Bulletin de la S. M. F.

E. Carvallo

Formules de quaternions pour la réduction des intégrales multiples les unes dans les autres

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 80-90
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__80_1>

Formules de quaternions pour la réduction des intégrales multiples les unes dans les autres;

par M. E. Carvallo.

1. Les intégrales qui se présentent en Physique mathématique sont de trois sortes :

1° Les intégrales simples le long d'une ligne; par exemple, le travail d'une force dans un certain déplacement de son point d'application ;

2° Les intégrales doubles le long d'une surface; par exemple, les flux (flux de chaleur, flux de force);

3° Les intégrales triples dans un volume; par exemple, l'évaluation de la masse contenue dans ce volume.

Ces trois espèces d'intégrales rentrent dans les trois types généraux suivants :

$$\int \varphi(\tau)\,ds, \qquad \iint \varphi(\nu)\,d\sigma, \qquad \iiint Q.dv.$$

Dans le troisième, dv est l'élément de volume; l'intégration est étendue à une portion déterminée de l'espace; enfin Q est une quantité quelconque algébrique (¹) ou complexe déterminée en chaque point de l'espace, mais variable avec ce point; en d'autres termes, Q est une fonction du vecteur qui va de l'origine à ce point.

Dans la première formule, τ est l'unité de tangente à la courbe d'intégration, ds l'élément d'arc; dans la seconde, ν est l'unité de normale à la surface d'intégration, $d\sigma$ l'élément de cette surface. Enfin, dans les deux formules, φ est l'indication d'une *fonction linéaire* complexe ou algébrique, le système linéaire (²) qui définit φ étant *variable* avec le point considéré de l'espace; en d'autres termes, ce système linéaire ou, pour mieux dire, cet opérateur φ est fonction du vecteur qui va de l'origine au point considéré.

Nous allons établir deux formules qui permettent de passer des intégrales simples aux intégrales doubles, des intégrales doubles aux intégrales triples, et inversement. Ces formules très générales renferment, comme cas particuliers, celles de Green et celles d'Ampère, qui assimilent l'action d'un courant à un feuillet magnétique : elles peuvent être étendues à l'hyperespace et confondues en une seule relative à un nombre quelconque de signes $\int$.

2. *Formule pour passer d'une intégrale double à une intégrale triple, et inversement.* — Considérons l'intégrale double

$$\int\int \varphi(\nu)\,d\sigma$$

étendue à la surface fermée (*fig.* 1) S, ν étant l'unité normale *extérieure* à la surface.

Je décompose le volume intérieur en petits parallélépipèdes rectangles, et j'étends l'intégration précédente aux surfaces de tous ces éléments. Chaque face commune à deux éléments entrera deux fois dans l'intégrale; mais les normales extérieures étant de sens contraire pour les deux parallélépipèdes, les éléments cor-

---

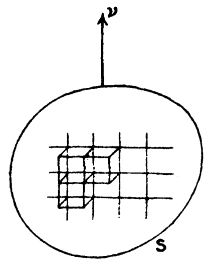
(¹) J'emploie ici le mot de *quantité algébrique* par opposition à quantité complexe pour désigner ce que les Anglais appellent *scalar*.

(²) Pour la définition des systèmes linéaires, *voir* le Mémoire de M. Laguerre (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier; 1867).

respondants de l'intégrale sont égaux et de signe contraire. Donc ils se détruisent, et il ne reste, en définitive, que l'intégrale étendue à la surface S.

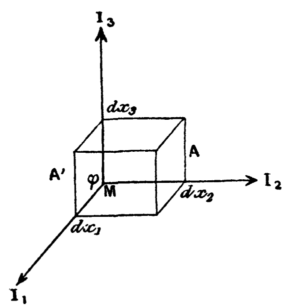
Cela posé, je considère le parallélépipède construit en un

Fig. 1.



point M (*fig.* 2) sur les trois éléments rectangulaires $I_1 dx_1$, $I_2 dx_2$, $I_3 dx_3$. Les faces A et A′ perpendiculaires à I_1 ont pour mesure commune $dx_2\, dx_3$; l'unité de normale extérieure est $-I_1$ pour A; pour A′ elle est I_1. Enfin, si φ est la valeur de l'opérateur φ en M, c'est-à-dire pour l'élément A, la valeur de cet opé-

