BULLETIN DE LA S. M. F.

M. A. PELLET

Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné à l'aide de la règle et du compas

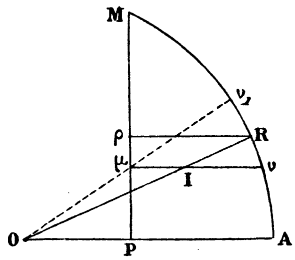
Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 113-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__113_1>

Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas; par M. A. Pellet.

(Séance du 18 janvier 1888.)

M. Collignon a proposé au Congrès de Toulouse, de l'Association française pour l'avancement des Sciences, une méthode pour diviser approximativement un arc de cercle en un certain nombre de parties égales. Cette méthode repose sur la remarque suivante, qui lui a été suggérée par un dessinateur. Soient (*fig.* 1) $AM = a$ un arc de cercle plus petit que $\frac{\pi}{2}$, $AR = ma$, $P\mu = m PM$ et I l'intersection de OR avec $\mu\nu$, perpendiculaire sur PM. Le rapport $\frac{\mu I}{PA}$, fonction de a et de m, varie très peu lorsque a va de o à $\frac{\pi}{2}$, mais il varie sensiblement lorsque m varie de o à $\frac{1}{2}$. Si donc on connaît la valeur de ce rapport pour une valeur de m, on pourra construire le point R, quel que soit a. Au lieu du rapport $\frac{\mu I}{PA}$, considérons le rapport $\frac{\mu I}{\rho R}$; ce rapport est toujours voisin de $\frac{2}{3}$ lorsque m est compris entre o et $\frac{1}{2}$ et a inférieur à $\frac{\pi}{2}$; d'où une construction uniforme pour avoir le point R, quels que soient m

Fig. 1.



et a. L'erreur commise peut facilement être rendue inférieure à $\frac{1}{1000}$ du rayon.

1. Supposons d'abord AR quelconque et désignons-le par x. On a

$$r = \frac{\mu I}{\rho R} = \frac{m \sin a \cos x - \cos a \sin x}{\sin x(\cos x - \cos a)},$$

dont la dérivée est

$$r' = \frac{-m \sin a \cos^3 x - \cos a \sin^3 x + m \sin a \cos a}{\sin^2 x(\cos x - \cos a)^2}.$$

Cette dérivée est négative lorsque x va de o à l'arc dont la tangente est égale à $m \operatorname{tang} a$; on le voit aisément en prenant la dérivée du numérateur

$$-m \sin a \cos^3 x - \cos a \sin^3 x + m \sin a \cos a,$$

qui est égale à

$$3 \sin x \cos^2 x(m \sin a - \cos a \operatorname{tang} x).$$

Ce numérateur va donc en augmentant lorsque x va de o à arc tang$(m \operatorname{tang} a)$; or il est négatif pour ces valeurs extrêmes.

Donc, lorsque R va du point ν au point ν_1, intersection de la circonférence avec la droite $O\mu$, le rapport $\frac{\mu I}{\rho R}$ va en diminuant de 1 à 0. Il en résulte que, si l'on se donne la valeur de ce rapport r, le point R est déterminé. Soient R_1 un point de l'arc $\nu\nu'$, $R_1\rho_1$ sa distance à PM; prenons $\mu I_1 = r\rho_1 R_1$, la droite OI_1 rencontre la circonférence en un point R_2 compris entre R_1 et R, et ainsi de suite. On peut approcher indéfiniment dans les deux sens du point cherché R.

2. Pour $m = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{a}{3}$, on a $r = \frac{2}{3}$.

Supposons $m < \frac{1}{2}$ et posons $x = ma$. Le rapport devient

$$r = \frac{m\sin a \cos ma - \cos a \sin ma}{\sin ma(\cos ma - \cos a)}$$
$$= \frac{(1+m)\sin a(1-m) - (1-m)\sin a(1+m)}{\sin 2ma - \sin a(1+m) + \sin a(1-m)}.$$

On a

$$(1+m)\sin a(1-m) - (1-m)\sin a(1+m) = \tfrac{2}{3}m(1-m^2)a^3 f(a),$$
$$\sin 2am - \sin a(1+m)\sin a(1-m) = m(1-m^2)a^3\varphi(a),$$

