G. KOENIGS

Sur l’oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d’un corps solide libre

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 131-135
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__131_1>

Sur l'oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d'un corps solide libre ; par M. G. Koenigs.

Soit un ellipsoïde d'axes $2a > 2b > 2c$, que nous faisons rouler sur un plan P situé à la distance h de son centre, tandis que ce centre lui-même reste fixe ; supposons, de plus, qu'à chaque instant la vitesse angulaire soit proportionnelle au diamètre $2R$ de l'ellipsoïde qui passe par le point M où il est actuellement tangent au plan. C'est la loi de Poinsot.

Pour que le mouvement que nous considérons soit effectivement celui d'un corps solide, il faut et il suffit que l'ellipsoïde puisse être un ellipsoïde d'inertie, c'est-à-dire que l'on ait

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

On sait qu'une des conséquences de cette inégalité, c'est la non-existence des points d'inflexion dans l'herpolhodie.

On peut faire rouler des ellipsoïdes, de sorte que l'herpolhodie présente des points d'inflexion ; mais ces ellipsoïdes ne sauraient, dans ce cas, vérifier l'inégalité I, ils ne sauraient être des ellipsoïdes d'inertie.

Une autre conséquence de l'inégalité I a trait à la variation de la rotation instantanée autour du diamètre du point de contact.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2}$$

les équations de la polhodie, $2\mathrm{R}$ le diamètre du point de contact,

$$\mathrm{R}^2=x^2+y^2+z^2.$$

On tire de ces équations

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^4}x^2=\frac{b^2c^2}{h^2}-(b^2+c^2)+\mathrm{R}^2,$$

$$-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{b^4}y^2=\frac{a^2c^2}{h^2}-(a^2+c^2)+\mathrm{R}^2,$$

$$\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{c^4}z^2=\frac{a^2b^2}{h^2}-(a^2+b^2)+\mathrm{R}^2;$$

d'où, eu égard à ce que $a>b>c$,

$$\frac{b^2c^2}{h^2}-(b^2+c^2)+\mathrm{R}^2>0,$$

$$\frac{a^2c^2}{h^2}-(a^2+c^2)+\mathrm{R}^2<0,$$

$$\frac{a^2b^2}{h^2}-(a^2+b^2)+\mathrm{R}^2>0.$$

Il est clair que h^2 est compris entre a^2 et c^2.

Distinguons deux cas,

$$h^2>b^2 \quad \text{et} \quad h^2<b^2,$$

$h^2>b^2$. — Les trois inégalités ci-dessus se réduisent à ces deux, qui entraînent la troisième,

$$\mathrm{R}'^2<\mathrm{R}^2<\mathrm{R}''^2,$$

où

$$\mathrm{R}'^2=a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{h^2},$$

$$\mathrm{R}''^2=a^2+c^2-\frac{a^2c^2}{h^2}.$$

Si au contraire $h^2<b^2$, les trois inégalités se réduisent à celles-ci

$$\mathrm{S}'^2<\mathrm{R}^2<\mathrm{R}''^2,$$

ou

$$S'^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2}.$$

On voit que (R′, R″) dans le premier cas, et (S′, R″) dans le second sont les limites de R. Le rapport ρ de la plus petite valeur de la vitesse angulaire à la plus grande sera donc, d'après la loi du mouvement,

$$\rho = \frac{R'}{R''} \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{S'}{R''}$$

suivant le cas.

Discutons ces deux formules.

On a

$$\frac{R'^2}{R''^2} = \frac{a^2 + b^2 - \dfrac{a^2 b^2}{h^2}}{a^2 + c^2 - \dfrac{a^2 c^2}{h^2}} = 1 - \frac{b^2 - c^2}{\dfrac{a^2}{\dfrac{a^2}{h^2} - 1} - c^2}.$$

On observe que h^2 est, dans le premier cas, compris entre a^2 et b^2; donc $\frac{a^2}{h^2} - 1$ est compris entre o et $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$, $\dfrac{a^2}{\dfrac{a^2}{h^2} - 1} - c^2$ est compris entre $+\infty$ et $\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} - c^2$, et, finalement, $\frac{R'^2}{R''^2}$ est compris entre 1 et $\frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$.

