 = (z, t).$$

$$x < \xi < \eta_1 < \zeta_1 < t.$$

Remplaçons maintenant ζ_1 par une variable u, on aura dans le premier membre une fonction de u qui s'annule pour $u = \eta_1$.

$u = \zeta_1$ et l'on en conclut

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f''(\zeta_2) & g''(\zeta_2) & h''(\zeta_2) & k''(\zeta_2) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 1 & 2\eta_1 & 3\eta_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\zeta_2 = (\eta_1, \zeta_1),$$
$$x < \xi < \eta_1 < \zeta_2 < t.$$

En remplaçant encore η_1 par une variable u, on trouvera, par le même raisonnement,

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f''(\zeta_2) & g''(\zeta_2) & h''(\zeta_2) & k''(\zeta_2) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\eta \\ 0 & 0 & 2 & 6\zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\eta = (\xi, \eta_1),$$
$$x < \xi < \eta < \zeta_2.$$

Et, si nous remplaçons enfin ζ_2 par une variable u, on trouvera

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\eta \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\zeta = (\eta, \zeta_2),$$
$$x < \xi < \eta < \zeta < t,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad A = \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Ayant $\xi = (x, y)$, $\eta_1 = (y, z)$ et $\eta = (\xi, \eta_1)$, on en conclut $\eta = (x, z)$ et l'on trouvera de même $\zeta = (x, t)$.

Le résultat que nous avons obtenu peut s'énoncer ainsi :

Le rapport A n'est pas plus grand que $\frac{M}{1!\,2!\,3!}$ et pas plus petit que $\frac{m}{1!\,2!\,3!}$, en désignant par M la plus grande, par m la plus pe-

tite des valeurs du déterminant,

$$\begin{vmatrix} f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f'(u') & g'(u') & h'(u') & k(u') \\ f''(u'') & g''(u'') & h''(u'') & k''(u'') \\ f'''(u''') & g'''(u''') & h'''(u''') & k'''(u''') \end{vmatrix}$$

sous les conditions

$$\begin{gathered} u = x, \\ u \leqq u' \leqq y, \\ u' \leqq u'' \leqq z, \\ u'' \leqq u''' \leqq t. \end{gathered}$$

C'est là un théorème qui se rapproche beaucoup d'un autre théorème donné par M. *H.-A. Schwarz* (*Annali di Matematica* de Brioschi, série II, t. X). La limitation que nous venons d'obtenir est un peu plus resserrée que celle donnée par M. Schwarz.

2. Notre démonstration suppose seulement que les fonctions

$$f''(u),\ g''(u),\ h''(u),\ k''(u),$$

admettent des dérivées

$$f'''(u),\ g'''(u),\ h'''(u),\ k'''(u).$$

Mais supposons maintenant en outre que ces dernières fonctions soient continues, et faisons tendre dans la formule (1) x, y, z et t vers une même limite a; il viendra

$$(2) \qquad \lim A = \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

Considérons le cas où les nombres x, y, z, t tendent de telle façon vers la limite a, que a n'est jamais en dehors de l'intervalle (x, t). Nous allons montrer que la formule (2) subsiste alors sous des conditions bien plus larges relatives aux fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$.

En effet, il suffit alors que ces fonctions soient finies ou continues ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, et que les expressions

$$\frac{f''(a+h)-f''(a)}{h}, \quad \frac{g''(a+h)-g''(a)}{h},$$
$$\frac{h''(a+h)-h''(a)}{h}, \quad \frac{k''(a+h)-k''(a)}{h}$$

tendent pour $h=0$ vers des limites déterminées que nous désignerons encore par $f'''(a)$, $g'''(a)$, $h'''(a)$, $k'''(a)$.

On voit donc que dans la suite nous ne supposerons pas l'existence des dérivées $f'''(u)$, $g'''(u)$, $h'''(u)$, $k'''(u)$ pour des valeurs de la variable autres que a : la formule (1) devient donc inapplicable. Mais nous supposerons toujours

$$x \leqq a,$$
$$a \leqq t.$$

3. La démonstration de la proposition que nous venons d'énoncer se compose de deux parties.

D'abord on démontrera que la proposition est exacte dans certains cas particuliers; ensuite on ramènera le cas général à ces cas particuliers.