Fig. 2.



rateur pour A′ sera $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1$. On aura donc les deux éléments d'intégrale :

Pour A,

$$\varphi(-I_1)\, dx_2\, dx_3 = -\varphi(I_1)\, dx_2\, dx_3;$$

Pour A′,

$$\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1\right)(I_1)\, dx_2\, dx_3 = +\varphi(I_1)\, dx_2\, dx_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(I_1)\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

En ajoutant et remplaçant $dx_1 dx_2 dx_3$ par dv, il vient, pour l'ensemble des faces A et A',

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathrm{I}_1)\,dv.$$

On a de même, pour les couples de faces perpendiculaires à I_2 et I_3, respectivement,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathrm{I}_2)\,dv, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(\mathrm{I}_3)\,dv.$$

On a donc, pour la surface complète du parallélépipède considéré, l'élément d'intégrale

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathrm{I}_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathrm{I}_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(\mathrm{I}_3)\right] dv$$

ou encore

$$\varphi\left(\mathrm{I}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{I}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{I}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) dv = \varphi(\nabla)\,dv;$$

les dérivations de ∇ portant sur φ.

Si maintenant on se rappelle que la somme de tous ces éléments donne l'intégrale suivant la surface S, on a la formule définitive

$$\text{(I)} \qquad \iint \varphi(\nu)\,d\sigma = \iiint \varphi(\nabla)\,dv.$$

De là cette règle d'une remarquable simplicité :

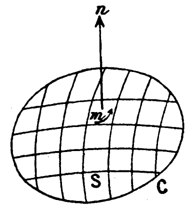
Une intégrale double le long d'une surface fermée égale une intégrale triple étendue au volume renfermé dans la surface et qui s'obtient en remplaçant ν par ∇ *dans l'expression à intégrer.*

3. *Formule pour passer d'une intégrale simple à une intégrale double, et inversement.* — Considérons l'intégrale simple

$$\int \varphi(\tau).ds$$

étendue à la courbe fermée C (*fig.* 3). Par cette courbe je fais passer une surface, que je décompose en petits rectangles, par un réseau de lignes orthogonales, et j'étends l'intégration précédente à tous ces éléments. Pour définir le sens dans lequel on les décrit, je considère toutes les normales situées d'un même côté de la surface; je supposerai que, sur le contour de chaque rectangle tel que m, on tourne de droite à gauche pour un observateur situé

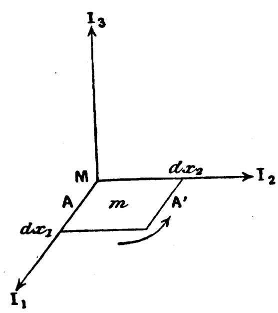
Fig. 3.



suivant la normale mn, les pieds en m et la tête en n. Dès lors, un côté commun à deux rectangles sera décrit deux fois en sens inverse, et il restera seulement l'intégrale suivant la ligne C.

Cela posé, je considère un rectangle m (*fig.* 4) : je prends pour origine son sommet M; pour axes, les directions I_1, I_2 des côtés et la normale I_3 au plan de ce rectangle. Les côtés A et A′ perpendiculaires à I_2 ont pour mesure dx_1; l'unité de tangente dans le sens du mouvement est I_1 pour A; pour A′ elle est $-I_1$. Enfin,

Fig. 4.



si φ est la valeur de l'opérateur en M, c'est-à-dire pour l'élément A, la valeur de cet opérateur pour A′ sera $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2$. On aura donc les éléments d'intégrale :

Pour A,

$$\varphi(I_1)dx_1;$$

Pour A′,

$$\left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx_2\right)(-\mathrm{I}_1)\,dx_1 = -\varphi(\mathrm{I}_1)\,dx_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\mathrm{I}_1)\,dx_1\,dx_2.$$

En ajoutant et remplaçant $dx_1\,dx_2$ par $d\sigma$, il vient, pour l'ensemble des côtés A et A′,