Donc, on a, dans le premier cas,

$$1 > \rho^2 > \frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}.$$

Dans le second cas, $h^2 < b^2$, h^2 est compris entre b^2 et c^2

$$\frac{S'^2}{R''^2} = \frac{b^2 + c^2 - \dfrac{b^2 c^2}{h^2}}{a^2 + c^2 - \dfrac{a^2 c^2}{h^2}};$$

$\frac{S'^2}{R''^2}$ est compris entre les valeurs limites que l'on obtient en faisant $h^2 = b^2$ et $h^2 = c^2$, c'est-à-dire entre 1 et $\frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$.

Ainsi l'on a, dans tous les cas,

$$1 > \rho^2 > \frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}.$$

Dans tous les cas, la limite $\frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$ peut être atteinte, ou plutôt approchée d'aussi près qu'on le voudra ; il suffira de choisir h^2 très voisin de b^2.

Maintenant, cette limite peut être généralement rendue aussi petite qu'on le voudra ; il suffira, a étant fixé, par exemple, de prendre b et c suffisamment petits. Voilà ce qui se passera si l'on fait rouler un ellipsoïde qu'on pourra choisir arbitrairement.

Dans ce cas, le rapport de la plus petite rotation à la plus grande pourra être *aussi petit qu'on le voudra ;* et, par suite, dans le cours d'une révolution de l'ellipsoïde, la variation de la vitesse angulaire pourra être très considérable.

Mais, si l'on se borne à faire rouler des *ellipsoïdes d'inertie,* il n'en est plus de même. Il y a lieu de tenir compte de l'inégalité

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}, \tag{I}$$

et la limite

$$\frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$$

ne peut plus être aussi petite que l'on veut.

On a, en effet, en vertu de I,

$$c^2 > \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2},$$

d'où

$$a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2) < a^2b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}(a^2 - b^2) = \frac{2a^2b^4}{a^2 + b^2},$$

d'où

$$\frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2}.$$

On a donc

$$1 > \rho^2 > \frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2},$$

et cette limite elle-même peut être obtenue si l'on prend justement

$$c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

(auquel cas le corps se réduit à une plaque plane située dans le plan $z = 0$).

Mais on a aussi

$$\frac{a^2+b^2}{2a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} > \frac{1}{2}.$$

On a ainsi toujours

$$1 > \rho^2 > \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que ρ est compris entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou, approximativement, $\frac{7}{10}$.

On voit donc que la vitesse angulaire varie entre des limites très étroites, et que sa variation maximum n'atteint pas les $\frac{3}{10}$ ou le *tiers* de sa valeur maximum.

On observera même que la limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ne peut être atteinte que si b, et par suite c, sont nuls. Mais on peut approcher de cette limite aussi près qu'on le veut, en prenant des corps dont l'ellipsoïde d'inertie ait un grand axe extrêmement allongé, et en imprimant un mouvement initial, tel que le plan sur lequel roule l'ellipsoïde soit à une distance de son centre très voisine de son demi-axe moyen.

Ces considérations ont trouvé une application dans un appareil que nous avons fait construire et qui a pour objet la représentation du mouvement d'un corps solide.

NOTE. — J'ai publié en 1888, dans le *Bulletin,* un théorème concernant la surface de Steiner. J'ai appris depuis que M. Lie avait déjà démontré ce théorème dans un Recueil norvégien, trop peu connu chez nous, *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab,* publié à Christiana depuis 1876, Recueil qui contient de nombreux écrits de l'illustre géomètre norvégien, consacrés soit à des portions variées de Géométrie, soit surtout à la théorie des équations différentielles et de leurs transformations. G. K.