Posons

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} - (t-z)\,B = 0.$$

En remplaçant t par une variable u, on conclura

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - B = 0.$$
$$\zeta_1 = (z, t).$$

Soit maintenant

$$(5) \qquad B = (z-y)\,C.$$

Après avoir substitué cette valeur de B dans l'équation (4), on trouvera

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - C = 0.$$

$$\eta_1 = (y, z).$$

Posons

$$(7)\qquad C = (y - x)D$$

et substituons dans l'équation (6) : on conclura encore par le même raisonnement

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - D = 0.$$

$$\xi = (x, y).$$

Soit encore

$$(9)\qquad D = (\zeta_1 - \eta_1)E,$$

il viendra

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f''(\zeta) & g''(\zeta) & h''(\zeta) & k''(\zeta) \end{vmatrix} - E.$$

$$\zeta = (\eta_1, \zeta_1),$$

et si nous posons enfin

$$(11)\qquad E = (\eta_1 - \xi)F,$$

on aura

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f''(\zeta) & g''(\zeta) & h''(\zeta) & k''(\zeta) \end{vmatrix} - F = 0.$$

$$\eta = (\xi, \eta_1),$$
$$x < \xi < \eta < \zeta < t.$$

Les équations (3), (5), (7), (9), (11) montrent qu'on a

$$F = \frac{D}{(t - z)(z - y)(y - x)(\zeta_1 - \eta_1)(\eta_1 - \xi)},$$

et, comme on a

$$\Delta = (t-z)(t-y)(t-x) \\ \times(z-y)(z-x) \\ \times(y-x),$$

il vient

$$\text{(13)} \qquad A = \left(\frac{\zeta_1 - \eta_1}{t-y}\right)\left(\frac{\eta_1 - \xi}{z-x}\right)\frac{F}{t-x},$$

et, d'après l'équation (12), on a

$$\text{(14)} \qquad \frac{F}{t-x} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ P & Q & R & S \end{vmatrix},$$

en posant

$$P = \frac{f''(\zeta) - f''(\eta)}{t-x}, \qquad Q = \frac{g''(\zeta) - g''(\eta)}{t-x}, \qquad \cdots\cdot$$

Remarquons d'abord que, à cause de

$$\zeta_1 = (z, t), \qquad \eta_1 = (y, z), \qquad \xi = (x, y),$$

on aura évidemment

$$0 < \frac{\zeta_1 - \eta_1}{t-y} < 1, \qquad 0 < \frac{\eta_1 - \xi}{z-x} < 1.$$

Par conséquent, dans le cas où l'on aura

$$\lim \frac{F}{t-x} = 0,$$

la formule (13) permettra d'en conclure

$$\lim A = 0.$$

Examinons maintenant l'expression $\frac{F}{t-x}$ donnée par la formule (14).

La valeur de P peut s'écrire

$$P = \left(\frac{\zeta - a}{t-x}\right)\frac{f''(\zeta) - f''(a)}{\zeta - a} - \left(\frac{\eta - a}{t-x}\right)\frac{f''(\eta) - f''(a)}{\eta - a}.$$

D'après notre supposition, a n'est pas à l'extérieur de l'intervalle (x, t), ζ et η sont à l'intérieur de cet intervalle. Par conséquent les valeurs absolues de $\frac{\zeta - a}{t - x}$ et $\frac{\eta - a}{t - x}$ sont inférieures à l'unité.

D'autre part, d'après notre hypothèse,

$$\frac{f''(\zeta) - f''(a)}{\zeta - a}, \quad \frac{f''(\eta) - f''(a)}{\eta - a}$$

tendent vers une même limite $f'''(a)$.

Par conséquent, lorsque $f'''(a) = 0$, on aura certainement

$$\lim P = 0,$$

et même, lorsque $f'''(a)$ n'est pas nulle, P restera toujours fini.

Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment aux quantités Q, R, S, et, si l'on remarque que les autres éléments du déterminant (14) tendent vers des limites finies, on arrive à cette conclusion :

I. *Dans le cas particulier où l'on a*

$$f'''(a) = 0, \quad g'''(a) = 0, \quad h'''(a) = 0, \quad k'''(a) = 0,$$

la proposition énoncée est certainement exacte, et l'on a dans ce cas

$$\lim A = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait seulement

$$f'''(a) = 0, \quad g'''(a) = 0, \quad h'''(a) = 0,$$

mais $k'''(a) \gtrless 0$. Les quantités P, Q, R tendront vers zéro, S restera fini. Or le coefficient de S, dans le déterminant (14), est

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) \end{vmatrix},$$

et les fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ étant finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, ce coefficient tendra vers zéro dans le cas où l'on a

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) \end{vmatrix} = 0.$$

On en conclut :

II. *Dans le cas particulier où l'on a*

$$f'''(a) = 0, \qquad g'''(a) = 0, \qquad h'''(a) = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) \end{vmatrix} = 0,$$

la proposition énoncée est exacte, et l'on a

$$\lim \mathrm{A} = 0.$$

Considérons enfin le cas

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = x^2.$$

On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & k(x) \\ 1 & y & y^2 & k(y) \\ 1 & z & z^2 & k(z) \\ 1 & t & t^2 & k(t) \end{vmatrix} = \frac{k'''(a)}{1.2.3}\Delta + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & k(x) - \dfrac{k'''(a)}{1.2.3}x^3 \\ 1 & y & y^2 & k(y) - \dfrac{k'''(a)}{1.2.3}y^3 \\ 1 & z & z^2 & k(z) - \dfrac{k'''(a)}{1.2.3}z^3 \\ 1 & t & t^2 & k(t) - \dfrac{k'''(a)}{1.2.3}t^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k'''(a)}{1.2.3}\Delta + \mathrm{M}.$$