$f(a)$ et $\varphi(a)$ représentant les séries

$$f(a) = 1 - \frac{1+m^2}{10}a^2 + \frac{(3+m^2)(1+3m^2)}{4.5.6.7}a^4 - \ldots + (-1)^i A_i a^{2i} + \ldots,$$
$$\varphi(a) = 1 - \frac{1+3m^2}{12}a^2 + \frac{(1+3m^2)^2}{3.4.5.6}a^4 - \ldots + (-1)^i B_i a^{2i} + \ldots,$$

où

$$A_i = 3\frac{(1+m)^{2i+2} - (1-m)^{2i+2}}{1.2.3.4\ldots(2i+3)2m},$$
$$B_i = \frac{(1+m)^{2i+3} - (1-m)^{2i+3} - (2m)^{2i+3}}{1.2.3\ldots(2i+3)m(1-m^2)}.$$

A_i, B_i sont des fonctions entières de m dont la différence est divisible par $1 - 9m^2$.

Le rapport $\frac{A_i}{B_i}$ est égal à

$$\tfrac{3}{2}(1-m)\frac{1-p^{2i+2}}{1-p^{2i+3}-(1-p)^{2i+3}},$$

p désignant $\frac{1-m}{1+m}$. Pour $m < \frac{1}{3}$, p est plus grand que $\frac{1}{2}$, p^{2i+2} que

$p^{2i+3} + (1-p)^{2i+3}$, et l'on a

$$\frac{1-p^{2i+2}}{1-p^{2i+3}-(1-p)^{2i+3}} > 1;$$

la fraction $\frac{A_i}{B_i}$ est donc plus grande $\frac{3}{2}(1-m)$, qui est supérieure à 1 et s'en rapproche indéfiniment lorsque i tend vers l'infini. Si $m > \frac{1}{3}$, on verrait de même que $\frac{A_i}{B_i}$ est plus petit que $\frac{3}{2}(1-m)$, qui est inférieur à 1 et s'en rapproche indéfiniment, i tendant vers l'infini.

La fonction r est égale à

$$\frac{2}{3}\frac{f(a)}{\varphi(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} - \frac{1-9m^2}{90}a^2 - \frac{(1+3m^2)(1-9m^2)}{6^2.7.10}a^4 - \ldots.$$

Elle est égale à $\frac{2}{3}$ pour $a = 0$, et, a augmentant jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, elle va en croissant si m est plus grand que $\frac{1}{3}$ et en décroissant si $m < \frac{1}{3}$; pour $a = \frac{\pi}{2}$, r est égal à $\frac{m}{\sin\frac{m\pi}{2}}$. En effet, on a, m étant plus petit que $\frac{1}{3}$ et a que $\frac{\pi}{2}$,

$$f(a) - \varphi(a) < 0, \qquad f'(a) - \varphi'(a) < 0,$$

et, comme $f(a)$, $-f'(a)$, $\varphi(a)$, $-\varphi'(a)$ sont positifs, on en déduit

$$\varphi(a) f'(a) - f(a)\varphi'(a) < 0.$$

On verrait de même que, pour $m > \frac{1}{3}$, on a

$$\varphi(a) f'(a) - f(a)\varphi'(a) > 0.$$

Posons

$$r = \frac{2}{3} - \frac{1-9m^2}{90}\frac{f_1(a)}{\varphi(a)}a^2.$$

$\frac{f_1(a)}{\varphi(a)}$ croît lorsque a va de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et m de 0 à $\frac{1}{2}$. Sa valeur maximum est donc

$$-\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{90.16}{5.\pi^2} = 1,2$$

et r est compris entre

$$\frac{2}{3} - 0,0275(1-9m^2)\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2, \quad \frac{2}{3} - 0,0322(1-9m^2)\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2.$$

3. Cherchons la distance du point R_1 correspondant à $x = ma$ au point R correspondant à $r = \frac{2}{3}$. Lorsque $a = \frac{\pi}{2}$, le sinus de ce dernier arc est égal à $\frac{3m}{2}$ et l'arc lui-même à

$$\frac{3m}{2} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{3m}{2}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.5}\left(\frac{3m}{2}\right)^5 + \ldots.$$

Posons

$$\frac{m\pi}{2} - \arcsin\frac{3m}{2} = A\, m(1 - 9m^2).$$

A est une fonction de m^2 qui va en croissant lorsque m^2 va de 0 à $\frac{1}{4}$. On le voit aisément en remplaçant dans le premier membre de cette équation m^2 par $\frac{1}{9} + \alpha$ après l'avoir divisé par m. Les coefficients des diverses puissances de α sont tous positifs et le terme indépendant de α est nul. A est toujours inférieur à 0,1 et sa valeur est très voisine de 0,08 pour $m = \frac{1}{3}$, de 0,07 pour $m = 0$.