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\mathrm{I}_1)\,d\sigma.$$

On a de même, pour l'ensemble des côtés perpendiculaires à I_1,

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathrm{I}_2)\,d\sigma.$$

On a donc, pour le contour complet du rectangle m, l'élément d'intégrale

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathrm{I}_2) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\mathrm{I}_1)\right]d\sigma$$

ou encore

$$\varphi\left(\mathrm{I}_2\,\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathrm{I}_1\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right)d\sigma.$$

.Or on a

$$\nabla = \mathrm{I}_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{I}_2\,\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{I}_3\,\frac{\partial}{\partial x_3},$$

et, pour l'élément m, avec les axes choisis,

$$\nu = \mathrm{I}_3;$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{V}.\nabla\nu = \mathrm{I}_2\,\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathrm{I}_1\,\frac{\partial}{\partial x_2}\ [1].$$

L'élément d'intégrale correspondant au rectangle m s'écrit donc

$$\varphi(\mathrm{V}.\nabla\nu)\,d\sigma.$$

On a donc, en définitive, la formule

$$\text{(II)}\qquad \int_{\mathrm{C}} \varphi(\tau)\,ds = \int\!\!\int_{\mathrm{S}} \varphi(\mathrm{V}.\nabla\nu)\,d\sigma.$$

De là cette règle :

---

[1] Le symbole V est le signe vectoriel des quaternions,

$$\mathrm{V}.\mathrm{XY} = (x_3 y_2 - x_2 y_3)\,\mathrm{I}_1 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)\,\mathrm{I}_2 + \ldots.$$

Une intégrale simple suivant une courbe fermée égale une intégrale double étendue à l'aire intérieure d'une surface quelconque passant par cette courbe. Il suffit, pour former cette intégrale double, de remplacer τ *par* $V.\nabla\nu$ *dans l'expression à intégrer.*

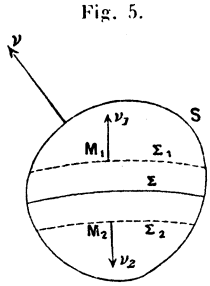
4. *Restriction aux deux théorèmes précédents.* — Les démonstrations de ces deux théorèmes supposent que l'opérateur φ est fini, continu, et admet trois dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ déterminées dans tout le champ de l'intégration. Tout cela se résume en disant que $\varphi(\nabla)$ a une valeur déterminée et unique. Si cette condition n'est pas réalisée, il faut apporter dans l'application des formules quelques précautions analogues à celles qu'on rencontre dans la théorie des imaginaires relativement aux points critiques. Sans entrer dans le détail de cette étude, dont les principes sont connus ([1]) et qui nous entraînerait trop loin, donnons seulement un exemple.

Considérons l'intégrale double, le long de la surface S (*fig.* 5),

$$\int\int_S \varphi(\nu)\,d\sigma,$$

et supposons que les conditions précédentes soient réalisées dans

Fig. 5.



toute la région de l'espace intérieure à la surface S, sauf sur une surface de discontinuité Σ. Soient

Σ_1 et Σ_2 deux surfaces infiniment voisines de part et d'autre de Σ;

([1]) *Voir* MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1886-1889.

M_1 et M_2 deux points situés sur ces surfaces et voisins l'un de l'autre;

φ_1 et φ_2 les valeurs de φ en ces points;

ν_1 et ν_2 les normales à Σ_1 et Σ_2 orientées de façon à s'éloigner de Σ.

On aura, $\iiint \varphi(\nabla)\,dv$ étant étendue à la région intérieure à S et extérieure à $\Sigma_1\,\Sigma_2$,

$$\iint_S \varphi(\nu)\,d\sigma = \iiint \varphi(\nabla)\,dv + \iint_{\Sigma_1} \varphi_1(\nu_1)\,d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \varphi_2(\nu_2)\,d\sigma;$$

et, comme $\nu_2 = -\nu_1$, on aura la formule définitive

$$\iint_S \varphi(\nu)\,d\sigma = \iiint \varphi(\nabla)\,dv + \iint_\Sigma (\varphi_1 - \varphi_2)(\nu_1).\,d\sigma.$$

5. *Remarque.* — L'analogie des propriétés du symbole ∇ avec celles d'un signe ordinaire de dérivation n'échappe à personne; les deux théorèmes précédents doivent être considérés comme analogues à la formule

