BULLETIN DE LA S. M. F.

PICQUET

Sur les courbes gauches algébriques ; surface engendrée par les sécantes triples ; nombre des sécantes quadruples

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 260-280
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__260_0>

Sur les courbes gauches algébriques ; surface engendrée par les sécantes triples ; nombre des sécantes quadruples ; par M. Picquet.

(Séance du 23 juillet 1873)

I. On connaît la définition de la courbe gauche de degré m : c'est une courbe coupée par un plan quelconque en m points. Cette définition géométrique, impliquant la connaissance du *degré*, puise son origine dans l'algèbre, et ne saurait conséquemment s'appliquer qu'aux courbes algébriques, c'est-à-dire aux courbes qui sont le résultat de l'intersection de deux surfaces algébriques. Il suit de là que l'on ne peut pas généralement considérer l'ensemble de deux courbes gauches de degré p et q, comme une courbe gauche de degré $p+q$; car si une courbe de degré $p+q$ située sur une surface algébrique se décompose en deux autres dont les degrés respectifs sont p et q, ces deux dernières courbes auront généralement un certain nombre de points communs, ce qui n'aurait pas lieu si l'on prenait au hasard les deux courbes pour constituer la courbe de degré $p+q$. Ainsi c'est à tort que l'on voudrait considérer deux droites de l'espace comme formant une courbe gauche du second degré : elle satisfait pourtant à la définition, mais l'on voit qu'une des premières conséquences de cette définition est une restriction de cette définition même (*).

II. La théorie générale des courbes gauches repose essentiellement sur les formules de Cayley, déduites des formules analogues de Plücker, relatives aux courbes planes ; nous allons les rappeler. Soient

m le degré de la courbe gauche,

n la classe de la surface développable dont ses tangentes sont les génératrices,

r le degré de cette surface,

α le nombre de plans stationnaires,

β le nombre des points stationnaires,

x le nombre des points par où passent deux génératrices non consécutives de la développable, points situés dans un plan donné,

y le nombre des plans passant par deux génératrices non consécutives de la développable, plans passant par un point donné,

h le nombre des sécantes doubles de la courbe que l'on peut mener par un point donné,

(*) Pour préciser davantage, deux courbes qui n'ont aucun point commun ne peuvent être considérées comme formant une seule courbe, que lorsqu'une troisième courbe intervient, que chacune d'elles rencontre en un ou plusieurs points. Ainsi la courbe d'intersection d'une surface du second degré avec une surface du troisième peut se décomposer en une courbe du quatrième degré et deux droites qui ne se rencontrent pas, mais qui rencontrent chacune la première courbe en trois points.

g le nombre des droites par où l'on peut mener deux plans tangents à la développable, droites situées dans un plan donné ;

on a entre ces neuf quantités les douze relations suivantes, dont six seulement sont indépendantes et peuvent servir, lorsqu'on en connait trois, à déterminer les six autres :

$$
\begin{aligned}
n &= r(r-1) - 2x - 3m, & r &= m(m-1) - 2h - 3\beta,\\
\alpha &= 3r(r-2) - 6x - 8m, & n &= 3m(m-2) - 6h - 8\beta,\\
r &= n(n-1) - 2g - 3\alpha, & m &= r(r-1) - 2y - 3n,\\
m &= 3n(n-2) - 6g - 8\alpha, & \beta &= 3r(r-2) - 6y - 8n,\\
m - \alpha &= 3(r-n), & n - \beta &= 3(r-m),\\
2(x-g) &= (r-n)(r+n-9), & 2(y-h) &= (r-m)(r+m-9).
\end{aligned}
$$

Et si la courbe considérée est l'intersection de deux surfaces de degrés μ, ν, comme l'on a indépendamment

$$m = \mu\nu, \quad \beta = 0, \quad r = \mu\nu(\mu + \nu - 2), \quad 2h = \mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1),$$

on a plus d'éléments qu'il n'en faut pour déterminer les cinq autres caractéristiques en fonction de μ et de ν (*).

III. Des neuf caractéristiques d'une courbe gauche, une des plus importantes est la quantité h qui exprime le nombre de sécantes doubles que l'on peut mener à la courbe par un point donné : elle va nous servir à trouver une relation dans laquelle entre le nombre k des points communs à deux courbes gauches algébriques, résultat de la décomposition d'une courbe simple. Soient, en effet, h_p et h_q les caractéristiques relatives aux deux courbes dont les degrés respectifs sont p et q; si $m=p+q$ est le degré de la courbe primitive, et si h_m est le nombre de ses sécantes doubles issues d'un point donné, il est clair qu'il se composera : 1° des sécantes doubles issues du point à chacune des deux courbes suivant lesquelles elle se décompose, c'est-à-dire h_p+h_q; 2° des droites issues du point et rencontrant une fois chaque courbe, droites égales en nombre aux génératrices suivant lesquelles se coupent les deux cônes ayant pour sommet le point donné, et les deux courbes pour bases respectives; c'est-à-dire à pq, si ces courbes n'ont aucun point commun. Mais si elles ont un point commun, la droite joignant le sommet commun à ce point est comptée dans les pq génératrices, et doit en être retranchée si l'on ne veut que le nombre des droites qui répondent proprement à la question, lequel devient $pq - 1$; si elles ont k points communs, il deviendra $pq - k$. On aura donc

$$h_m = h_p + h_q + pq - k,$$

d'où l'on tire

$$k = pq + h_p + h_q - h_m. \tag{1}$$

(*) SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, p. 250.

Ainsi, toutes les fois que l'on connaîtra les caractéristiques des deux courbes élémentaires, on pourra, au moyen de cette formule, déterminer le nombre de leurs points d'intersection. Elle introduit un élément de plus, le nombre k, et une relation de plus.

IV. On peut en déduire quelques relations simples entre les caractéristiques des courbes élémentaires et celles de la courbe primitive. On a, par exemple, en supposant toujours $\beta = 0$,

$$r_p = p\,(p-1) - 2h_p, \quad r_q = q\,(q-1) - 2h_q,$$

et

$$2k = 2pq + 2h_p + 2h_q - 2h_m.$$

Ajoutant membre à membre, il vient

$$\begin{aligned}(2) \quad r_p + r_q + 2k &= (p+q)^2 - (p+q) - 2\,h_m \\ &= (p+q)\,(p+q-1) - 2h_m = m\,(m-1) \quad 2h_m = r.\end{aligned}$$

Le degré de la développable correspondant à la courbe primitive est égal à la somme des degrés des développables correspondant aux courbes élémentaires, plus deux fois le nombre des points d'intersection.