Supposons (*fig.* 2) $a < \frac{\pi}{2}$, $m < \frac{1}{3}$.

Alors $AR_1 > AR$. On a

$$\frac{I_1 I \sin ma}{OI} = \sin\delta,$$

δ désignant l'arc RR_1.

Or

$$I_1 I = r\rho R \;- r\rho_1 R_1,$$
$$I_1 I = r(\rho R - \rho_1 R_1) + (r - r_1)\rho_1 R_1;$$

mais

$$\rho R - \rho_1 R_1 = 2\sin\frac{2ma - \delta}{2}\sin\frac{\delta}{2};$$

par suite

$$\rho R - \rho_1 R_1 < \sin ma \sin\delta,$$

et il vient

$$\frac{(r - r_1)\rho_1 R_1 \sin ma}{OI} > \left(1 - \frac{r}{OI}\sin^2 ma\right)\sin\delta;$$

d'ailleurs

$$\rho_1 R_1 = \cos ma - \cos a, \qquad \rho_1 R_1 \sin ma = \frac{m(1 - m^2)}{2} a^3 \varphi(a)$$

et

$$r - r_1 = \frac{1 - 9m^2}{90} f_1(a) \frac{a^2}{\varphi(a)}$$

d'après le n° **2**; par conséquent,

$$\frac{(1-m^2)f_1(a)}{180(\mathrm{OI}-r\sin^2 ma)}m(1-9m^2)a^5 > \sin\delta,$$

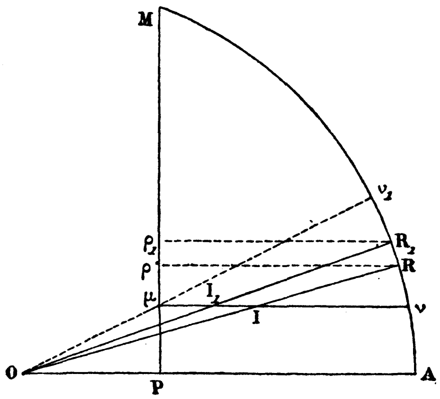
$$\mathrm{OI}=\frac{\cos a+\frac{2}{3}(\cos\mathrm{AR}-\cos a)}{\cos\mathrm{AR}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{\cos a}{2\cos\mathrm{AR}}\right).$$

La fonction

$$\frac{1-m^2}{180(\mathrm{OI}-r\sin^2 ma)} < \frac{1-m^2}{120\cos^2 ma}$$

atteint sa valeur maximum pour $a=\frac{\pi}{2}$ et $m=\frac{1}{3}$; $f_1(a)$ est d'ail-

Fig. 2.



leurs toujours inférieur à 1 et il vient, en définitive,

$$0,1\,m(1-9m^2)\left(\frac{2a}{\pi}\right)^5 > \sin\delta.$$

Si $m>\frac{1}{3}$, r_1 est supérieur à $\frac{2}{3}$, $\mathrm{AR}>\mathrm{AR}_1$; les calculs précédents subsistent avec quelques modifications; dans le dénominateur, $\mathrm{OI}-r\sin^2 ma$ doit être remplacé par $\mathrm{OI}-r\sin^2\mathrm{AR}$, et l'on trouve que

$$\frac{1}{7}(\nu_1-9m^2)\,m\left(\frac{2a}{\pi}\right)^5$$

est toujours plus grand en valeur absolue que $\sin\delta$ et de même signe.

4. Dans la pratique du dessin, toute distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de millimètre est négligeable. On pourra donc substituer le point R au point R_1 lorsque

$$\frac{R}{7} m(1 - 9m^2)\left(\frac{2a}{\pi}\right)^5.$$

R, désignant le rayon du cercle, sera inférieur à 0,0002. Lorsque R, le rayon, est plus petit que $0^m,50$, cette limite n'est pas atteinte, quel que soit m, supposé toujours plus petit que $\frac{1}{2}$, pourvu que a soit inférieur à $\frac{\pi}{6}$; en opérant donc sur le reste de la division d'un arc par $\frac{\pi}{6}$, le résultat pourrait être considéré comme rigoureux. En outre, lorsque m est voisin de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{1}{6}$, il est avantageux de diviser l'arc dans le rapport $\frac{1}{2} - m$, d'où l'on déduira facilement la fraction m.