Or on a, d'après (I),

$$\lim \frac{\mathrm{M}}{\Delta} = 0,$$

en sorte qu'on trouve dans le cas actuel

$$\lim \mathrm{A} = \frac{k'''(a)}{1.2.3}.$$

III. *Dans le cas particulier*

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = x^2,$$

la proposition énoncée est exacte et l'on a

$$\lim \mathrm{A} = \frac{k'''(a)}{1.2.3}.$$

4. Il sera facile maintenant de traiter le cas général.

Pour abréger l'écriture, nous désignerons le déterminant D ainsi

$$|f(x),\ g(x),\ h(x),\ k(x)\,|.$$

Comme nous avons déjà traité le cas

$$f'''(a) = g'''(a) = h'''(a) = k'''(a) = 0,$$

nous pourrons supposer que l'un au moins de ces quatre nombres ne soit pas nul, soit

$$k'''(a) \gtrless 0.$$

Posons

$$f(x) - \frac{f'''(a)}{k'''(a)}\,k(x) = f_1(x),$$

$$g(x) - \frac{g'''(a)}{k'''(a)}\,k(x) = g_1(x),$$

$$h(x) - \frac{h'''(a)}{k'''(a)}\,k(x) = h_1(x);$$

on aura identiquement

$$D = |f_1(x),\ g_1(x),\ h_1(x),\ k(x)\,|,$$

et il est clair qu'on a

$$f_1'''(a) = 0, \qquad g_1'''(a) = 0, \qquad h_1'''(a) = 0.$$

Par conséquent, dans le cas où le déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a) \end{vmatrix}$$

est nul, on a

$$\lim \frac{D}{\Delta} = \lim A = 0,$$

d'après le lemme II, ce qui est bien conforme avec la proposition générale.

Nous n'avons donc qu'à considérer le cas $D_1 \gtrless 0$. Or, dans ce cas, l'un au moins des mineurs de D_1, qui sont les coefficients des éléments de la dernière ligne horizontale, doit être différent de zéro. Supposons que ce soit

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) \end{vmatrix},$$

qui n'est pas égal à zéro.

Un au moins des éléments $f_1(a)$, $g_1(a)$ doit être différent de zéro ; supposons que ce soit

$$D_3 = f_1(a)$$

qui n'est pas nul.

Calculons encore les constantes

$$p = \frac{D_1}{D_2}, \qquad q = \frac{D_2}{D_3}, \qquad r = D_3.$$

On a maintenant identiquement

$$\begin{aligned}
|f_1(x),\ g_1(x),\ h_1(x),\ k(x)| &= \frac{p}{1.2}|f_1(x),\ g_1(x),\ (x-a)^2,\ k(x)| \\
&\quad + |f_1(x),\ g_1(x),\ h_1(x) - \frac{p}{1.2}(x-a)^2,\ k(x)|, \\
|f_1(x),\ g_1(x),\ (x-a)^2,\ k(x)| &= \frac{q}{1}|f_1(x),\ (x-a),\ (x-a)^2,\ k(x)| \\
&\quad + |f_1(x),\ g_1(x) - \frac{q}{1}(x-a),\ (x-a)^2,\ k(x)|, \\
|f_1(x),\ x-a,\ (x-a)^2,\ k(x)| &= r\ |1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ k(x)| \\
&\quad + |f_1(x) - r,\ x-a,\ (x-a)^2,\ k(x)|
\end{aligned}$$

et par des substitutions successives

$$\begin{aligned}
D = \frac{p}{1.2}\frac{q}{1}r\ &|1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ k(x) \\
+ \frac{p}{1.2}\frac{q}{1}\ &|f_1(x) - r,\ x-a,\ (x-a)^2,\ k(x)| \\
+ \frac{p}{1.2}\ &|f_1(x),\ g_1(x) - q(x-a),\ (x-a)^2,\ k(x)| \\
+\ &|f_1(x),\ g_1(x),\ h_1(x) - \frac{p}{1.2}(x-a)^2,\ k(x)|.
\end{aligned}$$