On aurait de même :

$$(3) \qquad n = n_p + n_q + 6\,k,$$
$$(4) \qquad \alpha = \alpha_p + \alpha_q + 12\,k,$$
$$(5) \qquad x = x_p + x_q + 2k\,(r_p + r_q + k - 2) + r_p\,r_q,$$
$$(6) \qquad y = y_p + y_q + 2k\,(r_p + r_q + k - 5) + r_p\,r_q,$$
$$(7) \qquad g = g_p + g_q + 2k\,(3n_p + 3n_q + 9k - 11) + n_p\,n_q.$$

Mais toutes ces équations sont des conséquences de la première ; intéressantes au point de vue géométrique, elles ne fournissent aucune relation distincte.

V. β étant nul *en général* pour les courbes algébriques, il en résulte qu'une courbe de degré m est déterminée, si l'on connaît un autre de ses éléments, la quantité h par exemple. Nous allons, au moyen de la formule (1), étudier quelques surfaces particulières, relatives à une courbe gauche, et en déterminer les éléments au moyen de m et de h ; ainsi, lorsque la courbe sera connue, la surface le sera également.

VI. Et d'abord, il est facile de vérifier cette formule en l'appliquant à des cas connus. On verra, par exemple :

1° Qu'une courbe gauche du second degré (conique) ne peut se décomposer en deux droites, que si ces deux droites ont un point commun ;

2° Qu'une cubique gauche ne peut se décomposer en une conique et en une droite, que si ces deux courbes ont un point commun. Si l'on suppose qu'ensuite la conique se décompose en deux droites, on voit que, pour que l'ensemble de trois droites forme une cubique gauche proprement dite, il faut que l'une d'elles s'appuie sur les deux autres ;

3° Qu'une biquadratique (courbe gauche du quatrième degré) de première espèce (intersection de deux surfaces du second degré) ne peut se réduire à une cubique gauche et à une droite qu'autant que cette droite est une sécante double de la cubique gauche, ce qui arrive lorsque les deux surfaces ont une génératrice commune. Si la biquadratique est de seconde espèce (intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième degré ayant en commun deux droites qui ne se rencontrent pas), il faudra que la droite et la cubique aient un point commun. D'où il suit qu'une cubique gauche située sur une surface du second degré forme une biquadratique de première espèce avec toutes les génératrices d'un système, et de seconde espèce avec toutes les génératrices de l'autre ;

4° Qu'une courbe gauche du sixième degré, intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième degré, ne peut se décomposer en deux cubiques gauches que si ces deux courbes ont cinq points communs ; etc.

Généralement, considérons trois surfaces de degrés μ, ν, ρ, se coupant en $\mu\nu\rho$ points. Les deux premières, dont l'ensemble fait une surface de degré $\mu+\nu$ coupent la troisième suivant des courbes de degrés respectifs $\mu\rho$ et $\nu\rho$, dont l'ensemble fait une courbe de degré $(\mu+\nu)\rho$. Donc, si une courbe de degré $(\mu+\nu)\rho$ se décompose en deux courbes de degrés $\mu\rho$ et $\nu\rho$, ces deux courbes devront avoir $\mu\nu\rho$ points communs. Remplaçons donc, dans la relation (1), p par $\mu\rho$, q par $\nu\rho$ et m par $(\mu+\nu)\rho$, il viendra

$$\mu\nu\rho^2 + h_{\mu\rho} + h_{\nu\rho} - h_{(\mu+\nu)\rho} = \mu\nu\rho.$$

D'ailleurs $h_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\mu\rho(\mu-1)(\rho-1)$; le premier membre devient donc

$$\mu\nu\rho^2 + \frac{1}{2}\mu\rho(\mu-1)(\rho-1) + \frac{1}{2}\nu\rho(\nu-1)(\rho-1) - \frac{1}{2}(\mu+\nu)\rho(\mu+\nu-1)(\rho-1),$$

ou

$$\mu\nu\rho^2 + \frac{1}{2}\rho(\rho-1)\Big[\mu(\mu-1) + \nu(\nu-1) - (\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\Big],$$

ou

$$\mu\nu\rho^2 - \frac{1}{2}\rho(\rho-1)2\mu\nu = \mu\nu\rho\Big[\rho - (\rho-1)\Big] = \mu\nu\rho. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VII. On peut encore appliquer la relation (1) à la recherche du degré δ de la surface engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant sur une courbe donnée de degré m_1, et assujettie à être sécante double d'une autre courbe gauche de degré m.

Le nombre cherché étant égal au nombre des droites qui rencontrent deux fois la courbe de degré m, une fois la courbe de degré m_1 et une fois une droite donnée, est égal à m_1 fois le degré de la surface que l'on obtiendrait en remplaçant la courbe degré m_1 par une droite. On peut ainsi simplifier le problème, et, dans ce cas, il est évident qu'un plan passant par la droite coupera la surface, outre la droite avec un degré de multiplicité h_m, suivant les $\frac{1}{2}m(m-1)$ droites joignant deux à deux ses m points d'intersection avec la courbe; le degré cherché sera donc $\delta = h_m + \frac{1}{2}m(m-1)$ (*).

Mais on peut y arriver autrement; soit en effet $f(m)$ le nombre cherché. Si l'on suppose que la courbe de degré m se réduise à deux courbes de degrés p et q, la surface cherchée se composera de trois surfaces, l'une de degré $f(p)$ engendrée par le mouvement de la génératrice sur la courbe de degré p, une seconde de degré $f(q)$ pour la courbe de degré $f(q)$, et enfin une troisième engendrée par le mouvement d'une droite rencontrant la droite donnée, et une fois chacune des deux courbes, surface dont le degré est généralement $2pq$ (**) si les deux courbes ne se coupent pas. Mais si elles se coupent en k points, ce degré doit être diminué de k fois le degré de la troisième directrice qui est 1 (***).