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,$$

où l'on ajoute à la fois dans le deuxième membre un signe $\int$ et un signe de dérivation. Pour mieux faire comprendre cette assimilation, je considère l'intégrale suivant une surface fermée S

$$\iint \varphi(\nu)\,d\sigma,$$

où je suppose que $\varphi(\nu)$ est une quantité algébrique (non complexe). On a

$$\iint \varphi(\nu)\,d\sigma = \iiint \varphi(\nabla)\,dv.$$

Soient M et m la plus grande et la plus petite valeur de $\varphi(\nabla)$ dans l'intérieur de S, on aura

$$\iiint m\,dv \leqq \iiint \varphi(\nabla)\,dv \leqq \iiint \mathrm{M}\,dv$$

ou, en désignant par V le volume intérieur à S,

$$m\mathrm{V} \leqq \iiint \varphi(\nabla)\,dv \leqq \mathrm{MV}.$$

Donc on a, μ étant une quantité comprise entre m et M,

$$\iiint \varphi(\nabla)\,dv = \mu V.$$

D'ailleurs, si l'on suppose $\varphi(\nabla)$ continu, il ne pourra pas passer de m à M sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. Il existe donc un point I intérieur à la surface S pour lequel on a

$$\varphi_I(\nabla) = \mu,$$

et l'on obtient en définitive la formule

$$\iint \varphi(\nu)\,d\sigma = \varphi_I(\nabla).V,$$

analogue à la formule de M. O. Bonnet,

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h),$$

$\varphi_I(\nabla)$ étant l'analogue de $f'(x+\theta h)$.

On obtient de même une formule semblable pour l'intégrale suivant un contour fermé.

6. *Formules d'intégration par parties.* — L'analogie précédente se poursuit d'une façon frappante dans les deux séries d'égalités suivantes : dans la première de chaque couple, les symboles ont leur signification ordinaire; dans la seconde, φ est l'indication d'une fonction linéaire en ∇; u_1 et u_2 sont deux quantités algébriques ou complexes, fonctions du vecteur variable, indépendantes. Les dérivations de ∇_1, ∇_2, ∇ portent respectivement sur u_1, sur u_2 et à la fois sur u_1 et u_2. Enfin les intégrales doubles sont étendues à une surface fermée; les intégrales triples à l'espace intérieur :

$$d(u_1 u_2) = du_1.u_2 + u_1.du_2,$$

$$\varphi(\nabla, u_1, u_2) = \varphi(\nabla_1, u_1, u_2) + \varphi(\nabla_2, u_1, u_2),$$

$$u_1 u_2 = \int du_1.u_2 + \int u_1\,du_2,$$

$$\iint \varphi(\nu, u_1, u_2)\,d\sigma = \iiint \varphi(\nabla_1, u_1, u_2)\,dv + \iiint \varphi(\nabla_2, u_1, u_2)\,dv,$$

$$\int du_1.u_2 = u_1 u_2 - \int u_1\,du_2,$$

$$\iiint \varphi(\nabla_1, u_1, u_2)\,dv = \iint \varphi(\nu, u_1, u_2)\,d\sigma - \iiint \varphi(\nabla_2, u_1, u_2)\,dv.$$

On écrirait de même les formules relatives à la comparaison des intégrales simples étendues à un contour fermé et à des intégrales doubles. Comme on a obtenu

$$(\text{III})\qquad \iiint \varphi(\nabla_1, u_1, u_2)\,dv = \iint \varphi(\nu, u_1, u_2)\,d\sigma - \iiint \varphi(\nabla_2, u_1, u_2)\,dv,$$

on trouve également

$$(\text{IV})\qquad \iint \varphi(\mathrm{V}.\nabla_1\nu, u_1, u_2)\,d\sigma = \int \varphi(\tau, u_1, u_2)\,ds - \iint \varphi(\mathrm{V}.\nabla_2\nu, u_1, u_2)\,d\sigma.$$

Ces deux formules de la plus haute importance sont, comme on voit, de véritables formules d'intégration par parties. Nous allons maintenant donner quelques applications des formules précédentes.