En divisant par Δ et en passant à la limite, on trouve directement les limites des rapports des déterminants au second membre par les lemmes II et III. En effet, ayant

$$|1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ k(x)| = |1,\ x,\ x^2,\ k(x)|,$$

il vient d'abord, d'après III,

$$\lim |1,\ x,\ x^2,\ k(x)| : \Delta = \frac{1}{1.2.3} k'''(a).$$

Les trois autres rapports sont nuls d'après le lemme II; en effet, on a

$$\begin{vmatrix} f_1(a)-r & 0 & 0 \\ f'_1(a) & 1 & 0 \\ f''_1(a) & 0 & 1.2 \end{vmatrix} = 2(D_3 - r) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & 0 \\ f'_1(a) & g'_1(a)-q & 0 \\ f''_1(a) & g''_1(a) & 1.2 \end{vmatrix} = 2(D_2 - q D_3) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a)-p \end{vmatrix} = D_1 - p D_2 = 0.$$

Il vient donc

$$\lim \frac{D}{\Delta} = \frac{pqr}{1!2!3!} k'''(a) = \frac{k'''(a)}{1!2!3!} \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1!2!3!} \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) & k(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) & k'(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a) & k''(a) \\ 0 & 0 & 0 & k'''(a) \end{vmatrix}$$

ou

$$\lim \frac{D}{\Delta} = \frac{1}{1!2!3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

Notre proposition est ainsi démontrée dans toute sa généralité.

Il est clair que la condition que a n'est jamais en dehors de l'intervalle (x, t) sera toujours satisfaite si l'on suppose que l'un des nombres x, y, z, t reste constamment égal à a; les autres peuvent alors tendre vers a d'une manière quelconque.

Nous avons considéré des déterminants du quatrième degré, mais il est à peine nécessaire de dire qu'on peut énoncer un théorème analogue dans le cas d'un nombre quelconque n de fonctions $(n \geqq 2)$.

5. Pour montrer une application, considérons une courbe

gauche

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ étant des fonctions réelles de la variable réelle t.

Soit M un point de la courbe, correspondant à $t = t_0$. Nous adopterons la définition suivante du plan osculateur en M : le plan osculateur en M est la position limite (s'il y en a une) d'un plan passant par M et par deux autres points de la courbe, qui sont infiniment voisins de M.

Les deux autres points correspondant à $t = t_1$ et $t = t_2$, l'équation du plan passant par les trois points est

$$\begin{vmatrix} 1 & \psi(t_0) & \chi(t_0) \\ 1 & \psi(t_1) & \chi(t_1) \\ 1 & \psi(t_2) & \chi(t_2) \end{vmatrix} [X - \varphi(t_0)] + \begin{vmatrix} 1 & \chi(t_0) & \varphi(t_0) \\ 1 & \chi(t_1) & \varphi(t_1) \\ 1 & \chi(t_2) & \varphi(t_2) \end{vmatrix} [Y - \psi(t_0)]$$
$$+ \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \end{vmatrix} [Z - \chi(t_0)] = 0.$$

Supposons maintenant que les trois fonctions

$$\varphi, \quad \psi, \quad \chi$$

soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées

$$\varphi', \quad \psi', \quad \chi',$$

et enfin que ces dernières fonctions admettent des dérivées, *mais pour la valeur particulière $t = t_0$ seulement.*

En divisant alors par

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{vmatrix}$$

et en faisant tendre t_1 et t_2 vers t_0, il viendra

$$\begin{vmatrix} \psi'(t_0) & \chi'(t_0) \\ \psi''(t_0) & \chi''(t_0) \end{vmatrix} [X - \varphi(t_0)] + \begin{vmatrix} \chi'(t_0) & \varphi'(t_0) \\ \chi''(t_0) & \varphi''(t_0) \end{vmatrix} [Y - \psi(t_0)]$$
$$+ \begin{vmatrix} \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) \\ \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) \end{vmatrix} [Z - \chi(t_0)] = 0.$$

Par conséquent, si cette équation représente un plan déterminé, c'est-à-dire si les coefficients de X, Y, Z ne s'évanouissent pas à la fois, ce plan sera, d'après notre définition, le plan osculateur en M. Et l'on voit que l'existence de ce plan suppose seulement que

$$\frac{\varphi'(t_0+h)-\varphi'(t_0)}{h}, \quad \frac{\psi'(t_0+h)-\psi'(t_0)}{h}, \quad \frac{\chi'(t_0+h)-\chi'(t_0)}{h}$$

tendent vers des limites déterminées pour $h = 0$.

C'est là un fait analogue à ce qui se présente dans la théorie des courbes planes, lorsqu'on définit la tangente en un point M comme limite d'une sécante passant par M, et par un second point de la courbe infiniment voisin de M. Alors, si l'équation de la courbe est

$$y = f(x),$$

l'existence d'une tangente en $M(a, b)$ suppose seulement que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a une limite déterminée, mais la fonction $f(x)$ peut très bien ne pas admettre une dérivée pour d'autres valeurs de la variable.

Il est clair que la proposition que nous avons établie permet d'énoncer des propriétés analogues relatives à l'existence du cercle osculateur, de la sphère osculatrice, etc.