On aura donc

$$f(m) = f(p) + f(q) + 2pq - k,$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$f(m) = f(p) + f(q) + 2pq - (pq + h_p + h_q - h_m),$$

ou

$$f(m) = f(p) + f(q) + pq + h_m - h_p - h_q.$$

En remplaçant $f(m)$, $f(p)$ et $f(q)$ par leurs valeurs $h_m + \frac{1}{2}m(m-1)$, $h_p + \frac{1}{2}p(p-1)$, et $h_q + \frac{1}{2}q(q-1)$, on verrait aisément que l'équation est vérifiée, si l'on a $m = p + q$. Mais on peut procéder autrement, et s'en servir pour trouver $f(m)$. Pour cela, supposons $p = m - 1$ et $q = 1$, c'est-à-dire décomposons la courbe de degré m en une courbe de degré $m - 1$ et une droite, l'équation devient alors

$$f(m) = f(m-1) + m \quad 1 + h_m - h_{m-1},$$

car

$$f(1) = 0 \text{ et } h_1 = 0;$$

(*) SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, p. 352.
(**) *Ibid.*, p. 350.
(***) *Ibid.*, p. 352.

de même

$$f(m-1)=f(m-2)+m-2+h_{m-1}-h_{m-2},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$f(3)=f(2)+2+h_3-h_2,$$
$$f(2)=f(1)+1+h_2-h_1.$$

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, il reste

$$f(m)=h_m+(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1=h_m+\frac{1}{2}m(m-1). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

VIII. Il est clair toutefois que la formule (I) ne peut s'appliquer qu'à une condition expresse, c'est que l'on ne demande pas une décomposition impossible. Supposons par exemple que l'on veuille décomposer la courbe gauche du neuvième ordre, intersection de deux surfaces du troisième degré, en une cubique gauche et une courbe du sixième degré, intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième. Cette décomposition n'est pas possible, car si l'une des surfaces du troisième degré se décompose pour donner avec l'autre la courbe du sixième degré au moyen d'une surface du second degré, le reste de la surface sera un plan qui donnera pour le reste de la courbe une cubique plane, coupant en six points la courbe du sixième degré. Si alors on voulait appliquer la formule, on aurait

$$k=3.6+h_3+h_6-h_9.$$

Or

$$h_9=\frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)=\frac{1}{2}.9.2.2=18,\quad h_6=\frac{1}{2}.6.2.1=6,\quad h_3=1;$$

donc

$$k=18+1+6-18=7.$$

La cubique gauche couperait donc la courbe du sixième degré et par suite la surface du second degré en sept points, ce qui est impossible, puisqu'elle n'est pas sur cette surface dont la courbe du sixième degré est l'intersection complète avec la surface du troisième degré.

Mais si l'on admet que la cubique doit être plane, on aura alors $h_3=0$ et $k=6$, comme nous l'avions prévu.

IX. Nous avons vu que le degré de la surface engendrée par le mouvement d'une droite qui rencontre une fois une courbe de degré m_1 et deux fois une courbe de degré m est

$$f(m, m_1)=m_1\left[h_m+\frac{1}{2}m(m-1)\right].$$

Par chaque point de la première courbe, on peut mener h_m génératrices de la surface ; donc cette courbe en est une courbe multiple d'ordre h_m. Par chaque point de la seconde on peut mener $m_1(m-1)$ génératrices de la surface, qui sont les génératrices communes des deux cônes ayant le point pour sommet et chaque courbe pour base ; cette courbe est donc aussi une courbe multiple de la surface, d'ordre $m_1(m-1)$.

Tout ce qui précède est vrai si les deux courbes n'ont aucun point commun ; si elles ont un point commun, le cône qui a ce point pour sommet et qui a pour base la courbe de degré m fait tout entier partie de la surface. La surface proprement dite sera donc l'autre partie, de degré $m_1\left[h_m+\frac{1}{2}m(m-1)\right]-(m-1)$; et, s'il y a k points d'intersection, $f(m, m_1)$ se réduit à

$$(8) \qquad m_1\left[h_m+\frac{1}{2}m(m-1)\right]-k(m-1),$$

et il y a en outre k cônes de degré $m-1$, dont il n'y a pas lieu de tenir compte.

Dans ce cas, chacun des cônes passe une fois par la courbe de degré m ; le degré de multiplicité de l'autre restant égal à h_m, celui de la dernière doit donc être diminué de k, et il devient $m_1(m-1)-k$.

Nous allons appliquer ce qui précède à la détermination du nombre des droites situées sur une surface du troisième degré non réglée. Considérons la courbe du neuvième degré décomposée ainsi qu'il a été dit plus haut en une cubique plane et une courbe du sixième degré, intersection de deux surfaces du second et du troisième degré, et cherchons le degré de la surface engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant une fois sur la cubique plane et deux fois sur l'autre courbe. On aura alors

$$f(6, 3)=3\left(h_6+\frac{1}{2}.6.5\right)-6.5,$$

car nous avons vu que les deux courbes ont six points d'intersection. Et comme $h_6=6$, le degré cherché est 33. Ainsi, la surface proprement dite est du trente-troisième degré ; et elle coupera la surface du troisième degré suivant une courbe du quatre-vingt-dix-neuvième degré. D'ailleurs toutes les génératrices de la surface ayant trois de leurs points sur les deux courbes directrices ne peuvent couper en un quatrième point la surface du troisième degré, à moins d'être tout entières sur cette surface. Donc les deux surfaces ne peuvent avoir de points communs en dehors des deux courbes directrices et des droites situées sur la surface du troisième degré. Or, la surface réglée renferme la cubique $h_m=6$ fois, elle renferme l'autre courbe $m_1(m-1)-k=3.5-6=9$ fois ; si donc on appelle x le nombre des droites situées sur la surface du troisième degré, on a

$$3.6+6.9+x=99, \quad 18+54+x=99,$$

d'où

$$x = 27.$$

Si, dans $f(m_1, m)$, on fait

$$m_1 = 1, \quad m = 4, \quad h_m = 2, \quad k = 2,$$

ou

$$m_1 = 1, \quad m = 3, \quad h_m = 1, \quad k = 1,$$

on trouve, comme on doit s'y attendre, une surface du second degré.