7. *Formules de Green.* — Ces formules ne sont que des cas particuliers des précédentes; pour les obtenir, on donne à $\varphi(\nu)$ les formes qui suivent :

1° Dans la formule (I), on fera

$$\varphi(\nu) = \mathrm{V}_1\,\mathrm{S}.\nu\nabla_2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_2\,\mathrm{S}.\nu\nabla_1\mathrm{V}_1 \text{ (1)}, \qquad = \mathrm{V}_2\left(\nu_1\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_1} + \dots\right) - \mathrm{V}_1\left(\nu_1\frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x_1} + \dots\right),$$

V_1 et V_2 étant deux potentiels; on déduit de là

$$\begin{aligned}\varphi(\nabla) &= \mathrm{V}_1\,\mathrm{S}.\nabla\nabla_2\dot{\mathrm{V}}_2 - \mathrm{V}_2\,\mathrm{S}.\nabla.\nabla_1\mathrm{V}_1,\\ &= \mathrm{S}.\nabla_1\mathrm{V}_1.\nabla_2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_2\nabla_1^2\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_1\nabla_2^2\mathrm{V}_2 - \mathrm{S}.\nabla_1\mathrm{V}_1.\nabla_2\mathrm{V}_2\end{aligned}$$

ou enfin

$$\varphi(\nabla) = \mathrm{V}_1\nabla_2^2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_2\nabla_1^2\mathrm{V}_1.$$

La formule (I) s'écrit donc

$$\iint (\mathrm{V}_1\,\mathrm{S}\nu\nabla_2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_2\,\mathrm{S}\nu\nabla_1\mathrm{V}_1)\,d\sigma = \iiint (\mathrm{V}_1\nabla_2^2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_2\nabla_1^2\mathrm{V}_1)\,dv \text{ (2)}.$$

Cette formule, due à Green, s'écrit avec les notations habituelles

$$\iint \left(\mathrm{V}_2\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial \mathrm{N}} - \mathrm{V}_1\frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial \mathrm{N}}\right)d\sigma = \iiint (\mathrm{V}_2\Delta_1\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_1\Delta_2\mathrm{V}_2)\,dv,$$

---

(1) Par S, je représente le signe scalar des *Quaternions*

$$(\mathrm{S}.\mathrm{X}.\mathrm{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3).$$

(2) MAXWELL, *Électricité et Magnétisme*.

$\frac{\partial V}{\partial N}$ représentant la dérivée de V dans la direction normale à la surface d'intégration et Δ_2 le symbole $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

2° Dans la formule (III), on fera

$$\varphi(\nu) = V_1 S\nu . \nabla_2 V_2 ;$$

il vient

$$\iiint S . \nabla_1 V_1 . \nabla_2 V_2 = \iint V_1 . S . \nu . \nabla_2 V_2 \, d\sigma - \iiint V_1 \nabla_2^2 V_2 \, dv \text{ (1)},$$

formule de Green qu'on écrit d'ordinaire

$$\iiint \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) dv = \iint V_1 \frac{\partial V_2}{\partial N} d\sigma - \iiint V_1 . \Delta_2 V_2 \, dv \text{ (1)}.$$

3° Pour obtenir une généralisation de cette dernière formule, on fera dans la formule (III),

$$\varphi(\nu) = V_1 S . \nu . \varphi(\nabla_2 V_2);$$

on aura

$$\iiint S . \nabla_1 V_1 . \varphi(\nabla_2 V_2) = \iint V_1 S . \nu . \varphi(\nabla_2 V_2) \, d\sigma - \iiint V_1 S . \nabla_2 . \varphi(\nabla_2) . V_2 . dv \text{ (2)}.$$

Sans entrer dans le détail, je citerai encore, comme applications des formules précédentes :

1° L'équilibre des forces normales aux éléments d'une surface fermée et proportionnelles à ces éléments ;

2° Les équations d'équilibre des pressions dans un milieu (Lamé, *Élasticité*) ;

3° Le calcul des pressions dans un champ électrique (Maxwell, *Électricité et Magnétisme*) ;

4° L'assimilation d'un courant fermé à un feuillet magnétique (Ampère) ;

5° Les formules sur les flux de chaleur (Lamé, *Théorie de la chaleur*).

---

(1) Maxwell, *Électricité et Magnétisme.*

(2) Maxwell, *Ibid.*