BULLETIN DE LA S. M. F.

KOEHLER

# Sur la construction des courbes du 5me et du 6me ordre à points multiples

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 1 (1872-1873), p. 27-31

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__27_1>

*Sur la construction des courbes du* $5^{me}$ *et du* $6^{me}$ *ordre à points multiples ;*

par M. Kœhler.

(Séance du 18 décembre 1872)

Quand on se propose de construire une courbe d'ordre $m$ définie par un nombre suffisant de points, la présence de points multiples parmi les données simplifie en général le problème. Si $n$ et $n'$ sont les ordres des faisceaux générateurs $(n+n'=m)$, et s'il y a $p$ points doubles, on sait en effet que le nombre des points à déterminer pour compléter les bases est $x=nn'-1-p$. Mais cette formule suppose essentiellement que $p$ ne dépasse pas un certain maximum relatif, savoir le nombre des points des deux bases que l'on peut faire coïncider (*). Comme les courbes d'ordre supérieur au $4^{me}$ peuvent avoir un nombre de points doubles supérieur à cette limite, on peut être obligé de laisser en dehors des bases un ou plusieurs de ces points. Je me suis proposé l'étude des divers cas où cette circonstance se présente, spécialement pour les courbes du $5^{me}$ et du $6^{me}$ ordre.

## I. — COURBES DU $5^{me}$ ORDRE.

En adoptant pour faisceaux générateurs un faisceau de coniques et un faisceau de courbes du $5^{me}$ ordre, on voit qu'on peut engendrer une courbe à 4 points doubles en faisant coïncider les 4 points de la première base avec 4 points de la seconde. Ici le maximum relatif dont j'ai parlé plus haut est 4 ; toutefois lorsqu'on donne 5 points doubles $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, $e_2$, et 5 points simples $f$, $g$, $h$, $i$, $k$, on peut encore affecter les 5 premiers points aux deux bases. Voici alors la construction :

La base des coniques étant $abcd$, on fera passer toutes les cubiques par ces 4 points; elles auront en outre le point double commun $e_2$. Il reste à fixer un point $p$ de leur base. Soit O un point quelconque du plan; soient F, G, H, I, K les points de concours des secondes polaires rectilignes de O par rapport aux courbes des faisceaux $e_2abcdf$, $e_2abcdg$, etc. Au quadrilatère FGHI je circonscris une conique telle que son rapport anharmonique $x$(FGHI) soit égal au rapport $abcd$ $(f, g, h, i)$. De même je circonscris à FGHK une conique capable du rapport anharmonique $abcd$ $(f, g, h, k)$. La $4^{me}$ intersection P de ces deux coniques est le point de concours des secondes polaires de O par rapport au faisceau de cubiques $e_2abcdp$.

Le point $p$ lui-même se conclut de là facilement ; il suffit de chercher l'intersection de la cubique $e_2abcd$O tangente en O à OP et de la cubique dont la seconde polaire est $e_2$P (**).

Supposons en second lieu que l'on donne 6 points doubles $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, $e_2$, $f_2$ et 2 points simples $g$, $h$.

Si l'on prend comme ci-dessus $abcd$ pour base des coniques, $e_2abcd$ pour base des courbes du $3^{me}$ ordre, il restera encore un point $p$ de leur base à déterminer de telle sorte que $f_2$ devienne un point double pour la courbe résultante.

Or, la cubique correspondante à $abcdf$ doit avoir avec cette conique deux points confondus en $f$; elle est donc tangente en $f$ à $abcdf$, et c'est un premier lieu du point $p$. Menons actuellement une droite $f_2d$ passant par $f_2$ et

(*) DE JONQUIÈRES, *Essai sur la génération des courbes géométriques*, p. 9.

(**) On simplifiera cette dernière construction en ayant la précaution de choisir le point O sur la tangente en $e$ à la conique $eabcd$; alors la cubique dont la seconde polaire est $e$P se compose de cette droite et de la conique elle-même. De la sorte on aura à chercher l'intersection de cette ligne $e_2$P avec la cubique $e_2abcd$O.

par un des points de la première base. Si l'on prend un point arbitraire $p'$ sur la cubique définie tout à l'heure, on voit que les courbes $e_2abcdp'f$, $e_2abcdp'g$, $e_2abcdp'h$ déterminent sur $f_2d$ trois segments en involution $fF'$, $G'G'_1$, $H'H'_1$; on peut les faire correspondre aux points $f_2$, $g$, $h$ où les coniques $abcdf_2$, $abcdg$, $abcdh$ coupent la droite. En cherchant les points de coïncidence des deux divisions, on aura, outre le point $f_2$ déjà connu, deux nouveaux points X′, Y′ qui seraient la 4^me^ et la 5^me^ intersection de $fd$ avec la courbe du 5^me^ ordre correspondant à la position choisie pour $p'$. En prenant d'autres points $p''$, $p'''$,... sur la même cubique, on aurait d'autres couples X″Y″, X‴Y‴,.... Tous ces couples forment une involution quadratique correspondant à la série des points $\pi$ où les droites $e_2p'$, $e_2p''$, $e_2p'''$,... coupent $fd$. Cela est évident, puisque les courbes du 5^me^ ordre forment un faisceau ayant pour base les 5 points doubles $a_2b_2c_2d_2e_2$ (20 points), les points simples $g$, $h$, enfin les deux points infiniment voisins $f$ sur la conique $abcdf$. Ainsi à un point X correspond un point Y, et aussi un seul point $p$, savoir la 15^me^ intersection de $e_2abcdf$ avec la courbe du 5^e^ ordre déterminée par X. Réciproquement, à un point $p$ (ou $\pi$) correspond un segment unique XY.