X. On peut appliquer la même méthode à la recherche du degré de la surface engendrée par les sécantes triples d'une courbe algébrique. Si l'on suppose en effet que la courbe se décompose en deux autres de degrés p et q $(p + q = m)$, la surface cherchée se composera des deux surfaces analogues pour les courbes suivant lesquelles elle se décompose, en outre des surfaces engendrées par le mouvement de la génératrice s'appuyant une fois sur l'une des courbes et deux fois sur l'autre, surfaces dont les degrés respectifs seront, d'après ce qui précède,

$$p\left[h_q + \frac{1}{2}q(q-1)\right] - k(q-1) \quad \text{et} \quad q\left[h_p + \frac{1}{2}p(p-1)\right] - k(p-1),$$

k étant le nombre des points d'intersection des deux courbes. Si donc on appelle $\varphi(m)$ l'expression cherchée, on aura

$$\varphi(m) = \varphi(p) + \varphi(q) + p\left[h_q + \frac{1}{2}q(q-1)\right] + q\left[h_p + \frac{1}{2}p(p-1)\right] - k(p+q-2),$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$\varphi(m) = \varphi(p) + \varphi(q) + p\left[h_q + \frac{1}{2}q(q-1)\right] + q\left[h_p + \frac{1}{2}p(p-1)\right]$$
$$- (pq + h_p + h_q - h_m)(p + q - 2).$$

Telle est l'expression de $\varphi(m)$; pour la déterminer explicitement, nous supposerons comme plus haut $p = m - 1$, $q = 1$, de telle sorte que l'une des courbes sera une droite, et nous aurons

$$\varphi(m) = \varphi(m-1) + h_{m-1} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (m - 1 + h_{m-1} - h_m)(m-2),$$

puisque $\varphi(1) = 0$ et $h_1 = 0$, ou

$$\varphi(m) = \varphi(m-1) + (m-2)h_m - (m-3)h_{m-1} - \frac{1}{2}(m-1)(m-2);$$

de même

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) + (m-3)h_{m-1} - (m-4)h_{m-2} - \frac{1}{2}(m-2)(m-3),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\varphi(4) = \varphi(3) + 2h_4 - h_3 - \frac{1}{2}(4-1)(4-2).$$

$\varphi(3)$ est évidemment nul, puisque toute cubique gauche peut être mise sur une surface du second degré et n'admet pas conséquemment de sécantes triples en dehors des génératrices de la surface, qui la coupent les unes en un point, les autres en deux; il vient donc, en ajoutant toutes ces équations,

$$\varphi(m) = (m-2)\, h_m - h_3 - \frac{1}{2}\sum_4^m (m-1)(m-2).$$

La quantité $h_3 + \frac{1}{2}\sum_4^m (m-1)(m-2)$ est facile à calculer et est égale à $\frac{1}{6} m(m-1)(m-2)$; on a donc

$$\varphi(m) = (m-2)\left[h_m - \frac{1}{6} m(m-1)\right]. \tag{9}$$

On a ainsi le degré cherché en fonction de m et de h_m. La surface admettra la courbe directrice comme courbe multiple d'ordre $h_m - m + 2$, puisque, par chaque point de la courbe, on peut mener $h_m - m + 2$ droites qui la rencontrent encore deux fois (*).

XI. On peut appliquer cette formule aux courbes les plus usuelles. Nous venons de voir que, pour $m=3$, $\varphi(m)$ est nul; pour $m=4$, on a deux valeurs de h, $h=2$ ou $h=3$. La première valeur donne la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré, pour laquelle on doit trouver, pour la même raison que ci dessus, $\varphi(m)=0$. Pour $m=4$, $h=3$, on a la courbe d'intersection partielle de deux surfaces du second et du troisième degré, courbe qui est toujours sur une surface du second degré et sur une seule, et qui est rencontrée trois fois par les génératrices de l'un des deux systèmes; on doit donc trouver $\varphi(m)=2$. Il n'y a pas d'autre courbe simple du quatrième degré, car le maximum de h en fonction de m est évidemment $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, nombre maximum des points doubles d'une courbe plane de degré m, ce qui donne 3 pour $m=4$.

On sait qu'il y a trois espèces de courbes du cinquième degré pour lesquelles h peut être égal à 4, à 5 ou à 6 (**). On aura, suivant ces cas,

$$\varphi(5) = 2, \quad \varphi(5) = 5, \quad \text{ou} \quad \varphi(5) = 8.$$

La première est l'intersection partielle de deux surfaces du second et du

(*) SALMON, *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. V, p. 24.
(**) *Ibid.*, p. 40.

troisième degré qui ont une droite commune; les génératrices d'un système de la première surface la coupent donc en trois points et les génératrices de l'autre en deux points : on doit donc trouver $\varphi(m) = 2$.

Pour les courbes gauches du sixième degré, le minimum de h, qui est en général le plus grand entier contenu dans $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, est 6 (*). Il correspond à la courbe d'intersection complète de deux surfaces du second et du troisième degré (II). Une pareille courbe est évidemment rencontrée en trois points par les génératrices de chacun des deux systèmes; la surface des sécantes triples sera donc deux fois la surface du second degré, et l'on aura $\varphi(m) = 4$.

Plus généralement, si l'on considère une courbe de degré pair $2q$, intersection d'une surface du second degré et d'une surface de degré q, chaque système de génératrices de la première surface rencontrant la courbe en q points, une génératrice peut être considérée de $\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$ façons comme une sécante triple; la surface cherchée sera donc la surface du second degré prise $\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$ fois pour chaque système de génératrices, soit $2\,\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$ fois. De sorte que $\varphi(m)$ doit être égal à $2.2\,\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} = \frac{2}{3}\,\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right) = \frac{m(m-2)(m-4)}{12}$. C'est ce qu'il est facile de vérifier en remplaçant, dans l'expression générale de $\varphi(m)$, h par sa valeur, qui est $\frac{m(m-2)}{4}$, en vertu de la formule $h = \frac{1}{2}\,\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$. Il serait aisé d'établir ainsi *a priori* la valeur de $\varphi(m)$ pour toutes les courbes situées sur une surface du second degré.

La courbe du sixième degré pour laquelle h est égal à 7 s'obtient en décomposant en une cubique gauche et une courbe du sixième degré la courbe du neuvième degré intersection de deux surfaces cubiques. Cette courbe intéressante se présente d'une façon très-remarquable dans l'étude

(*) M. Halphen a énoncé cet important théorème (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXX, p. 381). Sans y ajouter rien de nouveau, on peut le préciser en remarquant que, si m est pair, le plus grand entier contenu dans $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ est $\left(\frac{m-1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{m(m-2)}{4}$: la courbe est alors l'intersection d'une surface du second degré avec une surface de degré $\frac{m}{2}$. Si m est impair, le minimum de h est précisément $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, et la courbe est l'intersection partielle d'une surface du second degré avec une surface de degré $\frac{m+1}{2}$, intersection dont le complément est une ligne droite.

du réseau de surfaces du second degré, comme étant le lieu des sommets des cônes du réseau, ou encore le lieu des points dont les plans polaires par rapport à toutes les surfaces du réseau passent par une même droite, lesquelles droites sont précisément les sécantes triples de la courbe. Cette étude fait voir que la surface des sécantes triples est du huitième degré et admet la courbe pour courbe triple, c'est ce qui résulte encore de notre théorie générale.