Il suffit maintenant de chercher le segment de l'involution XY dont une extrémité est en $f$ : on déterminera le point $\pi$ correspondant à ce segment; la ligne $e_2\pi$ coupera la cubique $e_2abcdf$ en $p$, et ce sera le 5^me^ point simple de la base du second faisceau.

Chacune des cubiques ayant déjà 4 points $abcd$ communs avec la conique correspondante, il reste pour chacune d'elles 2 points d'intersection à déterminer. Leur construction peut se faire à l'aide de la ligne droite et du cercle ainsi que les constructions préliminaires.

### II. — COURBES DU 6^me^ ORDRE.

Si l'on construit la courbe au moyen de deux faisceaux du 3^me^ ordre, on ne peut faire coïncider plus de 7 points des deux bases; le maximum relatif du nombre des points doubles est donc 7. Le maximum absolu peut atteindre 10, mais on ne peut faire entrer plus de 9 points doubles dans les données.

M. de Jonquières a donné une solution du problème pour le cas où l'on donne 7 points doubles et 6 points simples (*loc. cit.*, p. 45).

On peut faire entrer les 7 points doubles $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, $e_2$, $f_2$, $g_2$, et un des points simples $h$ dans la base du premier faisceau du 3^me^ ordre. La base du second se composera des mêmes points doubles et d'un point inconnu. Il peut se déterminer par la considération des points de concours des secondes polaires d'un même point du plan relatives aux 5 faisceaux de cubiques $abcdefg$ ($i$, $k$, $l$, $m$, $n$) et sa détermination entraîne celle du 9^me^ point commun à toutes les courbes du second faisceau. On peut remarquer en outre que le $9^{me}$ point de la base du faisceau *abcdefgh* appartient nécessairement à la courbe du $6^{me}$ ordre, et il en est de même pour les $9^{mes}$ points des faisceaux *abcdefgi*, *abcdefgk*, etc.

Supposons qu'on donne 8 points doubles $a_2$, $b_2$, $c_2$, $d_2$, $e_2$, $f_2$, $g_2$, $h_2$, et 3 points simples $i$, $k$, $l$.

La courbe demandée fait partie du réseau déterminé par les 7 points doubles $a_2$, $b_2$,..., $g_2$ et par les points simples $h$, $i$, $k$, $l$. Si l'on considère le faisceau du réseau dont toutes les courbes touchent en $h$ une même droite $h$X, il déterminera sur une droite telle que $a_2b_2$ joignant deux des points doubles donnés une involution quadratique. Un second faisceau tangent en $h$ à une autre droite $h$Y déterminera une autre involution sur $a_2b_2$. Le segment MN commun à ces deux involutions appartient à la courbe du $6^{me}$ ordre demandée. Elle sera déterminée complétement par les points doubles $a_2$, $b_2$,..., $g_2$ et par les 6 points $h$, $i$, $k$, $l$, M, N, $h$ étant traité comme point simple. Il est évident que cette courbe a un point double en $h$, puisqu'elle a deux points infiniment voisins communs avec deux droites différentes passant en $h$.

On voit qu'il suffit, pour obtenir les deux involutions quadratiques, de construire deux courbes de chacun des faisceaux tangents à $h$X et $h$Y.

*Construction de la courbe du* $6^{me}$ *ordre à* 9 *points doubles.* — Si l'on donne 9 points doubles $a_2$, $b_2$,..., $i_2$, la solution se déduit sans difficulté de celle du problème précédent. En mettant à part le point $i$, le faisceau déterminé par les 8 premiers points et par une tangente quelconque $i$X coupe une droite telle que $a_2b_2$ suivant une involution quadratique. Le faisceau déterminé par une autre tangente $i$Y donne lieu à une autre involution qui a un segment KL commun avec la première. La question est ramenée à construire la courbe passant par les 8 premiers points doubles et par les 3 points $i$, K, L. On a en tout 4 points simples auxiliaires à déterminer.

Lorsque les 9 points donnés forment un groupe pivotable par des cubiques, le problème est indéterminé; les courbes du $6^{me}$ ordre en nombre infini, qui répondent à la question, sont toutes décomposables en deux courbes du $3^{me}$ ordre.

Supposons en effet que les points donnés équivalent aux 36 intersections de deux courbes du $6^{me}$ ordre, et qu'on ne puisse faire passer qu'une seule cubique par ces 9 points. Prenons un point arbitraire $k$ sur cette courbe; par hypothèse, on peut décrire une courbe du $6^{me}$ ordre passant en $k$ et par les points doubles $a$, $b$, $c$,..., $i$. Cette courbe aurait donc 19 points communs avec la cubique *abc... ik*; donc la cubique en fait partie.

On traiterait d'une manière tout à fait analogue le cas où l'on donnerait un point triple et 7 points doubles. En général, si une courbe d'ordre quelconque est déterminée par $p+\delta$ points doubles ($p$ étant le maximum relatif) et par un nombre suffisant de points simples, on aura à déterminer

$nn'-1-p$ points pour compléter les bases des faisceaux générateurs et en outre $2\delta$ points auxiliaires.