XII. Si l'on considère la courbe du neuvième degré, intersection de deux surfaces du troisième degré, l'application de la formule précédente va encore nous permettre de déterminer le nombre des droites situées sur l'une des deux surfaces. On a, en effet, pour cette courbe,

$$h_9 = 18 \text{ (VIII)}, \quad \varphi(9) = 7\left(18 - \frac{1}{6}.9.8\right) = 42.$$

La surface engendrée par ses sécantes triples est du quarante-deuxième degré, et admet la courbe directrice comme courbe multiple d'ordre $h_9 - 9 + 2 = 11$. Une génératrice de la surface ayant trois points sur la courbe, et par suite sur une quelconque des deux surfaces du troisième degré, ne saurait d'ailleurs en avoir une quatrième sur cette surface sans être située tout entière sur elle ; donc, si l'on considère la courbe d'intersection d'une des surfaces du troisième degré avec celle du quarante-deuxième degré, elle ne peut se composer que de la courbe directrice du neuvième degré et des droites situées sur la surface du troisième degré. Si donc x est le nombre de ces droites, comme l'intersection complète doit être de degré $3.42 = 126$, on aura

$$11.9 + x = 126,$$

d'où

$$x = 27.$$

Plus généralement, soit une courbe de degré $3m$, intersection d'une surface du troisième degré avec une surface de degré m, et pour laquelle

$$h_{3m} = \frac{1}{2}3m(m-1)(3-1) = 3m(m-1);$$

on aura

$$\varphi(3m) = (3m-2)\left[3m(m-1) - \frac{1}{6}3m(3m-1)\right],$$

et en réduisant

$$\varphi(3m) = \frac{m}{2}(3m-2)(3m-5).$$

Si l'on considère la courbe d'intersection de cette surface avec la surface du troisième degré, courbe de degré égal à $3\varphi(3m)$, elle se composera de la courbe précédente prise avec un degré de multiplicité égal à

$$h_{3m} - 3m + 2 = 3m(m-1) - 3m + 2 = 3m^2 - 6m + 2,$$

et des x droites situées sur la surface du troisième degré prises chacune avec un degré de multiplicité facile à trouver, car chacune d'elles coupe la surface de degré m, et par suite la courbe en m points, qui, combinés trois à trois, donnent le nombre $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ de façons dont la droite peut être considérée comme une sécante triple de la courbe directrice. On aura donc

$$\frac{3}{2} m(3m-2)(3m-5) = 3m(3m^2 - 6m + 2) + x\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

et en réduisant

$$9(3m-2)(3m-5) = 18(3m^2 - 6m + 2) + x(m-1)(m-2),$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \frac{9(3m-2)(3m-5) - 18(3m^2 - 6m + 2)}{(m-1)(m-2)} \\ &= \frac{81m^2 - 189m + 90 - 54m^2 + 108m - 36}{(m-1)(m-2)}, \\ &= 27\frac{m^2 - 3m + 2}{(m-1)(m-2)} = 27. \end{aligned}$$

XIII. Nous avons jusqu'à présent considéré des droites assujetties à trois conditions et engendrant une surface; nous allons maintenant leur imposer une condition de plus, de sorte qu'au lieu de chercher le degré d'une surface, nous aurons à déterminer le nombre des droites qui répondent à la question.

1° *Nombre des droites qui rencontrent une fois quatre courbes différentes, de degrés* m_1, m_2, m_3, m_4.

La surface engendrée par les droites qui rencontrent les trois premières courbes étant en général de degré $2m_1m_2m_3$ (*), la quatrième courbe rencontrera cette surface en $2m_1m_2m_3m_4$ points; il y aura donc en général $2m_1m_2m_3m_4$ droites répondant à la question.

Cela aura lieu si les courbes n'ont aucun point commun; supposons plus généralement que deux courbes de degrés m_p et m_q aient k_{pq} points communs; alors le degré de la première surface devient

$$2m_1m_2m_3 - m_1k_{23} - m_2k_{31} - m_3k_{12} \ (^{**}).$$

(*) Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 350.
(**) *Ibid.*, p. 352.

En multipliant ce nombre par m_4, on aura le nombre des points d'intersection de la quatrième courbe avec la surface. Mais parmi ces points se trouvent ceux où elle rencontre les trois courbes directrices, lesquels fournissent des droites qui ne répondent pas à la question. Considérons, par exemple, un de ses points d'intersection avec la courbe m_1 ; les deux cônes ayant ce point pour sommet et pour bases respectives les courbes m_2 et m_3 se coupent suivant $m_2 m_3$ droites qu'il y a lieu de retrancher des précédentes, et comme il y a k_{14} points d'intersection, ce sera $m_2 m_3 k_{14}$ droites à retrancher ; de même pour les points d'intersection de la courbe m_4 avec les courbes m_2 et m_3. Le nombre cherché sera donc

$$2m_1 m_2 m_3 m_4 - m_1 m_4 k_{23} - m_2 m_4 k_{31} - m_3 m_4 k_{12}$$
$$- m_2 m_3 k_{14} - m_3 m_1 k_{24} - m_1 m_2 k_{34},$$

ou plus simplement

$$(10) \qquad 2m_1 m_2 m_3 m_4 - \sum_1^4 m_p m_q k_{rs}.$$

XIV. 2° *Nombre des droites qui rencontrent une fois deux courbes de degrés m_1 et m_2, et deux fois une courbe de degré m.*

Considérons tout de suite le cas général où les deux premières courbes coupent la troisième respectivement en k_1 et k_2 points, et où elles ont de leur côté k_{12} points communs.

La surface engendrée par une droite s'appuyant une fois sur la courbe m_1 et deux fois sur la courbe m est alors de degré (IX)

$$m_1 \left[h_m + \frac{1}{2} m (m-1) \right] - k_1 (m-1).$$

En multipliant ce nombre par m_2, on aura le nombre des points d'intersection de la courbe m_2 avec la surface ; mais il faudra, comme plus haut, en retrancher les génératrices qui répondent à ses points communs avec les deux autres courbes, savoir : h_m pour chacun de ses points d'intersection avec la courbe m_1 et $m_1(m-1)$ pour chacun de ses points d'intersection avec la courbe m, car en chacun de ces points les cônes ayant respectivement pour bases la courbe m_1 et la courbe m sont de degrés m_1 et $(m-1)$. Le nombre cherché sera donc

$$(11) \quad m_1 m_2 \left[h_m + \frac{1}{2} m (m-1) \right] - k_1 m_2 (m-1) - k_2 m_1 (m-1) - k_{12} h_m.$$

Toutes ces droites s'appuyant deux fois sur la courbe m seront des génératrices doubles de la surface engendrée par les droites qui s'appuient une fois sur chacune des trois courbes. On aurait de même deux nombres analogues de génératrices doubles pour cette surface, en permutant les trois courbes deux à deux, de sorte que le nombre total des génératrices doubles de la surface qui est égal, lorsque les trois courbes ne se coupent pas, à (*)

$$m_1 m_2 \left[h_m + \frac{1}{2} m(m-1)\right] + m_2 m \left[h_{m_1} + \frac{1}{2} m_1(m_1-1)\right] \\ + m m_1 \left[h_{m_2} + \frac{1}{2} m_2(m_2-1)\right],$$

doit être diminué, dans le cas général que nous avons considéré, de

$$k_1\left[m_2(m-1) + m_2(m_1-1) + h_{m_2}\right] + k_2\left[m_1(m-1) + m_1(m_2-1) + h_{m_1}\right] \\ + k_{12}\left[m(m_1-1) + m_3(m_2-1) + h_m\right].$$

Les droites correspondantes, au lieu d'être des génératrices doubles de la surface, deviennent alors des génératrices doubles des cônes suivant lesquels elle se décompose, et qui font que son degré s'abaisse alors de $2m_1m_2m$ à $2m_1m_2m - m_1k_2 - m_2k_1 - mk_{12}$.

XV. 3° *Nombre des droites qui rencontrent deux fois deux courbes données de degrés m_1 et m_2.*

Pour trouver ce nombre, nous allons d'abord supposer que les deux courbes ne se coupent pas, et nous emploierons le procédé qui nous a déjà servi, c'est-à-dire que nous décomposerons l'une des deux courbes, la courbe m_2 par exemple, en deux autres de degrés p et q $(p+q=m_2)$, ayant k points communs donnés par l'équation

$$k = pq + h_p + h_q - h_{m_2}. \tag{1}$$

Soit $F(m_1, m_2)$ le nombre cherché ; il se composera alors des droites qui rencontrent deux fois la courbe m_1 et deux fois la courbe p, c'est-à-dire $F(m_1, p)$, plus des droites qui rencontrent deux fois la courbe m_1 et la courbe q, c'est-à-dire $F(m_1, q)$, plus des droites qui rencontrent deux fois la courbe m_1, une fois la courbe p, et une fois la courbe q, ou, d'après ce qui précède, $pq\left[h_{m_1} - \frac{1}{2} m_1(m_1-1)\right] - kh_{m_1}$. On aura donc

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, p) + F(m_1, q) + pq\left[h_{m_1} + \frac{1}{2} m_1(m_1-1)\right] - kh_{m_1},$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, p) + F(m_1, q) + pq\left[h_{m_1} + \frac{1}{2} m_1(m_1-1)\right] \\ - (pq + h_p + h_q - h_{m_2})\, h \quad ,$$

(*) Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 552.

ou

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, p) + F(m_1, q) + \frac{1}{2} pq\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} (h_{m_2} - h_p - h_q).$$

Telle est l'équation générale ; supposons maintenant que l'une des courbes soit une droite, c'est-à-dire faisons $p = m_2 - 1$, $q = 1$. Elle deviendra

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, m_2 - 1) + \frac{1}{2} (m_2 - 1)\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} (h_{m_2} - h_{m_2 - 1}),$$

car

$$F(m_1, 1) = 0 \text{ et } h_1 = 0 ;$$

de même

$$F(m_1, m_2 - 1) = F(m_1, m_2 - 2) + \frac{1}{2} (m_2 - 2)\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} (h_{m_2 - 1} - h_{m_2 - 2}),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$F(m_1, 3) = F(m_1, 2) + \frac{1}{2}\, 2\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} h_3,$$

$$F(m_1, 2) = \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1),$$

car $h_2 = 0$ et $h_1 = 0$.

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, les produits en h se détruisent, et il reste

$$\begin{aligned} F(m_1, m_2) &= h_{m_1} h_{m_2} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \Big[1 + 2 + \ldots + (m_2 - 1) \Big] \\ &= h_{m_1} h_{m_2} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1) \ (*). \end{aligned}$$

Cette formule est symétrique en m_1 et m_2, comme cela doit être ; on peut déjà la vérifier en cherchant le nombre de sécantes doubles communes à une courbe gauche de degré m_1 et à une courbe plane de degré m_2. Le plan de cette courbe coupe la première en m_1 points qui, combinés deux à deux, donnent évidemment $\frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)$ sécantes doubles de la première, coupant chacune la seconde en m_2 points ; de sorte que chacune d'elles peut être regardée de $\frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$ façons comme une sécante double de la seconde ; on doit donc trouver $\frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\ \frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$. C'est bien ce que donne la formule, puisqu'on a alors $h_{m_2} = 0$.

Mais nous allons comme précédemment l'appliquer à la recherche du

(*) Cette formule a été donnée par M. Halphen (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1869, p. 145).

nombre des droites situées sur une surface du troisième degré; cherchons d'abord ce qu'elle devient si les deux courbes m_1 et m_2 ont k points communs. En chacun de ces points, les deux cônes ayant les deux courbes pour bases respectives se coupent suivant $(m_1-1)(m_2-1)$ génératrices qu'il y a lieu de retrancher de celles qui sont données par la formule; pour k points, on aurait donc à retrancher $k(m_1-1)(m_2-1)$ génératrices, mais alors celles qui joignent les k points deux à deux sont comptées deux fois : une fois pour chacun des points qu'elles joignent; on en retranche donc ainsi $\frac{1}{2}k(k-1)$ en trop, et le nombre cherché devient, en général;

$$(12)\qquad F(m_1, m_2) = h_{m_1} h_{m_2} + \frac{1}{2} m_1(m_1-1)\frac{1}{2} m_2(m_2-1)$$
$$- k(m_1-1)(m_2-1) + \frac{1}{2}k(k-1).$$

Soit maintenant x le nombre des droites situées sur une surface du troisième degré, et supposons qu'une pareille surface vienne à couper une surface de degré p suivant une courbe de degré $3p$, et une surface de degré q suivant une courbe de degré $3q$. Si l'on considère ces deux courbes pour leur appliquer la formule précédente, toutes les droites qu'elle donnera, ayant quatre de leurs points sur la surface du troisième degré, seront tout entières sur cette surface. Réciproquement, toutes les droites de cette surface, ayant p de leurs points sur la première courbe et q sur la seconde, pourront être considérées de $\frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1)$ façons comme des sécantes doubles communes aux deux courbes. On aura donc

$$h_{3p} h_{3q} + \frac{1}{2} 3p(3p-1)\frac{1}{2} 3q(3q-1) - k(3p-1)(3q-1) + \frac{1}{2}k(k-1)$$
$$= x\frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1)$$

D'ailleurs

$$(\mathrm{II})\qquad h_{3p} = \frac{1}{2} 3p(p-1)(3-1) = 3p(p-1),$$
$$h_{3q} = 3q(q-1),$$

et

$$k = 3pq,$$

c'est le nombre des points communs aux trois surfaces. Il vient alors

$$9pq(p-1)(q-1) + \frac{9}{4}pq(3p-1)(3q-1) - 3pq(3p-1)(3q-1)$$
$$+ \frac{1}{2} 3pq(3pq-1) = \frac{x}{4}p(p-1)q(q-1),$$

d'où l'on tire facilement, en réduisant, $x = 27$.

Si les deux courbes sont du même degré et de la même espèce, on a

$$F(m_1, m_1) = h_m^2 + \frac{1}{4} m^2 (m-1)^2 - k(m-1)^2 + \frac{1}{2} k(k-1).$$

Par exemple :

Deux cubiques gauches ont généralement dix sécantes doubles communes.

Si elles ont k points communs, elles n'en ont plus que

$$10 - \frac{1}{2} k(9-k),$$

quantité qui devient nulle pour $k=4$ et $k=5$. Pour des valeurs de k supérieures à 9, le nombre cherché deviendrait supérieur à 10, au lieu de lui être inférieur ; mais il faut remarquer que, pour $k > 6$, les deux courbes coïncident, et alors la formule cesse d'être applicable.

Elle doit donc être appliquée avec circonspection : il peut arriver, par exemple, qu'elle donne un nombre négatif de sécantes doubles communes ; c'est qu'alors la valeur de k est impossible, soit que les deux courbes coïncident pour cette valeur de k, soit que, pour ce nombre de points communs, les deux courbes en admettent nécessairement d'autres.

Il faut encore écarter le cas où les deux courbes se trouvent sur une même surface réglée, dont toutes les génératrices les rencontrent deux fois.

XVI. 4° *Nombre des droites qui rencontrent trois fois une courbe donnée de degré m et une fois une courbe de degré m_1.*

Nous avons vu que la surface engendrée par les sécantes triples de la courbe m est de degré

$$\varphi(m) = (m-2)\left[h_m - \frac{1}{6} m(m-1)\right],$$

le nombre cherché sera donc, en général,

$$m_1(m-2)\left[h_m - \frac{1}{6} m(m-1)\right]$$

Mais, si les deux courbes ont k points communs, par chacun de ces points il passe $h_m - m + 2$ génératrices de la surface (X), lesquelles doivent être retranchées ; il reste alors

$$(13) \qquad \chi(m_1, m) = m_1(m-2)\left[h_m - \frac{1}{6} m(m-1)\right] - k(h_m - m + 2).$$

Si nous revenons maintenant à la surface engendrée par une droite qui rencontre une fois une courbe m_1 et deux fois une courbe m, et pour laquelle $f(m_1, m) = m_1\left[h_m + \frac{1}{2} m(m-1)\right] - k(m-1)$, on voit que ses génératrices multiples seront : 1° les droites qui rencontrent deux fois chacune des deux courbes ; 2° les droites qui rencontrent une fois la première et trois fois la seconde. Les premières peuvent être considérées de deux façons comme génératrices de la surface et seront doubles, les secondes seront triples, puisque leurs points d'intersection avec la courbe m peuvent être combinés deux à deux de trois façons. On aura donc $F(m_1, m)$ génératrices doubles, et $m_1(m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right] - k(h_m - m + 2)$ génératrices triples.

XVII. 5° *Nombre des droites qui rencontrent quatre fois une courbe donnée de degré m.*

Pour le trouver, nous décomposerons comme toujours la courbe en deux autres, de degrés respectifs p et $q (p+q=m)$. Le nombre cherché $\varphi(m)$ se composera évidemment des droites qui rencontrent quatre fois la courbe p, et quatre fois la courbe q, c'est-à-dire $\psi(p)+\psi(q)$, plus des droites qui rencontrent une fois la première et trois fois la seconde et inversement, c'est-à-dire $\chi(p, q)+\chi(q, p)$, et enfin des droites qui rencontrent deux fois chacune des courbes ou $F(p, q)$. On aura donc

$$\psi(m) = \psi(p) + \psi(q) + \chi(p,q) + \chi(q,p) + F(p,q).$$

Remplaçant ces différentes fonctions par leurs valeurs

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(p) + \psi(q) &+ p(q-2)\left[h_q - \frac{1}{6}q(q-1)\right] \\ &+ q(p-2)\left[h_p - \frac{1}{6}p(p-1)\right] - k(h_p - p + 2) - k(h_q - q + 2) \\ &+ h_p h_q + \frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1) - k(p-1)(q-1) + \frac{1}{2}k(k-1),\end{aligned}$$

k étant le nombre des points d'intersection des deux courbes, nombre égal à

$$k = pq + h_p + h_q - h_m. \tag{1}$$

Si on le remplace par cette valeur, il vient

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(p) + \psi(q) &+ p(q-2)\left[h_q - \frac{1}{6}q(q-1)\right] \\ &+ q(p-2)\left[h_p - \frac{1}{6}p(p-1)\right] - (pq + h_p + h_q - h_m)(h_p + h_q - m + 4) \\ &+ h_p h_q + \frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1) - (pq + h_p + h_q - h_m)(p-1)(q-1) \\ &+ \frac{1}{2}(pq + h_p + h_q - h_m)(pq + h_p + h_q - h_m - 1).\end{aligned}$$

Telle est l'expression générale de $\psi(m)$; pour la déterminer explicitement, nous ne ferons pas comme plus haut $p = m-1$, $q = 1$, parce qu'alors la droite suivant laquelle la courbe m se décompose devient une sécante quadruple d'ordre $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}$ de la courbe $m-1$, ce qui complique la question ; mais rien n'empêche de faire $p = m - 2$, $q = 2$, c'est-à-dire de décomposer la courbe en une conique et une courbe de degré $m - 2$. On aura alors

$$\psi(2) = 0, \quad h_2 = 0,$$

par suite

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(m-2) &+ 2(m-4)\left[h_{m-2} - \frac{1}{6}(m-2)(m-3)\right] \\ &- (2m - 4 + h_{m-2} - h_m)(h_{m-2} - m + 4) \\ &+ \frac{1}{2}(m-2)(m-3) - (2m - 4 + h_{m-2} - h_m)(m-3) \\ &+ \frac{1}{2}(2m - 4 + h_{m-2} - h_m)(2m - 5 + h_{m-2} - h_m).\end{aligned}$$

Séparant les termes en h des termes indépendants de h,

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(m-2) &+ 2(m-4)h_{m-2} - 2(m-2)h_{m-2} + (m-4)(h_{m-2} - h_m) \\ &- h_{m-2}(h_{m-2} - h_m) - (m-3)(h_{m-2} - h_m) \\ &+ \frac{1}{2}(2m - 4 + 2m - 5)(h_{m-2} - h_m) + \frac{1}{2}(h_{m-2} - h_m)^2 + f(m),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}f(m) = -\frac{1}{3}(m-2)(m-3)(m-4) &+ 2(m-2)(m-4) + \frac{1}{2}(m-2)(m-3) \\ &- 2(m-2)(m-3) + (m-2)(2m-5),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}f(m) = -\frac{1}{6}(m-2)\Big[2m^2 &- 14m + 24 - 12m + 48 - 3m + 9 \\ &+ 12m - 36 - 12m + 30\Big],\end{aligned}$$

$$f(m) = -\frac{1}{6}(m-2)(2m^2 - 29m + 75).$$

Si l'on ordonne $\psi(m)$, il vient

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(m-2) &+ \frac{1}{2}h_m^2 - h_m\left[m - 4 - m + 3 + \frac{1}{2}(4m-9)\right] \\ &+ h_{m-2}\left[2m - 8 - 2m + 4 + m - 4 - m + 3 + \frac{1}{2}(4m-9)\right] \\ &- h_{m-2}^2 + h_m h_{m-2} + \frac{1}{2}h_{m-2}^2 - h_m h_{m-2} + f(m).\end{aligned}$$

Le produit $h_m h_{m-2}$ disparaît, et il reste, en réduisant,

$$\psi(m) = \psi(m-2) + \frac{1}{2}h_m^2 - \frac{1}{2}h_m(4m-11) + \frac{1}{2}h_{m-2}(4m-19) - \frac{1}{2}h_{m-2}^2 + f(m),$$

expression très-remarquable en ce sens que, si l'on y remplace m par $m - 2$, les coefficients de h_{m-2}^2 et de h_{m-2} restent les mêmes au signe près, de sorte que h_{m-2} disparaîtra dans l'addition. On a, en effet,

$$\psi(m-2) = \psi(m-4) + \frac{1}{2}h_{m-2}^2 - \frac{1}{2}h_{m-2}(4m-19) + \frac{1}{2}h_{m-4}(4m-27) - \frac{1}{2}h_{m-4}^2 + f(m-2).$$

Il y a maintenant deux cas à considérer, suivant que m est pair ou impair. Si m est pair et égal à $2p$, on ira de la sorte jusqu'à

$$\psi(6) = \psi(4) + \frac{1}{2}h_6^2 - \frac{13}{2}h_6 + \frac{5}{2}h_4 - \frac{1}{2}h_4^2 + f(6)$$

$$\psi(4) = \frac{1}{2}h_4^2 - \frac{5}{2}h_4 + f(4),$$

car $\psi(2) = 0$ et $h_2 = 0$.

Ajoutant toutes ces équations, on a

$$\psi(m) = \frac{1}{2}h_m^2 - \frac{1}{2}h_m(4m-11) + \sum f(m).$$

$\sum f(m)$ est facile à calculer, il suffit de remplacer m par $2p$ et de chercher $\sum_2^p f(2p)$, puis de remplacer p par $\frac{m}{2}$; on trouve alors

$$\sum f(m) = -\frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

On a donc définitivement

$$(14) \qquad \psi(m) = \frac{1}{2}h_m(h_m - 4m + 11) - \frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

Si m est impair et égal à $2p+1$, le calcul se fait aussi facilement, car on a

$$\psi(3) = \psi(1) + \frac{1}{2}h_3^2 - \frac{1}{2}h_3 + f(3)$$

$$\psi(1) =$$

et l'on a

$$\psi(m) = \frac{1}{2}h_m(h_m - 4m + 11) + 1 + \sum_1^p f(2p+1),$$

ce qui conduit à la même f rmule.

En appliquant cette formule, on remarque que, abstraction faite de la ligne droite, la première courbe qui ait des sécantes quadruples est la courbe gauche du cinquième degré pour laquelle $h_5 = 6$, qui a une sécante quadruple. Les deux courbes du sixième degré que nous avons considérées, pour lesquelles $h_6 = 6$ ou $h_6 = 7$, n'en ont pas. Mais toutes les autres courbes du sixième degré en auront nécessairement, puisque $\psi(m)$ est du second degré en h et que deux valeurs de h seules peuvent l'annuler pour une valeur donnée de m. Ce sont les courbes pour lesquelles $h = 8$, $h = 9$ ou $h = 10$, et qui ont respectivement 1, 3 et 6 sécantes triples.

Si l'on considère la surface engendrée par les sécantes triples de la courbe m, toutes les sécantes quadruples en seront des génératrices multiples d'ordre 4. La surface $\varphi(m)$ a donc $\psi(m)$ génératrices quadruples.

Nous terminerons en vérifiant au moyen de cette formule l'existence des 27 droites d'une surface du troisième degré. Supposons, pour cela, qu'une surface du troisième degré rencontre une surface de degré p suivant une courbe de degré $3p$. Les sécantes quadruples de cette courbe, ayant quatre de leurs points sur la première surface, y seront tout entières; réciproquement, toutes les droites de cette surface rencontrant l'autre surface, et, par suite, la courbe, en p points, pourront être considérées de $\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}$ façons comme sécantes quadruples de la courbe. On devra donc avoir

$$\psi(3p) = 27\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4},$$

ce qu'il est facile de constater en remplaçant (XII), dans $\psi(m)$, m par $3p$ et h_m par $3p(p-1)$ (*).

(*) M. Zeuthen, de Copenhague, nous a communiqué un mémoire dont il est l'auteur (*Annali di matematica*, 1870), dans lequel il démontre également les formules suivantes relatives aux courbes gauches :

$$\varphi(m) = (m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right],$$

$$\psi(m) = \frac{1}{2}h_m(h_m - 4m + 11) - \frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

Suivant toute justice, nous nous empressons de lui restituer la priorité.